Diagramas de Esforços Internos

Prof. Eduardo Lenz

4 de agosto de 2025

Capítulo 1

Introdução

Este material tem como objetivo apresentar um estudo sobre a transmissão de esforços no interior de corpos. Esta é a primeira etapa para entendermos como os esforços externos se distribuem no interior do corpo em estudo.

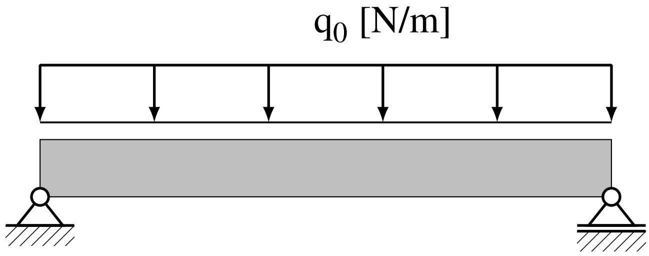
A versão atual do documento está sendo revisada, assim como as figuras. A ultima versão pode ser sempre encontrada em https://github.com/CodeLenz/Notas-de-aula/MSO1

Capítulo 2

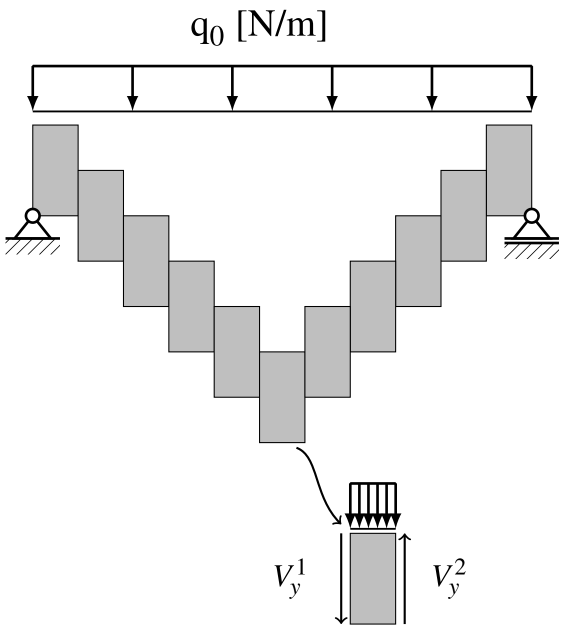
Esforço Cortante

2.1 Definição

Tomemos como exemplo a estrutura



Ao aplicarmos um carregamento sobre a estrutura, essa irá se deformar. Isto ocorre pois as diferentes regiões do corpo exercem esforços umas sobre as outras e o corpo assume uma posição de equilíbrio diferente de quando não existiam esforços externos. Imaginando como o esforço externo se distribui, podemos visualizar o processo de transmissão de esforços. Para isto, vamos exagerar um pouco a posição final da estrutura e podemos visualizar o efeito de um dos esforços que atuam em estruturas: o **esforço cortante**. Para entender o que é o esforço cortante, podemos estudar o diagrama de corpo livre de um pequeno pedaço da estrutura

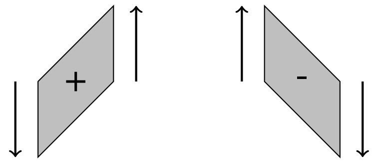


em que podemos verificar que para o pedaço em destaque estar em equilíbrio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y^1 + V_y^2 + \text{Esforços verticais} = 0.$$

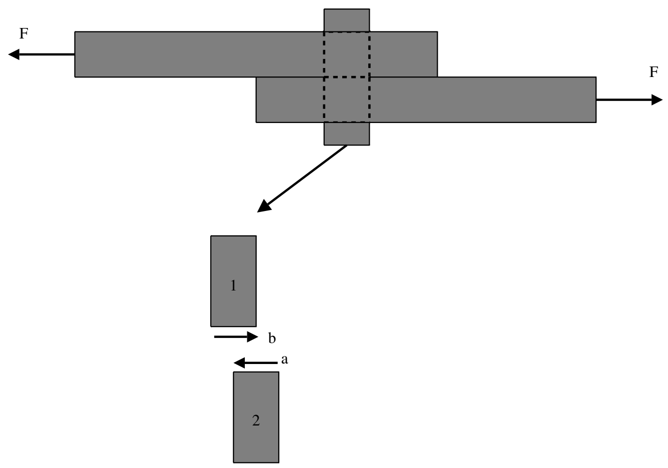
A forca V_y que surge de cada um dos lados do elemento é chamada de esforço cortante, pois tende a 'cortar' o material na direção de Y. Os esforços cortantes tem como significado a força vertical (no caso na direção de Y) que o lado (esquerdo ou direito) da estrutura faz sobre o pedaço de material considerado. Portanto, o conhecimento dos esforços cortantes é fundamental para entendermos as solicitações que ocorrem dentro de um corpo.

Convenção de sinal para cortante positivo: Toda vez que a parte da direita da estrutura realiza um esforço vertical no sentido positivo, dizemos que o esforço cortante é positivo. Por equilíbrio, temos que a parte da esquerda da estrutura realiza um esforço cortante no sentido negativo do eixo vertical. Assim, considerando um pedaço de material, temos as seguintes opções



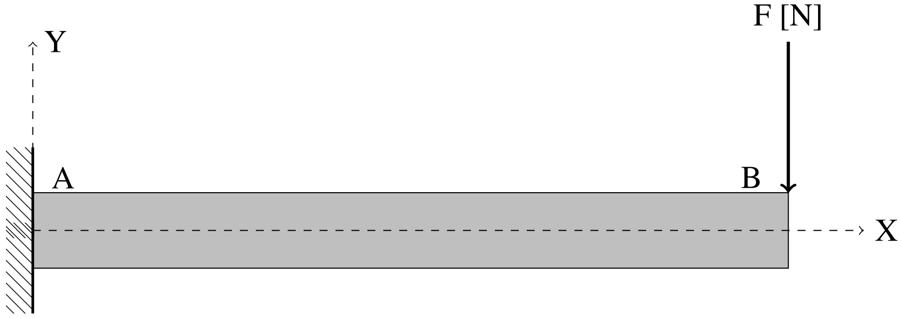
2.1.1 Exemplo

Um pino cilíndrico segura duas chapas. Ao puxarmos cada uma das chapas em direções opostas, o pino sofrerá um esforço de corte. A figura ilustra o esforço cortante que a parte 1 faz sobre a parte 2 (cortante a) e o esforço cortante que a parte 2 faz sobre a parte 1 (cortante b).

