المجمع التعليمي التكنولوجي المتكامل بأسيوط

قسم المواد الثقافية

الفرقة الأولى

"الرياضيات"

الوحدة السادسة:

الأســـــس والجذور

١. الأســـــس

القوانين الأساسية للأسس

القانون الأول: في حالة الضرب تجمع أسس الرموز (الأساسات) المتشابهة أي أن:

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$ ، فمثلا $٣^{٤} \times ٣^{٢} = ٣^{٦}$

القانون الثاني: في حالة القسمة تطرح أسس الرموز المتشابهة ، أي أن:

$(س^{م} \div س^{ن}) = س^{م-ن}$ ، فمثلاً: $(٣^{٧} \div ٣^{٥}) = ٣^{٢}$

القانون الثالث: إذا رفعت مجموعة من العوامل إلي قوة معينة فعند فك الأقواس نضرب هذه القوة في كل من قوي هذة العوامل ، أي أن: $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$ $\longleftarrow$ $(س^{م} \times ص^{هـ})^{ن} = س^{م ن} \times ص^{هـ ن}$

ملاحظات هامة:

١- يجب التفرقة بين $(س^{٢})^{٣}$ التي تساوي $س^{٦}$ وبين $س^{٢} \times س^{٣} = س^{٥}$

٢- يجب مراعاة أن $(س + ص)^{٣} \neq (س^{٣} + ص^{٣})$، ولكن $(س ص)^{٣} = س^{٣} ص^{٣}$

٣- $(١)^{ن} = ١$ فمثلاً: $١^{٥} = ١$

٤- $س^{صفر} = ١$

٤- $(س)^{-ن} = (١ \div س^{ن})$ ، $(أ \div ب)^{-ن} = (ب \div أ)^{ن}$

فمثلاً: $(٦ \div ٥)^{-٣} = (٥ \div ٦)^{٣}$

مثال: أوجد قيمة كل من المقادير الأتية

١- $(٣٢)^{١/٥}$ ٢- $(٣^{-١/٢})^{٨}$

٣- $\dfrac{٧٢^{٣} \times ٨^{-٤}}{٩^{٤} \times ١٢^{-٢}}$

الحل

١- $(٣٢)^{١/٥} = (٢^{٥})^{١/٥} = ٢$ ، ٢- $(٣^{-١/٢})^{٨} = ٣^{-٨/٢} = ٣^{-٤} = \dfrac{١}{٣^{٤}} = \dfrac{١}{٨١}$

٣- $\dfrac{٧٢^{٣} \times ٨^{-٤}}{٩^{٤} \times ١٢^{-٢}} = \dfrac{(٢^{٣} \times ٣^{٢})^{٣} \times (٢^{٣})^{-٤}}{(٣^{٢})^{٤} \times (٣ \times ٢^{٢})^{-٢}} = \dfrac{٢^{٩} \times ٣^{٦} \times ٢^{-١٢}}{٣^{٨} \times ٣^{-٢} \times ٢^{-٤}}$

الدالة الأسية

الدالة الأسية هي الدالة التي تكون علي الصورة:

$ص = أ^{س}$ أو $د(س) = أ^{س}$ أو $د: س \leftarrow أ^{س}$ حيث $أ \in ح^{+}$ ، $أ \neq ١$

ملاحظة: إذا كان $أ = ١$ فإن د(س) تكون دالة ثابتة .

قاعدة هامة:

١ـ اذا كان $س^{م} = س^{ن} \leftarrow م = ن$ ، $س \in ح - \{ ١ ، -١ ، ٠ \}$

$٢^{س} = ٨ \leftarrow ٢^{س} = ٢^{٣} \leftarrow س = ٣$

٢ـ إذا كان $س^{م} = ص^{م} \leftarrow س = ص$ لكل $م \in ص^{+}$

$س^{٣} = ٨ \leftarrow س^{٣} = ٢^{٣} \leftarrow س = ٢$

٣ـ إذا كان $س^{م} = ص^{م} \leftarrow س = ص$ لكل $م \in ص^{+}$ ، م عددفردي

$\leftarrow س = \pm ص$ لكل $م \in ص^{+}$ ، م عددزوجي

مثال: أوجد قيمة س اذا كانت:

١ـ $٥^{س-٢} = ١٢٥$ ٢ـ $٢٥^{س^{٢}-١} = ١٢٥^{-س}$

٣ـ $س^{١/٣} = ٢$

الحل

١ـ $٥^{س-٢} = ١٢٥ \leftarrow ٥^{س-٢} = ٥^{٣} \leftarrow س - ٢ = ٣ \leftarrow س = ٥$

٢ـ $٢٥^{س^{٢}-١} = ١٢٥^{-س} \leftarrow ٥^{٢س^{٢}-٢} = ٥^{-٣س}$

$\leftarrow ٢س^{٢} - ٢ = -٣س \leftarrow ٢س^{٢} + ٣س - ٢ = صفر$ معادلة من الدرجة الثانية

$\leftarrow (٢س - ١)(س + ٢) = صفر \leftarrow ٢س - ١ = صفر \leftarrow س = \frac{١}{٢}$

، $س + ٢ = صفر \leftarrow س = -٢$

٣ـ $س^{١/٣} = ٢ \leftarrow س^{١/٣} = (٨)^{١/٣} \leftarrow س = ٨$

مثال: إذا كان $د(س) = ٣^{س}$ أوجد قيمة مجموعة حل المعادلة $د(س + ١) + د(س - ١) = ٩٠$

الحل

$٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$ بالقسمة علي $٣^{س-١}$ للطرفين

← $٣^{س+١} / ٣^{س-١} + ٣^{س-١} / ٣^{س-١} = ٩٠ / ٣^{س-١}$

← $٣^{س-س+١+١} + ٣^{س-س-١+١} = ٩٠ / ٣^{س-١}$

← $٣^{٢} +١ = ٩٠ /٣^{س-١}$ ← $١٠ = ٩٠ / ٣^{س-١}$ بالضرب في $٣^{س-١}$ للطرفين

← $٣^{س-١} × ١٠ = ٩٠$ ← $٣^{س-١} = ٩$ ← $٣^{س-١} = ٣^{٢}$

← س – ١ = ٢ ← س = ٣ ← مجموعة الحل = { ٣ }

<u>حل اخر</u>

$٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$ بأخذ $٣^{س-١}$ عامل مشترك

$٣^{س-١} (٣^{٢} + ١) = ٩٠$ ← $٣^{س-١} × ١٠ = ٩٠$

← $٣^{س-١} = ٩$ ← $٣^{س-١} = ٣^{٢}$

← س – ١ = ٢ ← س = ٣ ← مجموعة الحل = { ٣ }

٢. الجذور

إذا كان $س^ن = ب$ فإن س تسمي الجذر النوني للعدد ب وتكتب $\sqrt[ن]{ب} = س$ ويسمي ب العدد المجذور ويسمي ن دليل الجذر ويجب أن يكون ن عدداً صحيحاً موجباً أكبر من واحد

أمثلة:

$٨١ = ٣^٤$ ومن ثم فإن $\sqrt[٤]{٨١} = ٣$

$-٣٢ = (-٢)^٥$ ومن ثم فإن $\sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

نتيجة:

إذا رفع جذر إلي قوة مساوية لدليل الجذر كان الناتج مساوياً للمقدار المجذور .

أمثلة:

$(\sqrt[ن]{أ})^ن = أ$ ، $(\sqrt{٣})^٢ = ٣$ ، $(\sqrt[٣]{٩})^٣ = ٩$

خاصية:

أي أساس مرفوع إلي أس كسري يمكن وضعة في صورة جذرية ، حيث يكون مقام الكسر هو دليل الجذر والبسط هو قوة هذا الأساس .

