Placas Finas

Eduardo Lenz Cardoso

1 Hipóteses

O modelo de placa fina é obtido com as seguintes hipóteses:

1. Existe uma dimensão (espessura h) muito menor do que as demais dimensões;
2. A espessura está alinhada com a direção z;
3. O plano médio da geometria é localizado em $z = 0$, plano XY;
4. O topo e a base da placa estão a $\pm h/2$ do plano médio;
5. A espessura h da placa não se altera ao aplicarmos carregamentos;
6. O material é homogêneo e isotrópico, operando no regime linear e elástico;
7. A estrutura é submetida somente a momentos nas suas extremidades.

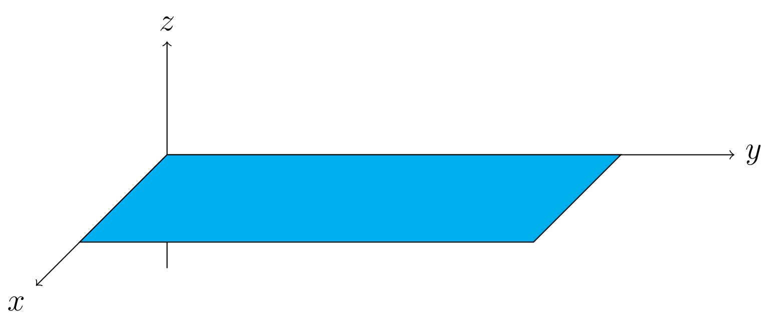

Figura 1: Plano médio da placa.

Com isso, podemos descrever o deslocamento de um ponto genérico da placa como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} \tag{1}$$

onde $w(x,y)$ é o deslocamento vertical do plano médio.

Como a placa está submetida somente a momentos nas extremidades, podemos utilizar a hipótese das seções planas para descrever os deslocamentos $u(x,y,z)$ e $v(x,y,z)$ em função do deslocamento vertical do plano médio $w(x,y)$. Iniciando com uma vista lateral no plano YZ, conforme a figura 2.

Observamos que o deslocamento $v(x,y,z)$, em uma posição (x,y) qualquer, pode ser descrito por

$$v(x,y,z) = -\theta_y(x,y)z \tag{2}$$

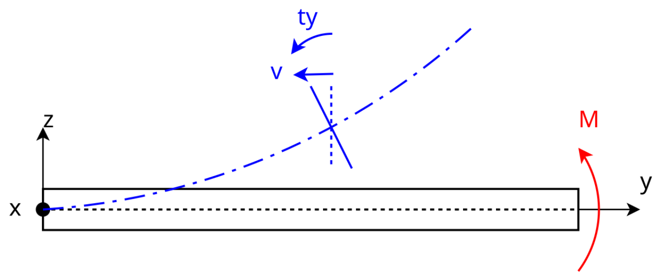

Figura 2: Rotação no plano YZ devido a um momento M_y positivo.

em que $\theta_y(x, y)$ é a rotação do plano médio em torno do eixo X. A notação de usar o índice y é padrão em vários livros e, embora eu não ache muito adequado, será utilizada aqui também.

A rotação $\theta_y(x, y)$, por sua vez, está associada a taxa de variação do deslocamento vertical

$$\theta_y(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \tag{3}$$

pois uma inclinação positiva faz com que o deslocamento $w(x, y)$ aumente quando andamos na direção positiva de y.

Estudando agora a vista lateral no plano XZ, figura 3,

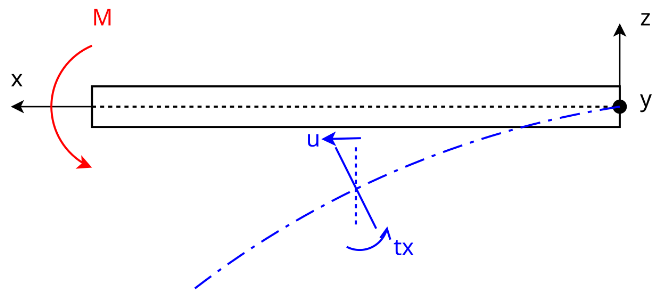

Figura 3: Rotação no plano XZ devido a um momento M_x positivo.

observamos que

$$u(x, y, z) = \theta_x(x, y)z \tag{4}$$

em que

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \tag{5}$$

pois o deslocamento $w(x, y)$ fica mais negativo a medida que o x aumenta.