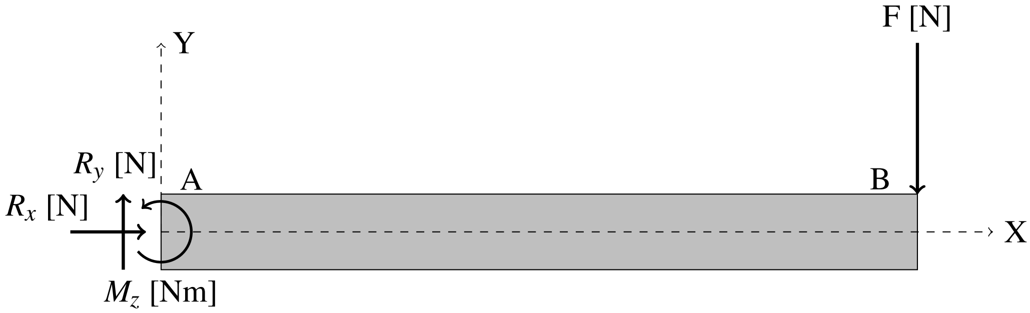


2.2 Obtenção da distribuição de esforços cortantes em uma estrutura

Considere o seguinte exemplo, de uma viga engastada submetida a uma força concentrada

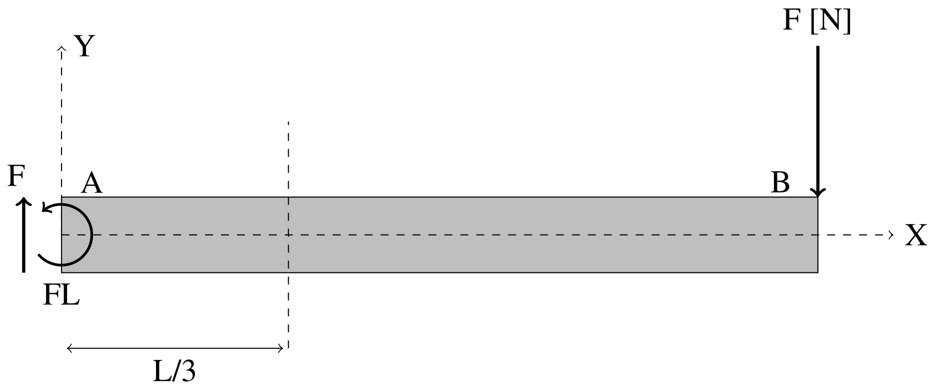


Inicialmente, determinamos as reações que atuam no engaste. Como o engaste está restringindo 3 movimentos (graus de liberdade), teremos 3 reações

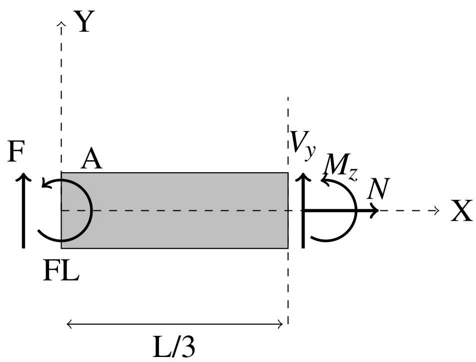


$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \rightarrow R_x = 0 \\
\sum F_y &= 0 \rightarrow R_y = F \\
\sum M_A &= 0 \rightarrow M_z = FL
\end{aligned}
$$

e o objetivo é estudar a distribuição de esforços cortantes. Para isto, fazemos um corte hipotético no corpo, substituindo a parte da direita do corpo por um esforço cortante que represente a ação da parte da direita da estrutura sobre a parte da esquerda. Vamos estudar o que ocorre a uma distância $\frac{L}{3}$ do engaste



Substituindo toda a parte a direita do corte pela ação que esta faz sobre a seção em $x = L/3$



Assim, como a estrutura está em equilíbrio,

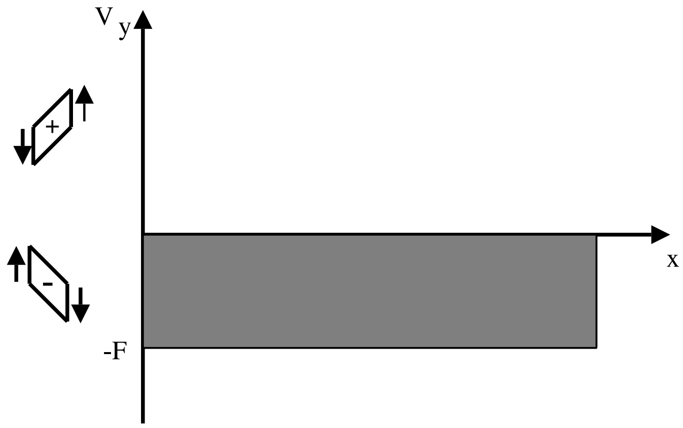
$$\sum F_y = 0 \rightarrow +F + V_y = 0$$

ou seja,

$$V_y = -F$$

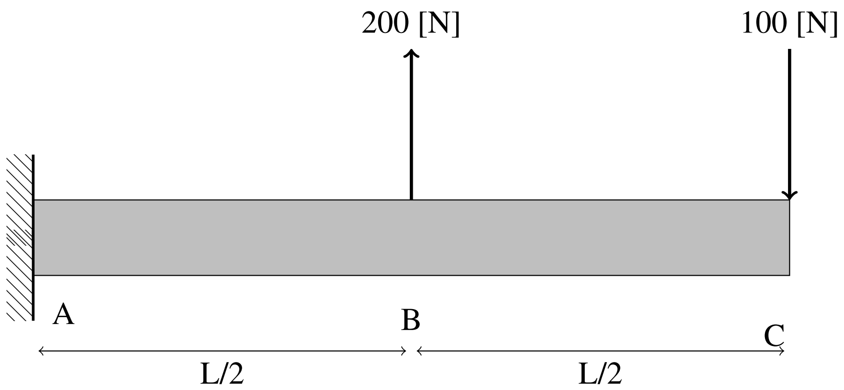
em $x = L/3$, indicando que a parte da direita faz um esforço cortante de valor F, para baixo. Por definição, esse cortante é negativo. Pode-se observar, também, que para qualquer corte realizado entre $x = 0$ e $x = L$, o valor do esforço cortante será o mesmo, pois não existem forças verticais aplicadas ao longo do corpo, somente nas extremidades. Isto quer dizer que a equação de equilíbrio acima não se altera para diferentes valores de x.

Graficamente, ilustramos a distribuição de esforços cortantes com um diagrama, chamado de diagrama de esforços cortantes

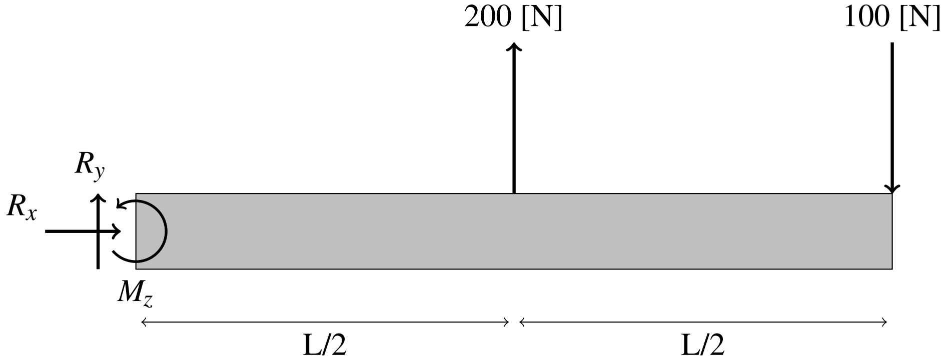


2.2.1 Exemplo

Seja a viga engastada submetida a duas forças verticais



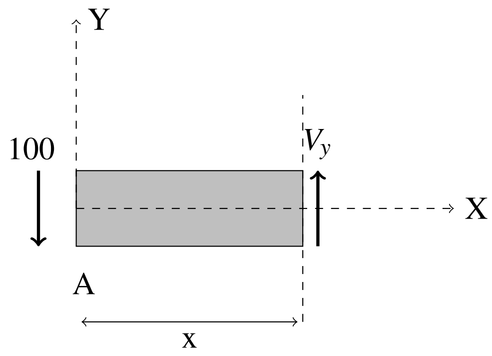
Novamente, iniciamos o problema com a determinação das reações nos apoios (no caso, o engaste). Para o problema em questão, obtemos



