

1 Equações incrementais para material com comportamento linear e elástico

Durante o movimento de um corpo arbitrário, geralmente conhecemos o estado atual do corpo e os estados prévios, a partir da configuração inicial. Na descrição do movimento finito, o objetivo é determinar a próxima configuração admissível $(t + \Delta t)$, isto é, uma configuração que respeite o princípio da mínima energia potencial ou do princípio dos trabalhos virtuais para o corpo. Aqui é importante salientar que utilizamos o conceito de pseudo tempo t mesmo em uma análise estática, pois associamos diferentes configurações estáticas a pseudo instantes de tempo t . Assim, podemos pensar em tempos ou configurações sequenciais $t_0, t_1, t_2 \dots$ associados a configurações $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2 \dots$

Nesta nova configuração, o PMEP pode ser escrito como

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}U dt = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}W_{ext} dt \quad (1)$$

em que a energia interna em $t + \Delta t$, no caso de um material em regime linear e elástico, é

$${}_0^{t+\Delta t}U = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL} {}_0^{t+\Delta t}E_{KL} {}_0^{t+\Delta t}E_{IJ} \right) d\Omega_0 \quad (2)$$

e W_{ext} é o trabalho externo.

As variações são consideradas em $t + \Delta t$ com respeito a uma componente arbitrária n de um campo de deslocamento \mathbf{u} . Lembrando, podemos definir a variação como

$$\delta_{u_n} a = \frac{\partial a}{\partial u_n} \delta u_n \quad (3)$$

que é a derivada de a em relação a u_n na direção de u_n .

Na abordagem incremental, descrevemos uma grandeza no tempo futuro $t + \Delta t$ em função de seu valor conhecido em t . Para o campo de deslocamento (nossa variável dependente), podemos escrever

$${}_0^{t+\Delta t}u_I = {}_0^t u_I + \Delta u_I \quad (4)$$

em que Δu_I é o incremento de deslocamento da componente I entre os instantes t e $t + \Delta t$.

Assim, considerando a equação (4), podemos avaliar o incremento de deformação finita como

$${}_0^{t+\Delta t}E_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial ({}_0^t u_I + \Delta u_I)}{\partial {}_0^t X_J} + \frac{\partial ({}_0^t u_J + \Delta u_J)}{\partial {}_0^t X_I} + \frac{\partial ({}_0^t u_M + \Delta u_M)}{\partial {}_0^t X_I} \frac{\partial ({}_0^t u_M + \Delta u_M)}{\partial {}_0^t X_J} \right) \quad (5)$$

que pode ser re-escrito como

$${}_0^{t+\Delta t}E_{IJ} = {}_0^t E_{IJ} + \Delta E_{IJ} = {}_0^t E_{IJ} + (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) \quad (6)$$

em que

$$\varsigma_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_I}{\partial {}_0^t X_J} + \frac{\partial \Delta u_J}{\partial {}_0^t X_I} + \frac{\partial {}_0^t u_M}{\partial {}_0^t X_I} \frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}_0^t X_J} + \frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}_0^t X_I} \frac{\partial {}_0^t u_M}{\partial {}_0^t X_J} \right) \quad (7)$$

e

$$\eta_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}^0 X_I} \frac{\partial \Delta u_M}{\partial {}^0 X_J} \right), \quad (8)$$

onde o incremento de deformação é separado em uma parte linear (ς_{IJ}) e em uma parte não-linear (η_{IJ}) com respeito ao incremento de deslocamentos $\Delta \mathbf{u}$.

1.1 Variação da Energia interna com respeito a uma componente de deslocamento

Como a variação nada mais é do que uma derivada direcional, podemos aplicar a regra da cadeia. Assim, se derivarmos

$$\frac{\partial U}{\partial u_n} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_n} (\mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_n} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \frac{\partial}{\partial u_n} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

e, como a dupla contração $\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E}$ é uma operação simétrica em relação ao tensor \mathbf{C} , podemos escrever

$$\frac{\partial U}{\partial u_n} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \frac{\partial}{\partial u_n} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \quad (10)$$

e, voltando para a notação indicial e em termos de variação

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} U \right) = {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} {}_0^{t+\Delta t} E_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} E_{IJ} \right) \quad (11)$$

Inserindo a equação (6) na equação (11), obtemos

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} G \right) = {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \left({}_0^t E_{KL} + \varsigma_{KL} + \eta_{KL} \right) {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^t E_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ} \right)$$

e, como as variações são consideradas em $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^t u_I + \Delta u_I \right) = {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\Delta u_I) \quad (12)$$

e

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^t E_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ} \right) = {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}). \quad (13)$$

Com este resultado, podemos finalmente re-escrever a variação da energia interna como

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}_0^{t+\Delta t} U \right) = {}_0^{t+\Delta t} C_{IJKL} \left({}_0^t E_{KL} + \varsigma_{KL} + \eta_{KL} \right) {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) \quad (14)$$