Tendo as expressões para deslocamentos, podemos calcular as deformações.

1.1 Deformações

Utilizando as relações entre deslocamentos e deformações (assumindo pequenas deformações)

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(\theta_x(x, y)z) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}z, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\theta_y(x, y)z) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}z, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

$$\gamma_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} = -2\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} z, \tag{9}$$

$$\gamma_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = -\theta_x(x,y) + \theta_x(x,y) = 0 \tag{10}$$

e

$$\gamma_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = -\theta_y(x,y) + \theta_y(x,y) = 0 \tag{11}$$

tal que notamos que o modelo apresenta um estado plano de deformações **por coordenada z, ou "planos verticais"**.

As derivadas segundas estão associadas as **curvaturas**

$$\boxed{\boldsymbol{\kappa}(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \kappa_x(x,y) \\ \kappa_y(x,y) \\ \kappa_{xy}(x,y) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}} \tag{12}$$

tal que

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z) = -z\boldsymbol{\kappa}(x,y).} \tag{13}$$

1.2 Tensões

Se estudarmos as tensões associadas a esse campo de deformações, obtemos

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = C\varepsilon_{xx}(x,y,z) + \nu C\varepsilon_{yy}(x,y,z), \tag{14}$$

$$\sigma_{yy}(x,y,z) = \nu C\varepsilon_{xx}(x,y,z) + C\varepsilon_{yy}(x,y,z), \tag{15}$$

$$\sigma_{zz}(x,y,z) = \nu C\varepsilon_{xx}(x,y,z) + \nu C\varepsilon_{yy}(x,y,z), \tag{16}$$

e

$$\sigma_{xy}(x,y,z) = G\gamma_{xy}(x,y,z). \tag{17}$$

Com isso, verificamos que surge uma tensão normal em Z (direção da espessura), o que viola a hipótese de carregamento que fizemos no início da dedução. De fato, isso decorre do fato de termos feito a hipótese de altura constante, que não é verdade devido ao coeficiente de Poisson. Assim, vamos fazer uma **simplificação**, de que a tensão σ_{zz} é um artifício de modelo e que pode ser ignorada. Desta forma, podemos utilizar, por "camada" Z, um modelo de estado plano de tensões

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\}(x,y,z) = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}(x,y,z)} \tag{18}$$

ou

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(x,y,z) = -z\mathbf{Q}\boldsymbol{\kappa}(x,y).} \tag{19}$$

Embora a equação anterior esteja correta e já permita calcular as tensões, não é muito prática pois depende do conhecimento das curvaturas $\boldsymbol{\kappa}$. Por esse motivo, procedemos com a obtenção da relação entre os momentos e as curvaturas

1.3 Relações Momentos $\times$ Curvaturas

No que segue, iremos obter as relações entre momentos e curvaturas de forma vetorialmente consistente.

1.3.1 Face com normal na direção X

Se considerarmos um elemento diferencial de área em um corte no plano YZ (normal na direção X), a uma altura z do plano médio, teremos um diferencial de força

$$d\mathbf{F}_x(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(x,y,z) \\ \sigma_{xy}(x,y,z) \\ 0 \end{Bmatrix} dA \tag{20}$$

que provoca um diferencial de momento em relação ao plano médio

$$d\mathbf{M}_x(x,y,z) = z\mathbf{k} \times d\mathbf{F}_x(x,y,z) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{xy}(x,y,z) \\ \sigma_{xx}(x,y,z) \\ 0 \end{Bmatrix} z. \tag{21}$$

Substituindo as relações entre tensão e deformação e entre deformação e curvatura na expressão anterior

$$d\mathbf{M}_x(x,y,z) = \begin{Bmatrix} -\left(-zQ_{66}\kappa_{xy}(x,y)\right) \\ -zQ_{11}\kappa_x(x,y) - zQ_{12}\kappa_y(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} z \tag{22}$$

ou, passando o $-z$ em comum para fora do vetor (multiplicando o z que já estava em evidência)

$$d\mathbf{M}_x(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} -\frac{1-\nu}{2}\kappa_{xy}(x,y) \\ \kappa_x(x,y) + \nu\kappa_y(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} (-z^2). \tag{23}$$

Se integrarmos esse diferencial de momento em relação a z iremos obter uma relação entre os momentos por unidade de comprimento Y e as curvaturas. Assim,

$$\mathbf{M}_x(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} d\mathbf{M}_x(x,y,z)\, dz \quad [Nm/m] \tag{24}$$

que resulta em

$$\mathbf{M}_x(x,y) = -\underbrace{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}_{D} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \\ 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{xy} \\ M_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [Nm/m] \tag{25}$$

em que $D\,[Nm]$ é conhecido como rigidez flexural da placa fina. A notação dos índices para os momentos é a comumente adotada na literatura.