$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \rightarrow R_x = 0 \\
\sum F_y &= 0 \rightarrow R_y = -100 \\
\sum M_A &= 0 \rightarrow M_z = 0
\end{aligned}
$$

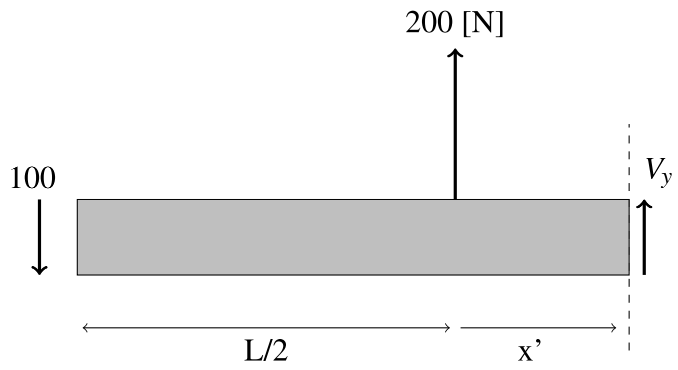
Para obtermos o diagrama de esforços cortantes no corpo em estudo, fazemos um corte hipotético no corpo, substituindo a parte retirada por um conjunto de esforços que represente a ação da parte retirada sobre a parte em estudo. Conforme observamos no exemplo anterior, o diagrama de esforços cortantes só tem seus valores alterados quando aplicamos uma força vertical sobre o corpo. Neste exemplo, temos três forças verticais aplicadas: a reação R_y e as duas forças concentradas. Com isto, esperamos que ocorram três saltos no diagrama.

Procedendo com o primeiro corte, em qualquer posição entre $x > 0$ e $x < L/2$, obtemos



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - 100 = 0 \rightarrow V_y = 100N$$

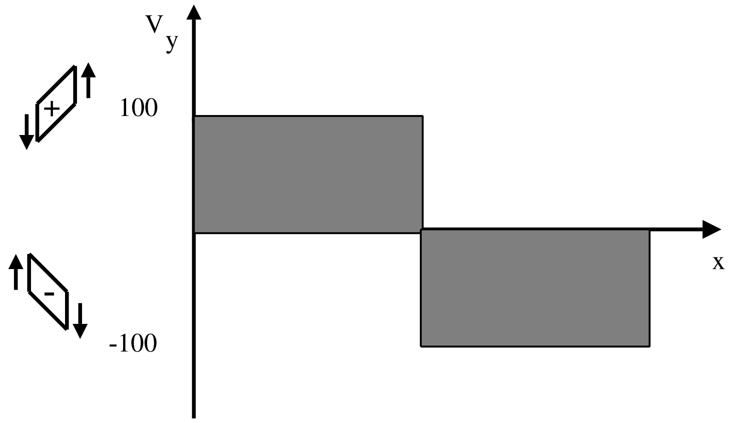
e não é difícil de observar que o valor de V_y não se altera para qualquer corte entre 0 e $L/2$. No entanto, em $x = L/2$ existe uma força concentrada. Isto faz com que o equilíbrio de forças formulado acima não tenha validade para $x \geq L/2$ e, portanto, um novo corte é necessário:



com equilíbrio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - 100 + 200 = 0 \rightarrow V_y = -100N.$$

Observe que o novo corte é definido a uma distância x' a partir de $x = L/2$. Embora isto não seja necessário neste exemplo, é uma prática que no futuro evitará uma série de problemas. Novamente, não temos nenhum outro carregamento aplicado entre $L/2 < x < L$ (ou $0 < x' < L/2$), de tal forma que o diagrama de esforços internos para este exemplo é

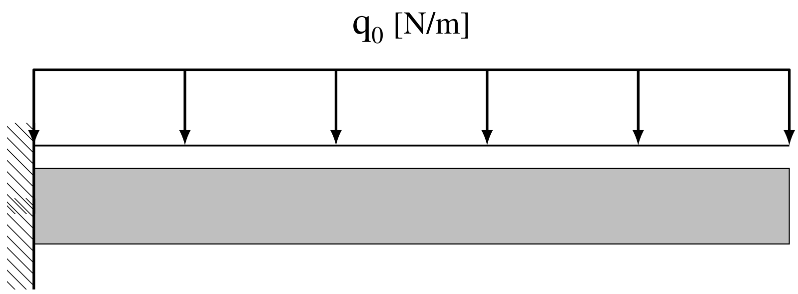


Com auxílio dos dois exemplos anteriores, podemos podemos obter as seguintes conclusões:

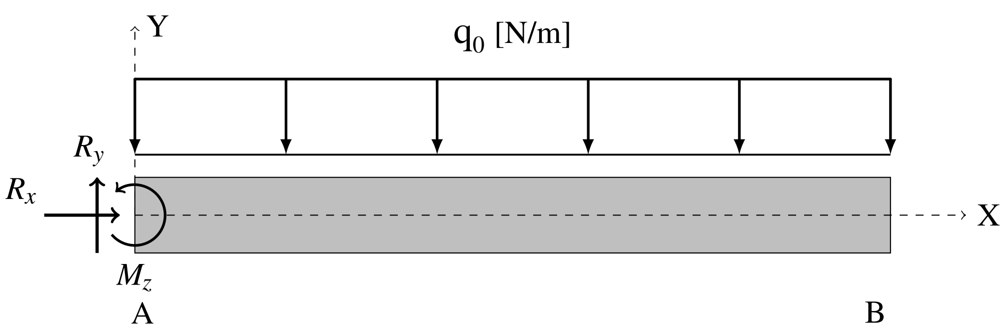
- o diagrama de esforços cortantes apresenta saltos de valores em pontos onde a estrutura é submetida a esforços transversais concentrados. Na convenção de sinais utilizada neste texto, observamos que o salto tem sentido oposto ao da aplicação da força, apresentado a mesma magnitude;
- em regiões onde não existe carregamento transversal aplicado, o diagrama de esforços cortantes tem valor constante.

2.2.2 Carregamentos Distribuídos

Seja a viga engastada submetida a um carregamento distribuído q [N/m]



Cargas distribuídas tem unidades de força por unidade de área, N/m^2, sendo que a situação mostrada na figura assume que a distribuição na profundidade é constante e que esta dimensão é bem menor do que o comprimento. Assim, pré-multiplicamos o carregamento distribuído na dimensão da profundidade, obtendo $N/m^2m = N/m$, obtendo um carregamento distribuído na direção do comprimento da estrutura. Este carregamento deve ser integrado para resultar em uma unidade de força que permita solucionar as equações de equilíbrio. Para ilustrar o procedimento, vamos determinar o valor das reações no engaste



$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_y + \int_0^L q(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

