

المجمع التعليمي التكنولوجي المتكامل بأسسيوط

قسم المواد الثقافية

الفرقة الأولى

"الرياضيات"

١. مجموعة الأعداد النسبية

درست في المراحل السابقة مجموعات الأعداد مثل:

١- مجموعة اعداد العد ويرمز لها بالرمز (ع) $\{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , \}$

٢- مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) $\{ ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , \}$

٣- مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) $\{ , ٢ , ١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , \}$

٤- مجموعة الأعداد النسبية (ن) وهي جميع الأعداد التي تكون علي صورة كسر

٥- مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) وتشمل جميع الأعداد السابقة

تعريف العدد النسبي:

العدد النسبي هو العدد الذي يمكن التعبير عنه في صورة قسمة عدد صحيح علي عدد صحيح اخر لا يساوي الصفر

أي أن: الأعداد النسبية هي جميع الأعداد التي يمكن وضعها علي الصورة $\frac{أ}{ب}$

حيث أ عدد صحيح ، ب عدد صحيح لا يساوي الصفر ، ويسمي كل من أ ، ب حدي النسبة

مجموعة الأعداد النسبية ن = $\{ س : س = \frac{أ}{ب} , أ \in \mathbb{Z} , ب \in \mathbb{Z} , ب \neq ٠ \}$

مثل: $\frac{٢}{٣} , \frac{٥-}{٧} , \frac{٢٥}{٤٨} , \frac{١-}{٢} , \frac{١}{٤}$

جمع وطرح الأعداد النسبية:

أولاً: عملية الجمع:

١- جمع عددين نسبيين متحدي المقام:

إذا كان: $\frac{أ}{ب} , \frac{ج}{ب}$ عددين نسبيين فإن: $\frac{أ+ج}{ب} = \frac{أ}{ب} + \frac{ج}{ب}$

فمثلاً: $\frac{٢}{٥} = \frac{(١-)+٣}{٥} = (\frac{١-}{٥}) + \frac{٣}{٥} , \frac{٥}{٧} = \frac{٣+٢}{٧} = \frac{٣}{٧} + \frac{٢}{٧}$

٢- جمع عددين نسبيين مختلفي المقام:

إذا كان: $\frac{أ}{ب} , \frac{ج}{ب}$ عددين نسبيين فإن: $\frac{أ+ج}{ب} = \frac{أ}{ب} + \frac{ج}{ب}$

فمثلاً: $\frac{١٩}{٣٥} = \frac{٥+١٤}{٣٥} = \frac{٥ \times ١ + ٧ \times ٢}{٧ \times ٥} = \frac{١}{٧} + \frac{٢}{٥}$

ملاحظات:

- ١- المحايد الجمعي للعدد النسبي $\frac{a}{b}$ هو الصفر ، أي أن $\frac{a}{b} + \text{صفر} = \frac{a}{b}$
- ٢- المعكوس الجمعي للعدد النسبي $\frac{a}{b}$ هو $\frac{-a}{b}$ حيث أن حاصل جمع أي عدد نسبي ومعكوسة الجمعي يساوي صفر ، $\frac{a}{b} + (\frac{-a}{b}) = \text{صفر}$

مثال: اوجد ناتج ما يأتي

$$\begin{array}{ll} ١- \frac{1}{4} + \frac{3}{8} & ٢- (\frac{10}{15}) + \frac{4}{12} \\ ٣- 3 + \frac{2}{5} & ٤- (\frac{1}{5}) + 3\frac{1}{4} \end{array}$$

الحل

$$\begin{array}{ll} ١- \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8} \\ ٢- (\frac{10}{15}) + \frac{4}{12} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15} \\ ٣- 3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5} \\ ٤- (\frac{1}{5}) + 3\frac{1}{4} = \frac{11}{5} - \frac{1}{5} = \frac{10}{5} = 2 \end{array}$$

ثانياً: عملية الطرح:

نظراً لأن كل عدد نسبي له معكوس جمعي فإن عملية الطرح ممكنة دائماً في (ن)

$$\text{إذا كان: } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ عددين نسبين فإن: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (\frac{-c}{d})$$

أي أن: عملية الطرح في ن تعرف بأنها عملية جمع المطروح منه (أ) مع المعكوس الجمعي للمطروح (ب)

مثال: اوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة

$$\begin{array}{ll} ١- \frac{3}{8} - \frac{5}{8} & ٢- \frac{2}{6} - \frac{3}{4} \end{array}$$

الحل

$$\begin{array}{ll} ١- \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = (\frac{3-5}{8}) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \\ ٢- \text{م.م.أ للمقامات } ٤, ٦ = ١٢ \\ \therefore \frac{2}{6} - \frac{3}{4} = (\frac{2 \times 2}{6 \times 2}) - (\frac{3 \times 3}{4 \times 3}) = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{5}{12} \end{array}$$

ضرب وقسمة الأعداد النسبية

أولاً: عملية الضرب

إذا كان: $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

أي أن: لضرب العددين النسبيين $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ يلزم ضرب بسطهما لتحصل علي بسط حاصل الضرب ، ضرب مقاميهما لتحصل علي مقام حاصل الضرب .

$$\text{فمثلاً: } \frac{10}{21} = \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} , \quad \frac{6}{20} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$$

ثانياً: عملية القسمة

نضراً لأن كل عدد نسبي (عدا الصفر) له معكوس ضربي فإنه يمكن تعريف عملية القسمة في (ن) كما يلي:

إذا كان: $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ عددين نسبيين ، $\frac{c}{d} \neq 0$ صفر فإن: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

مثال: أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة

$$\begin{array}{ll} 1- \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} & 2- \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \\ 3- \frac{7}{5} \div \frac{2}{3} & 4- \frac{6}{5} \div \frac{2}{5} \end{array}$$

الحل

$$1- \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{2 \times 3}{5 \times 6} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$2- \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{9 \times 4} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

$$3- \frac{7}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{7 \times 3}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$$

$$4- \frac{6}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{6 \times 5}{5 \times 2} = \frac{6}{2} = 3$$

٢. حل المعادلات

اولاً: حل المعادلة من الدرجة الاولى في مجهول واحد

صورتها العامة: $أس + ب = ج$ حيث $أ، ب، ج \in (ح)$ ، $أ \neq \text{الصفر}$

خطوات الحل:

١- نضع ب في الطرف الاخر باشارة مخالفة

٢- نقسم الطرفين علي أ حتي تكون س وحدها في طرف ويكون هذا هو الحل

مثال: اوجد مجموعة حل المعادلة $٢س - ٧ = ٥$

الحل

$$\therefore 2س = 7 + 5 \quad \leftarrow \quad 2س = 12 \quad \text{بقسمة الطرفين على } 2$$

$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ 6 \}$ $\therefore \text{س} = 6$

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلة $\frac{2}{5}س + ٧ = ٣$

الحل

$$3 = 7 + 5 \frac{2}{5} \therefore$$

بضرب الطرفين في $\frac{5}{2}$ (المعكوس الضربي) $\therefore \frac{2}{5} \text{ س} = 7 - 3$

$$\therefore \frac{5}{2} \times 4 = 10 \text{ س} \quad \therefore \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1 \text{ س}$$

∴ مجموعة الحل = $\{-, ١\}$

ثانياً: حل المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

صورتها العامة: أس^٢ + ب س + ج = صفر

يتم حل هذه المعادلة بثلاث طرق:

١ - التحليل

٢ - القانون العام

٣ - الرسم البياني

اولاً: التحليل

مثال: حل المعادلة $s^2 - 3s - 10 = 0$ = صفر

الحل

بالتحليل

$$s^2 - 3s - 10 = 0 \text{ صفر}$$

$$s^2 - 3s - 10 = (s - 5)(s + 2) = 0 \text{ صفر}$$

$$s = 5, s = -2$$

$$s = 5, -2 \text{ مجموعة الحل}$$

ثانياً: القانون العام

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويستخدم هذا القانون العام لحل المعادلة التربيعية التي يصعب تحليلها أو يستحيل (غير ممكن) التحليل حيث يكون معامل s^2 ، ب معامل s ، ج الحد المطلق

مثال: حل المعادلة $s^2 - 2s - 6 = 0$

الحل

بأستخدام القانون العام

$$s^2 - 2s - 6 = 0 \text{ صفر}$$

$$a = 1, b = -2, c = -6$$

$$s = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$s = \frac{2 + \sqrt{28}}{2}, s = \frac{2 - \sqrt{28}}{2}$$

$$s = \frac{2 + \sqrt{28}}{2}, s = \frac{2 - \sqrt{28}}{2}$$

ثالثاً: الحل البياني

الحل البياني للمعادلة التربيعية $as^2 + bs + c = 0$ صفر

هو عبارة عن نقط التقاطع مع محور السينات

٣. الحدود والمقادير الجبرية

أولاً: الحد الجبري:

الحد الجبري: هو عدد أو متغير أو حاصل ضرب أعداد ومتغيرات

أي أن: الحد الجبري هو ما يتكون من عاملين أو أكثر

فمثلاً: ٧ ن هو حد جبري يتكون من العاملين ٧ ، حيث ٧ يسمى عامل عددي (معامل) ، ن يسمى عامل جبري

، - ٥ س ص هو حد جبري يتكون من العوامل - ٥ ، س ، ص ، - ٥ (عامل عددي) ، س (عامل جبري) ، ص (عامل جبري)

درجة الحد الجبري:

درجة الحد الجبري: هي مجموع أسس العوامل الجبرية (الرمزية) الداخلة في تكوين الحد

فمثلاً: الحد ٢ أ من الدرجة الأولى لأن أس الرمز أ يساوي ١

الحد - ٥ س ص من الدرجة الثانية لأن مجموع أسس الرمزين س ، ص يساوي ٢

الحد ٧ م^٢ من الدرجة الثالثة لأن مجموع أسس الرمزين م ، ن يساوي ٣

ثانياً: المقدار الجبري:

المقدار الجبري: هو ما يتكون من حد جبري أو أكثر يفصل بينهما علامة (+) أو (-)

فمثلاً: $٥ + ٣$ ب مقدار جبري يتكون من حدين وهما: ٥ ، ٣ ب

، ٥ ص^٢ + ٢ س ص - ٣ س مقدار جبري يتكون من ثلاثة حدود

، ٣ س مقدار جبري يتكون من حد واحد

درجة المقدار الجبري:

درجة المقدار الجبري: هي أعلى درجة للحدود التي يتكون منها المقدار الجبري

فمثلاً: المقدار الجبري ٥ س - ٣ من الدرجة الأولى لأن ٥ س هو الحد الأعلى درجة ودرجة ١

المقدار الجبري: ٧ س^٢ - ٣ س + ١ من الدرجة الثانية لأن ٧ س^٢ هو الحد الأعلى درجة ودرجة ٢

المقدار الجبري: ٥ أ ب - ٢ أ^٢ ب - ٢ ب من الدرجة الثالثة لأن ٢ أ^٢ ب هو الحد الأعلى درجة ودرجة ٣

القوانين الأساسية للأسس:

القانون	امثلة عليّة
$s^m \times s^n = s^{m+n}$	$s^2 \times s^3 = s^5$ $s^2 \times s^3 \times s^4 = s^9$
$s^m \div s^n = s^{m-n}$	$s^2 \div s^3 = s^{-1}$ $s^2 \div s^3 = \frac{1}{s}$
$(s \times s)^m = s^m \times s^m$ $(s \div s)^m = s^m \div s^m$	$(s \times s)^2 = s^2 \times s^2 = s^4$ $(s \div s)^2 = s^2 \div s^2 = 1$
$(s^m)^n = s^{m \times n}$	$(s^2)^3 = s^{2 \times 3} = s^6$
$(s \div s)^m = s^m \div s^m$	$(s \div s)^2 = s^2 \div s^2 = 1$

ملاحظات

س' = 1 حيث س \neq الصفر

إذا كان $s^n = 1$ س $\neq 0$ فإن $n = 0$

مثال: اختصر إلي أبسط صورة $\frac{(1+s^2)^3 \times (s^2)^{22}}{(s^2)^6 \times (1+s^2)^{11}}$

الحل

$$\frac{(1+s^2)^3 \times (s^2)^{22}}{(s^2)^6 \times (1+s^2)^{11}} = \text{المقدار}$$

$$\frac{3}{11} = (1 - s^2 - s^2)_{11} \times (s^2 - 1 + s^2)_3 =$$

تدريبات

أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{array}{ll} ١- \frac{٢٥}{٨} + \frac{١}{٤} & ٢- \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٥} \\ ٣- \frac{٣}{١٦} + \frac{٩-}{١٢} & ٤- (\frac{٢-}{٥}) + \frac{٣-}{١٠} \\ ٥- \frac{٢}{٣} \times \frac{١-}{٢} & ٦- \frac{٥}{٨} \times \frac{٢-}{٣} \\ ٧- \frac{٥}{٢} \div \frac{١-}{٦} & ٧- (\frac{١٥-}{٢}) \div \frac{٥}{٦} \end{array}$$

اكمل ما يأتي:

- ١- درجة الحد الجبري: $٣س^٢$ ص هي ومعامله هو
- ٢- الحد الجبري: $\frac{١}{٢}س^٣$ ص ع ٢ معامله = ودرجة ودرجته
- ٣- درجة المقدار الجبري: $٥س^٢ + ٣$ هي
- ٤- عدد حدود المقدار الجبري: $٥س^٢ - ٣س + ٢س^٢$ هو ودرجته هي

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

$$\begin{array}{ll} ١- ٨ = ٥ + ٣س & ٢- ٧ = ٥ - ٤أ \\ ٣- ٣س^٢ + ٢س - ٤ = \text{صفر} & ٤- ٦س^٢ - ٥س + ٦ = \text{صفر} \\ ٥- ٢س^٢ - ٤ = ٧س & \end{array}$$

الوحدة الثانية:

مساحة وحجم بعض المجسمات

١. مساحة وحجم بعض المجسمات

المستطيل:



مثال: أوجد مساحة ومحيط المستطيل الذي طوله ٧ سم وعرضه ٥ سم

الحل

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض} = ٧ \times ٥ = ٣٥ \text{ سم}^2$$

$$\text{محيط المستطيل} = ٢ (\text{الطول} + \text{العرض}) = ٢ (٧ + ٥) = ٢٤ \times ٢ = ٤٨ \text{ سم}$$

مثال: أوجد محيط المستطيل الذي مساحته ٣٦ سم^٢ وطوله ٩ سم

الحل

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$\therefore \text{العرض} = \frac{\text{مساحة المستطيل}}{\text{الطول}} = \frac{٣٦}{٩} = ٤ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{محيط المستطيل} = ٢ (\text{الطول} + \text{العرض})$$

$$\therefore \text{محيط المستطيل} = ٢ (٩ + ٤) = ٢٦ \times ٢ = ٥٢ \text{ سم}$$

مثال: أوجد مساحة المستطيل الذي محيطه ٢٤ سم وطوله ٨ سم

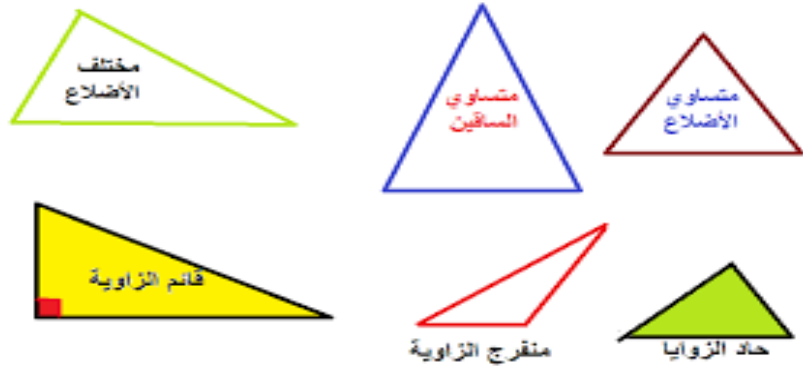
الحل

$$\therefore \text{محيط المستطيل} = ٢ (\text{الطول} + \text{العرض}) \leftarrow ٢٤ = ٢ (\text{الطول} + \text{العرض}) \leftarrow ١٢ = \text{العرض} + ٨$$

$$\therefore \text{العرض} = ١٢ - ٨ = ٤ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض} \leftarrow \text{مساحة المستطيل} = ٨ \times ٤ = ٣٢ \text{ سم}^2$$

المثلث:



وينقسم المثلث الى نوعين:

أولاً: من حيث اطوال اضلاعه ينقسم الي:

١- متساوي الاضلاع ، ٢- متساوي الساقين ، ٣ - مختلف الاضلاع

ثانياً: من حيث قياس الزوايا ينقسم الي:

١- قائم الزاوية ، ٣- حاد الزاوية ، ٣- منفرج الزاوية

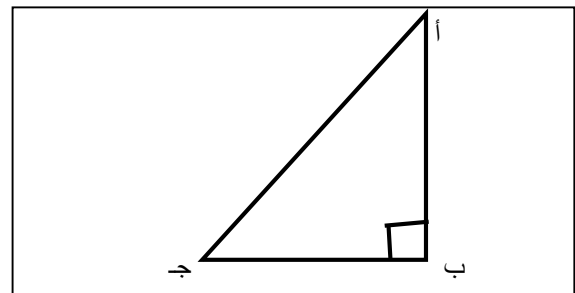
مساحة المثلث: ١- $\frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

٢- $\frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب طولاضلعين} \times \text{جيب الزاوية المحصورة بينهما}$

محيط المثلث: مجموع اطوال اضلاعه

نظرية فيثاغورس:

في المثلث القائم الزاوية فإن مربع طول ضلع الوتر يساوي مجموع مربعي طول الضلعين الاخرين للزاوية القائمة



فإذا كان أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

فإن $(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب ج)^2$

عكس نظرية فيثاغورس:

إذا كان مجموع مساحتي المربعين المنشأين علي ضلعين في مثلث يساوي مساحة المربع المنشأ علي الضلع الثالث كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع قائمة

أي أن: إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$ فإن قياس زاوية $\angle C = 90^\circ$ قائمة

$$(a^2 + b^2 = c^2) \text{ فإن قياس زاوية } \angle C = 90^\circ \text{ قائمة}$$

مثال: أوجد محيط المثلث ABC القائم الزاوية في B وطول $AB = 3$ سم وطول $BC = 4$ سم
الحل

من نظرية فيثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ فإن } (3^2 + 4^2 = c^2)$$

$$25 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore (a^2 + b^2 = c^2) \Rightarrow c = 5 \text{ سم}$$

\therefore محيط المثلث = مجموع اطوال اضلاعة

$$\therefore \text{محيط المثلث} = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ سم}$$

مثال: أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته 12 سم وأرتفاعه 5 سم

الحل

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30 \text{ سم}^2$$

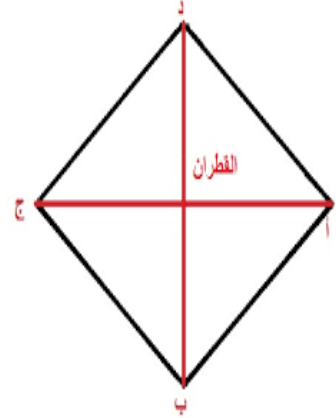
مثال: مثلث طوله 6 سم ومساحته 24 سم² أوجد طول قاعدته

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\therefore 24 = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times 6 \Rightarrow \text{طول القاعدة} = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{طول القاعدة} = \frac{24 \times 2}{6} = 8 \text{ سم}$$

المعين



مساحة المعين: ١- $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين $= \frac{1}{2} \times \text{ب د} \times \text{أ ج}$

٢- طول القاعدة \times الارتفاع $= \text{ب ج} \times \text{أ هـ}$

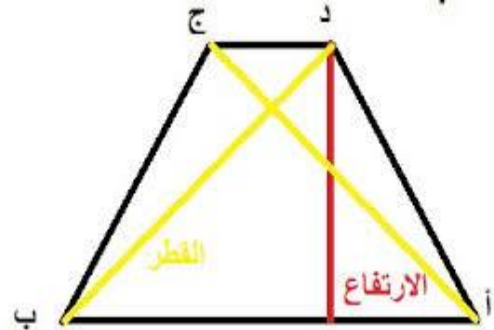
محيط المعين: طول الضلع $\times ٤ = ٤ \text{ س}$

مثال: أوجد مساحة المعين الذي طولاً قطريه ١٥ سم ، ١٠ سم
الحل

∴ مساحة المعين $= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

∴ مساحة المعين $= \frac{1}{2} \times ١٥ \times ١٠ = ٧٥ \text{ سم}^٢$

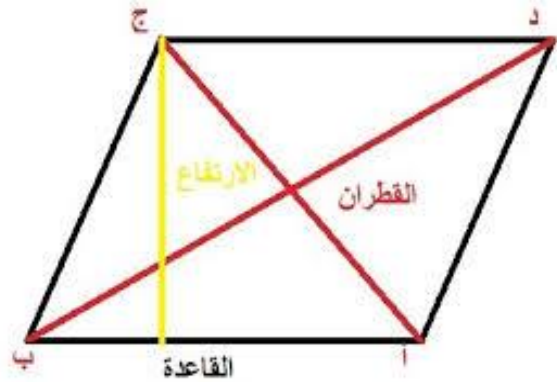
شبه المنحرف:



مساحة شبه المنحرف: $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين \times الارتفاع $= \frac{1}{2} (\text{أ ب} + \text{ج د}) \times \text{ع}$

محيط شبه المنحرف: مجموع اطوال اضلاعة

متوازي الأضلاع



مساحة متوازي الأضلاع: طول القاعدة \times الارتفاع = ب \times ج = دو

$$= أ ب \times د هـ$$

محيط متوازي الأضلاع: ضعف مجموع أي ضلعين متجاورين = ٢ (س + ص) مثل المستطيل

مثال: أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي طول قاعدته ١٢ سم وأرتفاعه ٨ سم

الحل

∴ مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة \times الارتفاع

$$∴ \text{مساحة متوازي الأضلاع} = ٨ \times ١٢ = ٩٦ \text{ سم}^2$$

مثال: أوجد أرتفاع متوازي الأضلاع الذي طول قاعدته ٦ ومساحته ٤٢ سم^٢

الحل

∴ مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة \times الارتفاع

$$∴ ٤٢ = ٦ \times \text{الأرتفاع}$$

$$∴ \text{الأرتفاع} = \frac{٤٢}{٦} = ٧ \text{ سم}$$

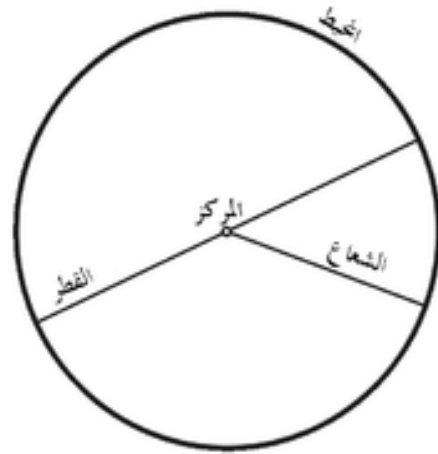
مثال: أوجد محيط متوازي الأضلاع الذي طولاه ضلعية ٧ سم ، ٩ سم

الحل

∴ محيط متوازي الأضلاع = ضعف مجموع أي ضلعين متجاورين

$$∴ \text{محيط متوازي الأضلاع} = ٢ (٩ + ٧) = ١٦ \times ٢ = ٣٢ \text{ سم}$$

الدائرة



مساحة الدائرة: πr^2

محيط الدائرة: $2\pi r$

مثال: أوجد مساحة ومحيط الدائرة التي طول نصف قطرها ٤ سم
الحل

∴ مساحة الدائرة = πr^2

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4)^2 = \frac{22}{7} \times 16 = 110.28 \text{ سم}^2$$

∴ محيط الدائرة = $2\pi r$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 4 = 55.12 \text{ سم}$$

مثال: دائرة مساحتها ١٥٤ سم^٢ ، أوجد محيط الدائرة وطول قطرها
الحل

∴ مساحة الدائرة = πr^2

$$\therefore 154 = \pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49$$

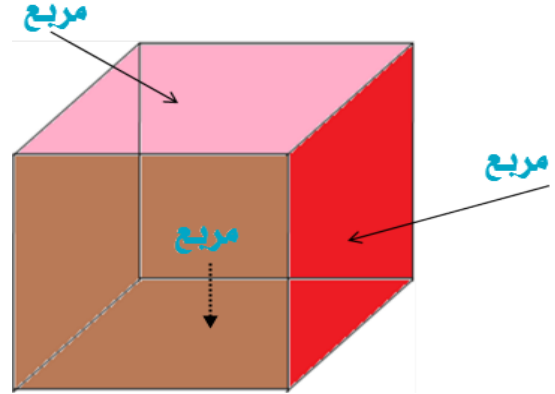
$$\therefore r = \sqrt{49} = 7 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{طول القطر} = 14 \text{ سم}$$

∴ محيط الدائرة = $2\pi r$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44 \text{ سم}$$