أمثلة:

$أ^{م÷ن} = \sqrt[ن]{أ^م}$

$(٧)^{٢÷٣} = \sqrt[٣]{٤٩}$

تدريبات

١ـ إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ أوجد قيمة

د(٠) ، د(١) ، د(-٢)

وإذا د(٢س) – ٨ د(س) = ٩ أوجد قيمة س

٢ـ إذا كان د(س) = $٢^{س}$ حل المعادلة

د(س + ٢) + د(س – ٢) = ١٣٦

٣ـ إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ فحل المعادلة

د(س – ٢) + د(س – ١) + د(س) = ١١٧

٤ـ أوجد قيمة كلا ممايأتي:

أ ـ $\dfrac{٧^{٢س+١} \times ١٥^{٢س}}{٢١^{٢س} \times ٥^{٢س+١}}$

ب ـ $\dfrac{٢٥^{س+٣} \times ١٠^{س} \times ٨^{س+٢}}{٥^{٣س+٥} \times ١٦^{س+٢}}$

ج ـ $\dfrac{٢٢^{٢س} \times ٣^{٢س+١}}{١١^{٢س+١} \times ٦^{٢س}}$

٥ـ أثبت أن :

أ ـ $\dfrac{١٠٠^{٢س-١} \times ٢٥^{س+١}}{١٦^{س-١} \times ١٢٥^{٢س}} = ٤$

ب ـ $\dfrac{٤٠^{-١} \times ٣٢^{٢} \times ٢٥}{٥ \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{-٢}} = ٨$

الوحدة السابعة:

اللوغاريتمات

١. اللوغاريتمات

الدالة د(س) = $أ^{س}$ حيث أ عدد حقيقي موجب ، تسمي الدالة الأسية

وممكن كتابتها علي الصورة ص = $أ^{س}$

الدالة اللوغاريتمية س = $لو_{أ}$ ص

يمكن تحويل الصورة الأسية الي الصورة اللوغاريتمية

$٣٢ = ٢^{٥}$ ← $٥ = لو_{٢}\ ٣٢$

$٥ = (٢٥)^{١/٢}$ ← $\frac{١}{٢} = لو_{٢٥}\ ٥$

وبالعكس يمكن تحويل الصورة اللوغاريتمية الي الصورة الاسية

$لو_{٣}\ ٢٤٣ = ٥$ ← $٣^{٥} = ٢٤٣$

$لو_{٤}\ ٦٤ = ٣$ ← $٤^{٣} = ٦٤$

خواص الدالة اللوغاريتمية:

١ـ ليس للأعداد الحقيقية السالبة لوغاريتمات

٢ـ لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم وحيد فقط هو قيمه من قيم س

٣ـ الدالة اللوغاريتمة تزايدية ، أي أنة كلما زادت قيمة المتغير المستقل ص زادت قيمة المتغير التابع س

٤ـ إذا تساوت الأعداد تساوت لوغاريتماتها لنفس الأساس

إذا كانت جـ = ء فإن $لو_{أ}$ جـ = $لو_{أ}$ ء

٥ـ إذا تساوت لوغاريتمات كميات لنفس الأساس تساوت الكميات

إذا كانت $لو_{أ}$ س = $لو_{أ}$ ص فإن س = ص

حل المعادلة الأسية:

سبق حلها بإستخدام القاعدة التي تقول أنة: إذا الأساسات تساوت تساوت الأسس

مثال: حل المعادلة $٦٢٥ = ٥^{س}$

الحل

$٦٢٥ = ٥^{س} \leftarrow ٥^{٤} = ٥^{س} \leftarrow س = ٤$

حل المعادلة اللوغاريتمية:

طريقة حل المعادلة اللوغاريتمية: نحول المعادلة اللوغاريتمية الي معادلة اسية ثم نتبع حل المعادلة الأسية

مثال: أوجد قيمة المجهول في كل معادلة من المعادلات الأتية

١- $لو_{٥} \frac{١}{١٢٥} = س$

٢- $لو_{س} ٠,٠٠١ = -٣$

الحل

١- $لو_{٥} \frac{١}{١٢٥} = س \leftarrow ٥^{س} = ٥^{-٣}$

$\because$ الأساس = الأساس $\therefore$ الأس = الأس

$\therefore س = -٣$

٢- $لو_{س} ٠,٠٠١ = -٣ \leftarrow س^{-٣} = ١٠^{-٣} \leftarrow س = ١٠$

تدريبات

أكمل الجدول الأتي:

المعادلة اللوغاريتمية	المعادلة الأسية	قيمة المجهول
لو$_{ه}$ س = ٥	....	س = ...
لو$_{٩}$ ص = صفرا	....	ص = ...
لو$_{٤}$ ع = -٤	....	ع = ...
....	٢^{س} = ٣٢	س = ...
....	(١٠)^{م} = ١٠	م = ...
لو$_{٣}$ ٨١ = ل	....	ل = ...