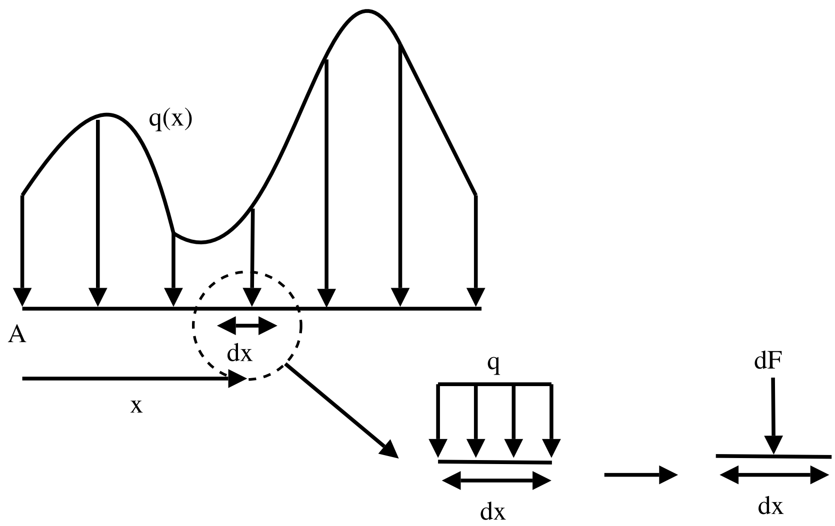
em que $q(x)$, para este exemplo, é constante e negativo. A integral é utilizada pois em cada unidade diferencial de comprimento, dx, atua uma força distribuída. Assim, a força diferencial é dada por

$$\mathrm{d}F = q(x)\,\mathrm{d}x$$

tal que a força total é obtida com

$$F = \int_0^L \mathrm{d}F = \int_0^L q(x)\mathrm{d}x$$

como ilustrado na figura abaixo



Assim,

$$R_y = q_0 L$$

pois $q(x)$ é constante. O equilíbrio de momentos em relação ao ponto A é obtido com o mesmo conceito de integração, com o único cuidado de observarmos que a força dF provoca um momento diferencial no ponto A, dado por

$$dM_A = x \cdot \mathrm{d}F$$

e o momento total é dado por

$$M_A = \int_0^L \mathrm{d}M = \int_0^L x \cdot \mathrm{d}F = \int_0^L x \cdot q(x)\,\mathrm{d}x$$

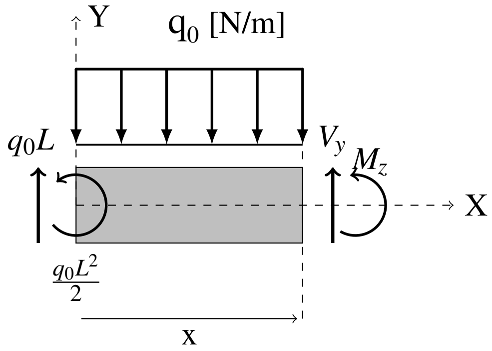
e

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_r + \int_0^L x \cdot q(x)\,\mathrm{d}x$$

tal que

$$M_r = \frac{q_0 L^2}{2}.$$

Para obtermos os diagramas de esforços, inicialmente observamos que não existem forças concentradas ao longo do comprimento, somente forças distribuídas. Como a equação da força distribuída não se altera ao longo do comprimento (neste exemplo o carregamento é constante), podemos estudar o equilíbrio de forças em um corte hipotético a uma distância x do engaste



obtendo

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y + R_y + \int_0^x -q_0 \, \mathrm{d}x = 0$$

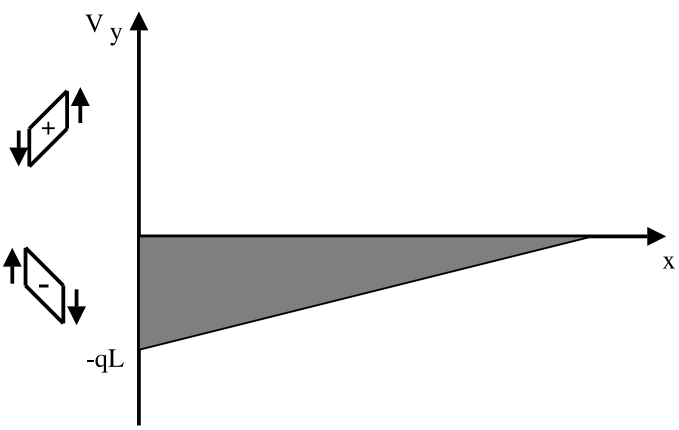
resultando em

$$V_y = q_0(x-L).$$

Neste ponto é importante enfatizarmos algumas conclusões obtidas com este exemplo:

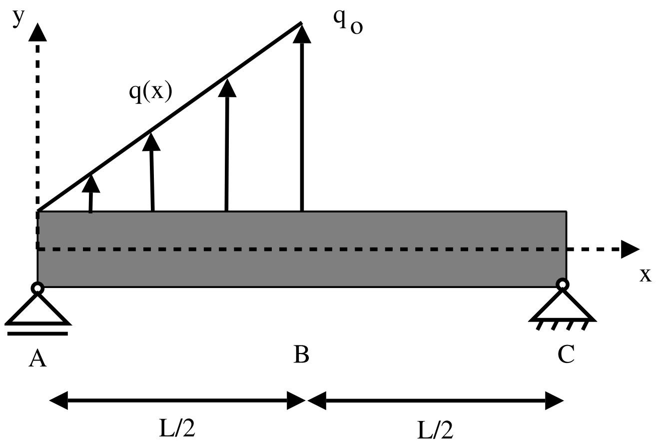
- neste exemplo o maior valor de esforço cortante se situa no engaste ($x=0$), significando que a parte da direita da estrutura está aplicando uma força (para baixo) de magnitude qL;
- neste exemplo no ponto $x=L$ o valor do esforço cortante é nulo, pois não existe força aplicada no ponto;
- na presença de um carregamento distribuído de valor constante, o diagrama de esforços cortantes tem variação linear.

Assim, o diagrama de esforços cortantes para este exemplo é



2.2.3 Exemplo

Seja a viga bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído com variação linear entre $x=0$ e $x=L/2$



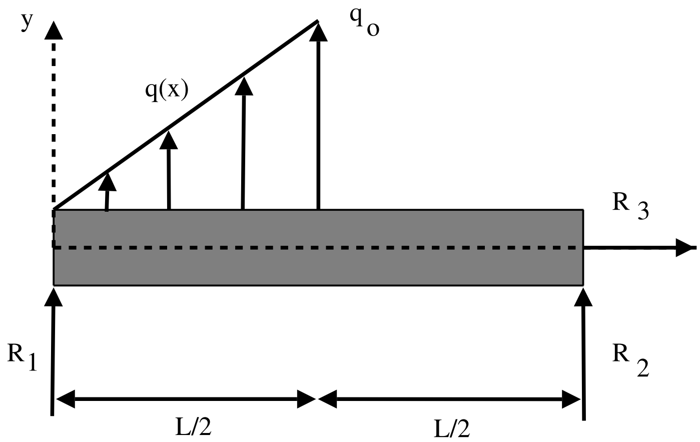
O primeiro passo consiste em determinar a equação que descreve o carregamento (no caso, a equação de uma reta). Para isto, observamos que o carregamento tem valor nulo em $x = 0$ e assume o valor q_0 em $x = L/2$. Assim, a inclinação da reta é

$$a = \frac{q_0 - 0}{L/2 - 0} = \frac{2q_0}{L}$$

e

$$q(x) = \frac{2q_0}{L}x$$

estando definida no intervalo $0 < x < L/2$. Com a expressão do carregamento, podemos proceder com a determinação das reações nos apoios. Como os apoios são rotulados, as únicas reações existentes são forças verticais e/ou horizontais



