# Placas Finas - Teoria Clássica de Laminação

Eduardo Lenz Cardoso

## 1 Teoria Clássica de Laminação

A Teoria Clássica de Laminação (TCL) é uma extensão da teoria de placa fina, em que assumimos que a altura da placa é formada por **camadas** discretas de material, ou "lâminas". Uma hipótese muito importante na teoria é a de que as lâminas são perfeitamente coladas e que o deslocamento entre as lâminas é contínuo.

Outra consideração importante na TLC é que não estamos somente preocupados com o comportamento de placa, mas também no plano (tração/compressão/corte), o que chamamos de comportamento de membrana. Assim, assumimos que o comportamento na TCL é dado pela **sobreposição de efeitos** de duas teorias distintas: teoria de placa fina e teoria de elasticidade 2D em EPT. Se chamarmos as parcelas de deformação associados ao EPT com um super-índice 0 (algo bem comum na literatura), podemos escrever

$$u(x,y,z) = u^0(x,y,z) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}, \tag{1}$$

$$v(x,y,z) = v^0(x,y,z) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \tag{2}$$

e

$$w(x,y,z) = w(x,y) \tag{3}$$

pois a elasticidade plana em EPT não tem deslocamento na direção $z$ (assumindo $\nu = 0$ nesta direção, como fizemos com a teoria de placas).

Com isso, as deformações conjuntas são

$$\varepsilon_{xx}(x,y,z) = \varepsilon^0_{xx}(x,y) - z\kappa_x, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{yy}(x,y,z) = \varepsilon^0_{yy}(x,y) - z\kappa_y \tag{5}$$

e

$$\gamma_{xy}(x,y,z) = \gamma^0_{xy}(x,y) - z\kappa_{xy} \tag{6}$$

e vemos que as deformações de membrana, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, são constantes na altura da placa.

Como estamos utilizando EPT para a membrana e "por camada" na teoria de placa (o que será muito conveniente na TCL), podemos calcular as tensões como

$$\boldsymbol{\sigma}(x,y,z) = \mathbf{Q}(z)\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - z\boldsymbol{\kappa}(x,y)\right\} \tag{7}$$

Se a matriz constitutiva de cada camada, $\mathbf{Q}(z)$ for geral (assumimos que todos os termos são não nulos), teremos um acoplamento completo entre tensões e deformações/curvaturas.

Assim, é interessante introduzirmos algumas definições úteis para o estudo da TCL.

## Numeração das lâminas

As lâminas são sempre numeradas de baixo ($z = -h/2$) para cima ($z = h/2$). Também iremos representar a coordenada $z$ da parte de baixo de uma camada $k$ por $z_{k-1}$ (sempre com referência em $z = 0$). O número de camadas é $N$ e cada lâmina tem uma espessura $h_k$, tal que

$$h = \sum_{k=1}^{N} h_k. \tag{8}$$

## Material de cada lâmina

Cada lâmina pode ser formada por um determinado material $\mathbf{Q}_k$ no seu sistema local e ter uma espessura $h_k$.

Iremos utilizar diferentes sistemas de referência: um sistema da placa $xyz$ e um sistema da lâmina $k$ (ou do material) 123. Tendo o sistema da placa como referência e assumindo que a direção $z$ (altura) está sempre alinhada com a direção 3, podemos representar o sistema 123 como uma rotação $\theta_k$ em relação ao sistema da placa. O ângulo $\theta_k$ é definido como o ângulo entre o sistema da placa $x$ e o sistema local 1.

