

# Diagramas de Esforços Internos

Prof. Eduardo Lenz

26 de setembro de 2025

# Capítulo 1

## Introdução

Este material tem como objetivo apresentar um estudo sobre a transmissão de esforços no interior de corpos. Esta é a primeira etapa para entendermos como os esforços externos se distribuem no interior do corpo em estudo.

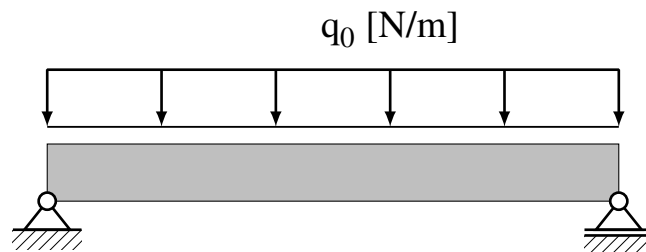
A versão atual do documento está sendo revisada, assim como as figuras. A ultima versão pode ser sempre encontrada em <https://github.com/CodeLenz/Notas-de-aula/MSO1>

# Capítulo 2

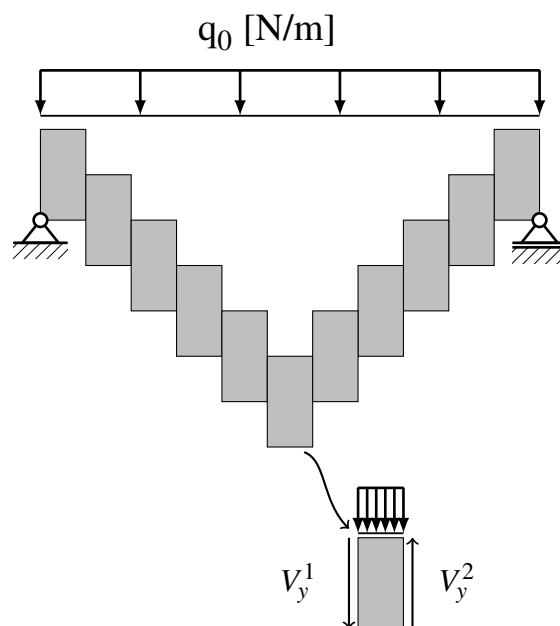
## Esforço Cortante

### 2.1 Definição

Tomemos como exemplo a estrutura



Ao aplicarmos um carregamento sobre a estrutura, essa irá se deformar. Isto ocorre pois as diferentes regiões do corpo exercem esforços umas sobre as outras e o corpo assume uma posição de equilíbrio diferente de quando não existiam esforços externos. Imaginando como o esforço externo se distribui, podemos visualizar o processo de transmissão de esforços. Para isto, vamos exagerar um pouco a posição final da estrutura e podemos visualizar o efeito de um dos esforços que atuam em estruturas: o **esforço cortante**. Para entender o que é o esforço cortante, podemos estudar o diagrama de corpo livre de um pequeno pedaço da estrutura

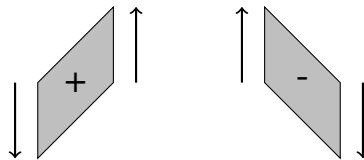


em que podemos verificar que para o pedaço em destaque estar em equilíbrio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y^1 + V_y^2 + \text{Esforços verticais} = 0.$$

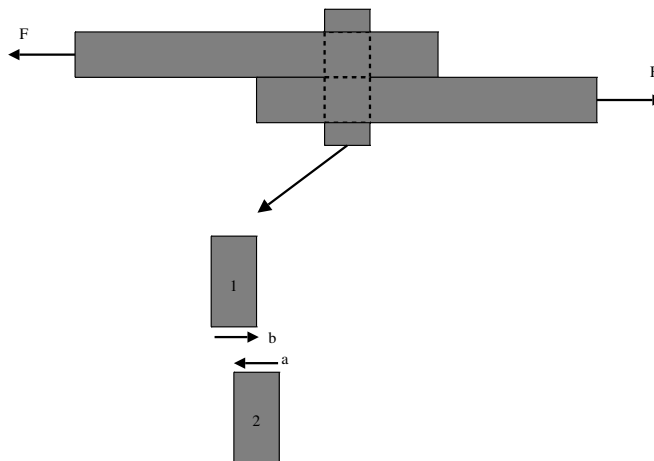
A força  $V_y$  que surge de cada um dos lados do elemento é chamada de esforço cortante, pois tende a 'cortar' o material na direção de  $Y$ . Os esforços cortantes tem como significado a força vertical (no caso na direção de  $Y$ ) que o lado (esquerdo ou direito) da estrutura faz sobre o pedaço de material considerado. Portanto, o conhecimento dos esforços cortantes é fundamental para entendermos as solicitações que ocorrem dentro de um corpo.

Convenção de sinal para cortante positivo: toda vez que a parte da direita da estrutura realiza um esforço vertical no sentido positivo (do eixo  $Y$ ), dizemos que o esforço cortante é positivo. Por equilíbrio, temos que a parte da esquerda da estrutura realiza um esforço cortante no sentido negativo do eixo vertical. Assim, considerando um pedaço de material, temos as seguintes opções



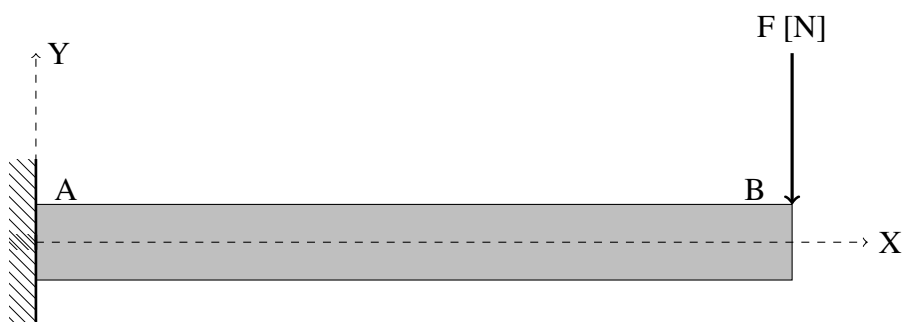
### Exemplo

Um pino cilíndrico segura duas chapas. Ao puxarmos cada uma das chapas em direções opostas, o pino sofrerá um esforço de corte. A figura ilustra o esforço cortante que a parte 1 faz sobre a parte 2 (cortante  $a$ ) e o esforço cortante que a parte 2 faz sobre a parte 1 (cortante  $b$ ).

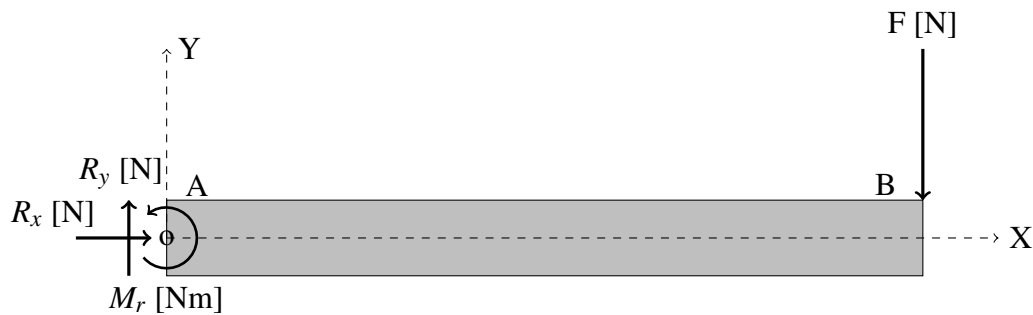


## 2.2 Obtenção da distribuição de esforços cortantes em uma estrutura

Considere o seguinte exemplo, de uma viga engastada submetida a uma força concentrada



Inicialmente, determinamos as reações que atuam no engaste. Como o engaste está restringindo 3 movimentos (graus de liberdade), teremos 3 reações



O equilíbrio estático é descrito por um equilíbrio vetorial de forças

$$\sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} - F \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

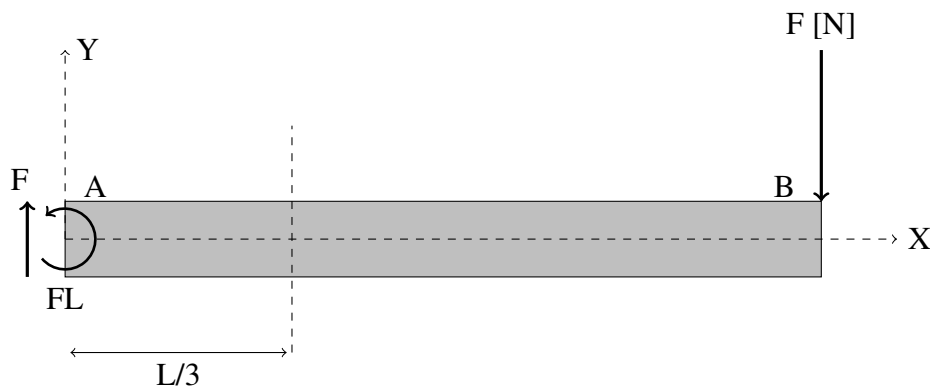
e um equilíbrio vetorial de momentos em relação a um ponto

$$\sum \mathbf{M}_o = M_r \mathbf{k} + L \mathbf{i} \times -F \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

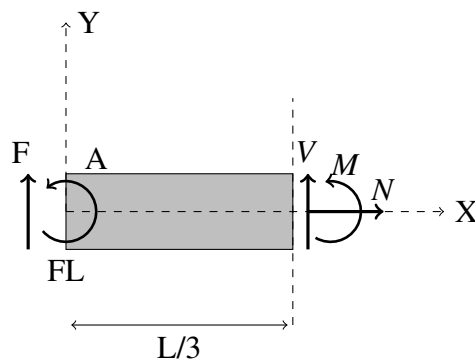
que resulta em três equações escalares, com resposta

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow R_y = F \\ \sum M_o &= 0 \rightarrow M_r = FL. \end{aligned}$$

Como o objetivo é estudar a distribuição de esforços cortantes, fazemos um corte hipotético no corpo, substituindo a parte da direita do corpo por um esforço cortante que represente a ação da parte da direita da estrutura sobre a parte da esquerda. Para exemplificar o conceito, vamos estudar o que ocorre a uma distância  $\frac{L}{3}$  do engaste



Substituindo toda a parte a direita do corte pela ação que esta faz sobre a seção em  $x = L/3$ , utilizamos os esforços internos  $N$ , esforço normal,  $V_y$ , esforço cortante e  $M_z$ , momento fletor, de acordo com o DCL



Assim, como a estrutura está em equilíbrio,

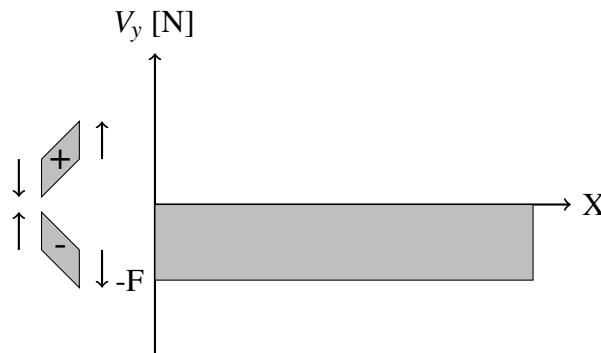
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F + V_y = 0$$

ou seja,

$$V_y = -F$$

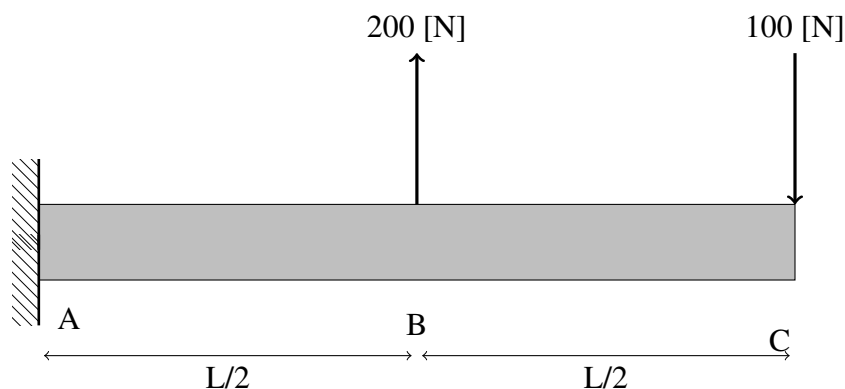
em  $x = L/3$ , indicando que a parte da direita faz um esforço cortante de valor  $F$ , para baixo. Por definição, esse cortante é negativo. Pode-se observar, também, que para qualquer corte realizado entre  $x = 0$  e  $x = L$ , o valor do esforço cortante será o mesmo, pois não existem forças verticais aplicadas ao longo do corpo, somente nas extremidades. Isto quer dizer que a equação de equilíbrio acima não se altera para diferentes valores de  $x$ .