e o equilíbrio de forças resulta em

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \rightarrow R_3 = 0 \\
\sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + R_2 + \int_0^{L/2} q(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\
\sum M_A &= 0 \rightarrow R_2 L + \int_0^{L/2} x \cdot q(x)\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
R_1 + R_2 + \int_0^{L/2} \frac{2q_0}{L} x \, \mathrm{d}x &= 0 \\
R_2 L + \int_0^{L/2} \frac{2q_0}{L} x^2 \, \mathrm{d}x &= 0
\end{aligned}
$$

tal que

$$
\begin{aligned}
R_1 + R_2 &= -\frac{q_0 L}{4} \\
R_2 L &= -\frac{q_0 L^2}{12}
\end{aligned}
$$

e

$$R_2 = -\frac{q_0 L}{12} \quad R_1 = -\frac{q_0 L}{6}.$$

É interessante notar que o mesmo resultado pode ser obtido com a abordagem usual, de utilizar a área sob o carregamento. Como a função é linear, a área sob o gráfico (força total) é dada por

$$F_{tot} = \frac{\frac{L}{2} q_0}{2} = \frac{q_0 L}{4}$$

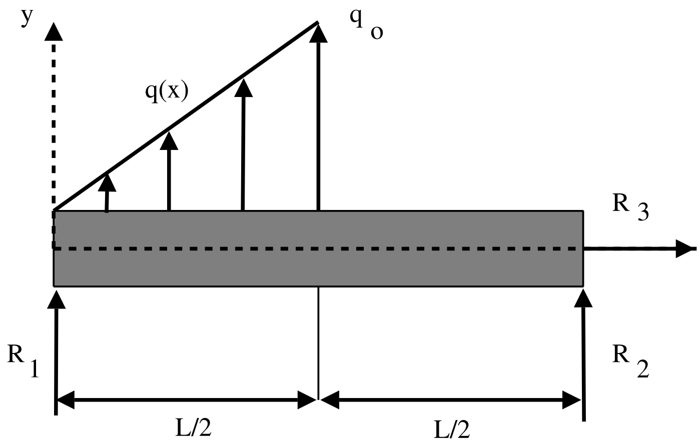
que é justamente o valor da integral $\int_0^{L/2} q(x) \, \mathrm{d}x$. O momento em relação ao ponto A pode ser obtido multiplicando-se a força total pelo braço de alavanca, que no caso do exemplo é $\frac{2}{3}$ de $\frac{L}{2}$ ou seja

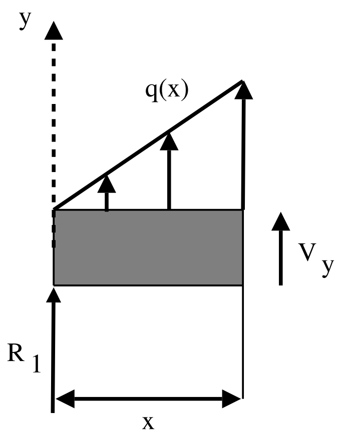
$$M_{total} = \frac{2}{3} \frac{L}{2} \frac{q_0 L}{4} = \frac{q_0 L}{12}$$

que é justamente o valor obtido com o procedimento de integração, que é muito mais geral.

De posse das reações, podemos agora estudar a distribuição de esforços internos. Para isto, observamos que a estrutura é submetida a um carregamento distribuído linear entre $x = 0$ e $x = L/2$ e está livre de carregamentos até $x = L$. Assim, devido a mudança no carregamento, devemos estudar dois cortes hipotéticos.

O primeiro corte deve ser realizado para $0 < x < L/2$





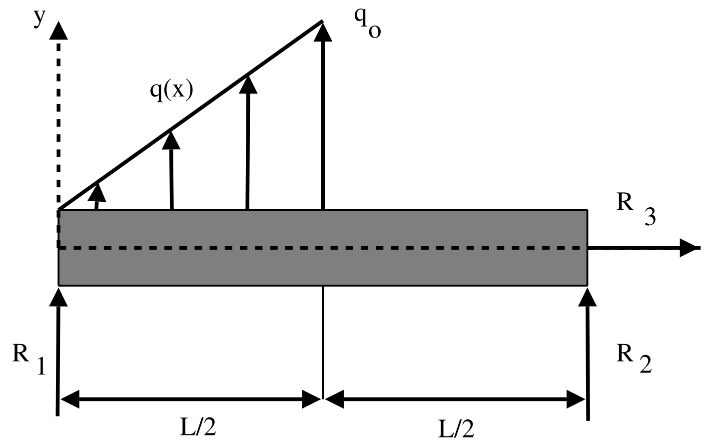
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \to R_1 + V_y + \int_0^x q(x)\,\mathrm{d}x = 0\\ &= R_1 + V_y + \int_0^x \frac{2q_0}{L} x\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

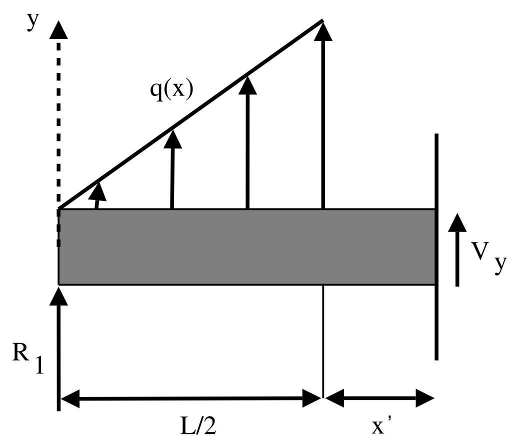
resultando em

$$V_y = \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 x^2}{L}$$

que é uma expressão quadrática.

Para obtermos a expressão do segundo trecho, definimos um novo sistema de coordenadas, com origem $O^{'}$ em $x = L/2$, de acordo com a figura abaixo





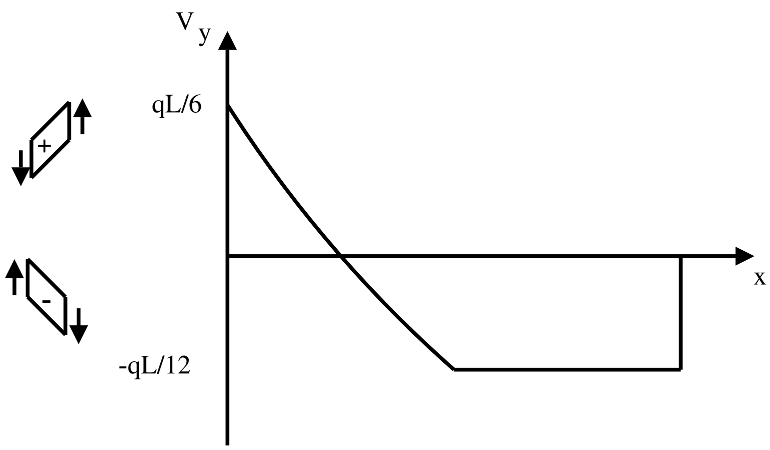
e o equilíbrio de esforços verticais resulta em

$$
\begin{aligned}
\sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y(x') + \int_0^{L/2} q(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\
&= R_1 + V_y(x') + \frac{q_0 L}{4} = 0
\end{aligned}
$$

tal que

$$V_y(x') = +\frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 L}{4} = -\frac{q_0 L}{12}$$

é constante em todo o trecho. Assim, o diagrama de esforços cortantes para o exemplo é