A transformação das propriedades do material de cada lâmina será dada por

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix}_{xyz} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & -4c^3s & -4cs^3 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 4cs^3 & 4c^3s \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4+s^4 & -4c^2s^2 & 2(c^3s-cs^3) & 2(cs^3-c^3s) \\ c^2s^2 & s^2c^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 & 2(c^3s-cs^3) & 2(cs^3-c^3s) \\ c^3s & -s^3c & s^3c-c^3s & 2(cs^3-c^3s) & c^4-3c^2s^2 & 3c^2s^2-s^2 \\ cs^3 & -sc^3 & c^3s-s^3c & 2(c^3s-s^3c) & 3c^2s^2-s^4 & c^4-3c^2s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{16} \\ Q_{26} \end{Bmatrix}_{123}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}(\theta_k)\mathbf{Q} \tag{9}$$

onde $s = \sin(\theta_k)$ e $c = \cos(\theta_k)$.

Assim, de posse das propriedades da camada rotacionadas para o sistema da placa, podemos escrever

$$\boldsymbol{\sigma}^k(x,y,z) = \bar{\mathbf{Q}}^k \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - z\boldsymbol{\kappa}(x,y) \right\},\ z \in [z_{k-1}, z_k] \tag{10}$$

ou seja, as tensões variam "linearmente" por camada. Isso é outra inconsistência da TCL, pois sabemos que as tensões não podem ter saltos (e elas são previstas por essa teoria, entre as camadas).

## Esforços

Aqui podemos utilizar toda a teoria que desenvolvemos para placas isotrópicas, mas estendendo para o fato de termos os termos de membrana e também os acoplamentos materiais.

Se integrarmos as tensões ao longo da espessura, teremos forças por unidade de comprimento

$$N_x(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(x,y,z)\,dz \quad [N/m], \tag{11}$$

$$N_y(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}(x,y,z)\,dz \quad [N/m] \tag{12}$$

e

$$N_{xy}(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(x,y,z)\, dz \quad [N/m] \tag{13}$$

ou, de forma geral

$$\mathbf{N}(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}(x,y,z)\, dz \quad [N/m]. \tag{14}$$

Como sabemos que as tensões variam linearmente "por camada", podemos reescrever

$$\mathbf{N}(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}(x,y,z)\, dz \quad [N/m], \tag{15}$$

e, utilizando a Eq. 10

$$\mathbf{N}(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\mathbf{Q}}^k \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - z\boldsymbol{\kappa}(x,y) \right\} \, dz \quad [N/m], \tag{16}$$

ou

$$\mathbf{N}(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z\, dz \boldsymbol{\kappa}(x,y) \quad [N/m], \tag{17}$$

onde as integrais por camada resultam em

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz = z_k - z_{k-1} = h_k \tag{18}$$

e

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z\, dz = \frac{1}{2}\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right). \tag{19}$$

Assim, podemos reescrever **N** como

$$\mathbf{N}(x,y) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}(x,y) \quad [N/m] \tag{20}$$

com

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \left(z_k - z_{k-1}\right) \tag{21}$$

e

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right). \tag{22}$$

Podemos fazer o mesmo com os momentos

$$M_x(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}(x,y,z)\, dz \quad [Nm/m], \tag{23}$$

$$M_y(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}(x,y,z)\, dz \quad [Nm/m] \tag{24}$$

e

$$M_{xy}(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}(x,y,z)\, dz \quad [Nm/m] \tag{25}$$

ou, de forma geral

$$\mathbf{M}(x,y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\boldsymbol{\sigma}(x,y,z)\,dz \quad [Nm/m]. \tag{26}$$

Novamente, utilizando a Eq. 10

$$\mathbf{M}(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z\,dz\boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2\,dz\boldsymbol{\kappa}(x,y) \quad [Nm/m], \tag{27}$$

em que

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2\,dz = \frac{1}{3}\left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right). \tag{28}$$

Assim,

$$\mathbf{M}(x,y) = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0(x,y) - \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}(x,y) \quad [Nm/m] \tag{29}$$

com

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{Q}}^k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right). \tag{30}$$

Com isso, podemos definir uma relação completa entre deformações de membrana, curvatura, esforços de membrana e momentos

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}. \tag{31}$$

**Exemplo**

Detemine as propriedades do laminado $[0/90]_s$ com todas as lâminas feitas com o material

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 182 & 2.9 & 0.0 \\ 2.9 & 10.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 7.2 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

.

