

# Diagramas de Esforços Internos

Prof. Eduardo Lenz

5 de agosto de 2025

# Capítulo 1

## Introdução

Este material tem como objetivo apresentar um estudo sobre a transmissão de esforços no interior de corpos. Esta é a primeira etapa para entendermos como os esforços externos se distribuem no interior do corpo em estudo.

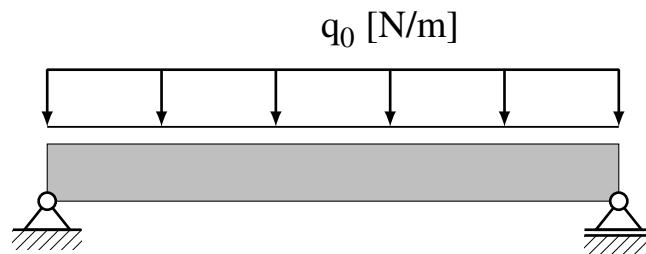
A versão atual do documento está sendo revisada, assim como as figuras. A ultima versão pode ser sempre encontrada em <https://github.com/CodeLenz/Notas-de-aula/MSO1>

# Capítulo 2

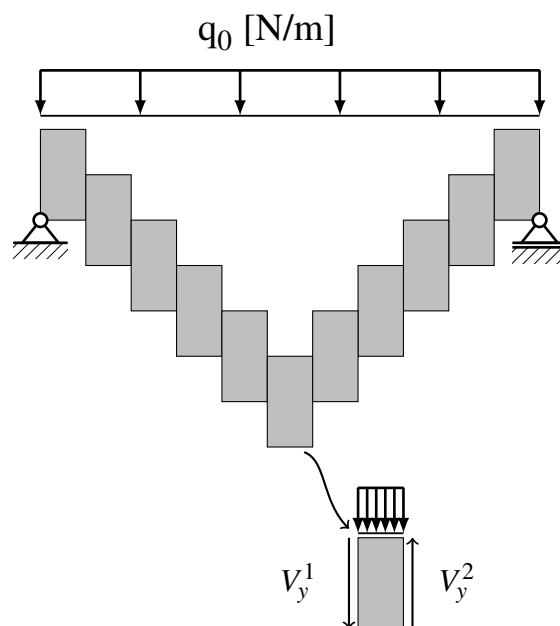
## Esforço Cortante

### 2.1 Definição

Tomemos como exemplo a estrutura



Ao aplicarmos um carregamento sobre a estrutura, essa irá se deformar. Isto ocorre pois as diferentes regiões do corpo exercem esforços umas sobre as outras e o corpo assume uma posição de equilíbrio diferente de quando não existiam esforços externos. Imaginando como o esforço externo se distribui, podemos visualizar o processo de transmissão de esforços. Para isto, vamos exagerar um pouco a posição final da estrutura e podemos visualizar o efeito de um dos esforços que atuam em estruturas: o **esforço cortante**. Para entender o que é o esforço cortante, podemos estudar o diagrama de corpo livre de um pequeno pedaço da estrutura

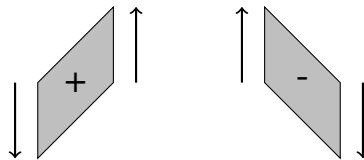


em que podemos verificar que para o pedaço em destaque estar em equilíbrio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y^1 + V_y^2 + \text{Esforços verticais} = 0.$$

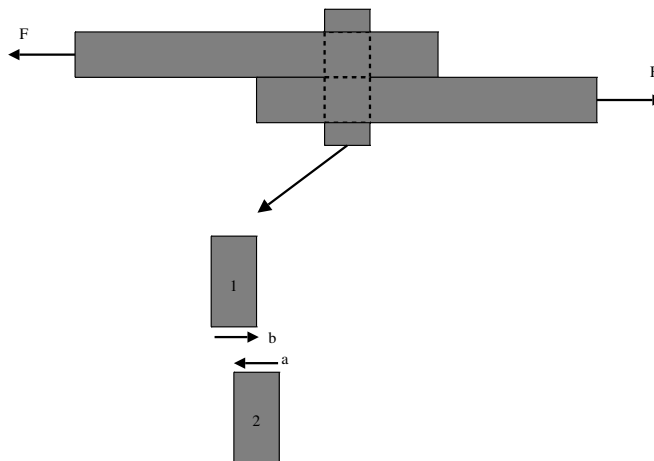
A força  $V_y$  que surge de cada um dos lados do elemento é chamada de esforço cortante, pois tende a 'cortar' o material na direção de  $Y$ . Os esforços cortantes tem como significado a força vertical (no caso na direção de  $Y$ ) que o lado (esquerdo ou direito) da estrutura faz sobre o pedaço de material considerado. Portanto, o conhecimento dos esforços cortantes é fundamental para entendermos as solicitações que ocorrem dentro de um corpo.

Convenção de sinal para cortante positivo: toda vez que a parte da direita da estrutura realiza um esforço vertical no sentido positivo (do eixo  $Y$ ), dizemos que o esforço cortante é positivo. Por equilíbrio, temos que a parte da esquerda da estrutura realiza um esforço cortante no sentido negativo do eixo vertical. Assim, considerando um pedaço de material, temos as seguintes opções



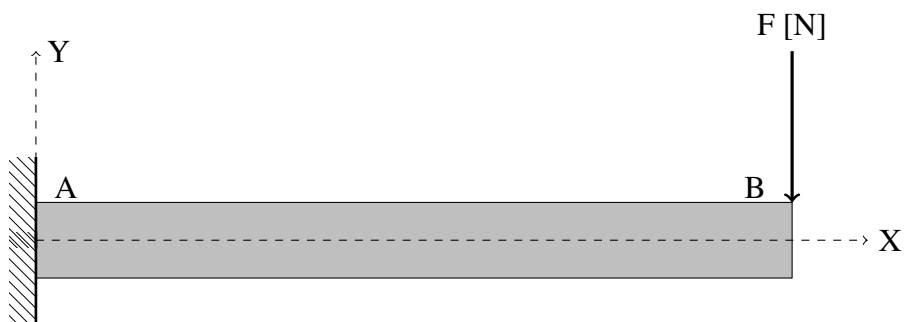
### 2.1.1 Exemplo

Um pino cilíndrico segura duas chapas. Ao puxarmos cada uma das chapas em direções opostas, o pino sofrerá um esforço de corte. A figura ilustra o esforço cortante que a parte 1 faz sobre a parte 2 (cortante  $a$ ) e o esforço cortante que a parte 2 faz sobre a parte 1 (cortante  $b$ ).