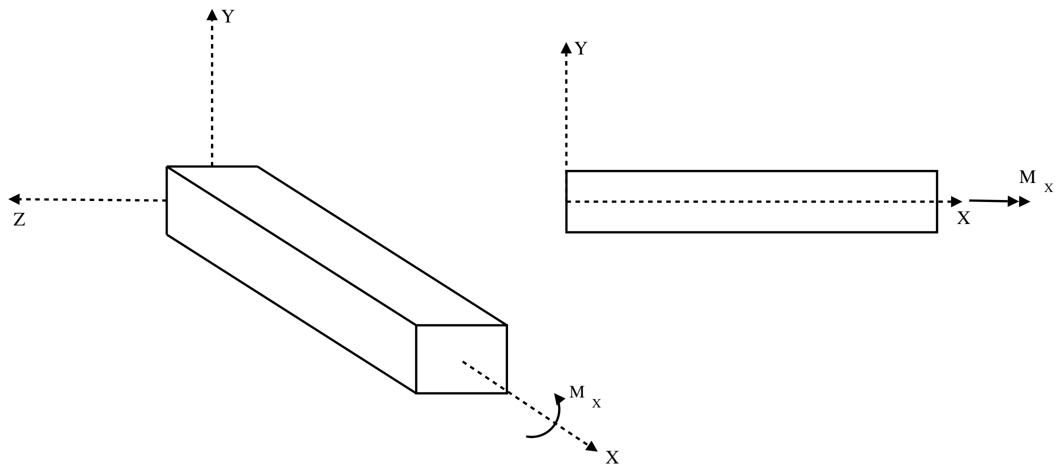
Com este exemplo, chegamos as seguintes conclusões:

- quando o carregamento distribuído tem variação linear, o diagrama de esforços cortantes apresenta variação quadrática;
- é aconselhável realizar uma mudança de variável ao realizarmos novos cortes. Isto evitará problemas futuros ao lidarmos com carregamentos distribuídos mais complicados.

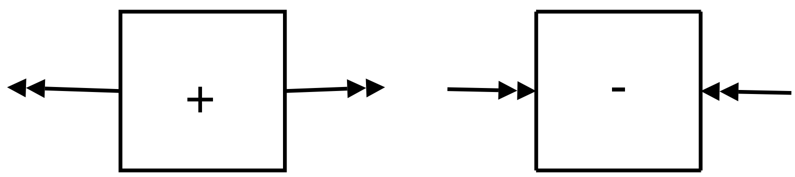
Capítulo 3

Momentos

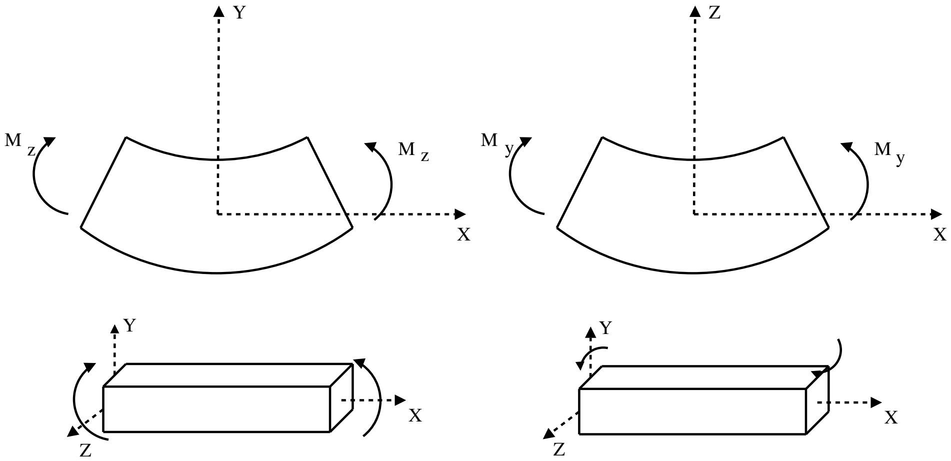
Podemos separar momentos em dois tipos, de acordo com seu efeito sobre o corpo em estudo: momentos fletores e momentos torsores. O momento torsor é aquele que faz com que a seção transversal do corpo gire em torno do seu eixo axial, que será chamado de eixo x no presente texto (ver figura abaixo).



Quando observamos a peça em uma vista perpendicular ao eixo onde o momento torsor é aplicado, utilizamos a notação de dupla flecha, mostrada no canto superior da figura. A convenção de sinal para o momento torsor positivo é a indicada na figura acima: se o momento aplicado faz a seção girar em torno do eixo axial, no sentido anti-horário (o sentido em que os ângulos são tomados como positivos na trigonometria), então o momento torsor é positivo. Assim, se isolarmos um pedaço de material de um corpo submetido a momentos torsores, obtemos a seguinte convenção para momentos torsores positivos

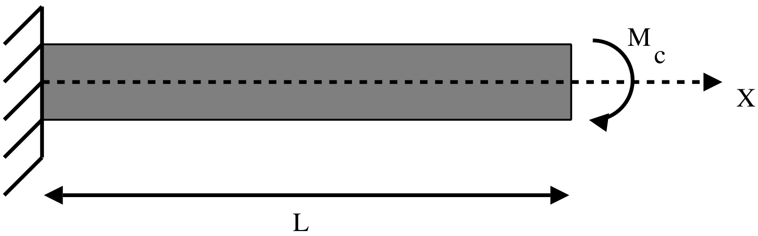


Momentos fletores, por sua vez, são as componentes de momento que fazem as seções transversais da peça girarem em torno dos eixos Y e Z. Assim, um momento que faz a seção transversal girar em torno do eixo Z é chamado de momento fletor M_z, e um momento que faz a seção transversal girar em torno do eixo Y é chamado de momento fletor M_y, de acordo com a figura abaixo

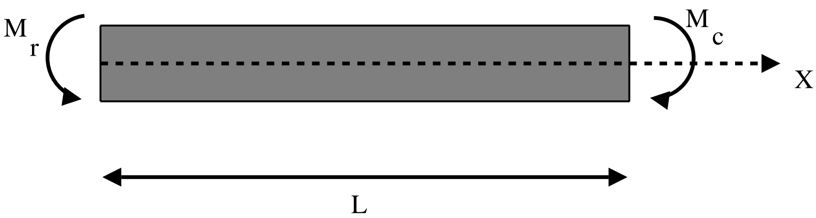


A convenção de sinal para momentos fletores positivos é a indicada na figura acima; se o momento faz com que o material seja comprimido na parte superior da peça (na direção positiva de Y ou Z), então é positivo.

