目　录

注：仅对数一要求的部分标有“*”，仅对数二，数三要求的部分相应标有“○”，“△”.

第一讲　函数、极限、连续性

一、函数

1. 函数

(1)函数的定义

设数集$D \subset R$，则称映射$f: D \to R$为定义在D上的函数，简记为$y = f(x),\ x \in D$，其中x

称为自变量，y称为因变量，D称为定义域，记为D_f，$f(D)$为值域，记为R_f.

(2)函数定义的两要素：定义域，对应法则.

2. 函数的特性

(1)有界性：若$\exists\ M > 0$，对于$\forall\ x \in I$，都有$|f(x)| \le M$，则称$f(x)$在I上有界.

(2)单调性：设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I \subset D$，若对于$\forall\ x_1, x_2 \in I$，当$x_1 < x_2$时，有$f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)，则称$f(x)$在区间I上单调增加(单调减少).

(3)奇偶性：设函数的定义域为I，对于$\forall x \in I$，

若$f(-x) = -f(x)$，则称$f(x)$是奇函数；

若$f(-x) = f(x)$，则称$f(x)$是偶函数.

注：任何一个定义域关于原点对称的函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和的形式，即：

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

(4)周期性：设$f(x)$的定义域为I，若$\exists T > 0$，对于$\forall x \in I$，使得$f(x+T) = f(x)$ $(x+T \in I)$，则称$f(x)$为周期函数，T为$f(x)$的周期，通常周期是指最小正周期.

3. 反函数

(1)反函数的定义

设函数$f: D \to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^{-1}: f(D) \to D$，则称映射f^{-1}为函数f的反函数.

(2)结论：$f^{-1}[f(x)] = x$，$f[f^{-1}(x)] = x$.

(3)单调函数存在反函数，反之不成立.

4. 复合函数

(1)复合函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subset D_f$，则函数 $y=f[g(x)]$ ，$x\in D_g$ 称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数.

(2)只有当函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交非空时，才能将它们复合成复合函数.

5. 初等函数

(1)基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

(2)初等函数：由常数和五类基本初等函数进行有限次的四则运算和复合构成的可用一个式子表示的函数.

(3)初等函数必须能用一个式子表示，不能用一个式子表示的函数不能称为初等函数，故分段函数一般不是初等函数.

二、极限

1. 数列极限

(1)数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

(2)数列极限的基本性质：

①(唯一性)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

②(有界性)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界，即：$\exists M>0$，使得 $\forall n$ 有 $|x_n|\le M$.

③(保号性)如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么∃ $N\in N^+$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

(3)数列极限的四则运算法则

设有数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，则：

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；　② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=A\cdot B$；

③当 $y_n \neq 0$ 且 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

(4)数列极限存在的判定

①(夹逼法则)如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：

1) $y_n \le x_n \le z_n$（$n=1,2,3\cdots$）；　2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

②(单调有界准则)单调增加(或单调减少)且有上界(或有下界)的数列 $\{x_n\}$ 必定存在极限.

2. 函数极限

(1) $x \to x_0$ 时，函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 $\overset{o}{U}(x_0)$ 内有定义，如果存在常数 A，对于 $\forall \varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

注：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

(2) $x\to\infty$ 时，函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

(3)函数极限的性质

①(唯一性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么它的极限唯一，即：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则 $A=B$.

②(局部有界性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $\exists\ M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le M$.

③(局部保号性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么 $\exists\ \delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

(4)函数极限的四则运算法则

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$； ② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）； ④ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B$（$A>0$）.

推论 1：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，c 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

推论 2：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$.

(5)函数极限存在的判定准则

①(夹逼法则)如果函数 $f(x)$， $g(x)$， $h(x)$ 满足：

1)当 $x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时， $g(x)\le f(x)\le h(x)$； 2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，

那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

②(单调有界准则)设 $f(x)$ 在 x_0 的某左邻域内单调有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在.

(6)复合函数的极限：设 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 复合而成的，$y=f[g(x)]$ 在 x_0 的某去心邻域有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$， $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 且在 x_0 的邻域内 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

(7)两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$).

3. 无穷小与无穷大

(1)无穷小量的定义

如果当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(2)无穷小的性质：

①有限个无穷小的和仍是无穷小.

②有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

③有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3)无穷小的比较：设α,β是在自变量的同一变化过程中的无穷小，且$\beta\neq 0$则：

①如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称$\alpha$是$\beta$的高阶无穷小，记作：$\alpha=o(\beta)$；

②如果$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，称$\alpha$是$\beta$的低阶无穷小.