Graficamente, ilustramos a distribuição de esforços cortantes com um diagrama, chamado de diagrama de esforços cortantes

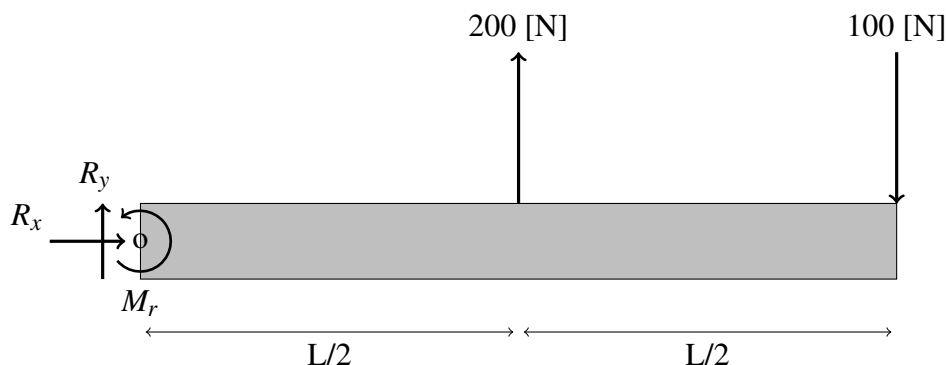


## Exemplo

Seja a viga engastada submetida a duas forças verticais



Novamente, iniciamos o problema com a determinação das reações nos apoios (no caso, o engaste). Para o problema em questão,



$$\sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + 200 \mathbf{j} - 100 \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

e

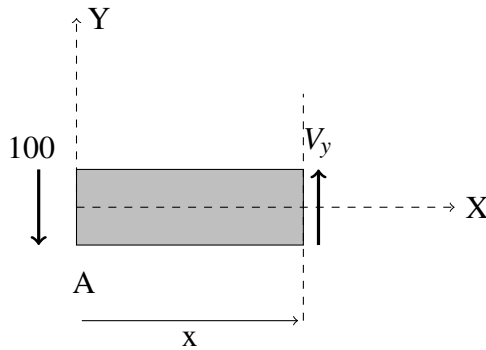
$$\sum \mathbf{M}_o = M_r \mathbf{k} + \frac{L}{2} \mathbf{i} \times 200 \mathbf{j} + L \mathbf{i} \times -100 \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

tal que

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow R_y = -100 \\ \sum M_o &= 0 \rightarrow M_r = 0 \end{aligned}$$

Para obtermos o diagrama de esforços cortantes no corpo em estudo, fazemos um corte hipotético no corpo, substituindo a parte retirada por um conjunto de esforços que represente a ação da parte retirada sobre a parte em estudo. Conforme observamos no exemplo anterior, o diagrama de esforços cortantes só tem seus valores alterados quando aplicamos uma força vertical sobre o corpo. Neste exemplo, temos três forças verticais aplicadas: a reação  $R_y$  e as duas forças concentradas. Com isto, esperamos que ocorram três saltos no diagrama.

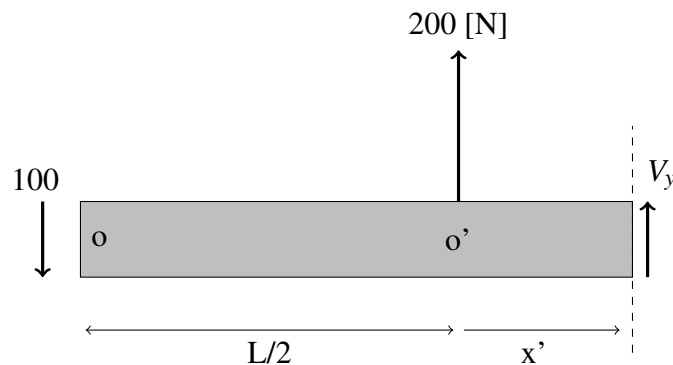
Procedendo com o primeiro corte, em qualquer posição entre  $x > 0$  e  $x < L/2$ , obtemos



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - 100 = 0 \rightarrow V_y = 100$$

textm[N]

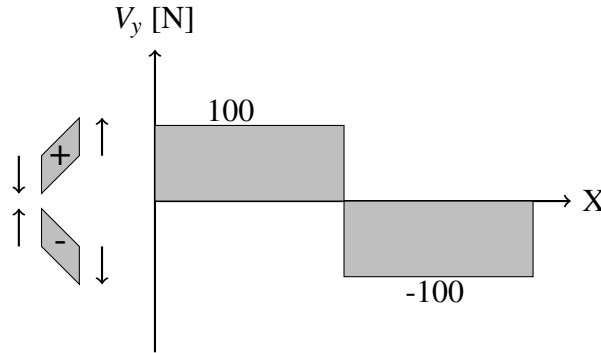
e não é difícil de observar que o valor de  $V_y$  não se altera para qualquer corte entre 0 e  $L/2$ . No entanto, em  $x = L/2$  existe uma força concentrada. Isto faz com que o equilíbrio de forças formulado acima não tenha validade para  $x \geq L/2$  e, portanto, um novo corte é necessário, com DCL



e equilíbrio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - 100 + 200 = 0 \rightarrow V_y = -100 \text{ [N]}.$$

Observe que o novo corte é definido a uma distância  $x'$  a partir de  $x = L/2$ . Embora isto não seja necessário neste exemplo, é uma prática que no futuro evitará uma série de problemas. Novamente, não temos nenhum outro carregamento aplicado entre  $L/2 < x < L$  (ou  $0 < x' < L/2$ ), de tal forma que o diagrama de esforços internos para este exemplo é

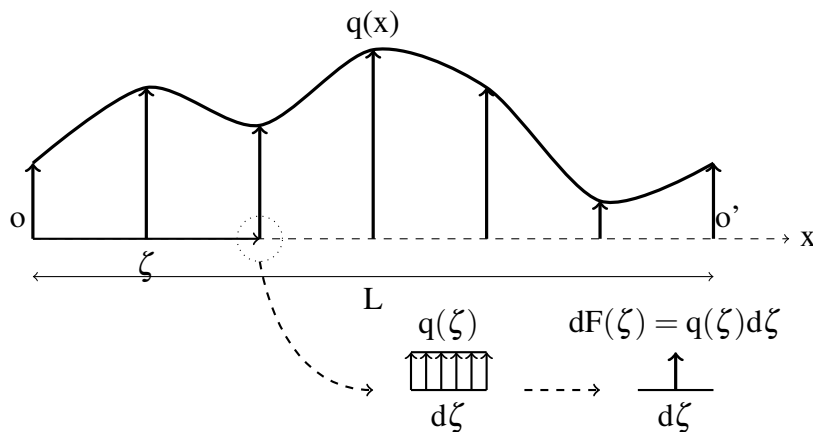


Com auxílio dos dois exemplos anteriores, podemos obter as seguintes conclusões:

- o diagrama de esforços cortantes apresenta saltos de valores em pontos onde a estrutura é submetida a esforços transversais concentrados. Na convenção de sinais utilizada neste texto, observamos que o salto tem sentido oposto ao da aplicação da força, apresentado a mesma magnitude;
- em regiões onde não existe carregamento transversal aplicado, o diagrama de esforços cortantes tem valor constante.

## 2.3 Carregamentos Distribuídos

Seja um carregamento distribuído  $q(x)$  [N/m] em  $x \in [0, L]$  e origem em o



Se desejarmos calcular a força total provocada pelo carregamento distribuído, devemos considerar uma pequena região  $d\zeta$  a uma distância  $\zeta$  de o. Por mais geral que seja  $q(x)$ , podemos considerar que o comportamento no entorno da posição  $\zeta$  é o valor constante  $q(x = \zeta) = q(\zeta)$  [N/m] que, multiplicado por  $d\zeta$  [m] resulta em um **diferencial de força**  $dF(\zeta) = q(\zeta)d\zeta$  [N]. Assim, podemos calcular a **força total** por

$$\mathbf{F}_q = \int_0^L q(\zeta) d\zeta \mathbf{j} \text{ [N]}.$$

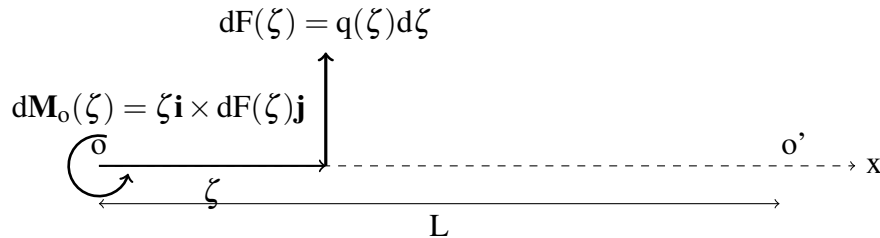


Pode-se notar que a utilização da variável  $\zeta$  não é estritamente necessária, sendo que, na prática, podemos utilizar a variável  $x$ .

O **diferencial de momento** em relação a origem de  $q(x)$  é obtido pelo produto vetorial do vetor posição de  $o$  até  $\zeta$  pelo diferencial de força

$$d\mathbf{M}_o = \zeta \mathbf{i} \times dF(\zeta) \mathbf{j} = \zeta \mathbf{i} \times q(\zeta) d\zeta \mathbf{j}$$

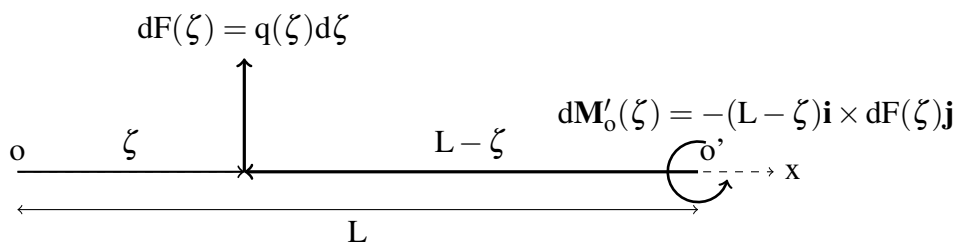
que pode ser visualizado na figura abaixo



tal que o **momento total** em  $o$  será

$$\mathbf{M}_o = \int_0^L \zeta \mathbf{i} \times q(\zeta) d\zeta \mathbf{j} \text{ [Nm]}.$$

É importante salientar que podemos calcular o diferencial de momento em relação a qualquer ponto, não só em relação a origem de  $q(x)$ . Por exemplo, podemos obter o diferencial de momento em relação a  $o'$

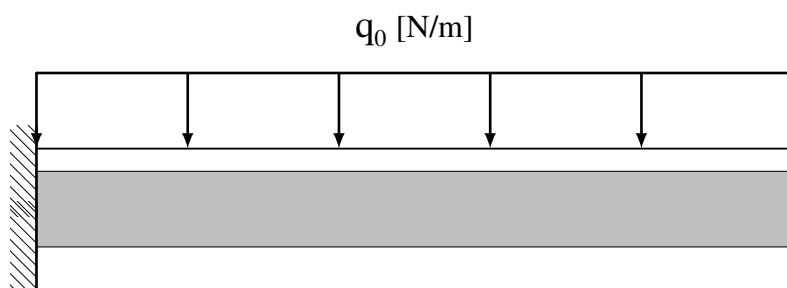


em que podemos notar que o vetor posição de  $o'$  até  $\zeta$  aponta para a esquerda, tal que está em  $-\mathbf{i}$ . Assim, o momento total em  $o'$  é dado por