1.3.2 Face com normal na direção Y

O mesmo procedimento pode ser adotado em um corte com face normal à Y. Neste caso,

$$d\mathbf{F}_y(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xy}(x,y,z) \\ \sigma_{yy}(x,y,z) \\ 0 \end{Bmatrix} dA \tag{26}$$

que provoca um diferencial de momento em relação ao plano médio

$$d\mathbf{M}_y(x,y,z) = z\mathbf{k} \times d\mathbf{F}_y(x,y,z) = \begin{Bmatrix} -\sigma_{yy}(x,y,z) \\ \sigma_{xy}(x,y,z) \\ 0 \end{Bmatrix} z. \tag{27}$$

Substituindo as relações entre tensão e deformação e entre deformação e curvatura na expressão anterior

$$d\mathbf{M}_y(x,y,z) = \begin{Bmatrix} -\left(-zQ_{21}\kappa_x(x,y) - zQ_{22}\kappa_y(x,y)\right) \\ -zQ_{66}\kappa_{xy}(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} z \tag{28}$$

ou

$$d\mathbf{M}_y(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{Bmatrix} -\nu\kappa_x(x,y) - \kappa_y(x,y) \\ \frac{1-\nu}{2}\kappa_{xy}(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} (-z^2). \tag{29}$$

Se integrarmos esse diferencial de momento em relação a z iremos obter uma relação entre os momentos por unidade de comprimento X e as curvaturas. Assim,

$$\mathbf{M}_y(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} d\mathbf{M}_y(x,y,z)\, dz \quad [Nm/m] \tag{30}$$

que resulta em

$$\mathbf{M}(x,y) = -\underbrace{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}_{D}\begin{bmatrix} -\nu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_y \\ M_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [Nm/m]. \tag{31}$$

1.4 Comentário importante sobre notação de sinais

As relações entre momentos e curvaturas que foram obtidas nas seções anteriores estão vetorialmente consistentes. Em resumo, após os produtos vetoriais, obtivemos

$$M_x(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}(x,y,z)\, dz, \tag{32}$$

$$M_y(x,y) = -\int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}(x,y,z)\, dz \tag{33}$$

e

$$M_{xy}(x,y) = \pm\int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}(x,y,z)\, dz \tag{34}$$

essa última dependendo da face.

No entanto, verificamos que diferentes autores utilizam notações de sinais distintas. Uma abordagem muito comum é representar os momentos em uma notação "escalar"

$$M_x(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}(x,y,z)\, dz, \tag{35}$$

$$M_y(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}(x,y,z)\, dz \tag{36}$$

e

$$M_{xy}(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}(x,y,z)\, dz. \tag{37}$$

Neste caso, conseguimos definir

$$\boxed{\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}(x,y) = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}(x,y)} \tag{38}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{M}(x,y) = -\mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}(x,y).} \tag{39}$$

Essa notação de sinais de momento é representada na Figura 4.