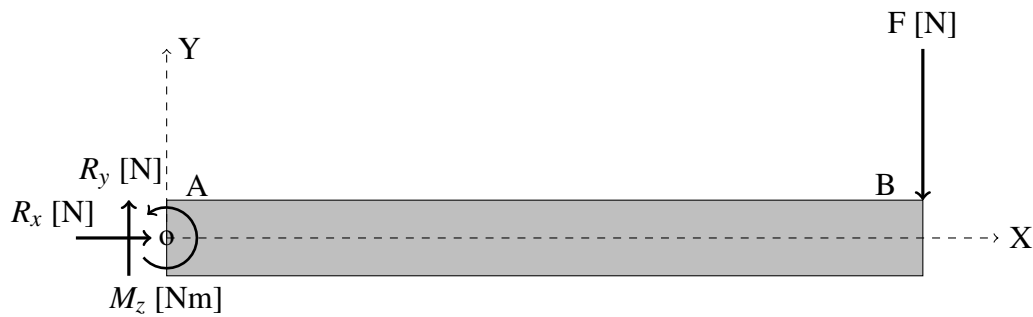


## 2.2 Obtenção da distribuição de esforços cortantes em uma estrutura

Considere o seguinte exemplo, de uma viga engastada submetida a uma força concentrada



Inicialmente, determinamos as reações que atuam no engaste. Como o engaste está restringindo 3 movimentos (graus de liberdade), teremos 3 reações



O equilíbrio estático é descrito por um equilíbrio vetorial de forças

$$\sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} - F \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

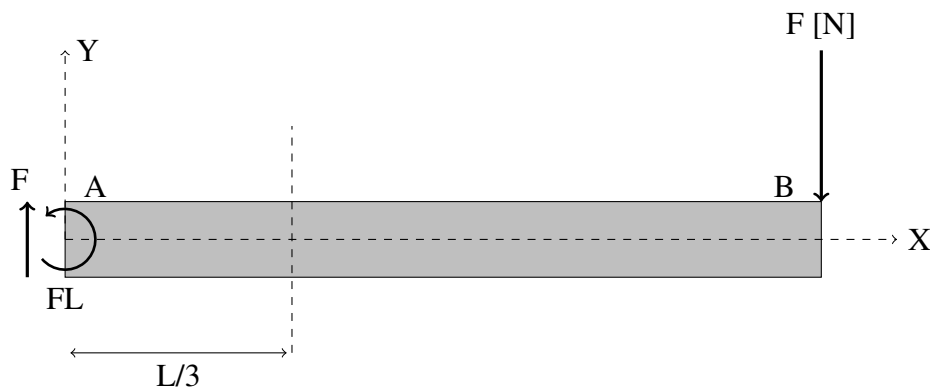
e um equilíbrio vetorial de momentos em relação a um ponto

$$\sum \mathbf{M}_O = M_z \mathbf{k} + L \mathbf{i} \times -F \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

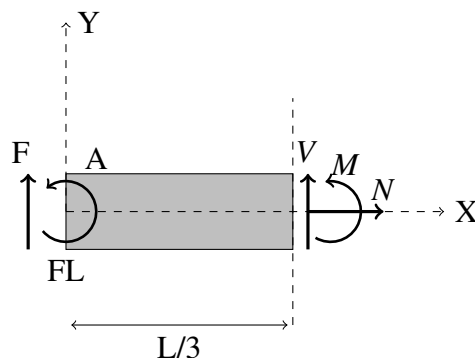
que resulta em três equações escalares, com resposta

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow R_y = F \\ \sum M_O &= 0 \rightarrow M_z = FL. \end{aligned}$$

Como o objetivo é estudar a distribuição de esforços cortantes, fazemos um corte hipotético no corpo, substituindo a parte da direita do corpo por um esforço cortante que represente a ação da parte da direita da estrutura sobre a parte da esquerda. Para exemplificar o conceito, vamos estudar o que ocorre a uma distância  $\frac{L}{3}$  do engaste



Substituindo toda a parte a direita do corte pela ação que esta faz sobre a seção em  $x = L/3$ , utilizamos os esforços internos  $N$ , esforço normal,  $V_y$ , esforço cortante e  $M_z$ , momento fletor, de acordo com o DCL



Assim, como a estrutura está em equilíbrio,

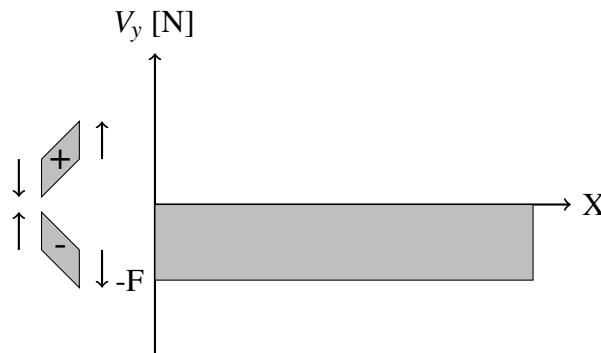
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F + V_y = 0$$

ou seja,

$$V_y = -F$$

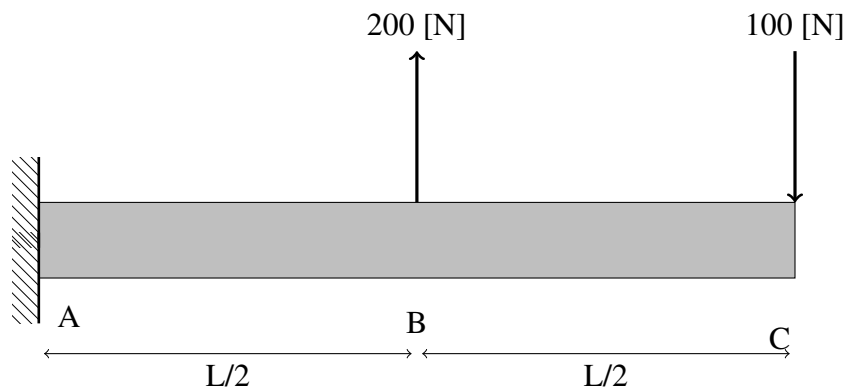
em  $x = L/3$ , indicando que a parte da direita faz um esforço cortante de valor  $F$ , para baixo. Por definição, esse cortante é negativo. Pode-se observar, também, que para qualquer corte realizado entre  $x = 0$  e  $x = L$ , o valor do esforço cortante será o mesmo, pois não existem forças verticais aplicadas ao longo do corpo, somente nas extremidades. Isto quer dizer que a equação de equilíbrio acima não se altera para diferentes valores de  $x$ .