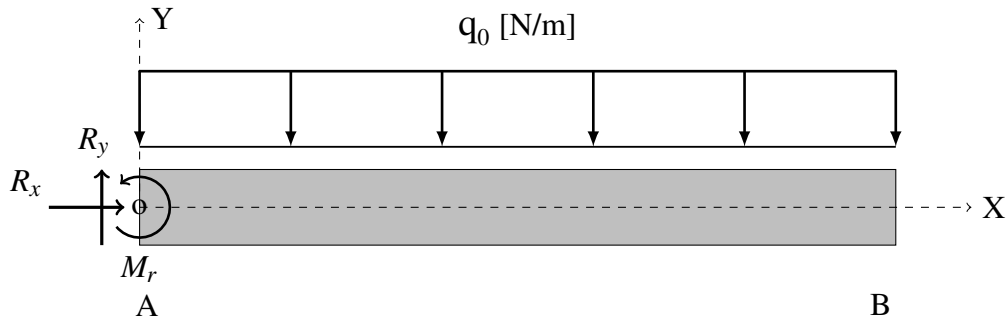
$$\mathbf{M}_o = \int_0^L -(L - \zeta) \mathbf{i} \times q(\zeta) d\zeta \mathbf{j} \text{ [Nm]}.$$

## Exemplo

Seja a viga engastada submetida a um carregamento distribuído constante  $q_0$  [N/m]



Como a viga está engastada, teremos até três reações



O equilíbrio de forças será

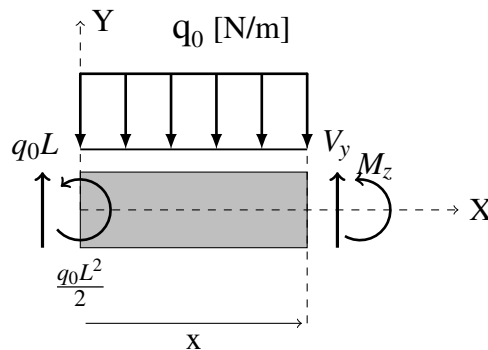
$$\sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + \int_0^L -q_0 dx \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

tal que  $R_x = 0$  e  $R_y = q_0 L$ . O equilíbrio de momentos em relação a o é

$$\sum \mathbf{M}_o = M_r \mathbf{k} + \int_0^L x \mathbf{i} \times (-q_0) \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

tal que  $M_r = \frac{q_0 L^2}{2}$ .

Para obtermos os diagramas de esforços, inicialmente observamos que não existem forças concentradas ao longo do comprimento, somente forças distribuídas. Como a equação da força distribuída não se altera ao longo do comprimento (neste exemplo o carregamento é constante), podemos estudar o equilíbrio de forças em um corte hipotético a uma distância  $x$  do engaste



obtendo

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y + R_y + \int_0^x -q_0 dx = 0$$

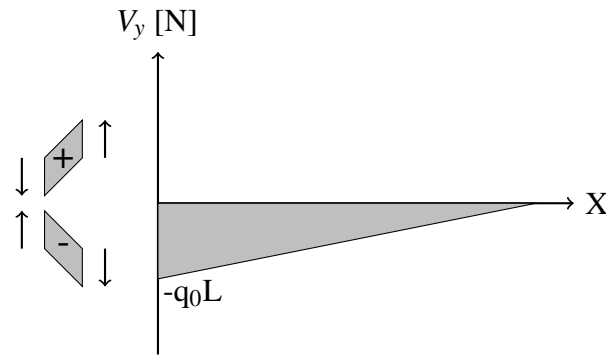
resultando em

$$V_y = q_0(x - L).$$

Neste ponto é importante enfatizarmos algumas conclusões obtidas com este exemplo:

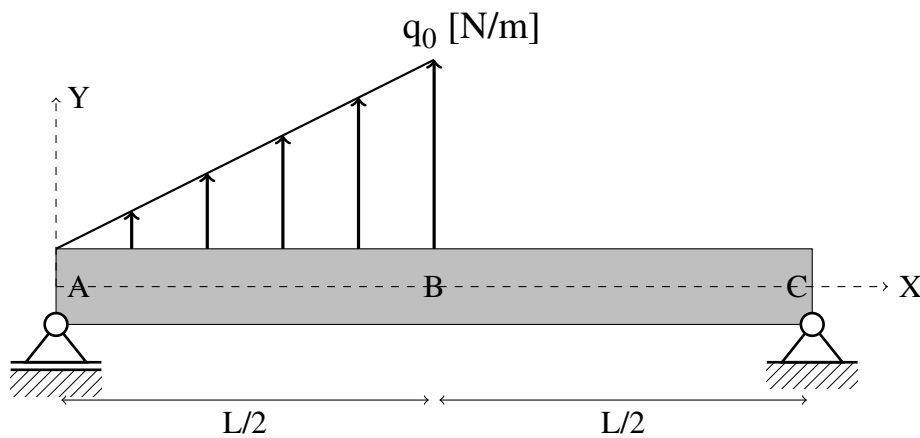
- neste exemplo o maior valor de esforço cortante se situa no engaste ( $x = 0$ ), significando que a parte da direita da estrutura está aplicando uma força (para baixo) de magnitude  $q_0 L$ ;
- neste exemplo no ponto  $x = L$  o valor do esforço cortante é nulo, pois não existe força aplicada no ponto;
- na presença de um carregamento distribuído de valor constante, o diagrama de esforços cortantes tem variação linear.

Assim, o diagrama de esforços cortantes para este exemplo é



### Exemplo

Seja a viga bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído com variação linear entre  $x = 0$  e  $x = L/2$



O primeiro passo consiste em determinar a equação que descreve o carregamento, no caso, a equação de uma reta

$$q(x) = a + bx.$$

Para obter os coeficientes da equação da reta, utilizamos os valores conhecidos

$$q(x=0) = a + b0 = 0 \rightarrow a = 0$$

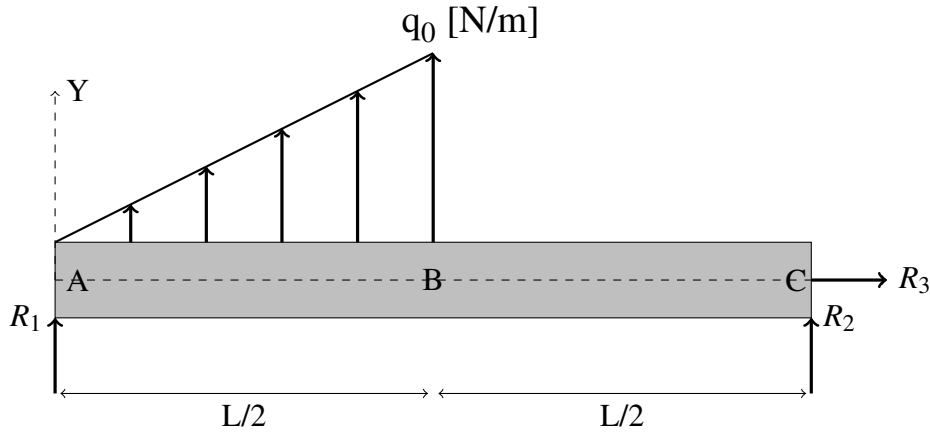
e

$$q(x=L/2) = a + bL/2 = q_0 \rightarrow b = \frac{2q_0}{L}$$

tal que a equação que descreve o carregamento é

$$q(x) = \frac{2q_0}{L}x \text{ [N/m]}$$

estando definida no intervalo  $0 < x < L/2$ . Com a expressão do carregamento, podemos proceder com a determinação das reações nos apoios. Como os apoios são rotulados, as únicas reações existentes são forças verticais e/ou horizontais



O equilíbrio de forças e de momentos é descrito por

$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{i} + \int_0^{L/2} q(x) \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

e

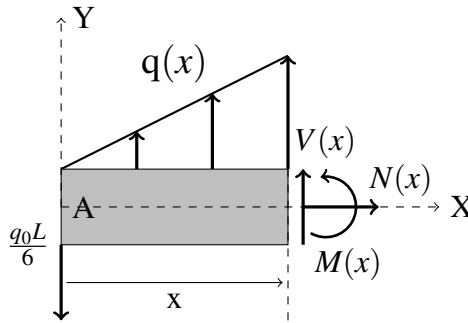
$$\sum \mathbf{M}_o = L \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j} + \int_0^{L/2} x \mathbf{i} \times q(x) \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

resultando em

$$R_1 = -\frac{q_0 L}{6}, \quad R_2 = -\frac{q_0 L}{12}, \quad R_3 = 0$$

De posse das reações, podemos agora estudar a distribuição de esforços internos. Para isto, observamos que a estrutura é submetida a um carregamento distribuído linear entre  $x = 0$  e  $x = L/2$  e está livre de carregamentos até  $x = L$ . Assim, devido a mudança no carregamento, devemos estudar dois cortes hipotéticos.

O primeiro corte deve ser realizado para  $0 < x < L/2$ , com DCL



O somatório de forças em  $Y$  é

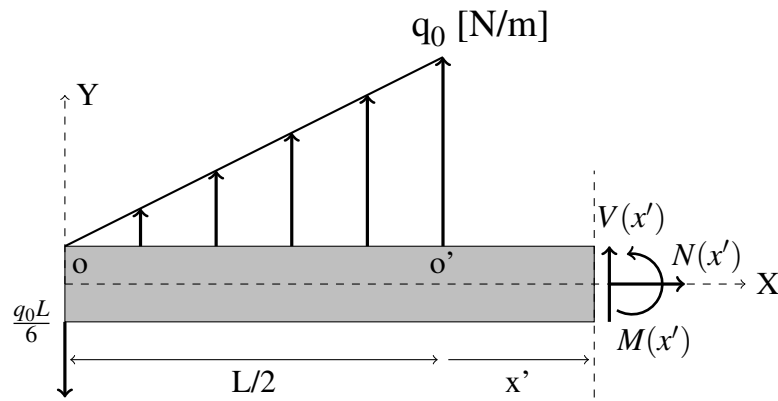
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y + \int_0^x q(x) dx = 0 \\ &= R_1 + V_y + \int_0^x \frac{2q_0}{L} x dx = 0 \end{aligned}$$

resultando em

$$V_y = \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 x^2}{L}$$

que é uma expressão quadrática.

Para obtermos a expressão do segundo trecho, definimos um novo sistema de coordenadas, com origem  $o'$  em  $x = L/2$ , de acordo com o DCL



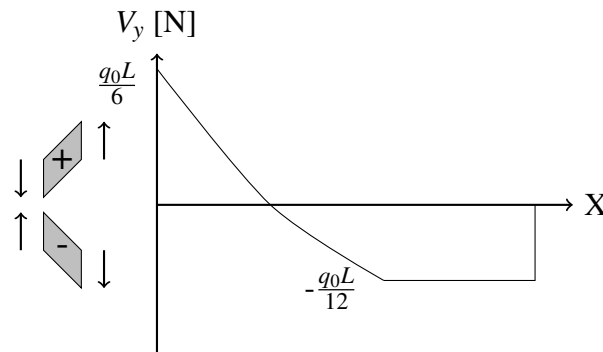
e o equilíbrio de esforços verticais resulta em

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y(x') + \int_0^{L/2} q(x) dx = 0 \\ &= R_1 + V_y(x') + \frac{q_0 L}{4} = 0\end{aligned}$$

tal que

$$V_y(x') = +\frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 L}{4} = -\frac{q_0 L}{12}$$

é constante em todo o trecho. Assim, o diagrama de esforços cortantes para o exemplo é



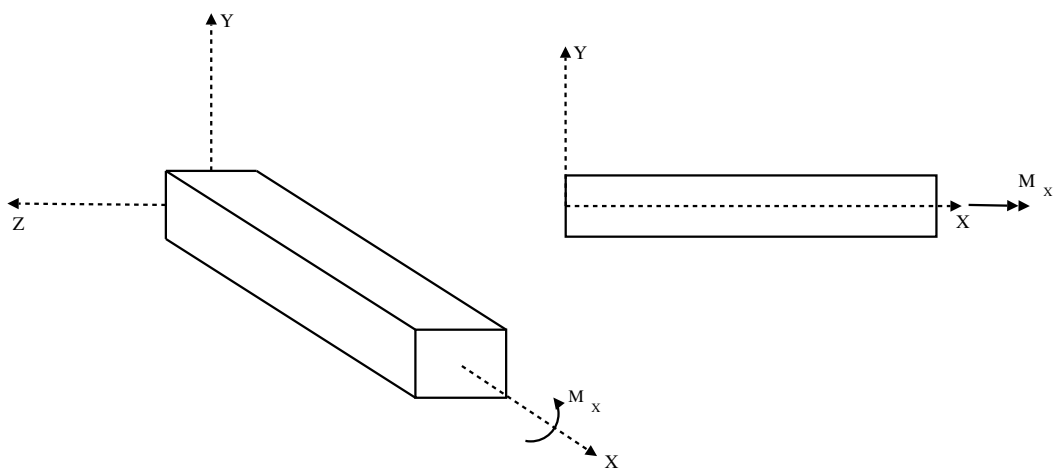
Com este exemplo, chegamos as seguintes conclusões:

- quando o carregamento distribuído tem variação linear, o diagrama de esforços cortantes apresenta variação quadrática;
- é aconselhável realizar uma mudança de variável ao realizarmos novos cortes. Isto evitará problemas futuros ao lidarmos com carregamentos distribuídos mais complicados.