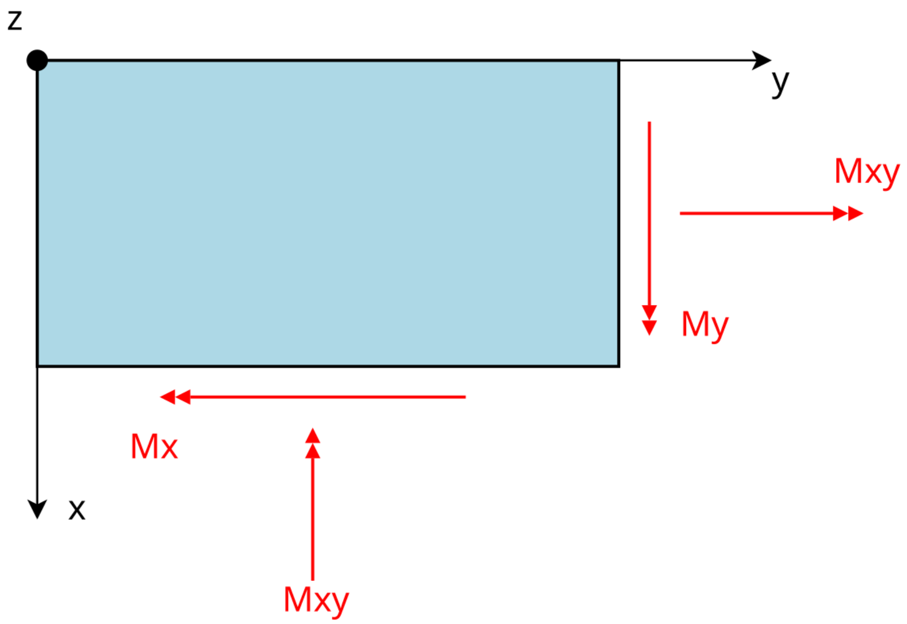

Figura 4: Convenção de sinais positivos para os momentos.

Também observamos autores (Como o livro de compósitos do Paulo de Tarso), que definem o vetor curvatura como o negativo das derivadas segundas. Assim, sugere-se atenção com as diferentes abordagens da literatura.

2 Exemplos

De forma consistente com a hipótese de carregamento adotada nas seções anteriores, vamos estudar a resposta de uma placa retangular submetida somente a momentos **constantes**.

2.1 Somente fletores M_x e M_y

.

Utilizando as relações entre momentos e curvaturas, Eq. 38

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{40}$$

e, invertendo essa relação, podemos obter as curvaturas

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} \nu M_y - M_x \\ \nu M_x - M_y \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{41}$$

Utilizando agora as relações entre curvaturas e o deslocamento transversal $w(x,y)$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = \bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right), \tag{42}$$

$$\kappa_y = \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = \bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right) \tag{43}$$

e

$$2\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = 0. \tag{44}$$

Integrando a primeira expressão $2\times$ em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = \bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x + f_1(y) \tag{45}$$

e

$$w(x,y) = \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x^2 + f_1(y)x + f_2(y) \tag{46}$$

e, integrando a segunda equação em relação a y

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = \bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y + g_1(x) \tag{47}$$

e

$$w(x,y) = \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y^2 + g_1(x)y + g_2(x). \tag{48}$$

Por fim, integramos a terceira equação em relação a x, obtendo

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = F_1(y) \tag{49}$$

e em relação a y

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = F_2(x). \tag{50}$$

Agora temos que processar essas informações. Observando, temos expressões para a primeira derivada de $w(x,y)$ em relação a x. Igualando a derivada em relação a x

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = F_2(x) = \bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x + f_1(y) \tag{51}$$

que só será verdade se $f_1(y)$ for uma constante, que chamaremos de C_1. Igualando a derivada em relação a y

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = F_1(y) = \bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y + g_1(x) \tag{52}$$

que só será verdade se $g_1(x)$ for uma constante, que chamaremos de C_2. Com isso, podemos igualar as expressões de $w(x)$, obtendo

$$\frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x^2 + f_1(y)x + f_2(y) = \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y^2 + g_1(x)y + g_2(x) \tag{53}$$

ou

$$\frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x^2 + C_1 x + f_2(y) = \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y^2 + C_2 y + g_2(x). \tag{54}$$

Uma solução para essa igualdade é a de que a função $f_2(y)$ deva ser igual aos termos com y do lado direito e a função $g_2(x)$ deve ser igual aos termos com x no lado esquerdo (mais ou menos uma constante, que vamos chamar de C_3). Assim, podemos escrever

$$w(x,y) = \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x^2 + C_1 x + \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y^2 + C_2 y + C_3. \tag{55}$$

As três constantes devem ser obtidas pelas condições de contorno da placa.

Uma solução bem simples para o problema é colocarmos o sistema de referência no centro da placa e dizer que os giros são zero neste ponto, o que implica em termos o pico de deslocamento em $w(0,0)$. Para facilitar ainda mais a nossa vida, vamos dizer que o deslocamento máximo é $\bar{w}$. Com isso

$$w(0,0) = \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)0^2 + C_1 0 + \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)0^2 + C_2 0 + C_3 = \bar{w}. \tag{56}$$

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)} = C_1 = 0, \tag{57}$$

e

$$\left.\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)} = C_2 = 0. \tag{58}$$

Assim, o deslocamento é

$$w(x,y) = \bar{w} + \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_y - M_x\right)x^2 + \frac{1}{2}\bar{D}\left(\nu M_x - M_y\right)y^2 \tag{59}$$