Finalmente, podemos volta à Equação inicial de nosso estudo, Eq. (1)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left(\boxed{{}^t_0 C_{IJKL} {}^t_0 E_{KL}} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + \boxed{{}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} {}^t_0 E_{KL}} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + \right. \\ \left. {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + \right. \\ \left. {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) \right) d\Omega_0 \\ = {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}^{t+\Delta t}_0 W_{ext} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

A tensão ${}^t_0 S_{IJ}$ pode ser calculada com a relação constitutiva

$${}^t_0 S_{IJ} = {}^t_0 C_{IJKL} {}^t_0 E_{KL} \quad (16)$$

e podemos notar que o produto ${}^t_0 C_{IJKL} {}^t_0 E_{KL}$ aparece em alguns termos da Equação (15), que estão destacados com caixas. Reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + \right. \\ \left. {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + \right. \\ \left. {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) \right) d\Omega_0 \\ = {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}^{t+\Delta t}_0 W_{ext} \right) - \int_{\Omega_0} {}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) d\Omega_0 dt \end{aligned} \quad (17)$$

que é a forma incremental para a equação (1). Essa equação tem termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos com respeito aos incrementos de deslocamentos, dependendo dos produtos entre os η , ς , bem como de suas variações. O lado direito da igualdade na equação (25) é chamado de resíduo (não confundir com o resíduo do método dos resíduos ponderados), que deve ser zero no equilíbrio.

2 Aproximação por elementos finitos

A equação (25) descreve o campo de deslocamento que respeitam o equilíbrio durante o movimento finito. As equações são obtidas considerando-se que a configuração de referência, onde as integrais são calculadas, e as variáveis de estado na configuração atual (pseudo tempo t) são conhecidas.

Soluções analíticas para a determinação do campo incremental contínuos $\Delta \mathbf{u}$ são muito complexas de serem obtidas para geometrias e condições de contorno gerais. Uma alternativa bastante utilizada na construção de soluções aproximadas é a utilização do método dos elementos finitos. Para este fim, os campos contínuos incrementais são aproximados, dentro de cada elemento finito e , na forma

$$\Delta u_I^e \simeq N_{\alpha I}^u \Delta U_{\alpha I}^e \quad (18)$$

onde $\alpha \in [1, n_{en}]$ e n_{en} é o número de nós de cada elemento finito na malha, $I \in [1, 3]$ é uma das coordenadas cartesianas, $N_{\alpha I}$ é a função de interpolação para os incrementos de deslocamentos no nó α , direção I . $\Delta U_{\alpha I}^e$ é o valor nodal de incremento de deslocamentos.

Considerando as equações (18) e (7), obtém-se

$$\varsigma_{IJ}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{\alpha I}}{\partial^0 X_J} \Delta U_{\alpha I}^e + \frac{\partial N_{\alpha J}}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha J}^e + \frac{\partial^t_0 u_m}{\partial^0 X_I} \frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_J} \Delta U_{\alpha m}^e + \frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha m}^e \frac{\partial^t_0 u_m}{\partial^0 X_J} \right), \quad (19)$$

e a variação ${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e$ deve ser avaliada na sua forma discreta, isto é, nos nós. Antes de calcularmos este termo, devemos observar que esta variação deve ser calculada em $t + \Delta t$, tal que utilizando as Eqs. (12) e (13), obtemos

$${}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e = {}^{t+\Delta t} \delta_{\Delta u_n} \varsigma_{IJ}^e, \quad (20)$$

e

$${}^{t+\Delta t} \delta_{\Delta u_n} \varsigma_{IJ}^e \Rightarrow \frac{\partial \varsigma_{IJ}^e}{\partial \Delta U_{\mu n}^e} \delta \Delta U_{\mu n}^e \quad (21)$$

que devem ser utilizadas na formulação discreta. Utilizando a equação (21) para avaliar a primeira variação da Eq. (7), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varsigma_{IJ}^e}{\partial \Delta U_{\mu n}^e} \delta \Delta U_{\mu n}^e &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{\alpha I}}{\partial^0 X_J} \delta_{In} \delta_{\mu \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha J}}{\partial^0 X_I} \delta_{Jn} \delta_{\mu \alpha} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^t_0 u_m}{\partial^0 X_I} \frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_J} \delta_{mn} \delta_{\alpha \mu} + \frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I} \delta_{mn} \delta_{\alpha \mu} \frac{\partial^t_0 u_m}{\partial^0 X_J} \right) \delta \Delta U_{\mu n}^e. \end{aligned} \quad (22)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o termo não linear do incremento de deformação, obtemos

$$\eta_{IJ}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha m}^e \frac{\partial N_{\beta m}}{\partial^0 X_J} \Delta U_{\beta m}^e \right) \quad (23)$$

com primeira variação

$$\frac{\partial \eta_{IJ}^e}{\partial \Delta U_{\mu n}^e} \delta \Delta U_{\mu n}^e = \left(\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I} \Delta U_{\alpha m}^e \frac{\partial N_{\beta m}}{\partial^0 X_J} \delta_{mn} \delta_{\beta \mu} \right) \delta \Delta U_{\mu n}^e. \quad (24)$$

Utilizando as formas discretas obtidas acima, podemos re-escrever a equação (25). No entanto, se todos os termos destas equações fossem considerados, um procedimento de solução não linear de alta ordem seria necessário.

