1 Equações incrementais para material com comportamento linear e elástico - não linearidade geométrica

Durante o movimento de um corpo arbitrário, geralmente conhecemos o estado atual do corpo e os estados prévios, a partir da configuração inicial. Na descrição do movimento finito, o objetivo é determinar a próxima configuração admissível ($t + \Delta t$), isto é, uma configuração que respeite o princípio da mínima energia potencial ou do princípio dos trabalhos virtuais para o corpo. Aqui é importante salientar que utilizamos o conceito de pseudo tempo t mesmo em uma análise estática, pois associamos diferentes configurações estáticas a pseudo instantes de tempo t. Assim, podemos pensar em tempos ou configurações sequenciais $t_0, t_1, t_2...$ associados a configurações $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2...$

Nesta nova configuração, o PMEP pode ser escrito como

$$^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}U \; dt = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n} \int_{t_0}^{t_1} {}_0^{t+\Delta t}W_{ext} \; dt \tag{1}$$

em que a energia interna em $t + \Delta t$, no caso de um material em regime linear e elástico, é

$${}_0^{t+\Delta t}U = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL} \, {}_0^{t+\Delta t}E_{KL} \, {}_0^{t+\Delta t}E_{IJ} \right) d\Omega_0 \tag{2}$$

e W_{ext} é o trabalho externo.

As variações são consideradas em $t + \Delta t$ com respeito a uma componente arbitrária n de um campo de deslocamento $\mathbf{u}$. Lembrando, podemos definir a variação como

$$\delta_{u_n} a = \frac{\partial a}{\partial u_n} \delta u_n \tag{3}$$

que é a derivada de a em relação a u_n na direção de u_n.

Na abordagem incremental, descrevemos uma grandeza no tempo futuro $t + \Delta t$ em função de seu valor conhecido em t. Para o campo de deslocamento (nossa variável dependente), podemos escrever

$${}_0^{t+\Delta}u_I = {}_0^{t}u_I + \Delta u_I \tag{4}$$

em que Δu_I é o incremento de deslocamento da componente I entre os instantes t e $t + \Delta t$.

Assim, considerando a equação (4), podemos avaliar o incremento de deformação finita como

$${}_0^{t+\Delta t}E_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left({}_0^t u_I + \Delta u_I \right)}{\partial\, {}^0X_J} + \frac{\partial \left({}_0^t u_J + \Delta u_J \right)}{\partial\, {}^0X_I} + \frac{\partial \left({}_0^t u_M + \Delta u_M \right)}{\partial\, {}^0X_I} \frac{\partial \left({}_0^t u_M + \Delta u_M \right)}{\partial\, {}^0X_J} \right) \tag{5}$$

que pode ser re-escrito como

$${}_0^{t+\Delta}E_{IJ} = {}_0^{t}E_{IJ} + \Delta E_{IJ} = {}_0^{t}E_{IJ} + (\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}) \tag{6}$$

em que

$$\varsigma_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_I}{\partial\, {}^0X_J} + \frac{\partial \Delta u_J}{\partial\, {}^0X_I} + \frac{\partial\, {}_0^t u_M}{\partial\, {}^0X_I} \frac{\partial \Delta u_M}{\partial\, {}^0X_J} + \frac{\partial \Delta u_M}{\partial\, {}^0X_I} \frac{\partial\, {}_0^t u_M}{\partial\, {}^0X_J} \right) \tag{7}$$

e

$$\eta_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_M}{\partial\, {}^0X_I}\frac{\partial \Delta u_M}{\partial\, {}^0X_J}\right), \tag{8}$$

onde o incremento de deformação é separado em uma parte linear (ς_{IJ}) e em uma parte não-linear (η_{IJ}) com respeito ao incremento de deslocamentos $\Delta\mathbf{u}$.