المكعب



مساحة المكعب: ١- مساحة الوجه الواحد = L^2

٢- المساحة الجانبية = $4L^2$

٣- المساحة الكلية = $6L^2$

حجم المكعب: طول الضلع \times نفسه \times نفسه = L^3

مثال: أوجد المساحة الكلية والمساحة الجانبية وحجم المكعب الذي طول حرفه ٥ سم
الحل

مساحة الوجه الواحد = $L^2 = 5 \times 5 = 25$ سم^٢ ∴

∴ المساحة الجانبية = $4L^2 = 4 \times 25 = 100$ سم^٢

∴ المساحة الكلية = $6L^2 = 6 \times 25 = 150$ سم^٢

∴ حجم المكعب = طول الضلع \times نفسه \times نفسه = $5 \times 5 \times 5 = 125$ سم^٣

مثال: مكعب مساحته الجانبية ٣٦ سم^٢ أوجد مساحته الكلية وحجمه

الحل

∴ المساحة الجانبية = $4L^2 \leftarrow 4L^2 = 36 \leftarrow L^2 = 9 \leftarrow L = \sqrt{9} = 3$ سم

∴ المساحة الكلية = $6L^2 = 6 \times 9 = 54$ سم^٢

∴ حجم المكعب = طول الضلع \times نفسه \times نفسه = $3 \times 3 \times 3 = 27$ سم^٣

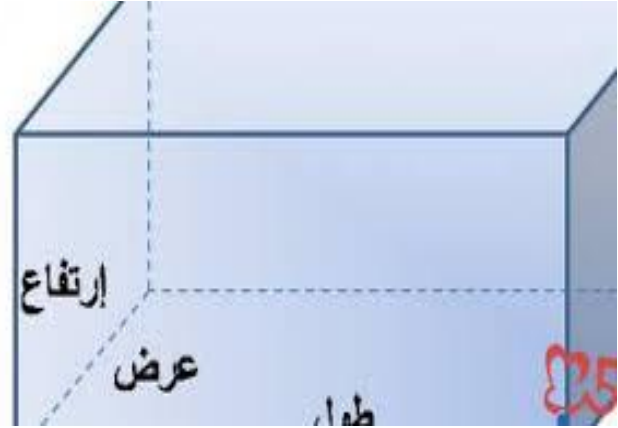
مثال: مكعب مجموع اطوال احرفه ٦٠ سم أوجد حجمه ومساحته الكلية
الحل

$L = \frac{60}{12} = 5$ سم $\leftarrow L^2 = 5 \times 5 = 25$ سم^٢

∴ المساحة الكلية = $6L^2 = 6 \times 25 = 150$ سم^٢

∴ حجم المكعب = طول الضلع \times نفسه \times نفسه = $5 \times 5 \times 5 = 125$ سم^٣

متوازي المستطيلات



مساحة متوازي الاضلاع: ١- المساحة الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع

٢- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

حجم متوازي الاضلاع: الطول \times العرض \times الارتفاع = س ص ع

مثال: متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٩ سم ، ١٠ سم ، وارتفاعه ٥ سم أوجد:

١- حجمه

٢- مساحة الجانبية

٣- مساحة الكلية

الحل

∴ حجم متوازي الاضلاع = الطول \times العرض \times الارتفاع = $٩ \times ١٠ \times ٥ = ٤٥٠$ سم^٣

∴ محيط القاعدة = (الطول + العرض) \times الارتفاع = $(١٠ + ٩) \times ٥ = ٩٥$ سم

∴ مساحة القاعدة = الطول \times العرض = $٩ \times ١٠ = ٩٠$ سم^٢

∴ مجموع مساحتي القاعدتين = $٩٠ + ٩٠ = ١٨٠$ سم^٢

∴ المساحة الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع = $٩٥ \times ٥ = ٤٧٥$ سم^٢

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

∴ المساحة الكلية = $٤٧٥ + ١٨٠ = ٦٥٥$ سم^٢

مثال: متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه $٧٢٠ \text{ سم}^٣$ وارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكلية

الحل

∴ حجم متوازي الأضلاع = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\therefore \text{مساحة القاعدة} = \frac{\text{الحجم}}{\text{الارتفاع}} = \frac{٧٢٠}{٥} = ١٤٤ \text{ سم}^٢$$

$$\therefore \text{ل} = \sqrt{١٤٤} = ١٢ \text{ سم}$$

∴ محيط القاعدة = طول الضلع × ٤

$$\therefore \text{محيط القاعدة} = ٤ \times ١٢ = ٤٨ \text{ سم}$$

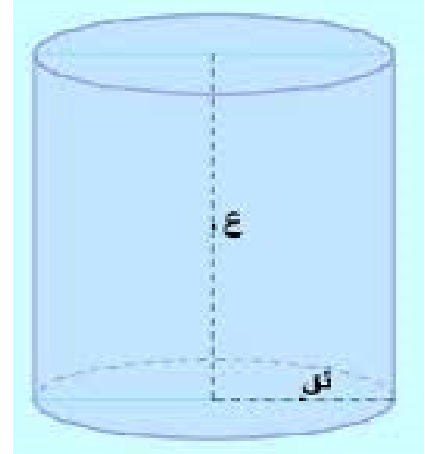
$$\therefore \text{مجموع مساحتي القاعدتين} = ١٤٤ + ١٤٤ = ٢٨٨ \text{ سم}^٢$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع} = ٤٨ \times ٥ = ٢٤٠ \text{ سم}^٢$$

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$$\therefore \text{المساحة الكلية} = ٢٤٠ + ٢٨٨ = ٥٢٨ \text{ سم}^٢$$

الأسطوانة الدائرية القائمة



مساحة الأسطوانة الدائرية القائمة: ١- المساحة الجانبية = ٢ ط نق ع

٢- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ ط نق ٢

حجم الأسطوانة الدائرية القائمة: ط نق ٢ ع

مثال: اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها ١٤ سم وارتفاعها ٢ سم ، أوجد حجمها ومساحتها الكلية

الحل

$$\therefore \text{حجم الأسطوانة} = \text{ط نق } ٢ \text{ ع} = \frac{٢٢}{٧} (١٤) \times ٢ = ١٢٣٢ \text{ سم}^٣$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = ٢ \text{ ط نق } ٢ \text{ ع} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ \times ٢ = ١٧٦ \text{ سم}^٢$$

$$\therefore \text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + ٢ \text{ ط نق } ٢$$

$$= ١٧٦ + \frac{٢٢}{٧} (١٤) \times ٢ = ١٢٣٢ + ١٧٦ = ١٤٠٨ \text{ سم}^٢$$

مثال: اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم^٣ ، وارتفاعها ٦ سم ، أوجد مساحتها الجانبية

الحل

$$\therefore \text{حجم الأسطوانة} = \text{ط نق } ٢ \text{ ع} = \frac{٢٢}{٧} \times ٦ \times \text{نق } ٢$$

$$\therefore ٩٢٤ = \frac{٢٢}{٧} \times ٦ \times \text{نق } ٢ \leftarrow \text{نق } ٢ = ٤٩ \leftarrow \text{نق} = \sqrt{٤٩} = ٧ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المساحة الجانبية} = ٢ \text{ ط نق } ٢ \text{ ع} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٦ = ٢٦٤ \text{ سم}^٢$$

تدريبات

- ١- اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^٣ ، وارتفاعها ٢٤ سم ، أوجد مساحتها الكلية ($\pi = ٣,١٤$)
- ٢- أيهما أكبر حجماً: أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم ، أم مكعب طول حرفه ١١ سم
- ٣- دائرة مساحتها $\pi ٦٤$ سم^٢ ، أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيطها لأقرب عدد صحيح ($\pi = ٣,١٤$)
- ٤- أيهما أكبر حجماً: مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^٢ أم متوازي مستطيلات أبعاده $٧\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ، ٥
- ٥- متوازي مستطيلات مساحته الجانبية ٤٨٠ سم^٢ ، وقاعدته على شكل مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أحسب ارتفاعه
- ٦- إذا كانت المساحة الكلية لمكعب $= ٩٦$ سم^٢ فأوجد مساحة الوجه الواحد
- ٧- أوجد مساحة المستطيل الذي طولاً ببعده ٥ سم ، ٧ سم ، ثم أوجد المحيط
- ٨- أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٥ سم
- ٩- مكعب محيط أحد أوجهه ١٢ سم أوجد حجمه ومساحته الكلية
- ١٠- متوازي مستطيلات أبعاده $٢\sqrt{٦}$ سم ، $٣\sqrt{٦}$ سم ، $٦\sqrt{٦}$ سم أوجد حجمه