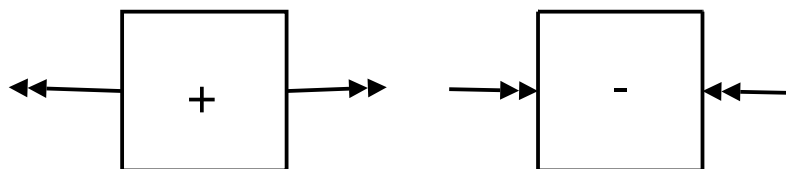
# Capítulo 3

## Momentos

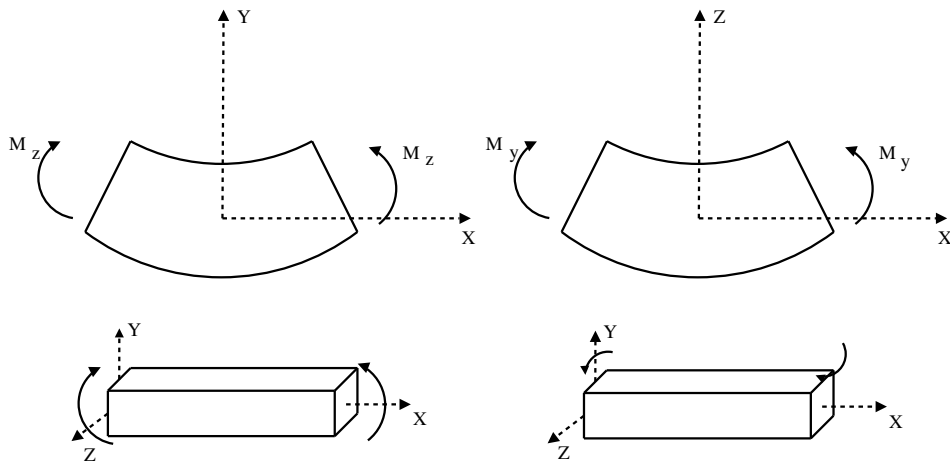
Podemos separar momentos em dois tipos, de acordo com seu efeito sobre o corpo em estudo: momentos fletores e momentos torsores. O momento torsor é aquele que faz com que a seção transversal do corpo gire em torno do seu eixo axial, que será chamado de eixo  $x$  no presente texto



Quando observamos a peça em uma vista perpendicular ao eixo onde o momento torsor é aplicado, utilizamos a notação de dupla flecha, mostrada no canto superior da figura. A convenção de sinal para o momento torsor positivo é a indicada na figura acima: se o momento aplicado faz a seção girar em torno do eixo axial, no sentido anti-horário (o sentido em que os ângulos são tomados como positivos na trigonometria), então o momento torsor é positivo. Assim, se isolarmos um pedaço de material de um corpo submetido a momentos torsores, obtemos a seguinte convenção de sinais



Momentos fletores, por sua vez, são as componentes de momento que fazem as seções transversais da peça girarem em torno dos eixos  $Y$  e  $Z$ . Assim, um momento que faz a seção transversal girar em torno do eixo  $Z$  é chamado de momento fletor  $M_z$ , e um momento que faz a seção transversal girar em torno do eixo  $Y$  é chamado de momento fletor  $M_y$



A convenção de sinal para momentos fletores positivos é a indicada na figura acima.

### Exemplo

Considere uma viga engastada submetida a um momento fletor concentrado  $M_c$ .



Como este é o único carregamento aplicado na estrutura, observamos que de todas as possíveis reações no engaste, apenas a reação de momento fletor  $M_r$  existirá



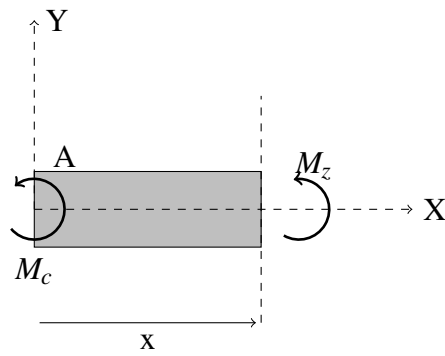
Por equilíbrio de momentos

$$\sum \mathbf{M}_A = M_r \mathbf{k} - M_c \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

tal que

$$M_r = M_c.$$

O procedimento para obtermos a distribuição de momentos fletores na estrutura é a mesma utilizada para obtermos os diagramas de esforços cortantes: realizamos um corte hipotético em uma seção transversal e determinamos quais esforços internos são realizados por uma parte da estrutura sobre a parte remanescente. Para o exemplo observamos que não existe alteração do carregamento externo entre 0 e  $L$ , de tal forma que, para um corte a uma distância qualquer  $x$

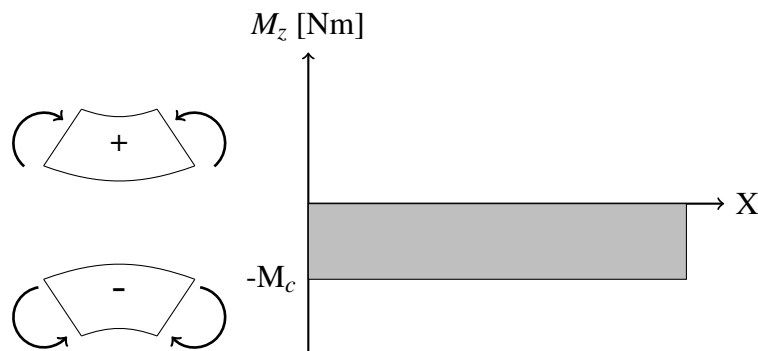


$$\sum M_A = M_c + M_z(x) = 0$$

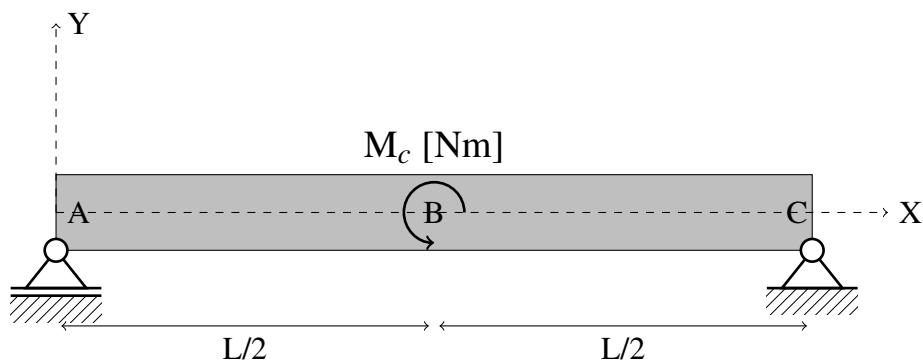
tal que

$$M_z(x) = -M_c$$

em que o sinal negativo indica que a estrutura do exemplo está sendo curvada para baixo (sentido negativo do eixo  $Y$ ). O diagrama de momentos fletores  $M_z$  da estrutura é

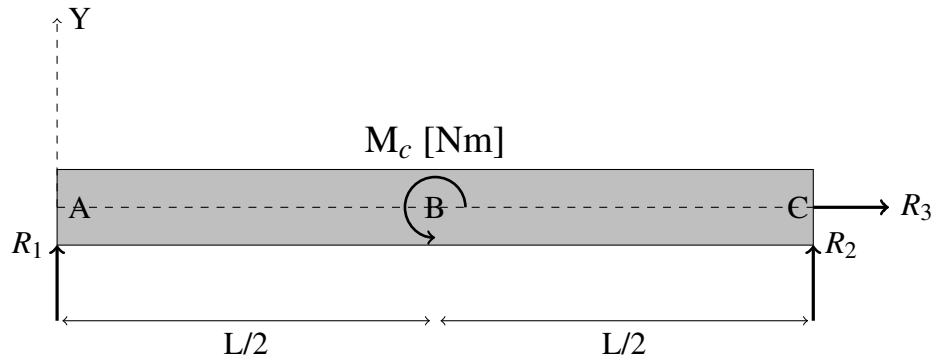


### Exemplo



Neste exemplo, verificamos que existem somente reações verticais, uma vez que os apoios rotulados não apresentam reações de momento fletor. As reações são obtidas por relações de equilíbrio



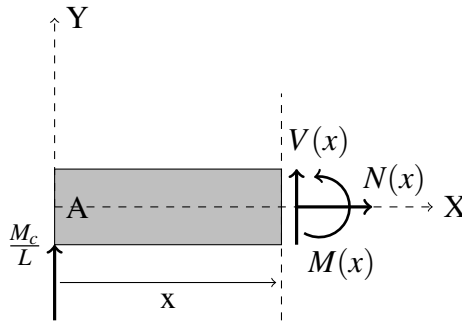


$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_A &= M_c \mathbf{k} + L \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

resultando em

$$R_1 = \frac{M_c}{L} \text{ e } R_2 = -\frac{M_c}{L}$$

Devido ao fato de existir uma descontinuidade no carregamento em  $x = L/2$  devemos estudar a distribuição de esforços internos com o auxílio de dois cortes hipotéticos. Para  $x < L/2$  temos o DCL



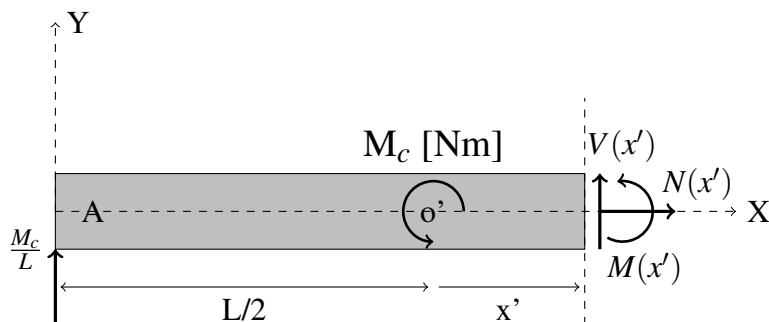
estudamos o equilíbrio da seção

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= R_1 \mathbf{j} + V_y(x) \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_A &= M_z(x) \mathbf{k} + x \mathbf{i} \times V_y(x) \mathbf{j} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}V_y(x) &= -R_1 = -\frac{M_c}{L} \\ M_z(x) &= R_1 x = \frac{M_c}{L} x.\end{aligned}$$

Para o trecho após o momento concentrado ( $x > L/2$ ), devemos estudar novamente o equilíbrio de um corte hipotético. Para isto, realizamos um novo corte, a uma distância  $x'$  do ponto B, com DCL



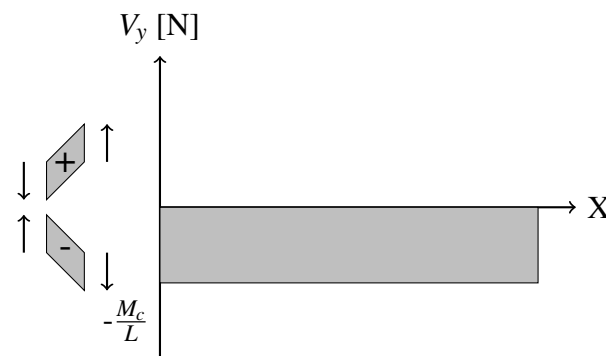
e, novamente estudando o equilíbrio,

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= R_1 \mathbf{j} + V_y(x') \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_A &= M_z(x') \mathbf{k} + \left(x' + \frac{L}{2}\right) \mathbf{i} \times V_y(x') \mathbf{j} + M_c \mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