Graficamente, ilustramos a distribuição de esforços cortantes com um diagrama, chamado de diagrama de esforços cortantes

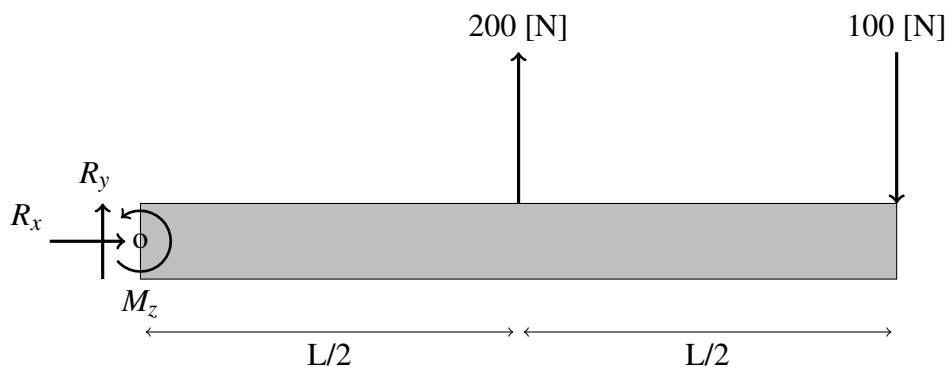


### 2.2.1 Exemplo

Seja a viga engastada submetida a duas forças verticais



Novamente, iniciamos o problema com a determinação das reações nos apoios (no caso, o engaste). Para o problema em questão,



$$\sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + 200 \mathbf{j} - 100 \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

e

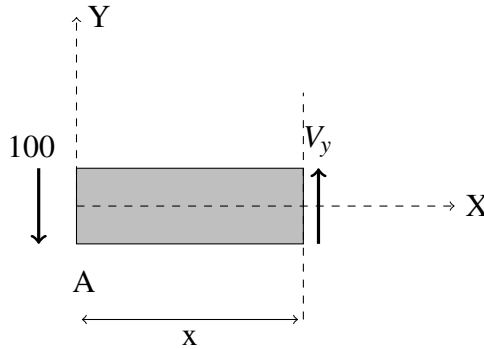
$$\sum \mathbf{M}_0 = M_z \mathbf{k} + \frac{L}{2} \mathbf{i} \times 200 \mathbf{j} + L \mathbf{i} \times -100 \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

tal que

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow R_y = -100 \\ \sum M_0 &= 0 \rightarrow M_z = 0 \end{aligned}$$

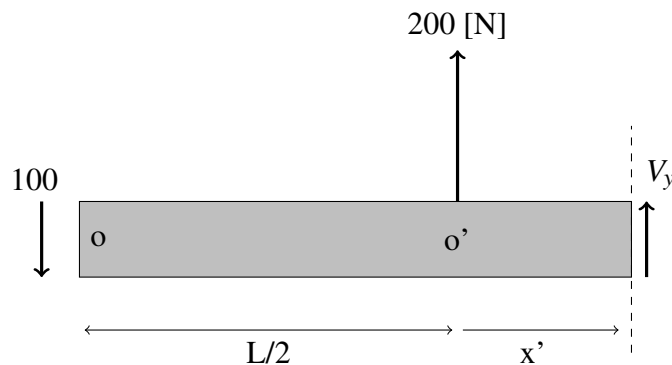
Para obtermos o diagrama de esforços cortantes no corpo em estudo, fazemos um corte hipotético no corpo, substituindo a parte retirada por um conjunto de esforços que represente a ação da parte retirada sobre a parte em estudo. Conforme observamos no exemplo anterior, o diagrama de esforços cortantes só tem seus valores alterados quando aplicamos uma força vertical sobre o corpo. Neste exemplo, temos três forças verticais aplicadas: a reação  $R_y$  e as duas forças concentradas. Com isto, esperamos que ocorram três saltos no diagrama.

Procedendo com o primeiro corte, em qualquer posição entre  $x > 0$  e  $x < L/2$ , obtemos



$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - 100 = 0 \rightarrow V_y = 100 \text{ N}$$

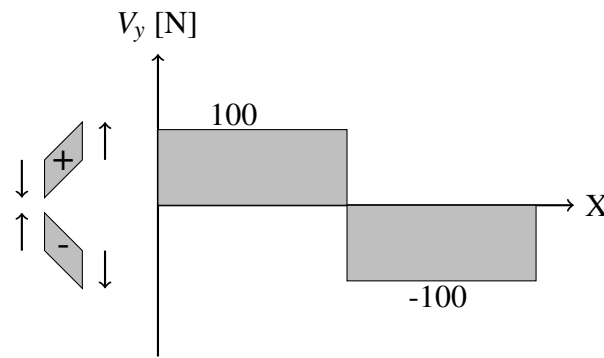
e não é difícil de observar que o valor de  $V_y$  não se altera para qualquer corte entre 0 e  $L/2$ . No entanto, em  $x = L/2$  existe uma força concentrada. Isto faz com que o equilíbrio de forças formulado acima não tenha validade para  $x \geq L/2$  e, portanto, um novo corte é necessário, com DCL



e equilíbrio

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y - 100 + 200 = 0 \rightarrow V_y = -100 \text{ N}.$$

Observe que o novo corte é definido a uma distância  $x'$  a partir de  $x = L/2$ . Embora isto não seja necessário neste exemplo, é uma prática que no futuro evitará uma série de problemas. Novamente, não temos nenhum outro carregamento aplicado entre  $L/2 < x < L$  (ou  $0 < x' < L/2$ ), de tal forma que o diagrama de esforços internos para este exemplo é

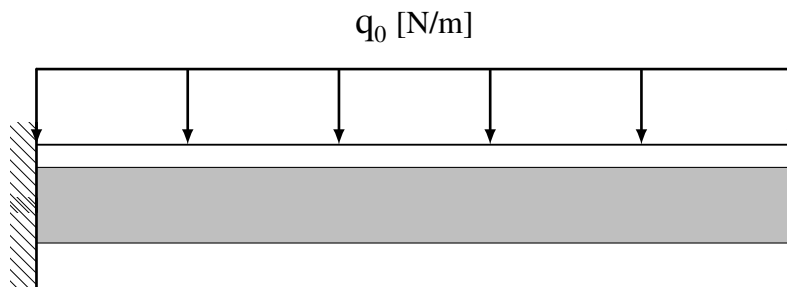


Com auxílio dos dois exemplos anteriores, podemos obter as seguintes conclusões:

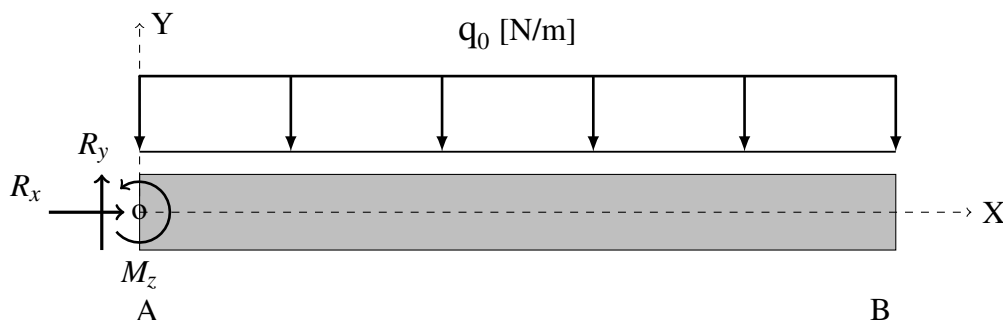
- o diagrama de esforços cortantes apresenta saltos de valores em pontos onde a estrutura é submetida a esforços transversais concentrados. Na convenção de sinais utilizada neste texto, observamos que o salto tem sentido oposto ao da aplicação da força, apresentado a mesma magnitude;
- em regiões onde não existe carregamento transversal aplicado, o diagrama de esforços cortantes tem valor constante.