حل المعادلات اللوغاريتمية الأتية:

أ - لو$_{ه}$ (٢س – ٣) = ٢

ب - لو$_{٢س}$ ٨١ = ٤

ج - لو ١٠٠٠ = س

٢. قوانين اللوغاريتمات

القانون الأول:

عند تساوي الأساسات تجمع الأسس في حالة الضرب ، أي أن: س^{م} × س^{ن} = س$^{م+ن}$

وتجمع اللوغاريتمات في الصورة اللوغاريتمية ، أي أن: لو$_{أ}$ (س × ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

نتيجة:

لو$_{أ}$ (س × س) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ س^{٢} = ٢ لو$_{أ}$ س

القانون الثاني:

عند تساوي الأساسات تطرح الأسس في حالة القسمة ، أي أن: س^{م} ÷ س^{ن} = س$^{م+ن}$

وتطرح اللوغاريتمات في الصورة اللوغاريتمية ، أي أن: لو$_{أ}$ ($\frac{\text{س}}{\text{ص}}$) = لو$_{أ}$ س ـ لو$_{أ}$ ص

القانون الثالث:

أي كمية غير صفرية مرفوعة إلي الأس صفر تساوي الواحد الصحيح ، أي ان: (أ)$^{\text{صفر}}$ = ١ حيث أ $\neq$ صفر

ولوغاريتم الواحد الصحيح لأي أساس يساوي الصفر ، أي أن: لو$_{أ}$ ١ = صفر

القانون الرابع:

إذا رفعت أي كمية إلي أس الواحد الصحيح لا تتغير قيمتها ، أي أن: (أ)^{١} = أ

ولوغاريتم أي كمية بالنسبة لنفسها كأساس يساوي ١ ، أي أن: لو$_{أ}$ (أ) = ١

ملاحظات هامة:

١ـ يمكن تطبيق القوانين في حالات تكرار الضرب والقسمة ، أي أن:

لو $\frac{\text{س} \times \text{ص}}{\text{ع} \times \text{ل}}$ = لو س + لو ص – لو ع – لو ل

٢ـ العملية العكسية صحيحة ، أي أنه يمكن تحويل جمع وطرح لوغاريتمات كميات بأساس مشترك إلي لوغاريتم حاصل ضرب وخارج قسمة للكميات لنفس الأساس ،

أي أن: لو ع + لو ص – لو م – لو هـ = لو $\frac{\text{ع} \times \text{ص}}{\text{م} \times \text{هـ}}$ ، وكذلك م لو س = لو س^{م}

، وكذلك م لو س + ن لو ص – جـ لو ع = لو $\frac{\text{س}^{\text{م}} \times \text{ص}^{\text{ن}}}{\text{ع}^{\text{جـ}}}$

٣- $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}} \neq$ لو س − لو ص ، لو س × لو ص ≠ لو س + لو ص

٤- لو ١٠ = ١ ، لو ١٠٠ = ٢ ، لو ١٠٠٠ = ٣ ، ....