الوحدة الثالثة:

التقريب والخطأ

١. التقريب والخطأ

أولاً: التقريب

أنواع التقريب:

١- التقريب لأقرب عشرة

عند التقريب لأقرب عشرة ننظر أولاً الي رقم الاحاد ونضع مكانه صفر فاذا كان رقم الاحاد من الارقام الكريمة نضيف واحد علي رقم العشرات واذا كان رقم الاحاد من الارقام البخيلة نضع رقم العشرات كما هو

مثال: ٢٤٤ ~ ٢٤٠ ، ٣٦٥ ~ ٣٧٠

٢- التقريب لأقرب مائة

عند التقريب لأقرب مائة ننظر أولاً الي رقم العشرات ونضع مكان رقم الاحاد والعشرات صفرين فاذا كان رقم العشرات من الارقام الكريمة نضيف واحد علي رقم المئات واذا كان رقم العشرات من الارقام البخيلة نضع رقم المئات كما هو

مثال: ١٢٧٢ ~ ١٣٠٠ ، ٢٥٢٦ ~ ٢٥٠٠

٣- التقريب لأقرب الف

عند التقريب لأقرب الف ننظر أولاً الي رقم المئات ونضع مكان رقم الاحاد والعشرات والمئات ثلاثة اصفار فاذا كان رقم المئات من الارقام الكريمة نضيف واحد علي رقم الالوف واذا كان رقم المئات من الارقام البخيلة نضع رقم الالوف كما هو

مثال: ٢٥٩٦٣ ~ ٢٦٠٠٠ ، ٢٣٢٥٦ ~ ٢٣٠٠٠

٤- التقريب لأقرب عدد صحيح (او اقرب وحدة)

عند التقريب لأقرب عدد صحيح ننظر أولاً الي رقم الجزء من عشرة فاذا كان رقم الجزء من عشرة من الارقام الكريمة نضيف واحد علي الرقم الصحيح واذا كان من الارقام البخيلة نضع الرقم الصحيح كما هو مع ملاحظة حذف العلامة العشرية

مثال: ٢٣,٢ ~ ٢٣ ، ٢٦,٩ ~ ٢٧

٥- التقريب لأقرب جزء من عشرة

عند التقريب لأقرب جزء من عشرة ننظر أولاً الي رقم الجزء من مائة فاذا كان رقم الجزء من مائة من الارقام الكريمة نضيف واحد علي رقم الجزء من عشرة واذا كان من الارقام البخيلة نضع الرقم الصحيح كما هو

مثال: ٢٨, ١٥ ~ ١٥, ٣ ، ٢٢, ٦٣ ~ ٢٣, ٦٣

٦- التقريب لأقرب جزء من مائة

عند التقريب لأقرب جزء من مائة ننظر أولاً الي رقم الجزء من الف فاذا كان رقم الجزء من الف من الارقام الكريمة نضيف واحد علي رقم الجزء من مائة واذا كان من الارقام البخيلة نضع الجزء من مائة كما هو

مثال: ٢٣٥, ٩٢ ~ ٢٤, ٩٢ ، ٣٩٢, ٨٥٦ ~ ٣٩, ٨٥٦

٧- التقريب لأقرب جزء من الف

عند التقريب لأقرب جزء من الف ننظر أولاً الي رقم الجزء من عشرة الاف فاذا كان رقم الجزء من عشرة الاف من الارقام الكريمة نضيف واحد علي رقم الجزء من الف واذا كان من الارقام البخيلة نضع الجزء من الف كما هو

مثال: ٣٢٥١, ٥٦ ~ ٣٢٥, ٥٦ ، ٦٣٢٧, ٤٥٤ ~ ٦٣, ٤٥٤

الارقام الكريمة هي ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ ، الارقام البخيلة هي ٠, ١, ٢, ٣, ٤

مثال: قرب ٢٣٨, ٧ متر إلي أقرب سنتيمتر

الحل

٢٣٨, ٧ متر = ٢٣٨, ٨ سنتيمتر ~ ٢٢٤, ٧ سنتيمتر

مثال: قرب ٢٣٢, ٩ لتر الي أقرب سنتيمتر^٣

الحل

٢٣٢, ٩ لتر = ٢٣٢, ٢ سم^٣

٢٣٢, ٢ سم^٣ ~ ٢٣٣, ٩ سم^٣

مثال: قرب ٥٧٨٥٦, ٥ كيلوجرام الي اقرب جرام

الحل

٥٧٨٥٦, ٥ كيلوجرام = ٥٧٨٥٦, ٦ جرام

٥٧٨٥٦, ٦ ~ ٥٧٨٦, ٥ جرام

مثال: قرب مايتي لأقرب عشرة

٣- ٤٣٢٥

٢- ٣٢٥١

١- ٣٦, ٧٨

الحل

٣- ٤٣٢٥ ~ ٤٣٣٠

٢- ٣٢٥١ ~ ٣٢٥٠

١- ٣٦, ٧٨ ~ ٨٠

تدريبات

قرب ما يأتي إلي اقرب عشرة:

١- ٢٣٥١ ٢- ٢٣٧,٥٤ ٣- ١٢٤ ٤- ١٩٢,١٣

قرب ما يأتي إلي اقرب مائة:

١- ٣١٢٤ ٢- ٢٣٥٢ ٣- ١٢٣٩,٢٥ ٤- ٣٦٩٤

قرب مايتي إلي اقرب ألف:

١- ١٢٥٤٣٦ ٢- ١٢٣٤٦٥ ٣- ٢٣٥٩٤٦٢ ٤- ٣٦٨٨٧,١٢٥

قرب مايتي إلي اقرب عدد صحيح (وحدة):

١- ١٢,١٥ ٢- ١٢٥,٥٤٨ ٣- ٢٣,٠٢٣ ٤- ١٤٥,٩٣٢

قرب مايتي إلي اقرب جزء من عشرة:

١- ٢٣٦,٢٥١ ٢- ٣٢,٣٢١ ٣- ٤٥٢,٢٩٣ ٤- ١,٢٣٥

قرب مايتي إلي اقرب جزء من مائة:

١- ٣,٢٣١٤ ٢- ٣٢,٢٥٥٦ ٣- ٣٦,٢٦٩٣ ٤- ٣٦٥,١٢٣٤

قرب مايتي إلي اقرب جزء من ألف:

١- ٢٣,٢٣١٥٤ ٢- ٨٩,٣٢١٣٦ ٣- ٢٣٥,٣٦٥٥ ٤- ١,٢٣٥٤٨

الخطأ المطلق

الخطأ المطلق = القيمة المقربة – القيمة المضبوطة

ملاحظة: إذا ذكر كلمة خطأ فالمقصود به الخطأ المطلق

مثال: علبة مربى مسعرة بسعر ١١٧ قرشاً أخطأ تاجر وباعها لأحد المشترين بسعر ١٢٠ قرشاً أحسب الخطأ المطلق

الحل

∴ الخطأ المطلق = القيمة المقربة – القيمة المضبوطة

∴ الخطأ المطلق = ١٢٠ – ١١٧ = ٣ قروش

$$\frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة المضبوطة}} = \text{الخطأ النسبي}$$

مثال: قرب العدد ٤٨,٣ إلى أقرب وحدة وأوجد الخطأ المطلق ثم احسب النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة

الحل

٤٨,٣ ~ ٤٨ لأقرب وحدة

الخطأ المطلق = القيمة المقربة – القيمة المضبوطة

الخطأ المطلق = ٤٨,٣ – ٤٨ = ٠,٣

الخطأ النسبي = ٠,٣ ÷ ٤٨,٣ = ٠,٠٠٦

ملاحظة: تسمى النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة بالخطأ النسبي

الخطأ المئوي = الخطأ النسبي × ١٠٠

مثال: قرب العدد ٣٦,٨٢ إلى أقرب وحدة وأوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي ثم أوجد الخطأ المئوي