### 2.2.2 Carregamentos Distribuídos

Seja a viga engastada submetida a um carregamento distribuído  $q$  [N/m]



Cargas distribuídas tem unidades de força por unidade de área,  $N/m^2$ , sendo que a situação mostrada na figura assume que a distribuição na profundidade é constante e que esta dimensão é bem menor do que o comprimento. Assim, pré-multiplicamos o carregamento distribuído na dimensão da profundidade, obtendo  $N/m^2 m = N/m$ , obtendo um carregamento distribuído por unidade de comprimento na direção axial ( $x$ ) da estrutura. Este carregamento deve ser integrado para resultar em uma unidade de força que permita solucionar as equações de equilíbrio. Para ilustrar o procedimento, vamos determinar o valor das reações no engaste





$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_y + \int_0^L q(x) dx = 0$$

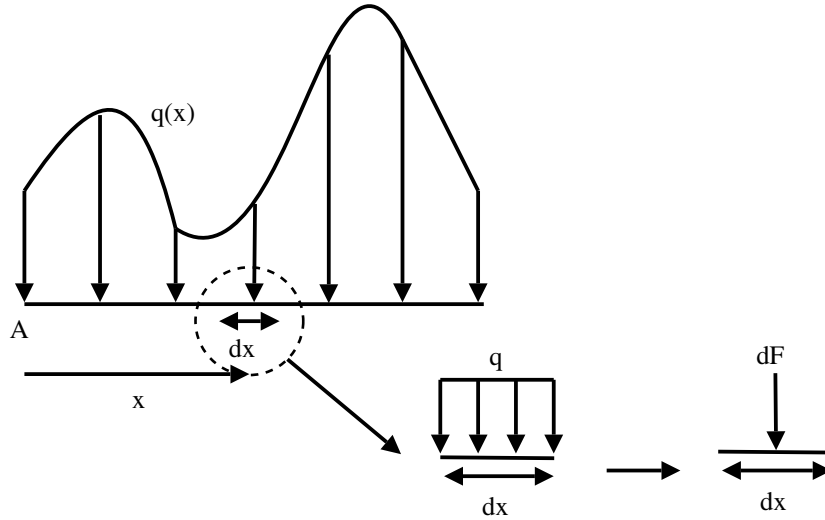
em que  $q(x)$ , para este exemplo, é constante e negativo. A integral é utilizada pois em cada unidade diferencial de comprimento,  $dx$ , atua uma força distribuída. Assim, a força diferencial em uma posição  $x$  é dada por

$$dF(x) = q(x) dx$$

tal que a força total é obtida com

$$F = \int_0^L dF = \int_0^L q(x) dx$$

como ilustrado na figura abaixo



Assim,

$$R_y = q_0 L$$

pois  $q(x)$  é constante. O equilíbrio de momentos em relação ao ponto A é obtido com o mesmo conceito de integração, com o único cuidado de observarmos que a força  $dF$  provoca um momento diferencial no ponto o, dado por

$$d\mathbf{M}_o = x\mathbf{i} \times dF\mathbf{j}$$

e o momento total é dado por

$$\mathbf{M}_o = \int_0^L d\mathbf{M} = \int_0^L x\mathbf{i} \times dF\mathbf{j} = \int_0^L x\mathbf{i} \times q(x)\mathbf{j} dx$$

e o momento total provocado pelo carregamento distribuído em o será

$$\mathbf{M}_o = \int_0^L x\mathbf{i} \times -q_0\mathbf{j} dx$$

tal que

$$\mathbf{M}_o = -\frac{q_0 L^2}{2} \mathbf{k}.$$

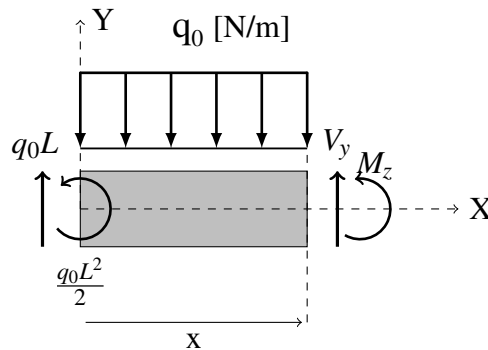
Assim, o somatório de momentos em o, devido ao carregamento distribuído, será

$$\sum \mathbf{M}_o = M_z \mathbf{k} - \frac{q_0 L^2}{2} \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

tal que a reação de momento será

$$M_z = \frac{q_0 L^2}{2}.$$

Para obtermos os diagramas de esforços, inicialmente observamos que não existem forças concentradas ao longo do comprimento, somente forças distribuídas. Como a equação da força distribuída não se altera ao longo do comprimento (neste exemplo o carregamento é constante), podemos estudar o equilíbrio de forças em um corte hipotético a uma distância  $x$  do engaste



obtendo

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_y + R_y + \int_0^x -q_0 dx = 0$$

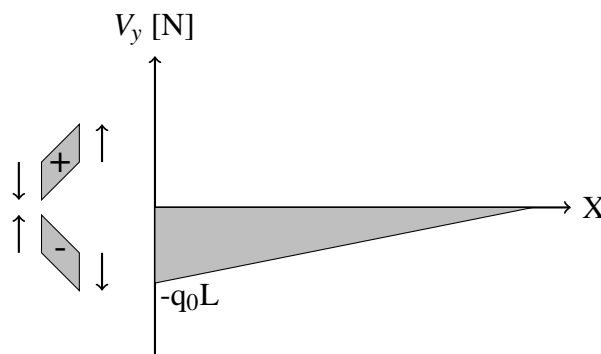
resultando em

$$V_y = q_0(x - L).$$

Neste ponto é importante enfatizarmos algumas conclusões obtidas com este exemplo:

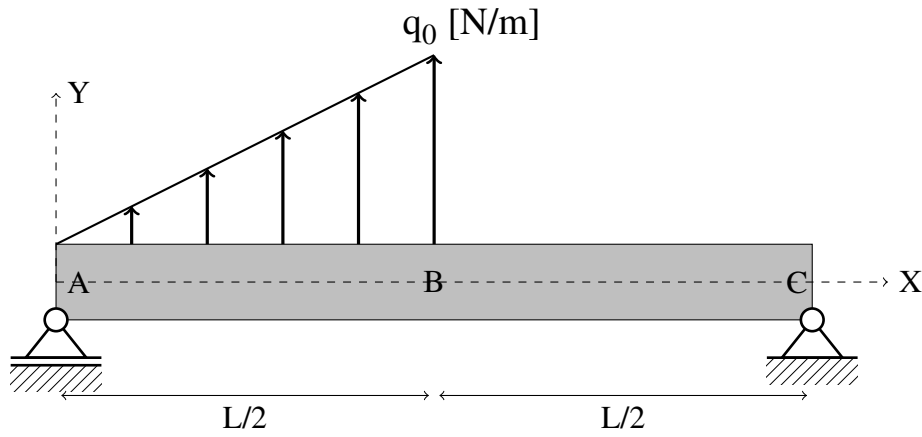
- neste exemplo o maior valor de esforço cortante se situa no engaste ( $x = 0$ ), significando que a parte da direita da estrutura está aplicando uma força (para baixo) de magnitude  $qL$ ;
- neste exemplo no ponto  $x = L$  o valor do esforço cortante é nulo, pois não existe força aplicada no ponto;
- na presença de um carregamento distribuído de valor constante, o diagrama de esforços cortantes tem variação linear.

Assim, o diagrama de esforços cortantes para este exemplo é



### 2.2.3 Exemplo

Seja a viga bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído com variação linear entre  $x = 0$  e  $x = L/2$



O primeiro passo consiste em determinar a equação que descreve o carregamento, no caso, a equação de uma reta

$$q(x) = a + bx.$$

Para obter os coeficientes da equação da reta, utilizamos os valores conhecidos

$$q(x=0) = a + b0 = 0 \rightarrow a = 0$$

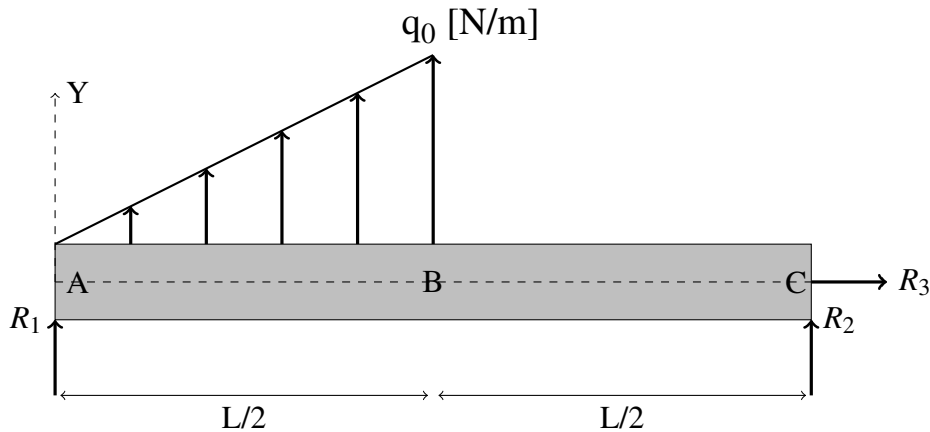
e

$$q(x=L/2) = a + bL/2 = q_0 \rightarrow b = \frac{2q_0}{L}$$

tal que a equação que descreve o carregamento é

$$q(x) = \frac{2q_0}{L}x \text{ [N/m]}$$

estando definida no intervalo  $0 < x < L/2$ . Com a expressão do carregamento, podemos proceder com a determinação das reações nos apoios. Como os apoios são rotulados, as únicas reações existentes são forças verticais e/ou horizontais



O equilíbrio de forças e de momentos é descrito por

$$\sum \mathbf{F} = R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{i} + \int_0^{L/2} q(x) \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

e

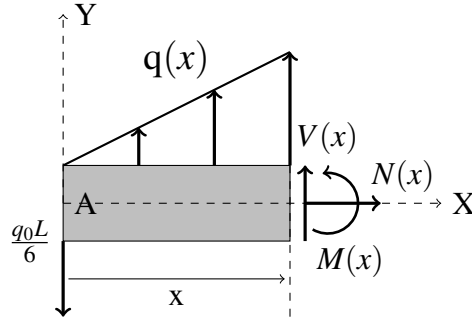
$$\sum \mathbf{M}_o = L \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j} + \int_0^{L/2} x \mathbf{i} \times q(x) \mathbf{j} dx = \mathbf{0}$$

resultando em

$$R_1 = -\frac{q_0 L}{6}, \quad R_2 = -\frac{q_0 L}{12}, \quad R_3 = 0$$

De posse das reações, podemos agora estudar a distribuição de esforços internos. Para isto, observamos que a estrutura é submetida a um carregamento distribuído linear entre  $x = 0$  e  $x = L/2$  e está livre de carregamentos até  $x = L$ . Assim, devido a mudança no carregamento, devemos estudar dois cortes hipotéticos.

O primeiro corte deve ser realizado para  $0 < x < L/2$ , com DCL



O somatório de forças em Y é

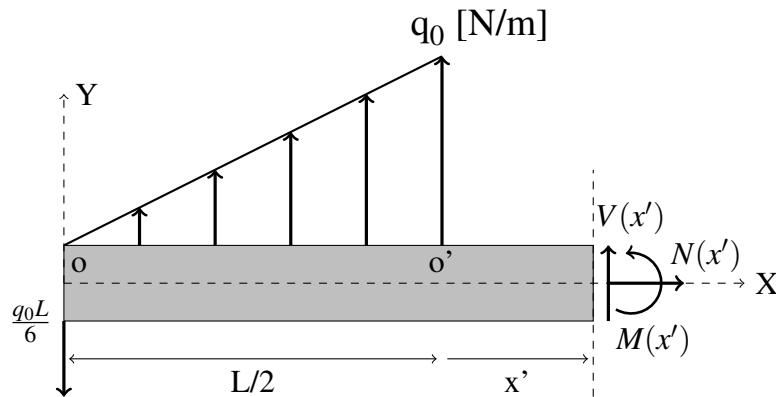
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y + \int_0^x q(x) dx = 0 \\ &= R_1 + V_y + \int_0^x \frac{2q_0}{L} x dx = 0 \end{aligned}$$

resultando em

$$V_y = \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 x^2}{L}$$

que é uma expressão quadrática.