٥- إذا كتبت لو بدون أساس يكون الأساس هو ١٠

مثال: إذا كان لو ٢ = ٠,٣٠١٠ ، لو ٣ = ٠,٤٧٧١ ، لو ٥ = ٠,٦٩٩٠ ، لو ٧ = ٠,٨٤٥١

فأوجد قيم المقادير الأتية: لو ١٤ ، لو ٢٠٠ ، لو ٨١ ، لو ٣٥ ، لو ٧٠ ، لو $\frac{٩}{٥}$

الحل

لو ١٤ = لو ٧ × ٢ = لو ٧ + لو ٢ = ٠,٨٤٥١ + ٠,٣٠١٠ = ١,١٤٦١

لو ٢٠٠ = لو ٢ × ١٠٠ = لو ٢ + لو ١٠٠ = ٠,٣٠١٠ + ٢ = ٢,٣٠١٠

لو ٣٥ = لو ٥ × ٧ = لو ٥ + لو ٧ = ٠,٦٩٩٠ + ٠,٨٤٥١ = ١,٥٤٤١

لو ٧٠ = لو ٧ × ٥ × ٢ = لو ٧ + لو ٥ + لو ٢ = ٠,٨٤٥١ + ٠,٦٩٩٠ + ٠,٣٠١٠ = ١,٨٤٥١

لو $\frac{٩}{٥}$ = لو ٩ − لو ٥ = لو $٣^{٢}$ − لو ٥ = ٢ لو ٣ − لو ٥ = ٢ × ٠,٤٧٧١ − ٠,٦٩٩٠

= ٠,٩٥٤٢ − ٠,٦٩٩٠ = ٠,٢٥٥٢

مثال: أثبت أن $\frac{\text{لو ٣٤٣}}{\text{لو ٤٩}} = \frac{٣}{٢}$

الحل

$\frac{\text{لو ٣٤٣}}{\text{لو ٤٩}} = \frac{\text{لو } ٧^{٣}}{\text{لو } ٧^{٢}} = \frac{\text{٣ لو ٧}}{\text{٢ لو ٧}} = \frac{٣}{٢}$

تدريبات

اختصر مايأتي:

١ـ لو$_{٢}$ ١٠٠٠ + لو$_{٢}$ ٣٥ – لو$_{٢}$ ٧٠ – لو$_{٢}$ ٤٠ – لو$_{٢}$ ٢٥

٢ـ لو$_{٧}$ ٢٤٣ ÷ لو$_{٧}$ ٢٧

٣ـ لو$_{٢}$ ٦٢٥ + ٢ لو$_{٢}$ ١٠ - $\frac{٣}{٢}$ لو$_{٢}$ ٦٤٠٠ + لو$_{٢}$ $\frac{٣٢}{٥}$

٤ـ اثبت أن: لو٨٢٥ ينحصر بين ٢ ، ٣

٥ ـ أثبت أن لو٨٢٥ ينحصر بين ٢ ، ٣

٦ـ إذا كان لوس ينحصر بين ١ ، ٢ فأثبت أن س تنحصر بين ١٠ ، ١٠٠

٧ـ إذا كان لو٢ = ٠,٣٠١٠ أوجد قيم كلاًمن الكميات الآتية:

لو٨ ، لو٠,٤ ، لو٠,٠٢ ، لو٠,٠٦٤

الوحدة الثامنة:

حساب المثلثات

١. حساب المثلثات

الوضع القياسي للزاوية الموجهة:

وعلي ذلك يكون لكل زاوية موجهة في الوضع القياسي

قياسان احدهما موجب والأخر سالب

وحدات قياس الزاوية:

١- القياس الستيني

٢- القياس الدائري

العلاقة بين التقديرين الدائري والستيني:

التقدير الدائري هو هـ ء

التقدير الستيني هو س°

$\text{هـ}^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\text{ط}}{١٨٠}$ ، $\text{س}^{\circ} = \text{هـ}^{ء} \times \frac{١٨٠}{\text{ط}}$

مثال: حول للتقدير الدائري كلا ممايأتي:

١- ٦٠°　　٢- ٤٥°　　٣- ١٢/ ٣٠°

الحل

١- $\text{هـ}^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\text{ط}}{١٨٠} = ٦٠^{\circ} \times \frac{٣.١٤}{١٨٠} = ١,٠٤٧^{ء}$

٢- $\text{هـ}^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\text{ط}}{١٨٠} = ٤٥^{\circ} \times \frac{٣.١٤}{١٨٠} = ٠,٧٨٥^{ء}$