1.1 Variação da Energia interna com respeito a uma componente de deslocamento

Como a variação nada mais é do que uma derivada direcional, podemos aplicar a regra da cadeia. Assim, se derivarmos

$$\frac{\partial U}{\partial u_n} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_n}\left(\mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u})\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_n}\mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \frac{\partial}{\partial u_n}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \tag{9}$$

e, como a dupla contração $\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E}$ é uma operação simétrica em relação ao tensor $\mathbf{C}$, podemos escrever

$$\frac{\partial U}{\partial u_n} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \frac{\partial}{\partial u_n}\mathbf{E}(\mathbf{u}) \tag{10}$$

e, voltando para a notação indicial e em termos de variação

$$^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}U\right) = {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,{}_0^{t+\Delta t}E_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}E_{IJ}\right) \tag{11}$$

Inserindo a equação (6) na equação (11), obtemos

$$^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}G\right) = {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\left({}_0^tE_{KL} + \varsigma_{KL} + \eta_{KL}\right)\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^tE_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}\right)$$

e, como as variações são consideradas em $t+\Delta t$

$$^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^tu_I + \Delta u_I\right) = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left(\Delta u_I\right) \tag{12}$$

e

$$^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^tE_{IJ} + \varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}\right) = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left(\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}\right). \tag{13}$$

Com este resultado, podemos finalmente re-escrever a variação da energia interna como

$$^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}U\right) = {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\left({}_0^tE_{KL} + \varsigma_{KL} + \eta_{KL}\right)\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left(\varsigma_{IJ} + \eta_{IJ}\right) \tag{14}$$

Finalmente, podemos volta à Equação inicial de nosso estudo, Eq. (1)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \Big(& \boxed{{}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,{}_0^{t}E_{KL}}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\varsigma_{IJ}) + \boxed{{}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,{}_0^{t}E_{KL}}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\eta_{IJ}) + \\ & {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\varsigma_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\eta_{IJ}) + \\ & {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\eta_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\varsigma_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\eta_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\eta_{IJ})\,d\Omega_0 \\ & = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}W_{ext}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

A tensão ${}_0^{t}S_{IJ}$ pode ser calculada com a relação constitutiva

$${}_0^{t}S_{IJ} = {}_0^{t}C_{IJKL}\,{}_0^{t}E_{KL} \tag{16}$$

e podemos notar que o produto ${}_0^{t}C_{IJKL}\,{}_0^{t}E_{KL}$ aparece em alguns termos da Equação (15), que estão destacados com caixas. Reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \Big(& {}_0^{t}S_{IJ}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\varsigma_{IJ}) + \\ & {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\eta_{IJ}) + {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\eta_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\varsigma_{IJ}) + \\ & {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\eta_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\eta_{IJ})\,d\Omega_0 \\ & = {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}W_{ext}\right) - \int_{\Omega_0} {}_0^{t}S_{IJ}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\,(\,\varsigma_{IJ})\;d\Omega_0\;dt\end{aligned} \tag{17}$$

que é a forma incremental para a equação (1). Essa equação tem termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos com respeito aos incrementos de deslocamentos, dependendo dos produtos entre os η, ζ, bem como de suas variações. O lado direito da igualdade na equação (25) é chamado de resíduo (não confundir com o resíduo do método dos resíduos ponderados), que deve ser zero no equilíbrio.

2 Aproximação por elementos finitos

A equação (25) descreve o campo de deslocamento que respeitam o equilíbrio durante o movimento finito. As equações são obtidas considerando-se que a configuração de referência, onde as integrais são calculadas, e as variáveis de estado na configuração atual (pseudo tempo t) são conhecidas.

Soluções analíticas para a determinação do campo incremental contínuos $\Delta\mathbf{u}$ são muito complexas de serem obtidas para geometrias e condições de contorno gerais. Uma alternativa bastante utilizada na construção de soluções aproximadas é a utilização do método dos elementos finitos. Para este fim, os campos contínuos incrementais são aproximados, dentro de cada elemento finito e, na forma

$$\Delta u_I^e \simeq N_{\alpha I}^u \Delta U_{\alpha I}^e \tag{18}$$

onde $\alpha \in [1, n_{en}]$ e n_{en} é o número de nós de cada elemento finito na malha, $I \in [1,3]$ é uma das coordenadas cartesianas, $N_{\alpha I}$ é a função de interpolação para os incrementos de deslocamentos no nó α, direção I. $\Delta U_{\alpha I}^e$ é o valor nodal de incremento de deslocamentos.