Para obtermos a expressão do segundo trecho, definimos um novo sistema de coordenadas, com origem  $o'$  em  $x = L/2$ , de acordo com o DCL



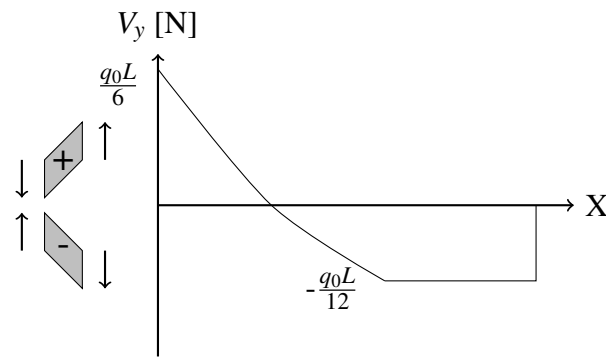
e o equilíbrio de esforços verticais resulta em

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \rightarrow R_1 + V_y(x') + \int_0^{L/2} q(x) dx = 0 \\ &= R_1 + V_y(x') + \frac{q_0 L}{4} = 0 \end{aligned}$$

tal que

$$V_y(x') = +\frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 L}{4} = -\frac{q_0 L}{12}$$

é constante em todo o trecho. Assim, o diagrama de esforços cortantes para o exemplo é



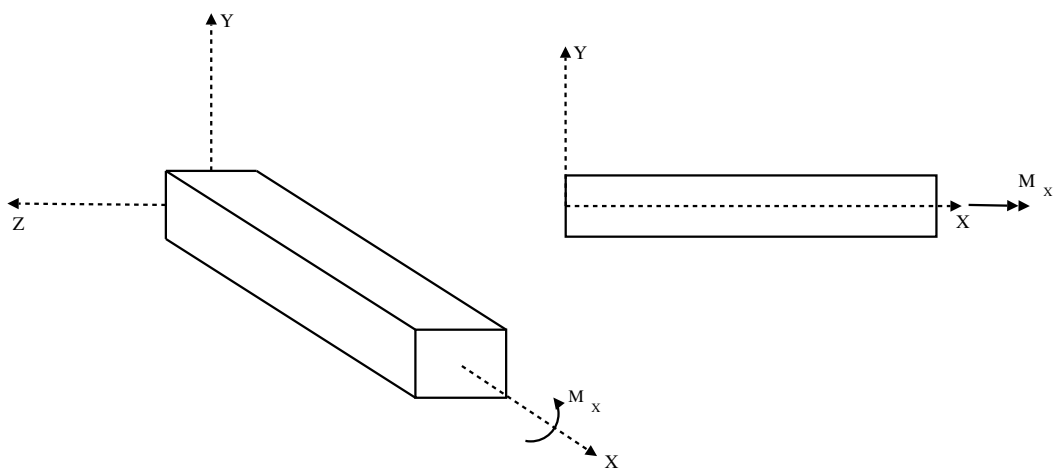
Com este exemplo, chegamos as seguintes conclusões:

- quando o carregamento distribuído tem variação linear, o diagrama de esforços cortantes apresenta variação quadrática;
- é aconselhável realizar uma mudança de variável ao realizarmos novos cortes. Isto evitará problemas futuros ao lidarmos com carregamentos distribuídos mais complicados.

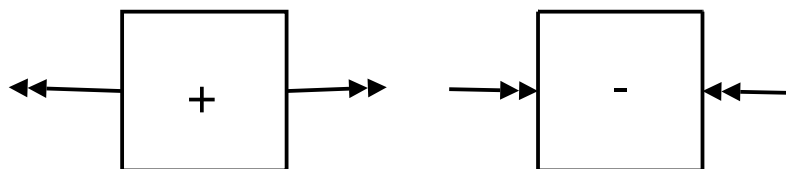
# Capítulo 3

## Momentos

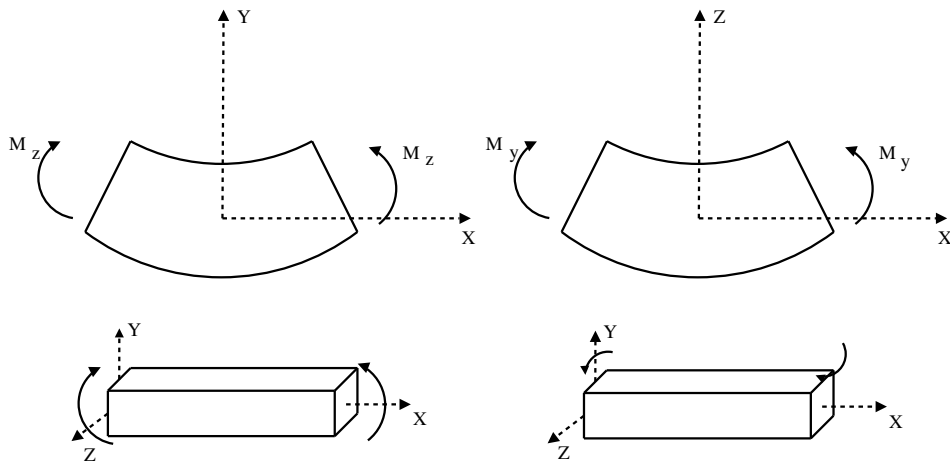
Podemos separar momentos em dois tipos, de acordo com seu efeito sobre o corpo em estudo: momentos fletores e momentos torsores. O momento torsor é aquele que faz com que a seção transversal do corpo gire em torno do seu eixo axial, que será chamado de eixo  $x$  no presente texto



Quando observamos a peça em uma vista perpendicular ao eixo onde o momento torsor é aplicado, utilizamos a notação de dupla flecha, mostrada no canto superior da figura. A convenção de sinal para o momento torsor positivo é a indicada na figura acima: se o momento aplicado faz a seção girar em torno do eixo axial, no sentido anti-horário (o sentido em que os ângulos são tomados como positivos na trigonometria), então o momento torsor é positivo. Assim, se isolarmos um pedaço de material de um corpo submetido a momentos torsores, obtemos a seguinte convenção de sinais



Momentos fletores, por sua vez, são as componentes de momento que fazem as seções transversais da peça girarem em torno dos eixos  $Y$  e  $Z$ . Assim, um momento que faz a seção transversal girar em torno do eixo  $Z$  é chamado de momento fletor  $M_z$ , e um momento que faz a seção transversal girar em torno do eixo  $Y$  é chamado de momento fletor  $M_y$



A convenção de sinal para momentos fletores positivos é a indicada na figura acima.

### 3.0.1 Exemplo

Considere uma viga engastada submetida a um momento fletor concentrado  $M_c$ .