٣- $\text{هـ}^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\text{ط}}{١٨٠} = ١٢/\ ٣٠^{\circ} \times \frac{٣.١٤}{١٨٠} = ٠,٥٣^{ء}$

مثال: النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٢: ٣: ٤ أوجد القياس الستيني والدائري لكلا من زوايا المثلث

الحل

نفرض أن قياسات زوايا المثلث هي ٢س ، ٣س ، ٤س

∴ ٢س + ٣س + ٤س = ١٨٠° ← ٩س = ١٨٠° ← س = ٢٠°

∴ القياس الستيني للزاوية الأولي = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

∴ القياس الستيني للزاوية الثانية = ٣ × ٢٠° = ٦٠°

∴ القياس الستيني للزاوية الثالثة = ٤ × ٢٠° = ٨٠°

القياس الدائري للزاوية الأولي = ٤٠° × $\frac{٣.١٤}{١٨٠}$ = ٠,٧ ء

القياس الدائري للزاوية الثانية = ٦٠° × $\frac{٣.١٤}{١٨٠}$ = ١,٠٧ ء

القياس الدائري للزاوية الثالثة = ٨٠° × $\frac{٣.١٤}{١٨٠}$ = ١,٤ ء

مثال: حول للتقدير الستيني كلا ممايأتي:

١- ٢,٣ ء　　　٢- ١,٠٥ ء　　　٣- ١,٣٧ ء

الحل

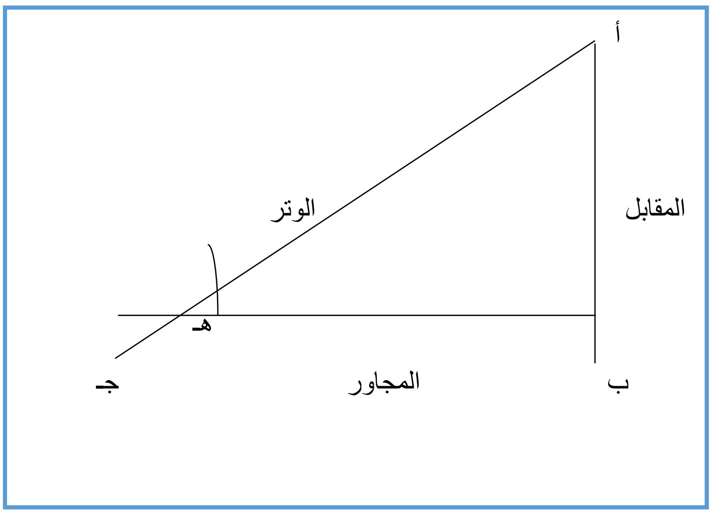
١- س° = هـ ء × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ٢,٣ ء × $\frac{١٨٠}{٣.١٤}$ = ١٣١° ٥٠/

٢- س° = هـ ء × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ١,٠٥ ء × $\frac{١٨٠}{٣.١٤}$ = ٦٠° ١١/

٣- س° = هـ ء × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ١,٣٧ ء × $\frac{١٨٠}{٣.١٤}$ = ٧٨° ٣٢/

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

في أي مثلث قائم الزاوية يمكن تعريف الدوال المثلثية كالأتي:



جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ظاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{جـ ب}}$

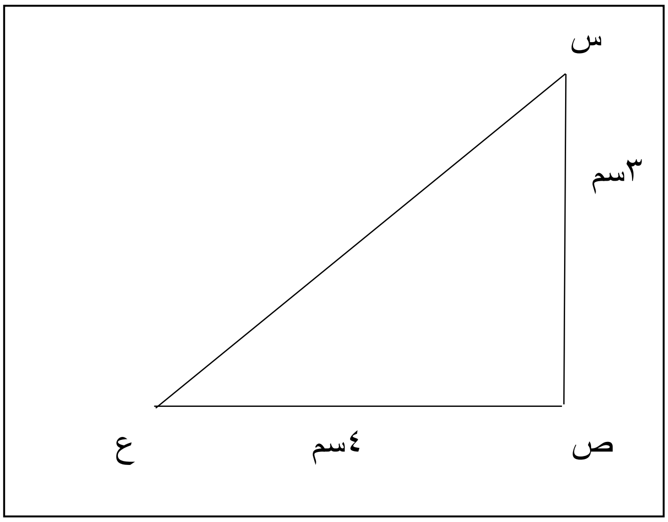
مقلوبات الدوال المثلثية:

قتاهـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب أ}}$

قاهـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$

ظتاهـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

مثال: إذا كان المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص وكان س ص = ٣سم
، ص ع = ٤سم أوجد الدوال المثلثية ومقلوباتها للزاوية الحادة (ع)



الحل

∵ $(\text{س ع})^2 = (\text{س ص})^2 + (\text{ص ع})^2$

∴ $(\text{س ع})^2 = ٣^2 + ٤^2 = ٢٥$

∴ س ع = ٥ سم

$\text{جاع} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س ص}}{\text{س ع}} = \frac{٣}{٥}$

$\text{جتاع} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{س ع}} = \frac{٤}{٥}$

$\text{ظاع} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}} = \frac{٣}{٤}$

<u>مقلوبات الدوال المثلثية:</u>

$\text{قتاهـ} = \frac{١}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{س ع}}{\text{س ص}} = \frac{٥}{٣}$

$\text{قاهـ} = \frac{١}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ص ع}} = \frac{٥}{٤}$

$\text{ظتاهـ} = \frac{١}{\text{ظا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{س ص}} = \frac{٤}{٣}$

تدريبات

١ـ إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، وكان جاجـ = $\frac{٤}{٥}$

أوجد الدوال المثلثية ومقلوباتها للزاوية الحادة (جـ)

٢ـ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، س ص = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم

أوجد قيم الدوال المثلثية لكل من الزاويتين س ، ص

٣ـ إذا كانت ٤قاأ = ٥ فأوجد قيم جميع الدوال المثلثية الأساسية للزاوية (أ) إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في (ب)

الوحدة التاسعة:

المساحات

١. المساحات

أولاً: مساحة سطح المثلث

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الأرتفاع

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ = حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مثال: أوجد مساحة سطح المثلث القائم الزاوية الذي فيه أب = ١٣سم ، ب جـ = ٥سم ، ق(< جـ) =٩٠ْ

الحل

∵ (أجـ)٢ = (أ ب)^{٢} – (ب ج)^{٢} = (١٣)^{٢} – (٥)^{٢} = ١٦٩ – ٢٥ = ١٤٤

∴ أجـ = ١٢سم

∵ مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الأرتفاع

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠سم^{٢}

حل أخر

∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٥ × ١٢ × جا٩٠ = ٣٠سم^{٢}

ثانياً: مساحة سطح المستطيل

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

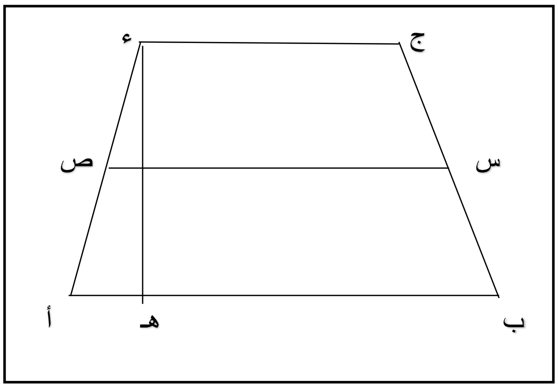
مساحة المستطيل = الطول × العرض

ثالثاً: مساحة سطح المربع

محيط المربع = طول الضلع × ٤

مساحة المربع = طول الضلع × نفسة

رابعاً: مساحة سطح شبة المنحرف



إذا كان أ ب جـ ء شبة منحرف قاعدتاه المتوازيتان

أب ، جـ ء وأرتفاعة ءهـ

فإن مساحة سطح شبة المنحرف

$= \frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين × الأرتفاع

$= \frac{١}{٢}$ (أ ب + جـ ء) × ءهـ

وإذا كان س ، ص منتصفي أء ، ب جـ علي الترتيب فإن س ص تسمي بالقاعدة المتوسطة ويكون

س ص = $\frac{\text{أب+جـ ء}}{٢}$

القاعدة المتوسطة = $\frac{\text{أب+جـ ء}}{٢}$

وتصبح مساحة سطح شبة المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الأرتفاع