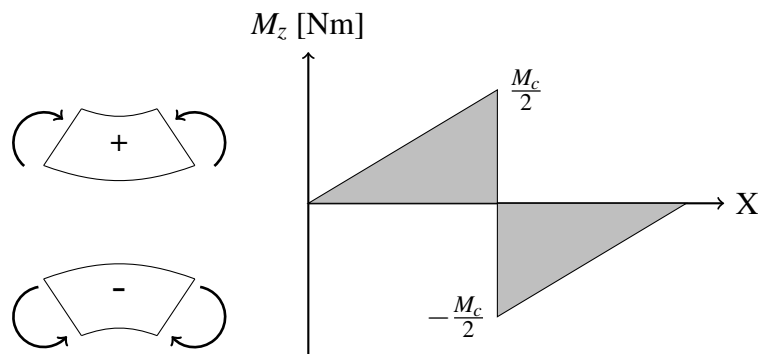
de onde obtemos

$$\begin{aligned}V_y(x') &= -\frac{M_c}{L} \\ M_z(x') &= M_c \left(\frac{x'}{L} - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

para  $x' \in (0, \frac{L}{2}]$ . Assim, os diagramas de esforços internos para esta estrutura são



e

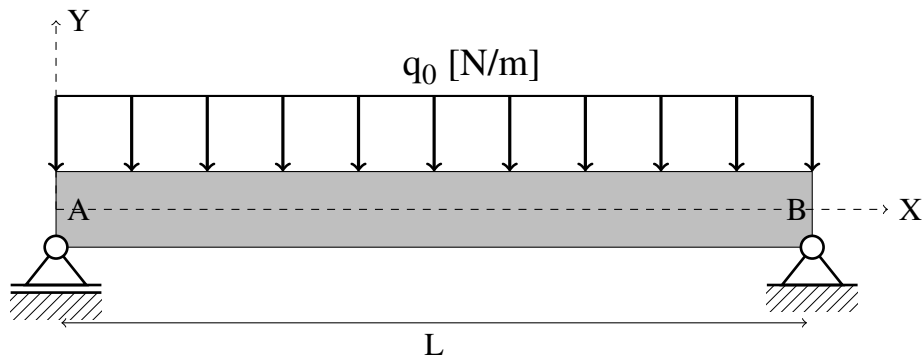


Com base neste exemplo, podemos verificar que

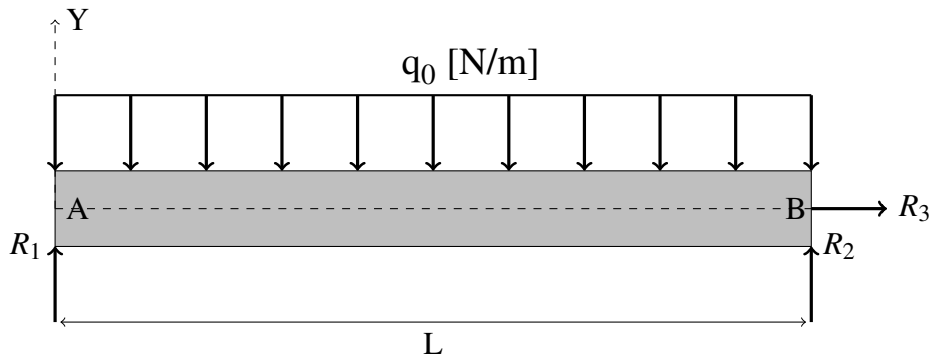
- a presença de um momento fletor concentrado faz com que existe uma descontinuidade (salto) no diagrama de momentos fletores. A magnitude desta descontinuidade é igual a do momento fletor aplicado no ponto;
- apoios não restringem o giro da seção e portanto não tem reação de momento. Desta forma, o diagrama de momentos fletores deve apresentar valores nulos em apoios (a não ser que um momento concentrado seja aplicado sobre o apoio);
- a presença de um momento concentrado não implica em descontinuidades no diagrama de esforços cortantes.

**Exemplo**

Seja a estrutura bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído constante:



O DCL utilizado para calcularmos as reações nos apoios é



tal que

$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{i} + \int_0^L -q_0 \mathbf{j} \, dx = \mathbf{0}$$

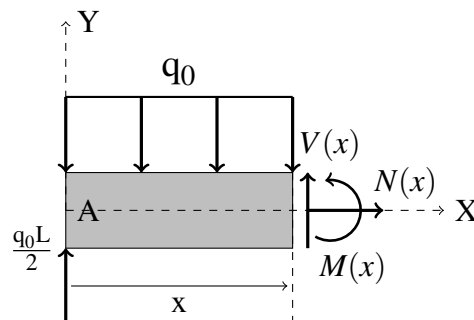
e

$$\sum \mathbf{M}_A = L \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j} + \int_0^L x \mathbf{i} \times -q_0 \mathbf{j} \, dx = \mathbf{0},$$

resultando em

$$R_1 = R_2 = \frac{q_0 L}{2}.$$

Como o carregamento distribuído é contínuo por todo o comprimento da estrutura, observamos que um corte hipotético e genérico é suficiente para descrever corretamente a distribuição de esforços internos. Assim, o DCL do corte é



e as equações de equilíbrio no corte são

$$\sum \mathbf{F} = \frac{q_0 L}{2} \mathbf{j} + V_y(x) \mathbf{j} + \int_0^x -q_0 \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

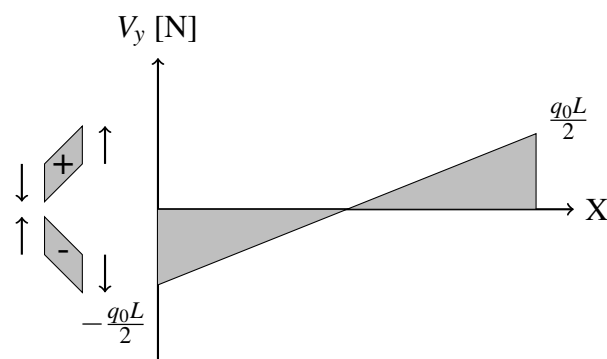
$$\sum \mathbf{M}_A = x \mathbf{i} \times V_y(x) \mathbf{j} + M_z(x) \mathbf{k} + \int_0^x x \mathbf{i} \times -q_0 \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

resultando em

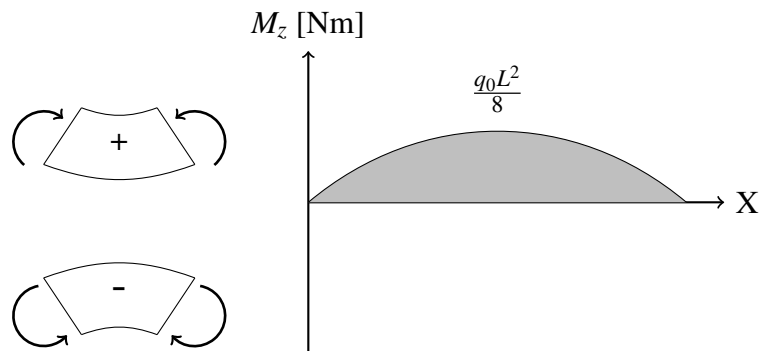
$$V_y(x) = q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

$$M_z(x) = \frac{q_0 L}{2} x - \frac{q_0}{2} x^2$$

com diagramas



e



Com este exemplo verificamos que

- um carregamento distribuído de valor constante implica em um diagrama de esforços cortantes com variação linear e em um diagrama de momentos fletores com variação quadrática;
- o ponto com o máximo valor de momento ( $x = L/2$ ) é o ponto com esforço cortante nulo;

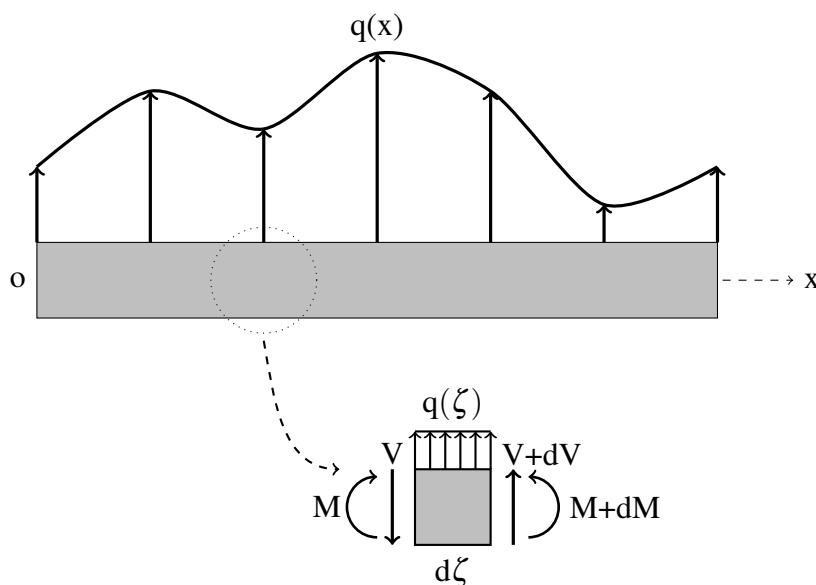
# Capítulo 4

## Relações Diferenciais entre $q$ , $V$ e $M$

De posse de todas as conclusões obtidas nos exemplos anteriores, observamos de forma empírica que:

- nos pontos onde existem forças concentradas ocorrem descontinuidades de mesma magnitude nos diagramas de esforços cortantes;
- nos pontos onde existem momentos concentrados ocorrem descontinuidades de mesma magnitude nos diagramas de momentos fletores;
- em regiões sem carregamento, o diagrama de esforços cortantes mantém um valor constante;
- os diagramas de momentos fletores só são constantes em regiões com esforços cortantes nulos;
- em regiões com carregamento distribuído constante, os esforços cortantes têm variação linear e os momentos fletores tem variação quadrática;
- em regiões com carregamento distribuído linear, os esforços cortantes têm variação quadrática.

Para descrevermos estes comportamentos de forma estruturada, vamos realizar um estudo de um pedaço qualquer de uma estrutura submetida a um carregamento distribuído genérico



Mesmo sendo  $q(x)$  uma função qualquer, podemos estudar um pedaço de comprimento  $d\zeta$  como estando submetido a uma distribuição constante  $q(x = \text{zeta})$  (isto é, o valor da função  $q(x)$  no ponto onde realizamos o corte), pois  $d\zeta$  é arbitrário. Para manter o equilíbrio do pedaço em estudo, devemos considerar os possíveis acréscimos dos esforços internos. Por este motivo, escrevemos  $V+dV$  e

$M+dM$  no corte da direita. O nosso objetivo é justamente determinar qual é a forma desses incrementos. Por equilíbrio de forças verticais

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -V + (V + dV) + q d\zeta = 0$$

o que leva a concluir que

$$dV = -q d\zeta$$

ou

$$\boxed{\frac{dV(\zeta)}{d\zeta} = -q(\zeta)}$$

que justifica uma boa parte das conclusões obtidas anteriormente, pois a expressão mostra que a distribuição de esforços cortantes será dado pela integral do carregamento distribuído. Assim, se o carregamento distribuído tem forma polinomial, o grau do polinômio que descreve o esforço cortante será  $1 \times$  maior. Se o carregamento distribuído é nulo, então verificamos que a distribuição de esforços cortantes deve ser constante.