الحل

٣٦,٨٢ ~ ٣٧ لأقرب وحدة

الخطأ المطلق = ٣٦,٨٢ – ٣٧ = ٠,١٨

الخطأ النسبي = ٠,١٨ ÷ ٣٦,٨٢ = ٠,٠٠٤

الخطأ المئوي = الخطأ النسبي × ١٠٠

الخطأ المئوي = ٠,٠٠٤ × ١٠٠ = ٠,٤

مثال: قرب العدد ١,٨٤٨٧ لأقرب جزء من ألف وأوجد الخطأ المئوي

الحل

$$1,849 \sim 1,8487$$

$$\text{الخطأ المطلق} = 1,8487 - 1,849 = 0,0003$$

$$\text{الخطأ النسبي} = 1,8487 \div 0,0003 = 0,0001622$$

$$\text{الخطأ المئوي} = \text{الخطأ النسبي} \times 100$$

$$0,01622 = 100 \times 0,0001622 = \text{الخطأ المئوي}$$

أي أن: الخطأ يعادل ٠,٠١٦٢٢ % من قيمة العدد الأصلي

تدريبات

تمارين (١)

(١) قرب ما يأتي الي درجة التقريب المبينة

لأقرب وحدة	٧٨٨,٦
لأقرب جزء من عشرة	٧٥, ٥٨٣
لأقرب جزء من مائة	٥,٩٨٤
لأقرب مائة	٨٧,٩٧٦

(٢) قرب ما يأتي حسب درجة التقريب المطلوبة

لأقرب جرام	٧٨٩,٢٣ كيلو جرام
لأقرب سنتيمتر مكعب	٧٥,٢٨٤٥ لتر
الي اقرب متر	٨٧,٢٩٢٤ كيلو متر

(٣) قرب ٧٣,٤ كجم الي اقرب كيلوجرام ثم احسب الخطأ النسبي

(٤) قرب العدد ١,٨٤٨٧ لاقرب جزء من الف واوجد الخطأ المئوي

تمارين (٢)

١- قرب العدد ٩٧٨,٣١ لاقرب وحدة واوجد كلامن الخطأ النسبي والخطأ المئوي

٢- جوال من القمح وزنة ٥٠ كجم وزنة شخص اخر فوجدة ٥٠,٣ كجم احسب كل من الخطأ النسبي والخطأ المئوي

٣- قرب كلا من الاعداد التالية الي درجة التقريب المطلوبة واحسب كل من الخطأ النسبي والخطأ المئوي

٧٨٩,٣	الي اقرب وحدة	٩٧٦,٢	الي اقرب عشرة
٧٨٩,٢٣٥	الي اقرب جزء من مائة	٦٨٩,٤٣	الي اقرب وحدة

٢. نهايتا الخطأ

نهايتا الخطأ المطلق في عدد مقرب لآخر رقم فية ± 5 من الرتبة التي تلي رتبة العدد المقرب
مثال: أوجد نهايتا الخطأ المطلق في كل الأعداد الآتية اذا كانت مقربة لآخر رقم فيها

$$٢٣٠ ، ٩٣ ، ٠,٢٥٦ ، ٦٣,٢٥$$

الحل

$$\text{نهايتا الخطأ المطلق في العدد } ٣٦,٢٥ = \pm ٠,٠٠٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ المطلق في العدد } ٠,٢٥٦ = \pm ٠,٠٠٠٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ المطلق في العدد } ٩٣ = \pm ٠,٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ المطلق في العدد } ٢٣٠ = \pm ٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ النسبي} = \pm \frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة المقربة}}$$

مثال: أوجد نهايتا الخطأ النسبي للعدد ٩,١٢ اذا كان مقرباً لأقرب رقم فية

الحل

∴ نهايتا الخطأ المطلق في عدد مقرب لآخر رقم فية ± 5 من الرتبة التي تلي رتبة العدد المقرب

$$\text{نهايتا الخطأ المطلق} = \pm ٠,٠٠٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ النسبي} = \pm \frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة المقربة}}$$

$$\text{نهايتا الخطأ النسبي} = \pm (٩,١٢ \div ٠,٠٠٥) = \pm ٠,٠٠٠٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ المئوي} = \text{نهايتا الخطأ النسبي} \times ١٠٠$$

مثال: أوجد نهايتي الخطأ المئوي في العدد ٣٢,٥ اذا كان مقرباً لآخر رقم فية

الحل

∴ نهايتا الخطأ المطلق في عدد مقرب لآخر رقم فية ± 5 من الرتبة التي تلي رتبة العدد المقرب

$$\text{∴ نهايتا الخطأ المطلق} = \pm ٠,٥$$

$$\text{نهايتا الخطأ النسبي} = \pm \frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة المقربة}}$$

$$\text{نهايتا الخطأ النسبي} = \pm (32,5 \div 0,05) = \pm 0,0015$$

$$\text{نهايتا الخطأ المئوي} = \text{نهايتا الخطأ النسبي} \times 100$$

$$\text{نهايتا الخطأ المئوي} = 0,15 = 100 \times 0,0015$$

مثال: أوجد نهايتي الخطأ المئوي في العدد ٨٩ إذا كان مقرباً لآخر رقم فيه

الحل

∴ نهايتا الخطأ المطلق في عدد مقرب لآخر رقم في $\pm 0,5$ من الرتبة التي تلي رتبة العدد المقرب

$$\text{∴ نهايتا الخطأ المطلق} = \pm 0,5$$

$$\text{نهايتا الخطأ النسبي} = \pm (89 \div 0,5) = \pm 0,0056$$

$$\text{نهايتا الخطأ المئوي} = \text{نهايتا الخطأ النسبي} \times 100$$

$$\text{نهايتا الخطأ المئوي} = \pm 0,56 = 100 \times 0,0056$$

$$\text{∴ نهايتا الخطأ المئوي} = \pm 0,56$$

٣. تراكم الخطأ

في حالة حل المسائل في تراكم الخطأ نقوم بإيجاد نهاية الخطأ لكل رقم علي حدة ثم بعد ذلك نجمع كل نهايات الخطأ مع بعضهم البعض حتي لو كان في المسألة إشارة سالبة

نظرية: تراكم الخطأ في مجموع عددين او باقي طرحهما يساوي مجموع نهايتي الخطأ في كل منهما

فإذا كان العدد س عرضة لخطأ لا يتجاوز $(\pm هـ)$ والعدد ص عرضة لخطأ لا يتجاوز $(\pm و)$

فإن $(س + ص)$ تكون عرضة لخطأ لا يتجاوز $(\pm هـ + و)$

، $(س - ص)$ تكون عرضة لخطأ لا يتجاوز $(\pm هـ + و)$

أي أن: تركم الخطأ هو مجموع نهايات الأخطاء المطلقة في كل الأعداد المقربة الداخلة في العملية

نتيجة: إذا كانت س عرضة لخطأ لا يتجاوز $\pm هـ$

فإن $٢س$ أي $(س + س)$ عرضة لخطأ لا يتجاوز $(\pm هـ + هـ) = \pm ٢هـ$

وعلي ذلك فإن $(أس)$ حيث $(أ)$ ثابت عرضة لخطأ $\pm (أهـ)$ ، أ عدد ثابت

مثال: اوجد تراكم الخطأ في كل من العمليات الاتية علماً بأن جميع الأعداد مقربة لآخر رقم فيها

أولاً: $٧٩,٨ + ٩,١٦ + ٧,٤٨$

ثانياً: $١٣,٤ - ٧٩ + ٢٦,٨$

الحل

أولاً: تراكم الخطأ المطلق $\pm = (٠,٠٥ + ٠,٠٠٥ + ٠,٠٠٥) \pm = ٠,٠٦ \pm$

ثانياً: تراكم الخطأ المطلق $\pm = (٠,٠٥ + ٠,٥ + ٠,٠٥) \pm = ٠,٦ \pm$

مثال: حوض لتربية الاسماك بة $٧٠,٨$ سم من الماء اسقط بة سمكة فارتفع سطح الماء الي ٧٨ سم. اوجد الحدين الذي ينحصر بينهما حجم السمكة علماً بان الارقام السابقة مقربة لآخر رقم فيها

الحل

حجم السمكة $٧٨ - ٧٠,٨ = ٧,٢$ سم^٣

نهايتاً الخطأ المطلق في حجم السمكة $\pm = (٠,٠٥ + ٠,٥) \pm = ٠,٥٥$ سم^٣

النهاية العظمي لحجم السمكة $٧,٧٥ = ٧,٢ + ٠,٥٥$ سم^٣

النهاية الصغري لحجم السمكة $٦,٦٥ = ٧,٢ - ٠,٥٥$ سم^٣

مثال: قطعة أرض علي شكل مربع طول ضلعة ١٠٠ متر مقرباً لأقرب متر . أوجد نهايتا الخطأ المطلق في حساب محيط الأرض وكذلك الحدين الأعلى والأدنى للمحيط ونهايتا الخطأ النسبي فيه