2.2 Somente momentos M_{xy}

Utilizando as relações entre momentos e curvaturas, Eq. 38

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{60}$$

e, invertendo essa relação, podemos obter as curvaturas

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{2}{D(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{61}$$

Utilizando agora as relações entre curvaturas e o deslocamento transversal $w(x,y)$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0, \tag{62}$$

$$\kappa_y = \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{63}$$

e

$$2\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{2}{D(1-\nu)}M_{xy}. \tag{64}$$

Integrando a primeira expressão $2\times$ em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = C_1 + f_1(y) \tag{65}$$

e

$$w(x,y) = C_1 x + f_1(y)x + f_2(y) \tag{66}$$

e, integrando a segunda equação em relação a y

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = C_2 + g_1(x) \tag{67}$$

e

$$w(x, y) = C_2 y + g_1(x) y + g_2(x). \tag{68}$$

Por fim, integramos a terceira equação em relação a x, obtendo

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} x \tag{69}$$

e em relação a y

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} y. \tag{70}$$

Agora temos que processar essas informações. Igualando as primeiras derivadas em relação a x

$$\frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} y = C_1 + f_1(y) \tag{71}$$

de onde vemos que $C_1 = 0$ e

$$f_1(y) = \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} y. \tag{72}$$

Igualando as primeiras derivadas em relação a y

$$\frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} x = C_2 + g_1(x) \tag{73}$$

de onde observamos que $C_2 = 0$ e

$$g_1(x) = \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} x. \tag{74}$$

Assim, igualando as expressões para $w(x, y)$

$$C_2 y + g_1(x) y + g_2(x) = C_1 x + f_1(y) x + f_2(y) \tag{75}$$

obtemos

$$g_1(x) y + g_2(x) = f_1(y) x + f_2(y) \tag{76}$$

ou

$$\frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} x y + g_2(x) = \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} y x + f_2(y) \tag{77}$$

tal que a igualdade só é válida se $g_2(x) = f_2(y) = C_3$. Assim

$$w(x, y) = \frac{1}{D(1-\nu)} M_{xy} y x + C_3. \tag{78}$$

3 Generalização para carregamentos transversais

As equações das seções anteriores foram obtidas com a hipótese de que só haviam momentos aplicados. No entanto, se existir um carregamento $q(x, y)\,[N/m^2]$ aplicado na direção Z, precisaremos levar em conta as consequências da presença de tal carregamento. Para isso, vamos considerar a situação geral ilustrada na figura 5.

Seja um elemento diferencial ao longo da espessura da placa. Observamos que a presença do carregamento transversal $q(x, y)$ provoca o aparecimento de duas tensões tangenciais: σ_{xz}

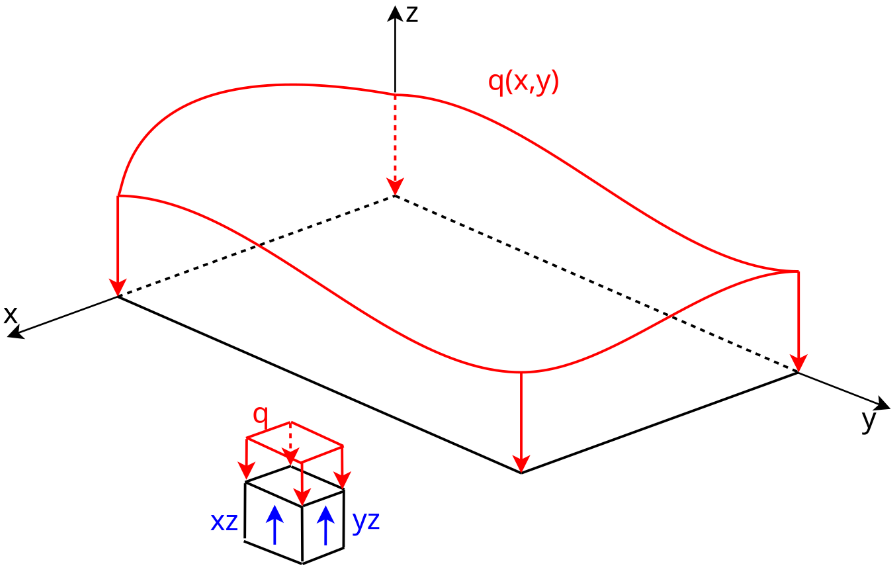

Figura 5: Carregamento $q(x, y)$ $[N/m]$ aplicado no topo da placa e tensões cisalhantes σ_{xz} e σ_{yx} em um elemento infinitesimal.

e σ_{yz}. A integral destas tensões na espessura resulta em esforços cortantes por unidade de comprimento

$$\boxed{V_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(x, y, z)\, dz \quad [N/m]} \tag{79}$$

e

$$\boxed{V_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}(x, y, z)\, dz \quad [N/m],} \tag{80}$$

que são novos esforços, em adição aos momentos que obtivemos na seção anterior.