Com o objetivo de utilizarmos métodos baseados em Newton-Raphson, descartamos os termos de alta ordem com respeito aos incrementos das variáveis de estado. Considerando apenas os termos de baixa ordem,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_0} \left({}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}^t_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) + \right. \\ &\quad \left. \cancel{{}^t_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ})} + \cancel{{}^t_0 C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ})} + \right. \\ &\quad \left. \cancel{{}^t_0 C_{IJKL} \eta_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ})} \right) d\Omega_0 \\ &= {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}^{t+\Delta t} W_{ext} \right) - \int_{\Omega_0} {}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) d\Omega_0 dt \end{aligned} \quad (25)$$

podemos re-escrever a Eq. (25) como

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left({}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\eta_{IJ}) + {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) \right) \\ & = {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \left({}^{t+\Delta t}_0 W_{ext} \right) - \int_{\Omega_0} {}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} (\varsigma_{IJ}) d\Omega_0 \end{aligned}$$

Estas equações de equilíbrio linearizadas deve ser solucionadas de forma a manter o resíduo nulo, isto é, deve existir um equilíbrio entre as forças internas e externas.

Deve-se salientar que o descarte dos termos de alta ordem só é possível pois estes termos são muito menores dos que os termos de baixa ordem para pequenos incrementos das variáveis de estado. Isto é crucial para mantermos o raio de atração dos métodos de Newton.

Após a organização dos termos calculados anteriormente, podemos escrever

$$\int_{\Omega_0^e} {}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e d\Omega_0^e = \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^T {}^t_0 \vec{S} d\Omega_0^e \right) \delta \Delta \mathbf{U}^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} {}^t_0 \mathbf{F}_{int}^e$$

$$\int_{\Omega_0^e} {}^t_0 S_{IJ} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \eta_{IJ}^e d\Omega_0^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{G}^T \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{G} d\Omega_0^e \right) \Delta \mathbf{U}^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{K}_\sigma^e \Delta \mathbf{U}^e$$

$$\int_{\Omega_0^e} {}^{t+\Delta t}_0 C_{IJKL} \varsigma_{KL} {}^{t+\Delta t} \delta_{u_n} \varsigma_{IJ}^e d\Omega_0^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u d\Omega_0^e \right) \Delta \mathbf{U}^e = \delta \Delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{K}_u^e \Delta \mathbf{U}^e$$

com

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_u^0 + \mathbf{B}_u^1$$

e

$$\mathbf{B}_u^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & & \\ & \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & \\ & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} & \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \end{bmatrix} \alpha=1..nen$$

$$\mathbf{B}_u^1 = \begin{bmatrix} u_{1,1} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \\ u_{1,2} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & u_{2,2} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & u_{3,2} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ u_{1,3} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} & u_{2,3} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} & u_{3,3} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} \\ u_{1,2} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} + u_{1,3} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & u_{2,2} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} + u_{2,3} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & u_{3,2} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} + u_{3,3} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ u_{1,1} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} + u_{1,3} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} + u_{2,3} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} + u_{3,3} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \\ u_{1,1} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} + u_{1,2} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} + u_{2,2} \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} + u_{3,2} \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \end{bmatrix} \alpha=1..nen$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} \\ \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} \end{bmatrix}_{\alpha=1..nen}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & \\ & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & & & S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ & & & S_{13} & S_{23} & S_{33} \\ & & & & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & & & & & & S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ & & & & & & S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{\mathbf{S}} = \left\{ S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{23} \ S_{13} \ S_{12} \right\}^T,$$

tal que

$${}^t_0 \mathbf{E}^e = (\mathbf{B}_u^0 + 0.5 \mathbf{B}_u^1) {}^t_0 \mathbf{U}^e$$

e

Desta forma, a equação linearizada (26), pode ser re-escrita, para um elemento finito e , como

$$(\mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e) \Delta \mathbf{U}^e = {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{F}_{ext}^e - {}^t_0 \mathbf{F}_{int}^e, \quad (26)$$

pois as variações são arbitrárias e comuns a todos os termos.

A sobreposição das matrizes de rigidez e dos vetores de força segue o padrão que já vimos para elementos lineares.