الحل

نهايتا الخطأ المطلق في إيجاد طول ضلع المربع = $\pm 0,5$ متر

∴ محيط المربع = طول الضلع $\times 4$

∴ نهايتا الخطأ المطلق في حساب المحيط = $\pm 0,5 \times 4 = \pm 2$ متر

∴ المحيط = $100 \times 4 = 400$ متر

الحد الأعلى للمحيط = $400 + 2 = 402$ متر

الحد الأدنى للمحيط = $400 - 2 = 398$ متر

نهايتا الخطأ النسبي في حساب المحيط = $\pm (400 \div 2) = \pm 0,005$

تدريبات

- ١- اوجد نهايتا الخطأ المطلق في كل من الاعداد الاتية اذا كانت مقربة لآخر رقم فيها:
٠,٧٥ ، ١,٤٠٥ ، ٩٨ ، ٧٤٠
- ٢- اذا كان ٤,٠٧ مقرباً لأقرب رقم فيه فاوجد نهايتي الخطأ المطلق والحدين الأدنى والاعلى للعدد الحقيقي
- ٣- اوجد نهايتي الخطأ المئوي فأصبح وزنة ١٥٢٧,٨ جراماً فما النهاية العظمي للخطأ الممكن وقوة في تقدير وزن السائل إذا كان كل من هذين العددين مقرباً لآخر رقم فيه وما الخطأ المئوي في وزن السائل
- ٦- حديقته علي شكل مستطيل بعده ٢٨,٤ ، ١٧,٣ من الأمتار فإذا كان كل من هذين البعدين عرضة لخطأ لايتجاوز $\pm 2\%$ فأوجد الحدين الذي ينحصر بينهما محيط الحديقة
- ٧- يملك مزارع ثلاث أفدنة مزروعة قطن ينتج الأول ٧,٨ قنطاراً وينتج الثاني ٤,٧ قنطاراً وينتج الثالث ٦,٧ قنطاراً . فإذا كان كل من هذه الأعداد مقرباً لآخر رقم فيه فأحسب الخطأ الناتج في حساب مجموع إنتاج الأفدنة الثلاثة
- ٨- يملك فلاح ٥ أفدنة مزروعة أرزاً وكان متوسط إنتاج الفدان الواحد منها ٢,٤ طن مقرباً لأقرب رقم عشري واحد فأحسب نهايتا الخطأ المطلق والنسبي في حساب إنتاج الأرض
- في العدد ٨٩ اذا كان مقرباً لآخر رقم فيه ؟
- ٤- اوجد نهايتي الخطأ النسبي والمئوي للعدد ٧٣٠٠ علماً بأنه مقرب لأقرب مائة
- ٥- إناء وزنة ٥٨٧,٢ جراماً ملئ بسائل

الوحدة الرابعة:

البرمجة الخطية

١. البرمجة الخطية

اولاً: حل المتباينات من الدرجة الاولى في متغير واحد

عند حل المتباينة من الدرجة الاولى في متغير واحد تكون مجموعة الحل عبارة عن فترة وتمثيلها يكون عبارة عن خط الاعداد ومعني متغير واحد يعني س فقط في المتباينة

ملحوظة: حل المتباينة يعنى إيجاد قيمة المتغير (س) التي تحقق المتباينة وسوف نعتبر أن مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) مالم يذكر غير ذلك

بعض التعاريف والقوانين الهامة للمتباينات:

(أ) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن:

١- $a < b$ إذا كان $(a - b) < \text{الصفر}$

٢- $a > b$ إذا كان $(a - b) > \text{الصفر}$

٣- إذا كان $أ < \text{الصفر}$ ، $ب < \text{الصفر}$ ، $أ < ب$ فإن $أ^٢ < ب^٢$

أما إذا كان $a > 0$ ، $b > 0$ ، $a < b$ فإن $a^2 < b^2$

(ب) إذا كانت $أ$ ، $ب$ ، $ج$ اعداد حقيقية وكان $أ < ب$ فإن

١- أ + ج < ب + ج

٢- أ ج < ب ج إذا كان ج < الصفر

٣- أ ج > ب ج إذا كان ج > الصفر

٤- إذا كان $a < b$ ، أ ، ب متحdan في الإشارة اي لهما نفس الإشارة فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

مثال: حل المتباينة $3s + 1 > 10$ ومثل الحل بيانياً

الحل

بإضافة (١ -) للطرفين

$$\therefore 3 \text{ س } + 1 - 1 > 1 - 10$$

$\therefore 3 \leq 9$ و بقسمة الطرفين $3 \div$

∴ س > ۳

\therefore مجموعة الحل $= [-\infty, 3]$

مثال: حل المتباينة $7 - 4 \leq 3$ ومثل الحل بيانياً

الحل

$$7 - 4 \leq 3 \Rightarrow 7 - 3 \geq 4 \quad \text{بإضافة } (-7) \text{ للطرفين}$$

$$4 \geq 4 \quad \text{بقسمة الطرفين } \div (-4)$$

$$1 \leq 1$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} =] 1, \infty]$$

مثال: اوجد قيم s التي تحقق المتباينتين الاتيتين معا ثم مثلها بيانياً

$$2s - 3 \geq 9, \quad 1 > 7 - s$$

ثانياً: حل المتباينات من الدرجة الاولى في متغيرين

معنى المتباينة في متغيرين اي يوجد في المتباينة s ، v ويكون تمثيلها بيانياً عبارة عن الشبكة التربيعية

خطوات حل المتباينات من الدرجة الاولى في متغيرين وتمثيلها بيانياً

١- نرسم المستقيم الذي نحصل علي معادلته بوضع علامة = بدلاً من $>$ او $<$

وهذا المستقيم يقسم المستوي الي نصفين

٢- في حالة اذا كانت المتباينة تتضمن علامة = نرسم الخط المستقيم متصل اما اذا كانت المتباينة لا تتضمن علامة = نرسم الخط المستقيم متقطع

٣- نعوض بنقطة الاصل $(0, 0)$ في المتباينة لايجاد الجزء الذي يقع فيه الحل

مثال: مثل المتباينة $s + v \leq 4$ بيانياً

مثال: مثل المتباينة $3s + 2v > 5$ بيانياً

ثالثاً: الحل البياني لمتباينتين من الدرجة الاولى في متغيرين في آن واحد

خطوات الحل البياني لمتباينتين من الدرجة الاولى في متغيرين في آن واحد

١- نمثل كل متباينة بيانياً كما سبق ونظلل جزء المستوي الذي يحقق المتباينة

٢- يكون جزء المستوي المشترك في التظليل لكل من المتباينتين هو الحل المشترك لهما

مثال: حل المتباينتين $s > 1$ ، $v < 2$ في آن واحد بيانياً

مثال: اوجد حل المتباينتين الاتيتين أنياً $s + v < 3$ ، $2s > 2$

تدريبات

أوجد الحل البياني لكل من المتباينات الآتية:

١- $s \leq 2$

٢- $s \geq 3$

٣- $s \geq 3$ ص ١ -

٤- $s < 2 + 3$ ص

٥- $s > 2 + 1$ ص

٦- $s < 3 - 3$ ص

أوجد الحل البياني لكل زوج من المتباينات الآتية:

١- $s \geq 3$ ، $s \leq 1$ ص

٢- $s < 1$ ، $s \geq 9$ ص ٩ > صفر

٣- $s < 3 + 4$ ، $s > 3 + 2$ ص

٤- $s \leq 2 + 6$ ، $s > 3 - 1$ ص

٥- $s \leq 3$ ، $s < 3 - 1$ ص

٦- $s \leq 3$ ، $s < 2 - 1$ ص

الوحدة الخامسة:

المتابعات الحسابية والهندسية

١. المتتابعة الحسابية

تعريف:

المتتابعة الحسابية $(ح_n)$ $\leftrightarrow ح_{n+1} - ح_n =$ عدداً ثابتاً لكل $n \in \mathbb{N}^+$
وهذا يعني أن الفرق بين أي حد والحد السابق له مباشرة قيمة ثابتة
الرمز (\leftrightarrow) إذا وإذا فقط (الإيمن يؤدي إلي للأيسر والأيسر يؤدي للأيمن)

الحد العام للمتتابعة الحسابية هو: $ح_n = أ + (ن - ١) \times ع$

ويستخدم هذا القانون في إيجاد رتبة الحد أو إيجاد الحد الأول (أ) أو إيجاد الأساس (ع)

مثال: اكتب الحدود السبعة الأولى من المتتابعة الحسابية التي حدها الرابع ١٤ وأساسها ٣