Em primeiro lugar, vamos determinar as propriedades para uma orientação a 90 graus. Utilizando a equação (9) para 90 graus, obtemos

$$Q_{90} = \begin{bmatrix} 10.3 & 2.9 & 0.0 \\ 2.9 & 182 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 7.2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Fazendo o somatório nas camadas, obtemos

$$\mathbf{A} = Q^0\left[\left(-\frac{h}{4}\right) - \left(-\frac{h}{2}\right)\right] + Q^{90}\left[\left(\frac{h}{4}\right) - \left(-\frac{h}{4}\right)\right] + Q^0\left[\left(\frac{h}{2}\right) - \left(\frac{h}{4}\right)\right]$$

ou

$$\mathbf{A} = \frac{h}{2}Q^0 + \frac{h}{2}Q^{90}.$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3}Q^0\left[\left(-\frac{h}{4}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] + \frac{1}{3}Q^{90}\left[\left(\frac{h}{4}\right)^3 - \left(-\frac{h}{4}\right)^3\right] + \frac{1}{3}Q^0\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(\frac{h}{4}\right)^3\right]$$

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12}\left[\frac{7}{8}Q^0 + \frac{1}{8}Q^{90}\right] = \frac{h^3}{12}\begin{bmatrix} 160 & 2.9 & 0.0 \\ 2.9 & 31.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 7.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}Q^0\left[\left(-\frac{h}{4}\right)^2 - \left(-\frac{h}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}Q^{90}\left[\left(\frac{h}{4}\right)^2 - \left(-\frac{h}{4}\right)^2\right] + \frac{1}{2}Q^0\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2\right]$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Observe que para um laminado simétrico não temos acoplamento extensão-flexão ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$), o que será válido sempre. Para este laminado, devido a forma da matriz $\mathbf{D}$ não temos acoplamento entre momentos fletores e torsores.

**Exercício**: Refaça o exemplo anterior para o laminado simétrico $[45/\text{-}45]_s$. Utilize o mesmo material do exemplo anterior. Interprete os resultados em termos de acoplamentos. Uma dica para validar a sua resposta:

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12}\begin{bmatrix} 56.6 & 42.3 & 32.2 \\ 32.2 & 56.6 & 32.2 \\ 32.2 & 32.2 & 46.5 \end{bmatrix}.$$

## 1.1 Inversão da Relação Esforços-Deformações

Vamos estudar a inversão da relação da Eq. 31.

Para a primeira equação

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \tag{34}$$

podemos isolar as deformações de membrana

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \tag{35}$$

que substituída na segunda linha da Eq. 31 permite obter

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}\right) - \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \tag{36}$$

ou

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + \left(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}\right)\boldsymbol{\kappa}. \tag{37}$$

Reescrevendo na forma matricial, obtemos

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \mathbf{M} \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D} \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{H}^* & \mathbf{D}^* \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array}\right\} \tag{38}$$

Isolando-se a curvatura na segunda linha da Eq. 38, obtemos

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^*\mathbf{N} + \mathbf{D}^*\boldsymbol{\kappa} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{M} - \mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{H}^*\mathbf{N} \tag{40}$$

que substituída na Eq. 35 permite obter

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \mathbf{A}^*\mathbf{N} + \mathbf{B}^*\left(\mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{M} - \mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{H}^*\mathbf{N}\right) \tag{41}$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{H}^*\right)\mathbf{N} + \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{M} \tag{42}$$

e finalmente a relação inversa pode ser obtida por completo

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{H}^* & \mathbf{B}^*\mathbf{D}^{*^{-1}} \\ -\mathbf{D}^{*^{-1}}\mathbf{H}^* & \mathbf{D}^{*^{-1}} \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array}\right\} \tag{43}$$

.