Considerando as equações (18) e (7), obtém-se

$$\varsigma^e_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_{\alpha I}}{\partial^0 X_J}\Delta U^e_{\alpha I} + \frac{\partial N_{\alpha J}}{\partial^0 X_I}\Delta U^e_{\alpha J} + \frac{\partial\, {}^t_0 u_m}{\partial^0 X_I}\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_J}\Delta U^e_{\alpha m} + \frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I}\Delta U^e_{\alpha m}\frac{\partial\, {}^t_0 u_m}{\partial^0 X_J}\right), \tag{19}$$

e a variação ${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\varsigma^e_{IJ}$ deve ser avaliada na sua forma discreta, isto é, nos nós. Antes de calcularmos este termo, devemos observar que esta variação deve ser calculada em $t+\Delta t$, tal que utilizando as Eqs. (12) e (13), obtemos

$${}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\varsigma^e_{IJ} = {}^{t+\Delta t}\delta_{\Delta u_n}\varsigma^e_{IJ}, \tag{20}$$

e

$${}^{t+\Delta t}\delta_{\Delta u_n}\varsigma^e_{IJ} \Rightarrow \frac{\partial \varsigma^e_{IJ}}{\partial \Delta U^e_{\mu n}}\delta\Delta U^e_{\mu n} \tag{21}$$

que devem ser utilizadas na formulação discreta. Utilizando a equação (21) para avaliar a primeira variação da Eq. (7), obtém-se

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{\partial \varsigma^e_{IJ}}{\partial \Delta U^e_{\mu n}}\delta\Delta U^e_{\mu n}} \quad = \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_{\alpha I}}{\partial^0 X_J}\delta_{In}\delta_{\mu\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha J}}{\partial^0 X_I}\delta_{Jn}\delta_{\mu\alpha} + \right. \\ & \left.\frac{\partial\, {}^t_0 u_m}{\partial^0 X_I}\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_J}\delta_{mn}\delta_{\alpha\mu} + \frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I}\delta_{mn}\delta_{\alpha\mu}\frac{\partial\, {}^t_0 u_m}{\partial^0 X_J}\right)\delta\Delta U^e_{\mu n}.\end{aligned} \tag{22}$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o termo não linear do incremento de deformação, obtemos

$$\eta^e_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I}\Delta U^e_{\alpha m}\frac{\partial N_{\beta m}}{\partial^0 X_J}\Delta U^e_{\beta m}\right) \tag{23}$$

com primeira variação

$$\boxed{\frac{\partial \eta^e_{IJ}}{\partial \Delta U^e_{\mu n}}\delta\Delta U^e_{\mu n} = \left(\frac{\partial N_{\alpha m}}{\partial^0 X_I}\Delta U^e_{\alpha m}\frac{\partial N_{\beta m}}{\partial^0 X_J}\delta_{mn}\delta_{\beta\mu}\right)\delta\Delta U^e_{\mu n}.} \tag{24}$$

Utilizando as formas discretas obtidas acima, podemos re-escrever a equação (25). No entanto, se todos os termos destas equações fossem considerados, um procedimento de solução não linear de alta ordem seria necessário.

Com o objetivo de utilizarmos métodos beseados em Newton-Raphson, descartamos os termos de alta ordem com respeito aos incrementos das variáveis de estado. Considerando apenas os termos de baixa ordem,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}\Big({}^t_0S_{IJ}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}(\eta_{IJ}) + {}^{t+\Delta t}_0C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}(\varsigma_{IJ}) + \\ &\cancel{{}^{t+\Delta t}_0C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}(\eta_{IJ})} + \cancel{{}^{t+\Delta t}_0C_{IJKL}\,\eta_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}(\varsigma_{IJ})} + \\ &\cancel{{}^{t+\Delta t}_0C_{IJKL}\,\eta_{KL}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}(\eta_{IJ})}d\Omega_0 \\ &= {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}^{t+\Delta t}_0W_{ext}\right) - \int_{\Omega_0}{}^t_0S_{IJ}\,{}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}(\varsigma_{IJ})\;d\Omega_0\;dt\end{aligned} \tag{25}$$