الحل

∴ المتتابعة حسابية

$$\therefore ح_{n+1} - ح_n = ٣ \quad (\text{الأساس})$$

$$\text{بوضع } ن = ٣$$

$$\therefore ح_٣ - ح_٢ = ٣$$

$$\therefore ح_٣ = ١٤ = ٣ - ح_٢ \Rightarrow ح_٢ = ١١$$

$$\text{بوضع } ن = ٢$$

$$\therefore ح_٢ - ح_١ = ٣$$

$$\therefore ح_٢ = ١١ = ٣ - ح_١ \Rightarrow ح_١ = ٨$$

$$\text{بوضع } ن = ١$$

$$\therefore ح_١ - ح_٠ = ٣$$

$$\therefore ح_١ = ٨ = ٣ - ح_٠ \Rightarrow ح_٠ = ٥$$

∴ المتتابعة هي (٥، ٨، ١١، ١٤، ١٧، ٢٠،)

ملاحظة: عند تكوين متتابعة حسابية بمعلومية قيمة حد ما وأساس المتتابعة . عندما نتجه جهة اليمين من الحد المعلوم نطرح الأساس (ع) وعندما نتجه جهة اليسار من الحد المعلوم نجمع الأساس (ع)

مثال: كون المتتابعة الحسابية التي حدها الاول ١٠,٥ واساسها ٢,٥

الحل

$$(١٠,٥, ٢,٥ + ١٠,٥, ٢,٥ + ٢ \times ١٠,٥)$$

∴ المتتابعة هي (١٠,٥ ، ١٣ ، ١٥,٥ ، ١٨ ، ٢٠,٥ ،)

مثال: كون المتتابعة الحسابية التي حدها الاول (أ) واساسها (ع)

الحل

$$(أ ، أ + ع ، أ + ع + ع ، أ + ع + ع + ع ،)$$

مثال: كون المتتابعة الحسابية التي حدها العاشر ٥٠ واساسها (٥-) واوجد الحد السادس

الحل

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية} \quad \therefore ٥ - = ع$$

∴ المتتابعة هي (٩٥ ، ٩٠ ، ٨٥ ، ٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ٦٥ ، ٦٠ ، ٥٥ ، ٥٠)

$$\therefore ٧٠ = ح$$

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية:

إذا فرضنا أن الحد الأول (أ) والأساس (ع) فإن المتتابعة الحسابية هي

$$(أ ، أ + ع ، أ + ع + ع ، أ + ع + ع + ع ، ح)$$

مثال: اوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٦ من المتتابعة الحسابية (١٦,١١,٦,١) (....)

الحل

$$١ = ح \quad \text{والأساس} = ٦ - ١ = ٥$$

∴ المتتابعة حسابية

نفرض أن الحد الذي قيمته ٩٦ هو ح

$$\therefore ح = أ + (١ - ن) \times ع$$

$$\therefore ٩٦ = ١ + (١ - ن) \times ٥$$

$$\therefore ٩٥ = ٥(١ - ن) \quad \leftarrow \quad ١٩ = ١ - ن \quad \leftarrow \quad ن = ٢٠$$

∴ رتبة الحد هي ح.٢٠

مثال: إذا كان الحد العام في متتابعة ما هو $ح_n = 3 - 4$ فأثبت أنها متتابعة حسابية

الحل

$$ح_n = 3 - 4$$

$$ح_{n+1} = 3 - (1 + n) = 4 - 3 - n = 1 - n$$

$$ح_{n+1} - ح_n = (1 - n) - (3 - 4) = 3 - 4 = -1$$

$$ح_{n+1} - ح_n = 3 - 4 = -1 \text{ عدد ثابت}$$

∴ المتتابعة حسابية وأساسها $3 - 4 = -1$

تدريب: عين المتتابعة الحسابية التي فيها $ح_1 = 17$ ، $ح_{11} = 52$

الوسط الحسابي لعددين:

(أ ، ب ، ج) متتابعة حسابية \leftrightarrow ب وسطاً حسابياً بين أ ، ج

إذا كان $ج - ب = ب - أ$ (تعريف الأساس)

$$∴ 2ب = أ + ج$$

$$∴ \text{الوسط الحسابي} = \frac{أ + ج}{2}$$

مثال: اوجد الوسط الحسابي بين العددين 32 ، 54

الحل

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{32 + 54}{2} = \frac{86}{2} = 43$$

مثال: إذا كان س ، ص وسطين حسابيين بين أ ، ب اثبت ان $3(ص - س) = أ - ب$

الحل

∴ س ، ص وسطين حسابيين بين أ ، ب

∴ (أ ، س ، ص ، ب) متتابعة حسابية

$$ح_4 = أ + 3(ع) \text{ حيث الأساس } ع = ص - س$$

$$∴ ب = أ + 3(ص - س) \leftarrow ∴ ب - أ = 3(ص - س)$$

مثال: إدخال بين ٣ ، ٢١ ثمانية اوساط حسابية حيث ان ٣ الحد الاول

الحل

$$\therefore \text{عدد الحدود (ن)} = 8 + 2 = 10, \quad \therefore \text{ح} = \text{أ} + (1 - \text{ن}) \times \text{ع}$$

$$\therefore 21 = 3 + (1 - 10) \times \text{ع} \leftarrow 18 = 9 \times \text{ع} \therefore \text{ع} = 2$$

\therefore الأوساط الحسابية (٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥، ١٧، ١٩)

٢. المتتابعة الهندسية

تعريف:

(ح_ن) متتابعة هندسية \leftrightarrow (ح_{ن+١} \div ح_ن) = عدداً ثابتاً ، أي ان النسبة بين أي حد والحد السابق له مباشرة قيمة ثابتة ونرمز للعدد الثابت بالرمز (ر) وهو اساس المتتابعة الهندسية

الحد العام للمتتابعة الهندسية هو: ح_ن = أ \times ر^{ن-١}

ويستخدم هذا القانون ايضا في ايجاد رتبة الحد او الحد الاول (أ) او الاساس (ر)

الوسط الهندسي = $\sqrt{أ \times ج}$

ملاحظة: عند تكوين متتابعة هندسية بمعلومية قيمة حد ما واساس المتتابعة . عندما نتجة جهة اليمين من الحد المعلوم نقسم علي الاساس (ر) وعندما نتجة جهة اليسار من الحد المعلوم نضرب في الاساس (ر)

مثال: كون المتتابعة الهندسية التي حدها الاول ٢ واساسها ٥

الحل

المتتابعة هي (٢ ، ١٠ ، ٥٠ ، ٢٥٠ ،)

مثال: كون المتتابعة الهندسية التي حدها الرابع ١٢٨ واساسها $\frac{1}{4}$

الحل

$$\text{ح} :: \text{أ} = 128 = 3 \quad \therefore \frac{1}{4} = \text{ر}$$

$$\therefore \text{أ} = 3 \left(\frac{1}{4} \right) = 128$$

$$\therefore \text{أ} = 128 \times 8 = 1024$$

\therefore المتتابعة هي (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ١٢٨ ، ٦٤ ،)

تدريبات

- ١- أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الثالث ٥ وحدها السادس ١١
- ٢- إذا كان مجموع الحدين الأول والثالث في متتابعة حسابية هو -٩٠ ومجموع حدودها الثلاثة السابع والثامن والتاسع -٢٢٥ أوجد المتتابعة وقيمة أول حد موجب
- ٣- أوجد الوسط الحسابي بين الكميتين ١٧ ، ٦٧
- ٤- أدخل أحد عشر وسطاً حسابياً بين ٢٥ ، ١١
- ٥- أدخل خمسة عشر وسطاً حسابياً بين ٤٥ ، ١٩
- ٦- متتابعة حسابية حدها السادس ٤٩ وحدها التاسع ٧٠ أوجد الوسط الحسابي بين حديها
- ٧- أوجد الوسط الهندسي بين ٢ ، ٣٣٨
- ٨- أوجد الوسط الهندسي بين ٦- ، ٢٩٤
- ٩- أدخل وسطين هندسيين بين ٩ ، ٧٢
- ١٠- أدخل ثلاث أوساط هندسية بين ٤٨٦ ، ٦
- ١١- أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الثاني ١٨ وحدها السادس $\frac{2}{9}$
- ١٢- متتابعة هندسية حدها الخامس ٨١ وحدها الثاني ٢٤ أوجد هذه المتتابعة
- ١٣- متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث ٦ ومجموع حديها السادس والسابع ٤٨٦ أوجد هذه المتتابعة