Como este é o único carregamento aplicado na estrutura, observamos que de todas as possíveis reações no engaste, apenas a reação de momento fletor  $M_r$  existirá



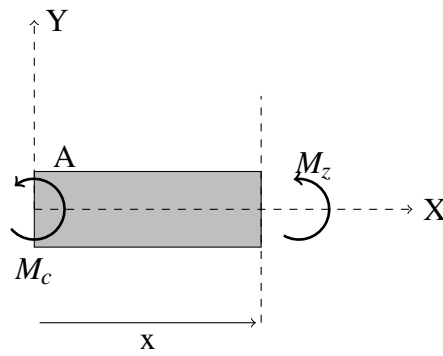
Por equilíbrio de momentos

$$\sum \mathbf{M}_A = M_r \mathbf{k} - M_c \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

tal que

$$M_r = M_c.$$

O procedimento para obtermos a distribuição de momentos fletores na estrutura é a mesma utilizada para obtermos os diagramas de esforços cortantes: realizamos um corte hipotético em uma seção transversal e determinamos quais esforços internos são realizados por uma parte da estrutura sobre a parte remanescente. Para o exemplo observamos que não existe alteração do carregamento externo entre 0 e  $L$ , de tal forma que, para um corte a uma distância qualquer  $x$

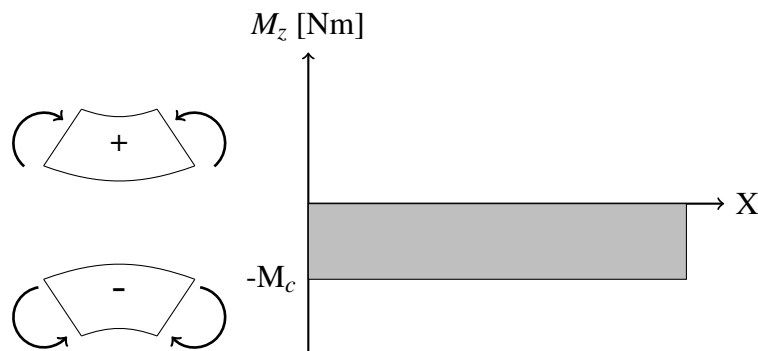


$$\sum M_A = M_c + M_z(x) = 0$$

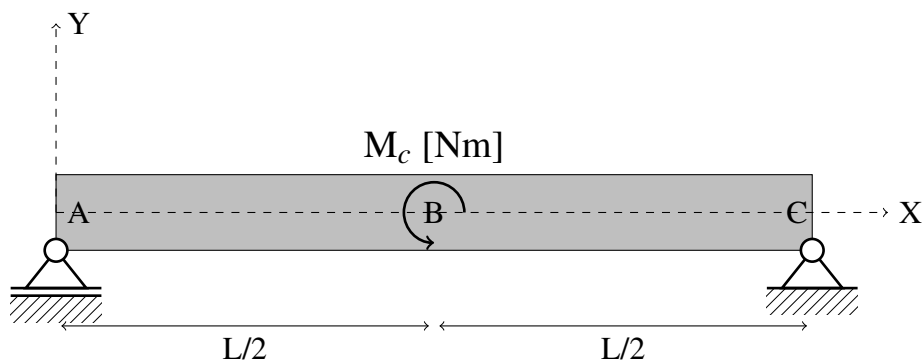
tal que

$$M_z(x) = -M_c$$

em que o sinal negativo indica que a estrutura do exemplo está sendo curvada para baixo (sentido negativo do eixo  $Y$ ). O diagrama de momentos fletores  $M_z$  da estrutura é

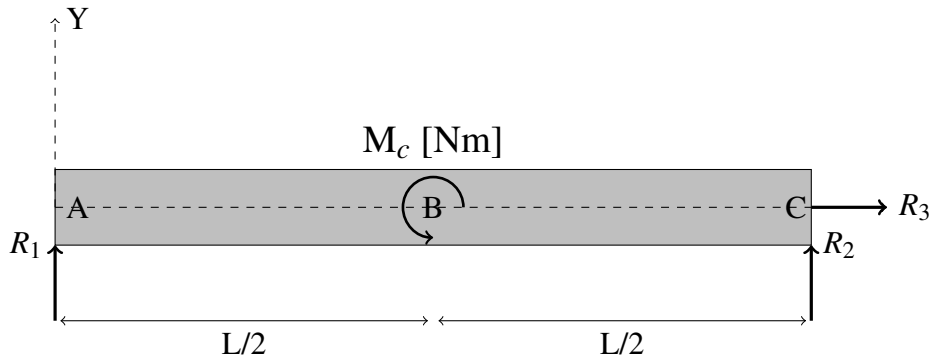


### 3.0.2 Exemplo



Neste exemplo, verificamos que existem somente reações verticais, uma vez que os apoios rotulados não apresentam reações de momento fletor. As reações são obtidas por relações de equilíbrio



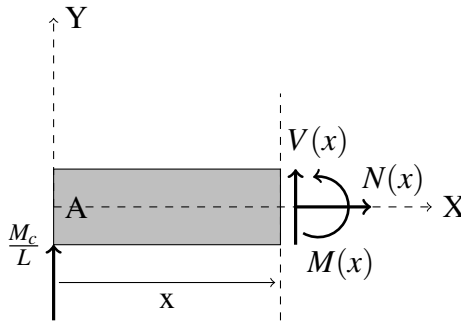


$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= R_1 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{j} + R_3 \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_A &= M_c \mathbf{k} + L \mathbf{i} \times R_2 \mathbf{j} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

resultando em

$$R_1 = \frac{M_c}{L} \text{ e } R_2 = -\frac{M_c}{L}$$

Devido ao fato de existir uma descontinuidade no carregamento em  $x = L/2$  devemos estudar a distribuição de esforços internos com o auxílio de dois cortes hipotéticos. Para  $x < L/2$  temos o DCL



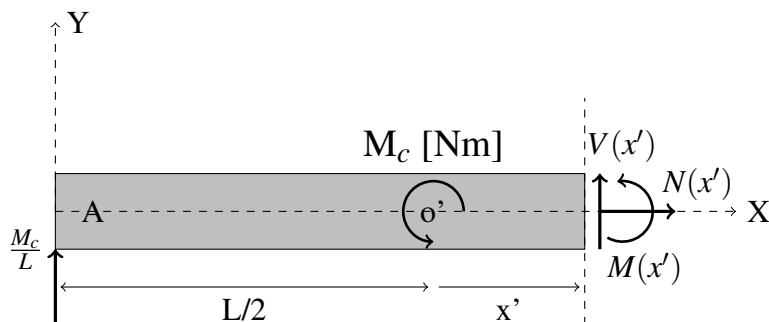
estudamos o equilíbrio da seção

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= R_1 \mathbf{j} + V_y(x) \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_A &= M_z(x) \mathbf{k} + x \mathbf{i} \times V_y(x) \mathbf{j} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}V_y(x) &= -R_1 = -\frac{M_c}{L} \\ M_z(x) &= R_1 x = \frac{M_c}{L} x.\end{aligned}$$

Para o trecho após o momento concentrado ( $x > L/2$ ), devemos estudar novamente o equilíbrio de um corte hipotético. Para isto, realizamos um novo corte, a uma distância  $x'$  do ponto B, com DCL



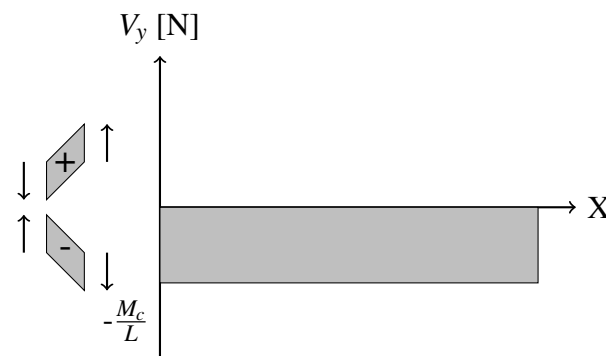
e, novamente estudando o equilíbrio,

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= R_1 \mathbf{j} + V_y(x') \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}_A &= M_z(x') \mathbf{k} + \left(x' + \frac{L}{2}\right) \mathbf{i} \times V_y(x') \mathbf{j} + M_c \mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