Para o equilíbrio de momentos em torno da face esquerda da seção

$$\sum M = 0 \rightarrow -M + (M + dM) + (V + dV) d\zeta + \frac{q d\zeta^2}{2} = 0$$

de onde observamos que alguns dos termos são muito pequenos, pois são produtos de termos infinitesimais ( $d\zeta^2$  e  $dV d\zeta$ ). Assim, obtemos

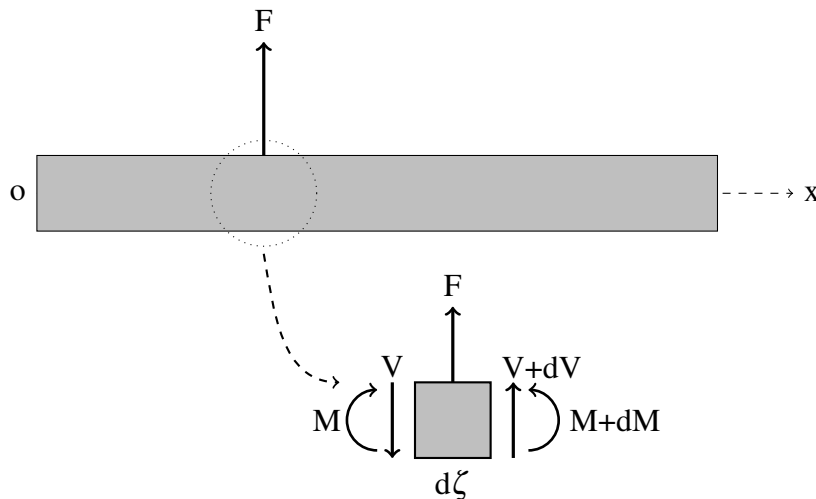
$$\boxed{\frac{dM(\zeta)}{d\zeta} = -V(\zeta)}$$

que permite explicar o acréscimo de  $1 \times$  no grau do polinômio que descreve a distribuição de esforços cortantes e também o fato de o diagrama de momentos fletores ser linear quando a distribuição de esforços cortantes é nula. De igual importância é a observação de que os pontos de maior (em módulo) valor da solicitação de momento fletor se situarem em pontos com cortante nulo. Para o último exemplo, observamos que a distribuição de esforços cortantes é dada por

$$V(x) = q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

que assume valor nulo em  $x = L/2$ , justamente o ponto de maior momento fletor.

Para o caso de forças concentradas observamos que



tal que o equilíbrio na seção é dada por

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -V + F + (V + dV) = 0$$

tal que

$$dV(\zeta) = -F$$

ou seja, ocorre um salto no diagrama de esforços cortantes na posição de F, no sentido contrário à força. No entanto, o somatório de momentos em relação a face da esquerda do corte é dado por

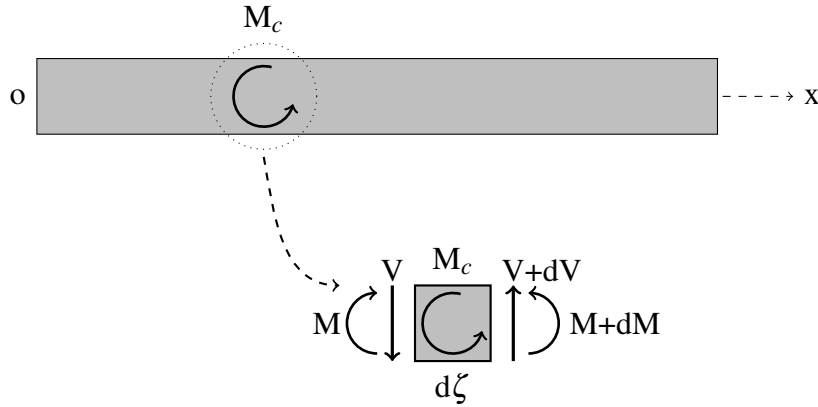
$$\sum M = 0 \rightarrow -M + (M + dM) + (V + dV)d\zeta + F\frac{d\zeta}{2} = 0$$

ou

$$\sum M = dM + Vd\zeta - F\frac{d\zeta}{2} = 0$$

e no limite  $d\zeta \rightarrow 0$  verificamos que  $dM \rightarrow 0$ , ou seja, uma força concentrada não provoca salto no diagrama de momentos.

Da mesma forma, para o caso de um momento concentrado



temos somatório de forças

$$\sum F_y = -V + dV = 0 \rightarrow dV = 0$$

tal que não temos salto no diagrama de esforços cortantes. O balanço de momento em relação à face esquerda da seção é dado por

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -M + M_c + (M + dM) + (V + dV)d\zeta = 0$$

e, lembrando que neste caso não temos variação de esforço cortante, concluímos que a única fonte de variação de momentos fletores é o momento concentrado aplicado, isto é

$$dM(\zeta) = -M_c$$

ou seja, teremos um salto no diagrama de momentos concentrados, de valor igual ao momento concentrado e sinal oposto.

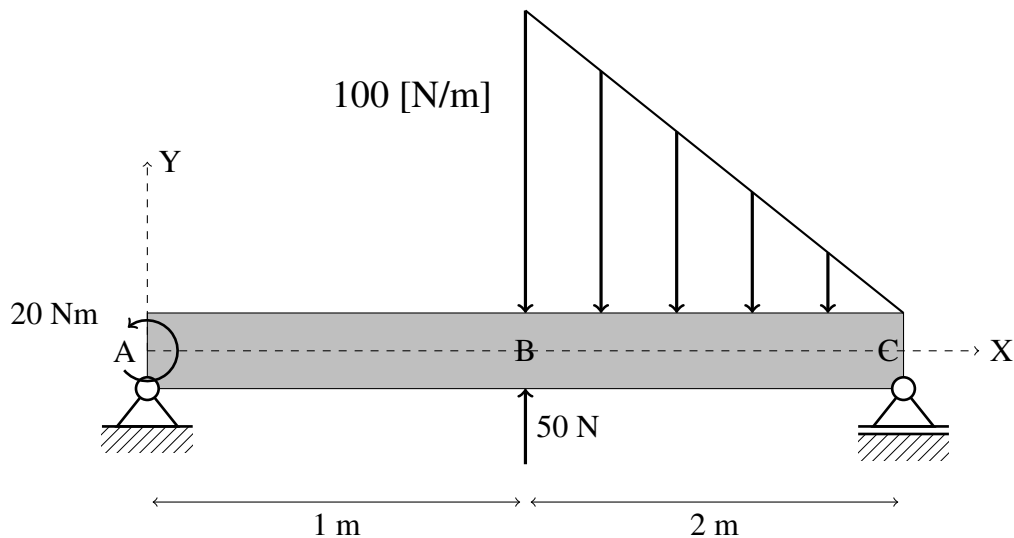
# Capítulo 5

## Exemplos

O objetivo deste capítulo é apresentar a solução para alguns exemplos mais completos.

### 5.1 Exemplo 1

Considere o problema definido na Fig. 5.1



O primeiro passo é obter a equação que descreve o carregamento distribuído (linear). Caso a origem do sistema de referência utilizado para descrever esse carregamento seja colocada em B (início do carregamento) podemos escrever

$$q(x') = a + bx', \quad x' \in (0, 2)\text{m}$$

e podemos obter os coeficientes da equação da reta com

$$q(x' = 0) = a + 0b = -100$$

$$q(x' = 2) = a + 2b = 0$$

tal que  $a = -100$  [N/m] e  $b = 50$  [N/m<sup>2</sup>] e a equação será  $q(x') = -100 + 50x'$  [N/m].

Uma outra opção é utilizar uma variável  $x$  com origem em A, tal que

$$w(x) = c + dx, \quad x \in (1, 3)\text{m}$$

e podemos obter os coeficientes da equação da reta com

$$w(x = 1) = c + d = -100$$

$$w(x = 3) = c + 3d = 0$$

tal que  $c = -150$  [N/m] e  $d = 50$  [N/m<sup>2</sup>] e a equação será  $w(x) = -150 + 50x$  [N/m].



### 5.1.1 Cálculo das reações

O apoio em A é um apoio fixo e restringe a translação nas direções (globais) X e Y. Desta forma, temos duas reações:  $R_0$  na direção X e  $R_1$  na direção Y. O apoio em C é um apoio rolante e restringe somente a translação em Y, tal que teremos uma reação vertical  $R_2$  nesta posição. Assumindo que todas as reações estão nas direções positivas do sistema XY, podemos escrever o equilíbrio de forças como

$$\sum \mathbf{F} = R_0 \mathbf{i} + R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + 50 \mathbf{j} + \int_0^2 q(x') dx' \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

ou

$$\sum \mathbf{F} = R_0 \mathbf{i} + R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + 50 \mathbf{j} + \int_1^3 w(x) dx \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

em que a diferença se dá em como escolhemos escrever a equação do carregamento distribuído. Obviamente, não deve existir diferença entre essas duas equações e, de fato,

$$\int_0^2 -100 + 50x' dx' = \int_1^3 -150 + 50x dx = -100 \text{ N}.$$

Assim, observamos que  $R_0 = 0$  (pois não existem forças aplicadas na direção X) e

$$R_1 + R_2 = 50 \text{ N}.$$

O somatório de momentos admite mais possibilidades. Vamos investigar algumas opções:

#### Somatório de momentos em B

$$\sum \mathbf{M}_B = 20 \mathbf{k} + (-1 \mathbf{i} \times R_1 \mathbf{j}) + (2 \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j}) + \int_0^2 (x' \mathbf{i} \times q(x') \mathbf{j}) dx' = \mathbf{0}$$

#### Somatório de momentos em A, usando $q(x')$

$$\sum \mathbf{M}_A = 20 \mathbf{k} + (1 \mathbf{i} \times 50 \mathbf{j}) + (3 \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j}) + \int_0^2 ((1 + x') \mathbf{i} \times q(x') \mathbf{j}) dx' = \mathbf{0}$$

#### Somatório de momentos em A, usando $w(x)$

$$\sum \mathbf{M}_A = 20 \mathbf{k} + (1 \mathbf{i} \times 50 \mathbf{j}) + (3 \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j}) + \int_1^3 (x \mathbf{i} \times w(x) \mathbf{j}) dx = \mathbf{0}$$

#### Somatório de momentos em C, usando $q(x')$

$$\sum \mathbf{M}_C = 20 \mathbf{k} + (-3 \mathbf{i} \times R_1 \mathbf{j}) + (-2 \mathbf{i} \times 50 \mathbf{j}) + \int_0^2 (-(2 - x') \mathbf{i} \times q(x') \mathbf{j}) dx' = \mathbf{0}.$$

E, independente da escolha, obtemos as reações  $R_1 = 17,77 \text{ [N]}$  e  $R_2 = 32,22 \text{ [N]}$ .

### 5.1.2 Primeiro corte

Para o primeiro corte a opção óbvia é utilizar a variável  $x$ , com origem em A (pois não temos carregamento distribuído neste DCL). O somatório de forças pode ser escrito como

$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{j} + V_1(x) \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

tal que  $V_1(x) = -17,77 \text{ [N]}$ . O somatório de momentos em relação a A será

$$\sum \mathbf{M}_A = 20 \mathbf{k} + x \mathbf{i} \times V_1(x) \mathbf{j} + M_1(x) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

resultando em

$$M_1(x) = -20 + 17,77x \text{ [Nm]}.$$

### 5.1.3 Segundo corte

Para o segundo corte temos mais opções de equacionamento. Para o somatório de forças podemos utilizar

$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{j} + 50 \mathbf{j} + \int_0^{x'} q(x') dx' \mathbf{j} + V_2(x') \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad x' \in [0, 2]$$

tal que  $V_2(x') = -25(x')^2 + 100x' - 67,78$  [N]. A outra opção seria

$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{j} + 50 \mathbf{j} + \int_1^x w(x) dx \mathbf{j} + V_2(x) \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad x \in [1, 3]$$

com solução  $V_2(x) = -25x^2 + 150x - 193,77$  [N]. Ambas soluções para o cortante no segundo corte concordam em valores. Por exemplo, o começo do corte resulta em

$$V_2(x' = 0) = V_2(x = 1) = -67,77 \text{ [N]}$$

e no final do corte

$$V_2(x' = 2) = V_2(x = 3) = 32,23 \text{ [N]}.$$

O somatório de momentos em relação a A será

$$\sum \mathbf{M}_A = 20 \mathbf{k} + 1 \mathbf{i} \times 50 \mathbf{j} + (1 + x') \mathbf{i} \times V_2(x') \mathbf{j} + M_2(x') \mathbf{k} + \int_0^{x'} (1 + x') \mathbf{i} \times q(x') \mathbf{j} dx' = \mathbf{0}$$

resultando em

$$M_2(x') = 8,33(x')^3 - 50(x')^2 + 67,77x' - 2,23 \text{ [Nm]}.$$

Uma outra opção, ainda usando  $x'$ , é realizar o somatório de momentos em B, tal que

$$\sum \mathbf{M}_B = 20 \mathbf{k} + (-1 \mathbf{i} \times R_1 \mathbf{j}) + x' \mathbf{i} \times V_2(x') \mathbf{j} + M_2(x') \mathbf{k} + \int_0^{x'} x' \mathbf{i} \times q(x') \mathbf{j} dx' = \mathbf{0}$$

com o mesmo resultado.