Vamos estudar o equilíbrio diferencial de tensões $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ em um elemento diferencial de volume, considerando todas as tensões que vimos até o momento.

Começando pela primeira linha da equação de equilíbrio de tensões

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \tag{81}$$

vamos realizar uma série de passos (que serão repetidos na segunda linha da equação de equilíbrio de tensões). Iniciamos multiplicando a equação por z, lembrando que as duas primeiras derivadas parciais são em relação a x e a y

$$\frac{\partial z\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial z\sigma_{xy}}{\partial y} + z\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0. \tag{82}$$

Integrando essa equação em relação a espessura (z), obtemos

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial z\sigma_{xx}}{\partial x}\, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial z\sigma_{xy}}{\partial y}\, dz + \int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = 0 \tag{83}$$

e como as integrais são em relação a z, podemos mover as derivadas parciais relativas a x e a y para fora das integrais

$$\frac{\partial \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}\, dz}{\partial x} + \frac{\partial \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}\, dz}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = 0. \tag{84}$$

Os dois primeiros termos podem ser identificados como sendo as derivadas dos momentos M_x e M_{xy} que foram obtidos nas seções anteriores, Eqs 35 e 37. Assim,

$$\frac{\partial M_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x,y)}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = 0. \tag{85}$$

Finalmente, podemos integrar o terceiro termo por partes

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = z\sigma_{xz}|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz \tag{86}$$

e sabemos que os cisalhamentos nas extremidades da altura são nulos, pois não estamos aplicando nenhum carregamento tangencial nestas faces. Assim, utilizando a Eq. 79

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\, dz = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz = -V_x(x,y) \tag{87}$$

tal que a primeira equação de equilíbrio pode ser reescrita como

$$\boxed{\frac{\partial M_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x,y)}{\partial y} = V_x(x,y).} \tag{88}$$

O mesmo procedimento com a segunda equação de equilíbrio de tensões

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \tag{89}$$

resulta em

$$\boxed{\frac{\partial M_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}(x,y)}{\partial y} = V_y(x,y).} \tag{90}$$

A terceira equação do equilíbrio de tensões

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{91}$$

tem uma abordagem mais simples. Integrando a expressão na espessura

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}\, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}\, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\, dz = 0 \tag{92}$$

tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}\, dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\, dz = 0, \tag{93}$$

e verificamos que

$$\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial y} + \sigma_{zz}|_{-h/2}^{h/2} = 0. \tag{94}$$

O ultimo termo será igual a $-q(x,y)$ em $h/2$ e a zero na face inferior. Assim,

$$\boxed{\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial y} - q(x,y) = 0.} \tag{95}$$

Com isso, podemos inserir as Eqs. 88 e 90 na Eq. 95, resultando em

$$\frac{\partial^2 M_x(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y(x,y)}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y} - q(x,y) = 0. \tag{96}$$

Finalmente, podemos utilizar as relações da Eq. 38 juntamente com a Eq. 12, resultando em

$$-D\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} - \nu D\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^2 \partial x^2} - \nu D\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - D\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} - 2D\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - q(x,y) = 0 \tag{97}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{q(x,y)}{D}} \tag{98}$$

que também é escrita de forma compacta como

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^4 w(x,y) = -\frac{q(x,y)}{D}} \tag{99}$$

onde o operador $\boldsymbol{\nabla}^4(\cdot)$ é chamado de operador bi-harmônico.

Um caso mais geral, onde não assumimos o material como isotrópico, leva a uma matriz $\mathbf{Q}$ cheia e, como consequência, $\mathbf{D}$ também o será. Essa alteração faz com que a equação diferencial se torne

$$\begin{aligned} D_{11}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 4D_{13}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^3 \partial y} + (2D_{12} + 2D_{33})\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ 2D_{23}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = -q(x,y). \end{aligned} \tag{100}$$