podemos re-escrever a Eq. (25) como

$$\int_{\Omega_0} \left({}_0^tS_{IJ} \, {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left(\eta_{IJ}\right) + {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\varsigma_{KL} \, {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left(\varsigma_{IJ}\right) \right)$$
$$= {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left({}_0^{t+\Delta t}W_{ext}\right) - \int_{\Omega_0} {}_0^tS_{IJ} \, {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\left(\varsigma_{IJ}\right) \, d\Omega_0$$

Estas equações de equilíbrio linearizadas deve ser solucionadas de forma a manter o resíduo nulo, isto é, deve existir um equilíbrio entre as forças internas e externas.

Deve-se salientar que o descarte dos termos de alta ordem só é possível pois estes termos são muito menores dos que os termos de baixa ordem para pequenos incrementos das variáveis de estado. Isto é crucial para mantermos o raio de atração dos métodos de Newton.

Após a organização dos termos calculados anteriormente, podemos escrever

$$\int_{\Omega_0^e} {}_0^tS_{IJ}^e \, {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\varsigma_{IJ}^e \, d\Omega_0^e = \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^T \, {}_0^t\overrightarrow{S} \, d\Omega_0^e \right) \delta\Delta\mathbf{U}^e = \delta\Delta\mathbf{U}^{e^T} \, {}_0^t\mathbf{F}_{int}^e$$

$$\int_{\Omega_0^e} {}_0^tS_{IJ}^e \, {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\eta_{IJ}^e \, d\Omega_0^e = \delta\Delta\mathbf{U}^{e^T} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{G}^T\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{G} \, d\Omega_0^e \right) \Delta\mathbf{U}^e = \delta\Delta\mathbf{U}^{e^T} \, \mathbf{K}_\sigma^e \, \Delta\mathbf{U}^e$$

$$\int_{\Omega_0^e} {}_0^{t+\Delta t}C_{IJKL}\,\varsigma_{KL}^e \, {}^{t+\Delta t}\delta_{u_n}\varsigma_{IJ}^e \, d\Omega_0^e = \delta\Delta\mathbf{U}^{e^T} \left(\int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_u^t\mathbf{C}\mathbf{B}_u \, d\Omega_0^e \right) \Delta\mathbf{U}^e = \delta\Delta\mathbf{U}^{e^T} \, \mathbf{K}_u^e \, \Delta\mathbf{U}^e$$

com

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_u^0 + \mathbf{B}_u^1$$

e

$$\mathbf{B}_u^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & & \\ & \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & \\ & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} \\ & \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} & & \frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \\ \frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & \frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & \end{bmatrix}_{\alpha=1..nen}$$

$$\mathbf{B}_u^1 = \begin{bmatrix} u_{1,1}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \\ u_{1,2}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & u_{2,2}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & u_{3,2}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ u_{1,3}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} & u_{2,3}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} & u_{3,3}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} \\ u_{1,2}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} + u_{1,3}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} & u_{2,2}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} + u_{2,3}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} & u_{3,2}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} + u_{3,3}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} \\ u_{1,1}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_3} + u_{1,3}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_3} + u_{2,3}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_3} + u_{3,3}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \\ u_{1,1}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_2} + u_{1,2}\frac{\partial N_{\alpha 1}^u}{\partial^0 X_1} & u_{2,1}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_2} + u_{2,2}\frac{\partial N_{\alpha 2}^u}{\partial^0 X_1} & u_{3,1}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_2} + u_{3,2}\frac{\partial N_{\alpha 3}^u}{\partial^0 X_1} \end{bmatrix}_{\alpha=1..nen}$$

em que $u_{i,j}$ é a derivada da componente i do deslocamento em relação a direção j ($u_{1,2}$ é a derivada do deslocamento em X na direção Y). A matriz $\mathbf{G}$ é definida como