3.0.1 Exemplo



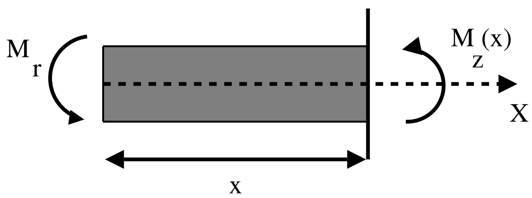
Este exemplo é o mais simples possível, onde temos um momento fletor concentrado aplicado em $x = L$. Como este é o único carregamento aplicado na estrutura, observamos que de todas as possíveis reações no engaste, apenas a reação de momento fletor M_r existirá



Por equilíbrio de momentos fletores em torno do eixo Z, obtemos

$$M_r = M_c.$$

O procedimento para obtermos a distribuição de momentos fletores na estrutura é a mesma utilizada para obtermos os diagramas de esforços cortantes; realizamos um corte hipotético em uma seção transversal e determinamos quais esforços internos são realizados por uma parte da estrutura sobre a parte remanescente. Para o exemplo observamos que não existe alteração do carregamento externo entre 0 e L, de tal forma que, para um corte a uma distância qualquer x

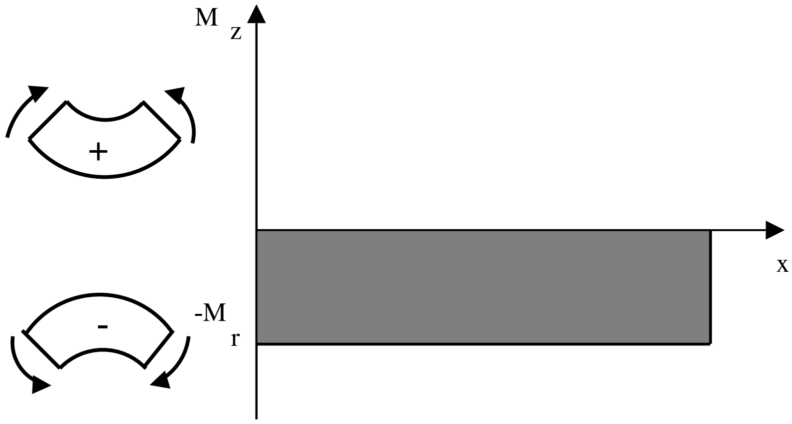


$$\sum M_o = 0$$

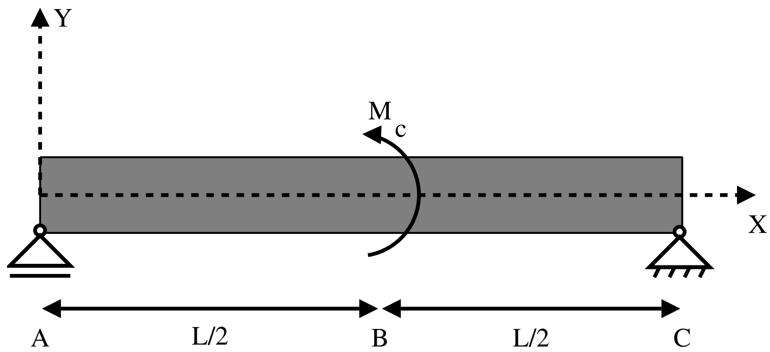
$$M_r + M_z(x) = 0$$

$$M_z(x) = -M_r$$

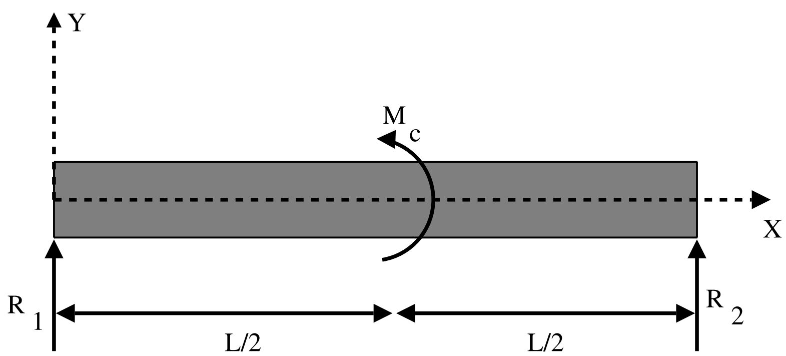
em que o sinal negativo indica que a estrutura do exemplo está sendo curvada para baixo (sentido negativo do eixo Y). O diagrama de momentos fletores M_Z da estrutura é



3.0.2 Exemplo



Neste exemplo, verificamos que existem somente reações verticais, uma vez que os apoios rotulados não apresentam reações de momento fletor. As reações são obtidas por relações de equilíbrio

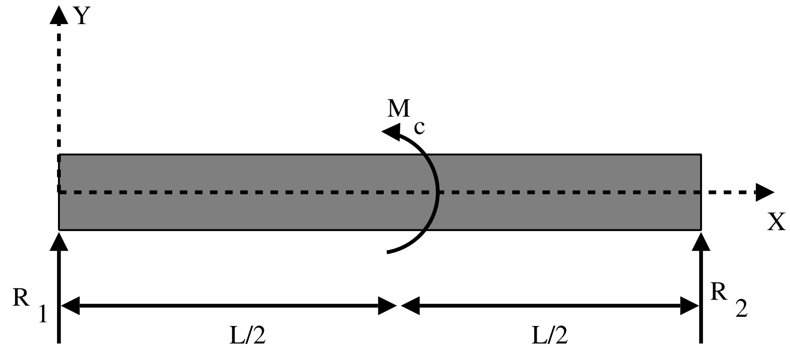


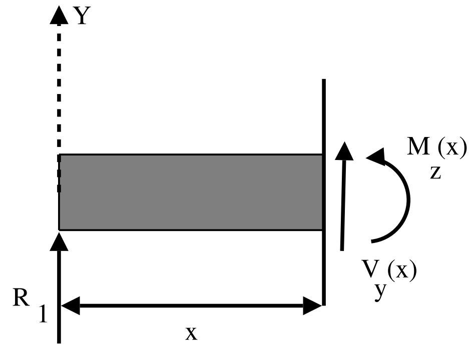
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + R_2 = 0 \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow M_c + R_2 L = 0 \end{aligned}$$

resultando em

$$R_1 = \frac{M_c}{L} \ \ R_2 = -\frac{M_c}{L}$$

Devido ao fato de existir uma descontinuidade no carregamento em $x = L/2$ devemos estudar a distribuição de esforços internos com o auxílio de dois cortes hipotéticos. Para $x < L/2$





estudamos o equilíbrio da seção

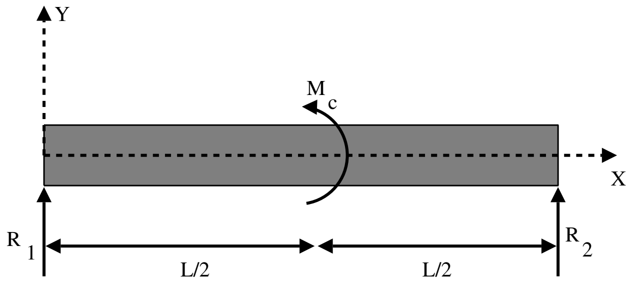
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y(x) = 0 \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow M_z(x) + x \cdot V_y(x) = 0\end{aligned}$$

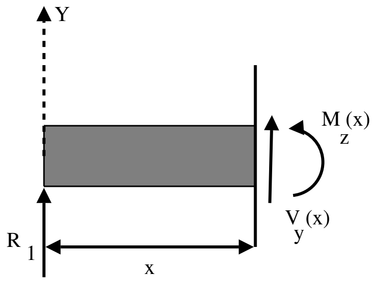
de onde obtemos

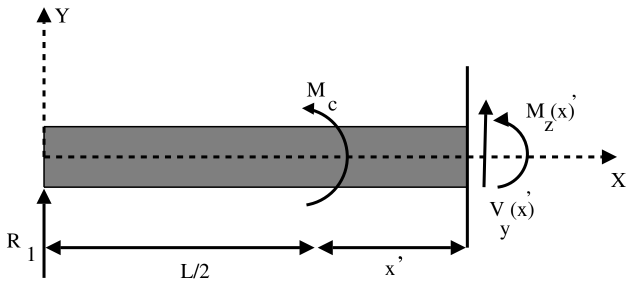
$$\begin{aligned}V_y(x) &= -R_1 = -\frac{M_c}{L} \\ M_z(x) &= R_1 x = \frac{M_c}{L} x\end{aligned}$$

observando que o esforço cortante da seção também realiza momento fletor sobre o ponto A. **É um erro muito comum desconsiderar este efeito !**