خامساً: مساحة سطح متوازى الأضلاع

مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الأرتفاع

سادساً: مساحة سطح المعين

مساحة المعين = طول أحد الأضلاع × الأرتفاع المناظر لها

= نصف حاصل ضرب طولا قطرية

سابعاً: مساحة سطح الدائرة

محيط الدائرة = ٢ × ط × نق

مساحة الدائرة = ط × نق^{٢}

مثال: لوحان من الخشب الأبلكاش أحدهما علي شكل مستطيل بعداه ١٢٠سم ،١٨٠سم والأخر علي شكل مربع ، فإذا كان محيطهما متساويين فأوجد مساحة سطح كل منهما

الحل

∵ مساحة المستطيل = الطول × العرض

∴ مساحة المستطيل = ١٢٠×١٨٠ = ٢١٦٠٠سم^{٢}

∵ محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

∴ محيط المستطيل = (١٢٠ +١٨٠) × ٢ = ٦٠٠سم

∵ محيط المستطيل = محيط المربع

∴ محيط المربع = ٦٠٠سم

∵ محيط المربع = طول الضلع × ٤

∴ طول ضلع المربع = $\frac{\text{المحيط}}{٤}$ = $\frac{٦٠٠}{٤}$ = ١٥٠سم

∵ مساحة المربع = طول الضلع × نفسة

∴ مساحة المربع = ١٥٠ × ١٥٠ = ٢٢٥٠٠سم^{٢}

مثال: أوجد محيط ومساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ١٠سم

الحل

∵ محيط الدائرة = ٢ × ط × نق

∴ محيط الدائرة = ٢ × ٣,١٤ × ١٠ = ٦٢,٨سم

∵ مساحة الدائرة = ط × نق^{٢}

∴ مساحة الدائرة = ٣,١٤ × (١٠)^{٢}

∴ مساحة الدائرة = ٣,١٤ × ١٠٠ = ٣١٤سم^{٢}

تدريبات

١ـ أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذي فية:

أ ـ أب = ١٢سم ، أجـ = ٦سم ، ق (< جـ) = ٣٠°

ب ـ أب = ١٢سم ، ب جـ = ١٤سم ، ق(< أ) = ٦٠°

جـ ـ جـ ب = ٤سم ، أجـ = ٢٠سم ، ق(ب) = ١٥٠°

٢ـ يراد تبليط أرض حمام مستطيلة الشكل عرضها $\frac{٣}{٤}$ طولها ببلاط سيراميك مربع الشكل محيط البلاطة ١٢٠سم فإذا كان محيط أرض الحمام ١٤متر فأوجد عدد البلاطات من السيراميك المستخدمة

٣ـ أرض حجرة علي شكل شبة منحرف طولا قاعدتية المتوازيتين ٤م ، ٥م ، وضع في وسطها سجادة مستديرة الشكل طول نصف قطرها ١,٤م فكانت مساحة سطح الجزء غير المغطب تساوي ١١,٨٤م^{٢} أحسب ارتفاع شبة المنحرف

٤ـ قطعة أرض مربعة الشكل ، شيد علي جزء منها منزل قاعدتة علي شكل مستطيل بعداه ١٥م ، ٢٠م ، وعمل حمام سباحة دائري الشكل طول نصف قطرة ٧م ، ووزعت المساحة الباقية حديقة فإذا كانت مساحة الحديقة ١١٤٦م^{٢} فأحسب طول ضلع قطعة الأرض

٥ـ مساحة سطح دائرة يساوي عشرة أمثال مساحة سطح دائرة اخري طول نصف قطرها ٢م أوجد نصف قطر الدائرة الكبري

٦ـ أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة سطح المثلث متساوي الأضلاع الذي طول ضلعة ٦سم