Por fim, podemos calcular o somatório de momentos em A utilizando a variável  $x$

$$\sum \mathbf{M}_A = 20 \mathbf{k} + (1 \mathbf{i} \times 50 \mathbf{j}) + x \mathbf{i} \times V_2(x) \mathbf{j} + M_2(x) \mathbf{k} + \int_1^x x \mathbf{i} \times w(x) \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

que é válida para  $x \in (1, 3]$  m, resultando em

$$M_2(x) = 8,33x^3 - 75x^2 + 192,77x' - 128,33 \text{ [Nm]}.$$

Independente da escolha de variável, observamos que os valores nos extremos do intervalo são iguais

$$M_2(x' = 0) = M_2(x = 1) = -2,23 \text{ [Nm]}$$

e

$$M_2(x' = 2) = M_2(x = 3) = 0 \text{ [Nm]}$$

Vamos estudar os gráficos dos esforços internos. O gráfico (diagrama) de esforços cortantes é ilustrado na Fig. 5.1, em que podemos notar algumas informações importantes: em  $x = 0$  observamos um salto de 0 para  $-17,77$ , ou seja,  $-R_1$ . Da mesma forma, em  $x = 1^-$  temos um cortante de  $-17,77$  e em  $x' = 0^+$  (ou  $x = 1^+$ ) temos um cortante de  $-67,77$ , indicando um salto de  $-50$  no diagrama. Esse é exatamente o valor da força concentrada aplicada nesta posição. Por fim, em  $x = 3$  ou  $x' = 2$  temos um salto de  $32,23$  para 0, ou seja, um salto de valor  $-R_2$ . Também podemos notar que as relações diferenciais entre o esforço cortante e o carregamento distribuído são observadas, pois o

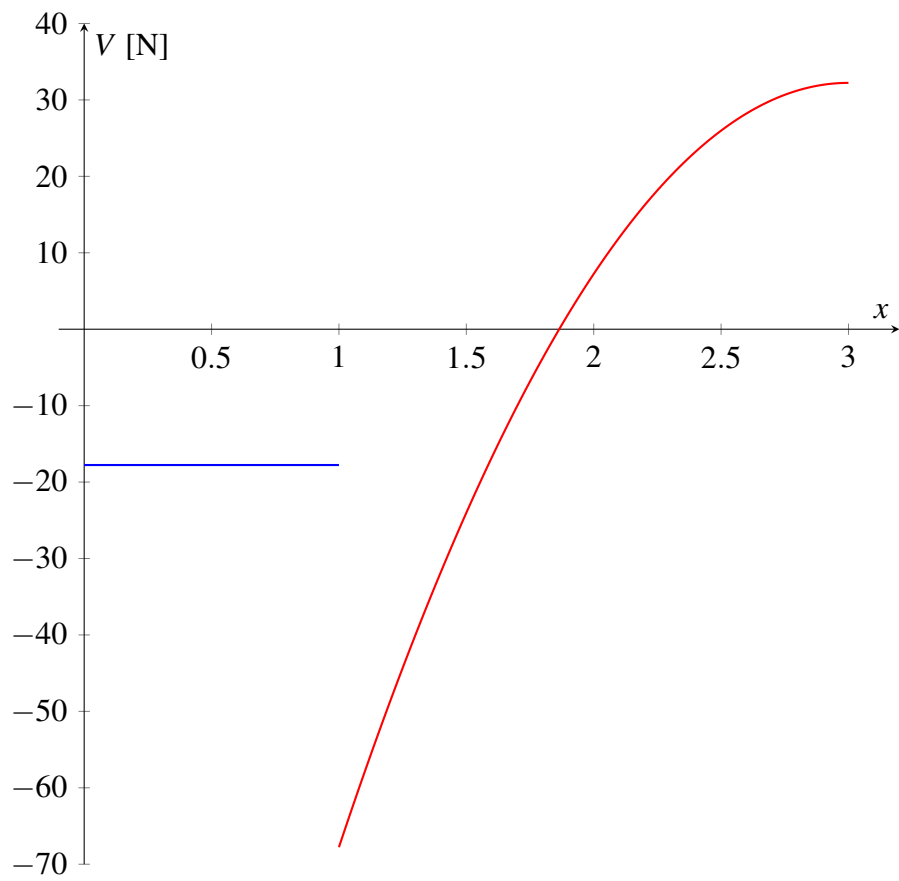


Figura 5.1: Esforço cortante para o exemplo 1.

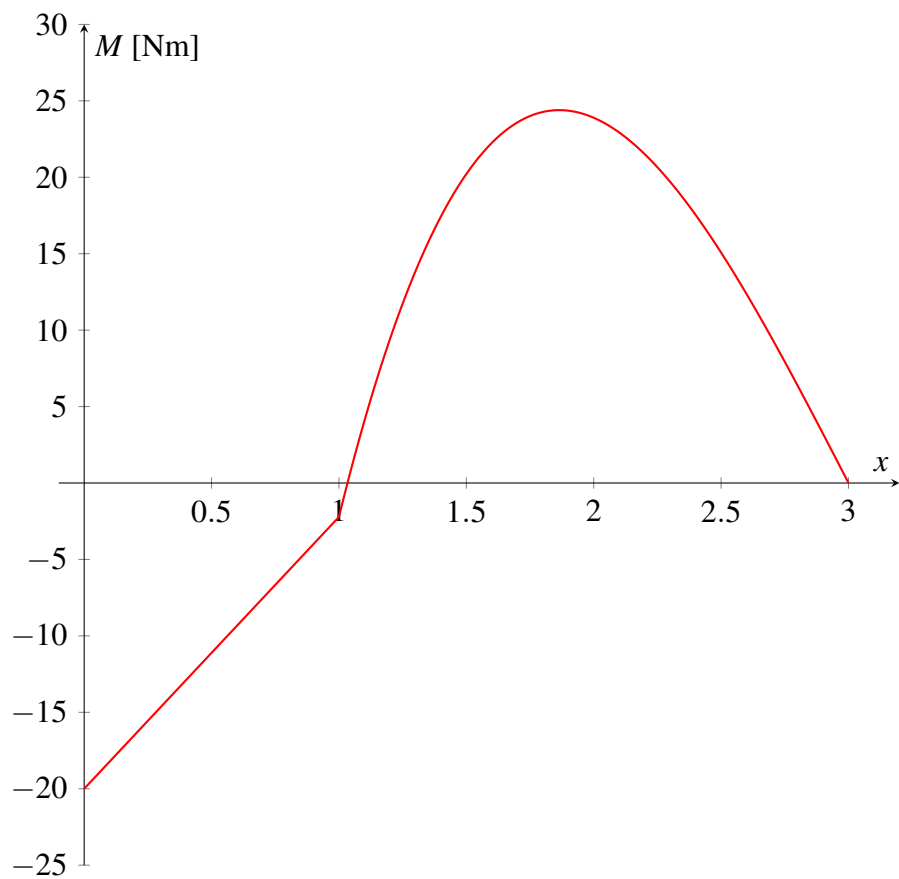


Figura 5.2: Momento fletor para o exemplo 1.

primeiro corte não tem carregamento distribuído, tal que o cortante é constante. Da mesma forma, o segundo corte tem um carregamento linear, tal que o cortante é quadrático.

O gráfico (diagrama) para o momento fletor é apresentado na Fig. 5.2, em que podemos observar apenas um salto, em  $x = 0$ . Esse salto de 0 para  $-20$  ocorre devido ao momento concentrado de 20 Nm aplicado nesta posição. Observa-se, também, a satisfação das relações diferenciais entre momento fletor e cortante, pois no primeiro trecho temos um cortante constante e um momento linear. No segundo trecho o cortante é descrito por um polinômio quadrático e o momento é descrito por um polinômio cúbico.

Outra informação importante que podemos obter utilizando as relações diferenciais é a localização do pico no diagrama de momentos. Uma observação dos gráficos indica que o pico de momentos no segundo trecho coincide com a passagem do esforço cortante por 0. Isso é esperado, pois

$$\frac{dM_2(x')}{dx'} = V_2(x')$$

e, quando  $M_2(x')$  tem valor extremo, sua derivada é nula, tal que  $V_2(x') = 0$ . Assim, a seção com pico de momento no segundo trecho é obtida com a solução da equação

$$V_2(x') = -25(x')^2 + 100x' - 67,78 = 0 \implies x'_1 = 0,865, x'_2 = 3,135$$

sendo que a segunda raiz não faz sentido, pois  $x' \in (0, 2]$  m. Com isso, podemos calcular o valor extremo de momento no segundo trecho

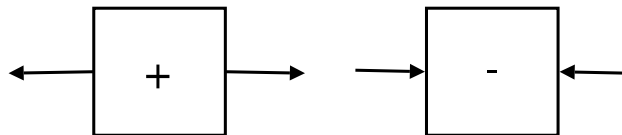
$$M_2(x' = 0,865) = 24,39 \text{ [Nm]}.$$

# Capítulo 6

## Esforço Normal

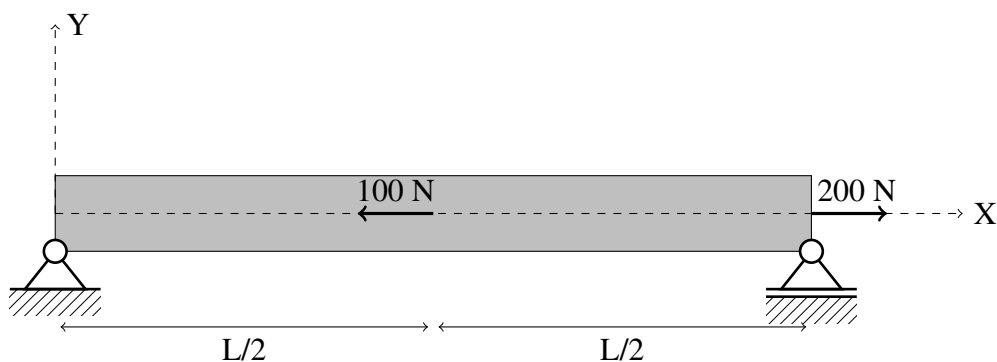
Ao suspendermos um peso utilizando uma corda, estamos tracionando a corda, pois cada pedaço da corda irá aumentar de comprimento. O esforço que produz tal efeito é chamado de esforço normal,  $N$ , podendo ser de tração (quando o corpo é 'puxado') ou de compressão (quando o corpo é 'empurrado'). Este tipo de esforço é muito importante no estudo de estruturas articuladas (treliças) onde os membros são submetidos exclusivamente a este tipo de esforço.

A convenção de sinais para os esforços normais é a seguinte: se um pedaço de material está sendo tracionado (puxado) então dizemos que o material está sendo submetido a um esforço normal positivo, e se o material está sendo comprimido (encurtado), então está sendo submetido a um esforço normal negativo.