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^u_{\alpha 1}}{\partial^0 X_1} & & \\ \frac{\partial N^u_{\alpha 1}}{\partial^0 X_2} & & \\ \frac{\partial N^u_{\alpha 1}}{\partial^0 X_3} & & \\ & \frac{\partial N^u_{\alpha 2}}{\partial^0 X_1} & \\ & \frac{\partial N^u_{\alpha 2}}{\partial^0 X_2} & \\ & \frac{\partial N^u_{\alpha 2}}{\partial^0 X_3} & \\ & & \frac{\partial N^u_{\alpha 3}}{\partial^0 X_1} \\ & & \frac{\partial N^u_{\alpha 3}}{\partial^0 X_2} \\ & & \frac{\partial N^u_{\alpha 3}}{\partial^0 X_3} \end{bmatrix}_{\alpha=1..nen}$$

e a matriz $\hat{\mathbf{S}}$

$$\widehat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & & & & \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & & & & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & & & & \\ & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ & & & S_{12} & S_{22} & S_{23} & & & \\ & & & S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & \\ & & & & & & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & & & & & & S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ & & & & & & S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

com o vetor de tensões

$$\overrightarrow{\mathbf{S}} = \left\{ \begin{array}{cccccc} S_{11} & S_{22} & S_{33} & S_{23} & S_{13} & S_{12} \end{array} \right\}^T,$$

tal que

$${}^t_0\mathbf{E}^e = \left(\mathbf{B}^0_u + 0.5\mathbf{B}^1_u\right) {}^t_0\mathbf{U}^e.$$

Dessa forma, a equação linearizada (26), pode ser re-escrita, para um elemento finito e, como

$$(\mathbf{K}^e_u + \mathbf{K}^e_\sigma)\,\Delta\mathbf{U}^e = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{ext} - {}^t_0\mathbf{F}^e_{int}, \tag{26}$$

pois as variações são arbitrárias e comuns a todos os termos. Como estamos desprezando termos de alta ordem na equação de equilíbrio, devemos lembrar que a igualdade não será obtida imediatamente. Por esse motivo, devemos iterar em um mesmo nível de carregamento até que o r.h.s da Eq. (26) seja $\mathbf{0}$ dentro de uma dada tolerância.

A sobreposição das matrizes de rigidez e dos vetores de força segue o padrão que já vimos para elementos lineares.

O problema de equilíbrio incremental pode ser resumido como o procedimento de Newton-Raphson:

1. Gera a malha, vetor global de forças externas (valor total) $\mathbf{F}_{ext}$ e inicializa o vetor de deslocamentos ${}^0_0\mathbf{U}$;

2. Inicializa o pseudo-tempo $t = 0$;

3. Inicializa o multiplicador de forças ${}^{t+\Delta t}\lambda$;

4. Início do laço principal do procedimento de Newton-Raphson;

5. Inicializa o vetor de deslocamentos ${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} =^{t}_{0} \mathbf{U}$

6. Vetor de forças externas para o próximo incremento ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} =^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_{ext}$;

7. Início do laço de correção de resíduo ;

8. Monta a matriz de rigidez ${}^{t}\mathbf{K}$ e o vetor de forças internas ${}^{t}\mathbf{F}_{int}$ (ambos dependem dos deslocamentos atuais ${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U}$). Em caso de Newton-Raphson modificado, não atualizamos a matriz de rigidez;

9. O vetor resíduo da iteração é $\mathbf{R} =^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_{ext} -^{t} \mathbf{F}_{int}$;

10. Calcula o incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{U} = {}^{t}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}$;

11. Incrementa o deslocamento ${}^{t+\Delta t}_{0}\mathbf{U} =^{t}_{0} \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}$;

12. Se a norma do resíduo estiver abaixo de uma tolerância δ, aceitamos a iteração, incrementamos o λ e o pseudo-tempo t e voltamos para o passo 5. Do contrário, voltamos para o passo 8.