Para o trecho após o momento concentrado ($x > L/2$), devemos estudar novamente o equilíbrio de um corte hipotético. Para isto, realizamos um novo corte, a uma distância x'do ponto $L/2$







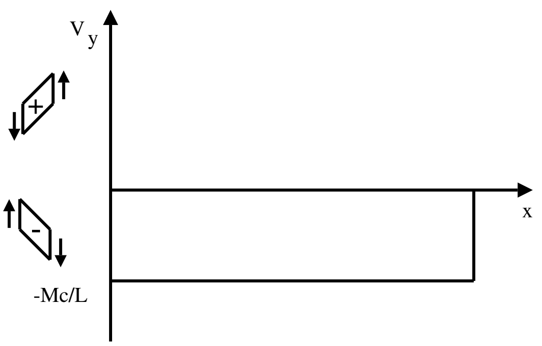
e, novamente estudando o equilíbrio,

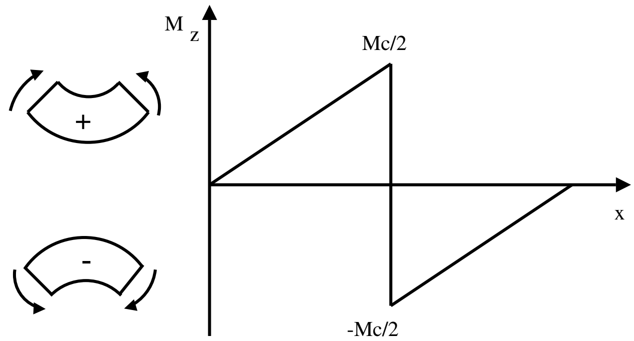
$$
\begin{aligned}
\sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y(x') = 0 \\
\sum M_A &= 0 \rightarrow M_z(x') + \left(x' + \frac{L}{2}\right) \cdot V_y(x') + M_c = 0
\end{aligned}
$$

de onde obtemos

$$
\begin{aligned}
V_y(x) &= -\frac{M_c}{L} \\
M_z(x) &= M_c\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

para $x' \in (0, \frac{L}{2}]$. Assim, os diagramas de esforços internos para esta estrutura são





Com base neste exemplo, podemos verificar que

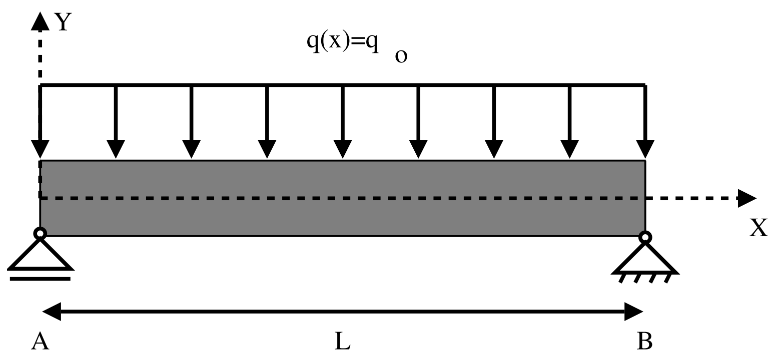
- a presença de um momento fletor concentrado faz com que existe uma descontinuidade (salto) no diagrama de momentos fletores. A magnitude desta descontinuidade é igual a do momento fletor aplicado no ponto;

- apoios não restringem o giro da seção e portanto não tem reação de momento. Desta forma, o diagrama de momentos fletores deve apresentar valores nulos em apoios (a não ser que um momento concentrado seja aplicado sobre o apoio);

- a presença de um momento concentrado não implica em descontinuidades no diagrama de esforços cortantes.

3.0.3 Exemplo

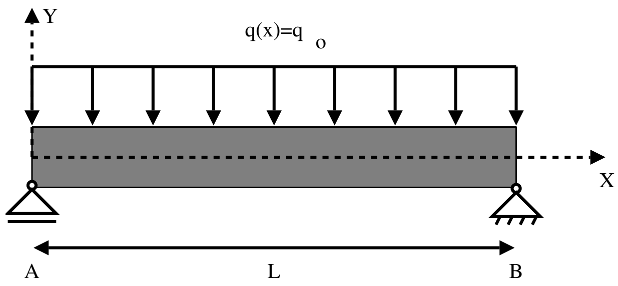
Seja a estrutura bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído constante:

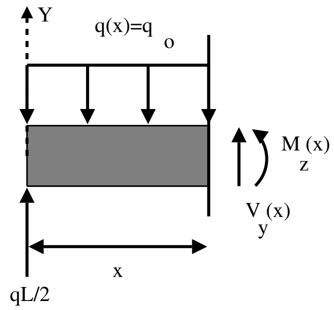


Por simetria do carregamento e da estrutura, observamos que as reações nos apoios devem ser para cima, de valor

$$R_1 = R_2 = \frac{qL}{2}.$$

Como o carregamento distribuído é contínuo por todo o comprimento da estrutura, observamos que um corte hipotético e genérico é suficiente para descrever corretamente a distribuição de esforços internos. Assim,



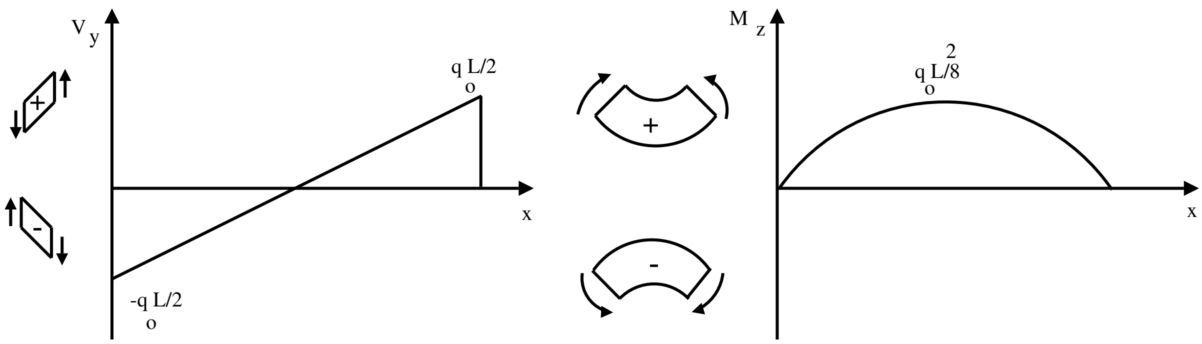


$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{qL}{2} + V_y(x) + \int_0^x -q_0 \, \mathrm{d}x = 0$$
$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad x \cdot V_y(x) + M_z(x) + \int_0^x x \cdot -q_0 \, \mathrm{d}x = 0$$

resultando em

$$\begin{aligned} V_y(x) &= q_0 \left(x - \frac{L}{2} \right) \\ M_z(x) &= \frac{q_0 L}{2} x - \frac{q_0}{2} x^2 \end{aligned}$$

com diagramas



Com este exemplo verificamos que

- um carregamento distribuído de valor constante implica em um diagrama de esforços cortantes com variação linear e em um diagrama de momentos fletores com variação quadrática;

- o ponto com o máximo valor de momento ($x = L/2$) é o ponto com esforço cortante nulo;