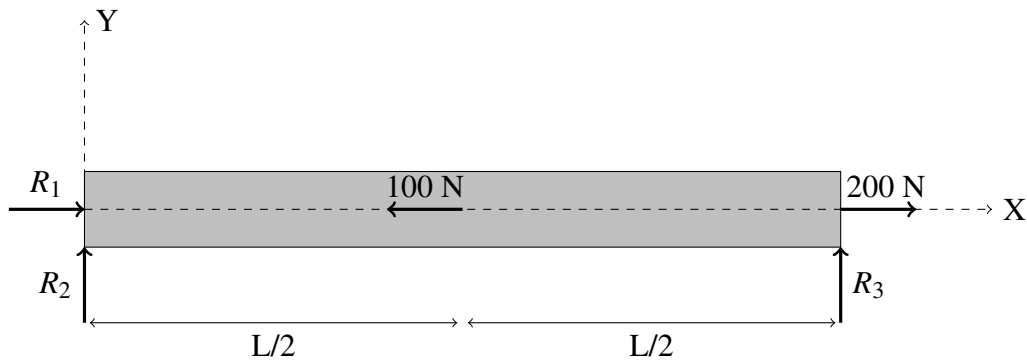


### Exemplo

Seja a estrutura submetida a duas forças axiais concentradas



com DCL



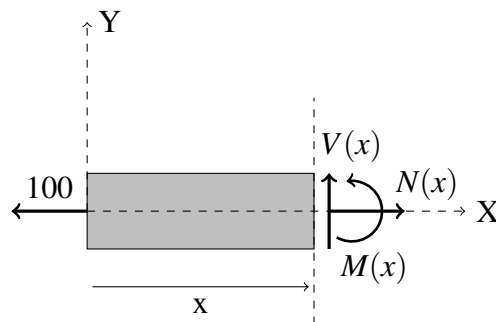
e podemos notar que como temos apenas forças horizontais, então teremos apenas uma reação, no apoio A. Por equilíbrio de forças horizontais, obtemos

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_1 - 100 + 200 = 0$$

tal que

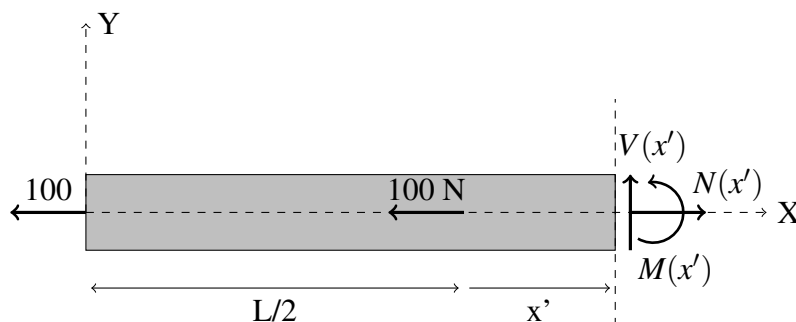
$$R_1 = -100 \text{ N.}$$

Como existe uma descontinuidade no carregamento em  $x = L/2$  devemos estudar a distribuição de esforços normais com dois cortes. Para o primeiro corte em  $x \in [0, L/2]$  m



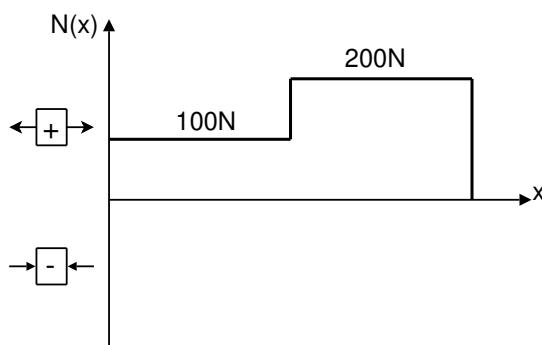
$$\sum F_x = 0 \rightarrow -100 + N(x) = 0 \rightarrow N(x) = 100 \text{ N}$$

tal que  $N(x)$ , para  $0 \leq x < L/2$  é constante e positivo, de valor 100 N. Isto indica que a primeira parte da estrutura está sendo tracionada (puxada). Para o segundo trecho em  $x' \in [0, L/2]$  m



$$\sum F_{x'} = 0 \rightarrow -100 - 100 + N(x') = 0 \rightarrow N(x') = 200 \text{ N}$$

indicando que o segundo trecho está sendo tracionado, com um valor de 200 N. O diagrama de esforços normais para este exemplo é

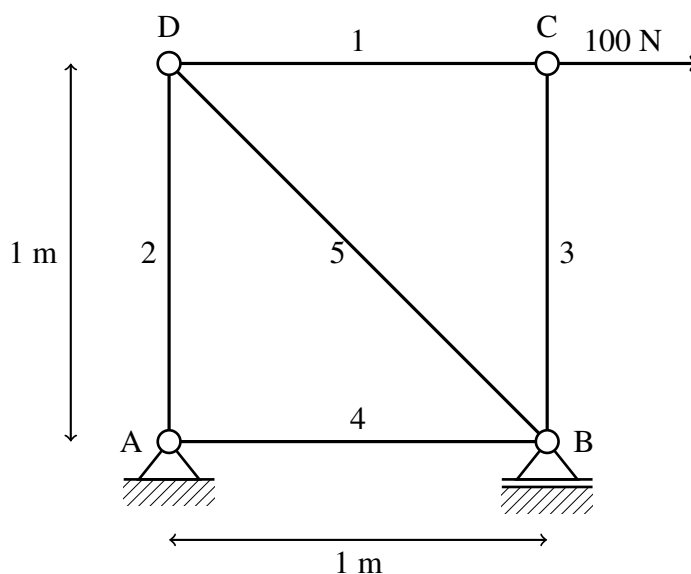


## 6.1 Treliças

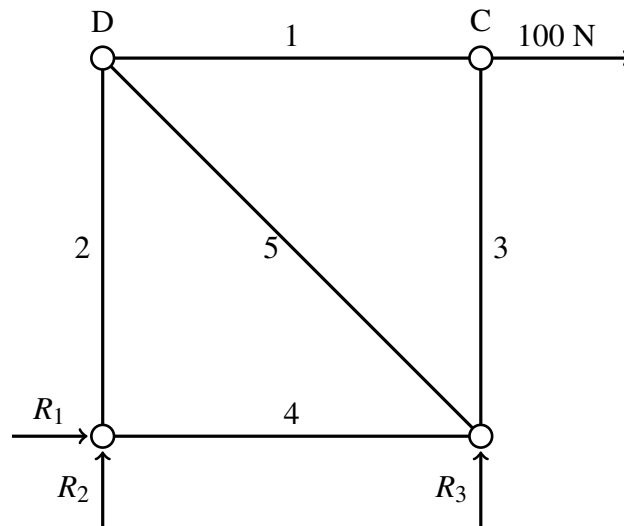
Treliças são estruturas formadas por membros retos (chamados de barras), conectados por rótulas (uniões que não transferem giros/momentos). Além disso, consideramos somente a aplicação de forças concentradas, que só podem ser aplicadas nas posições das uniões rotuladas.

Da consequência das hipóteses, verificamos que em treliças **não existem esforços cortantes e nem momentos**. Além disso, verificamos que os esforços normais que atuam em cada um dos membros da treliça são constantes ao longo do comprimento de cada barra (pois não existem outros esforços aplicados, somente nos nós).

Os esforços internos de uma treliça podem ser obtidos por cortes realizados em partes da estrutura. Por exemplo considere a treliça com 5 barras (numeradas de acordo com a figura)



com DCL



As reações podem ser obtidas com as equações de equilíbrio. Começando com o somatório de forças

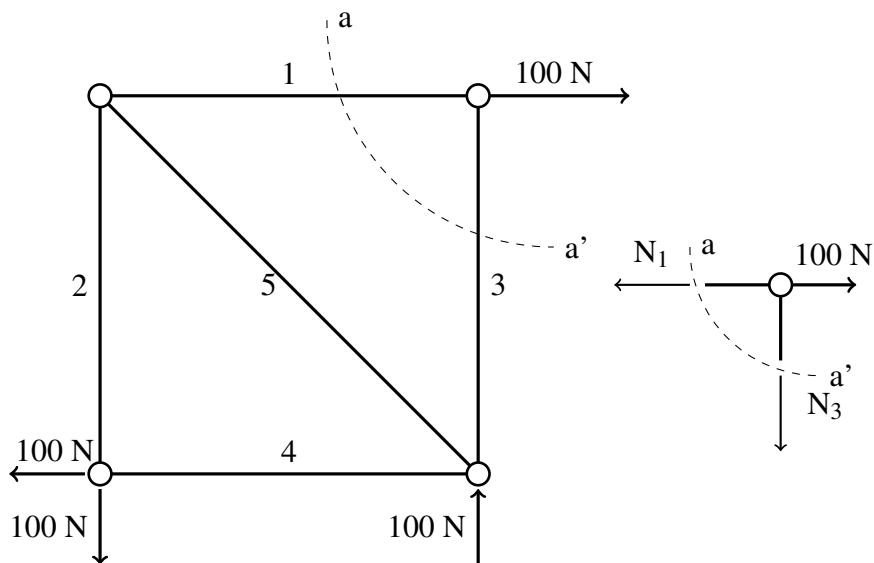
$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{i} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{j} + 100 \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

tal que  $R_1 = -100 \text{ N}$  e  $R_2 = -R_3$ . O somatório de momentos em relação ao ponto A é

$$\sum \mathbf{M}_A = 1 \mathbf{i} \times R_3 \mathbf{j} + (1 \mathbf{i} + 1 \mathbf{j}) \times 100 \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

tal que  $R_3 = 100 \text{ N}$  e  $R_2 = -100 \text{ N}$ .

Para obtermos os esforços internos, podemos iniciar com o corte aa'

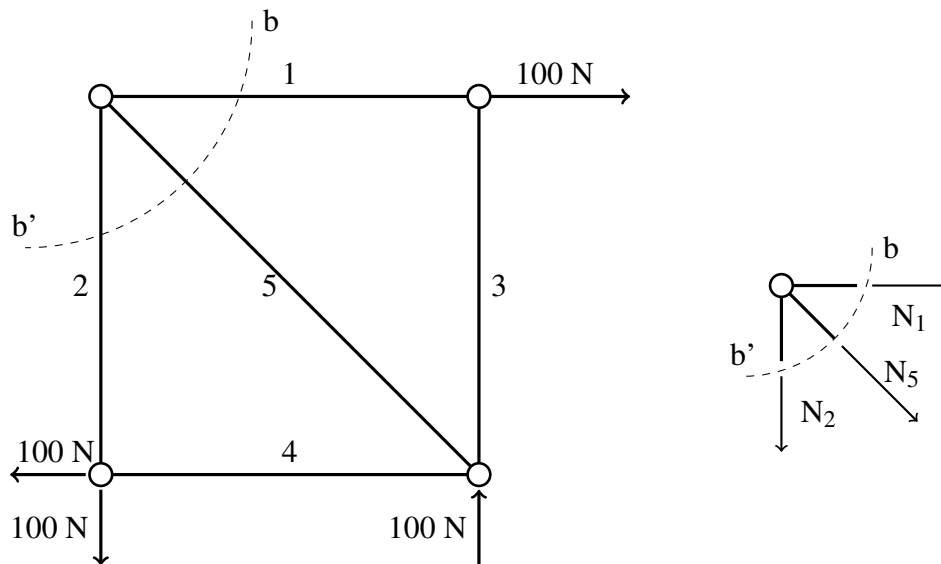


em que o sentido dos esforços internos  $N_1$  e  $N_3$  foram assumidos como positivos, ou seja, para fora do corte (sempre faça isso!). Por equilíbrio de esforços no corte, obtemos

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow -N_1 + 100 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow -N_3 + 0 = 0 \end{aligned}$$

de onde concluímos que o elemento 1 está sendo tracionado por uma força de 100 N e o elemento 3 não está sofrendo esforços normais. Estudando um outro corte





temos as equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\rightarrow N_1 + N_5 \cos(45^\circ) = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow -N_2 - N_5 \sin(45^\circ) = 0\end{aligned}$$

e, como já calculamos o valor de  $N_1$ , obtemos

$$N_5 = -\frac{N_1}{\cos(45^\circ)} = -\frac{100}{\cos(45^\circ)}$$

e

$$N_2 = 100 \frac{\sin(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = 100 \text{ N}$$

do que se conclui que o elemento 5 está sendo comprimido e o elemento 2 está sendo tracionado. Para obtermos o esforço normal no elemento 4, podemos fazer um corte que considere as barras 1 e 4 e as reações  $R_1$  e  $R_2$ . Como temos somente uma incógnita, podemos obter que  $N_4$  diretamente pelo somatório de forças em X, com  $N_4 = 100 \text{ N}$ . Assim, a barra 4 está tracionada.