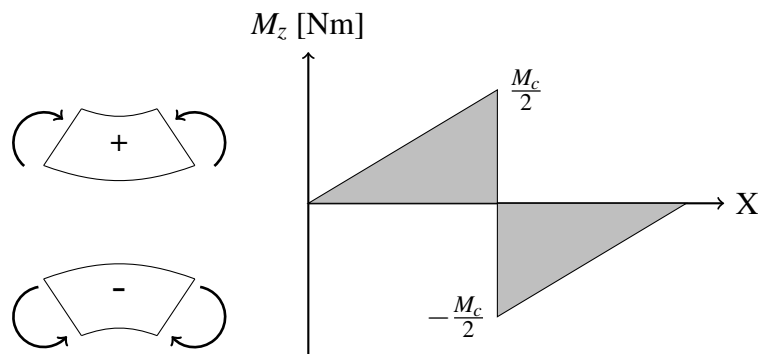
de onde obtemos

$$\begin{aligned}V_y(x') &= -\frac{M_c}{L} \\ M_z(x') &= M_c \left(\frac{x'}{L} - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

para  $x' \in (0, \frac{L}{2}]$ . Assim, os diagramas de esforços internos para esta estrutura são



e

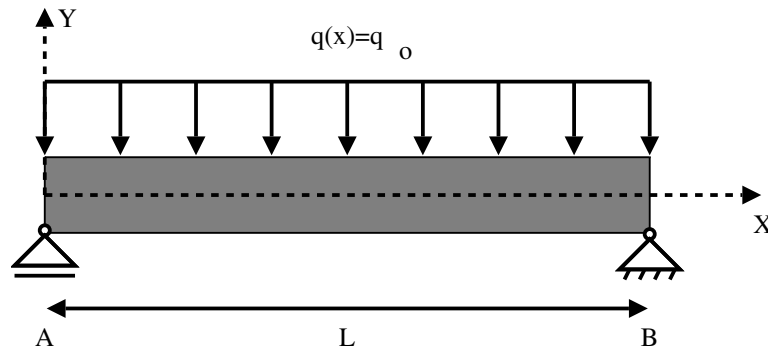


Com base neste exemplo, podemos verificar que

- a presença de um momento fletor concentrado faz com que existe uma descontinuidade (salto) no diagrama de momentos fletores. A magnitude desta descontinuidade é igual a do momento fletor aplicado no ponto;
- apoios não restringem o giro da seção e portanto não tem reação de momento. Desta forma, o diagrama de momentos fletores deve apresentar valores nulos em apoios (a não ser que um momento concentrado seja aplicado sobre o apoio);
- a presença de um momento concentrado não implica em descontinuidades no diagrama de esforços cortantes.

### 3.0.3 Exemplo

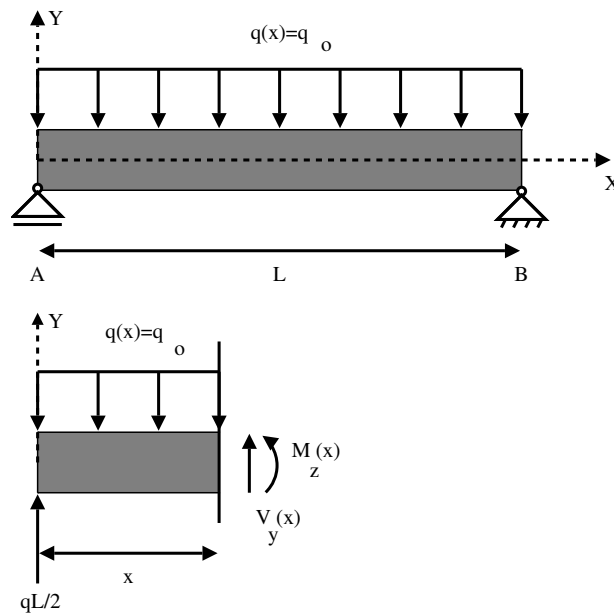
Seja a estrutura bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído constante:



Por simetria do carregamento e da estrutura, observamos que as reações nos apoios devem ser para cima, de valor

$$R_1 = R_2 = \frac{qL}{2}.$$

Como o carregamento distribuído é contínuo por todo o comprimento da estrutura, observamos que um corte hipotético e genérico é suficiente para descrever corretamente a distribuição de esforços internos. Assim,



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{qL}{2} + V_y(x) + \int_0^x -q_0 dx = 0$$

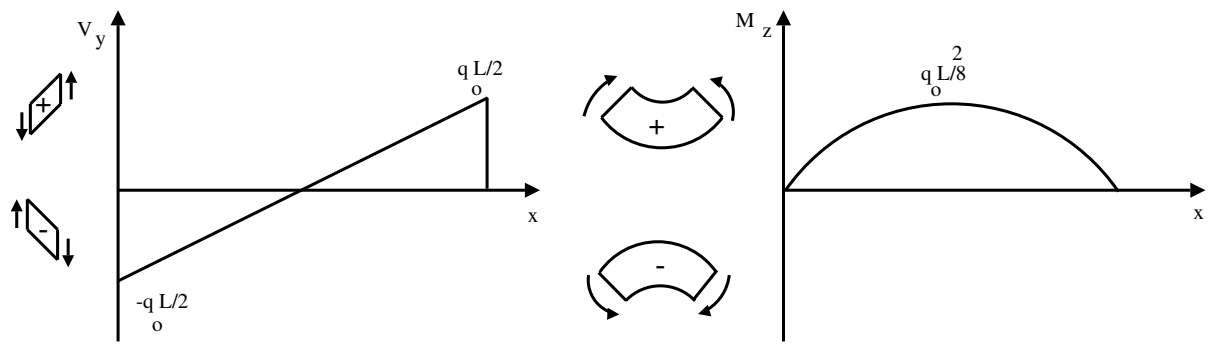
$$\sum M_A = 0 \rightarrow x \cdot V_y(x) + M_z(x) + \int_0^x x \cdot -q_0 dx = 0$$

resultando em

$$V_y(x) = q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

$$M_z(x) = \frac{q_0 L}{2} x - \frac{q_0}{2} x^2$$

com diagramas



Com este exemplo verificamos que

- um carregamento distribuído de valor constante implica em um diagrama de esforços cortantes com variação linear e em um diagrama de momentos fletores com variação quadrática;
- o ponto com o máximo valor de momento ( $x = L/2$ ) é o ponto com esforço cortante nulo;