③$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，称$\alpha$是$\beta$的同阶无穷小；

④$\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c\neq 0$，称$\alpha$是$\beta$的$k$阶无穷小.

⑤$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小，记作：$\alpha\sim\beta$.

(4)等价无穷小替换定理：设在自变量x的同一变化过程中，α_1，α_2，β_1，β_2都是无穷小，而且$\alpha_1\sim\alpha_2$，$\beta_1\sim\beta_2$，如果$\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=A$，则$\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=A$.

三、函数的连续性

1. 函数连续性的定义

(1)函数$f(x)$在x_0点连续的定义

设函数$f(x)$在$U(x_0)$内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

(2)函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$ $f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$.

2. 间断点及其分类

(1)间断点的定义

若函数$f(x)$在点x_0不连续，则点x_0称为函数$f(x)$的间断点.

(2)间断点的分类：

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(左、右极限都存在)}\begin{cases}\text{可去间断点(左极限}=\text{右极限)}\\\text{跳跃间断点(左极限}\neq\text{右极限)}\end{cases};\\\text{第二类间断点(左、右极限至少有一个不存在)};\end{cases}$$

3. 闭区间上连续函数的性质：

(1)有界最值定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界且一定能取到最大值和最小值，即：$\exists\ K>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\le K$，以及在 $[a,b]$ 上有 ξ_1，ξ_2 使得 $f(\xi_1)=m$，$f(\xi_2)=M$，其中 m，M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值.

(2)零点定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists\ \xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

(3)介值定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\ne f(b)$，c 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 间的一个常数，则 $\exists\ \xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=c$.

推论：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m，M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，$m\le c\le M$，则 $\exists\ \xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=c$.

第二讲　导数与微分

一、导数

1. 导数定义

(1)导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx，相应的函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，记为 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

(2)导函数的定义

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内可导，对于 $\forall x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值. 这样就构成了一个新的函数，这个函数叫 $y=f(x)$ 的导函数，记作 y'，$\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

(3)左、右导数的定义

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(4)函数在x_0点可导的充要条件：$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

(5)可导与连续性的关系：若函数$y=f(x)$在x_0点可导，则它在x_0点连续.

(6)导数的几何意义

函数$y=f(x)$在x_0点处的导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线的斜率，即$f'(x_0)=\tan\alpha$，其中α为切线的倾角.

(7)切线方程与法线方程

曲线$y=f(x)$在$M(x_0,y_0)$处，

切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，法线方程为$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

2. 导数的计算

(1)函数的和、差、积、商的求导法则

如果函数$u=u(x)$及$v=v(x)$都在点x具有导数，那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点x具有导数，且

①$\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$；

②$\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)\pm u(x)v'(x)$；

③$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ ($v(x)\neq 0$).

(2)高阶导数的定义

二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.记为$\dfrac{d^n y}{dx^n}$，$n=2,3,\cdots$. 其中，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

①如果函数$f(x)$在点x具有n阶导数，那么$f(x)$在点x某邻域内必定具有一切低于n阶的导数.

②和、差、积的n阶导数公式：

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}，\ (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

(3)反函数的求导法则

如果函数$x = f(y)$在区间I_y内单调、可导且$f'(y) \neq 0$，则它的反函数$y = f^{-1}(x)$在区间$I_x = \{x | x = f(y), y \in I_y\}$内可导，且$\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{f'(y)}$或$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

(4)复合函数的求导法则

设$y = f(u)$，而$u = g(x)$，且$f(u)$及$g(x)$都可导，则复合函数$y = f[g(x)]$在点x可导，且其导数为$\dfrac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$或$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

(5)隐函数的求导

①隐函数的定义

一般地，如果变量x和y满足一个方程$F(x, y) = 0$，在一定条件下，当x取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的y值存在，那么就说方程$F(x, y) = 0$在该区间内确定了一个隐函数.

②隐函数的求导：对方程两边对x求导，将y视为x的函数，用复合函数的求导法则求导.

(6)参数方程所确定的函数的导数

①参数方程所确定的函数的定义

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$x$与$y$间的函数关系，则称此函数为参数方程所确定的函数.

②参数方程所确定的函数的导数

如果函数$x = \varphi(t)$具有单调连续反函数$t = \varphi^{-1}(x)$，且此反函数能与函数$y = \psi(t)$构成复合函数. 若$x = \varphi(t)$和$y = \psi(t)$都可导，而且$\varphi'(t) \neq 0$，则：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}，\ 即\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

如果$x = \varphi(t)$和$y = \psi(t)$二阶可导，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

(7)幂指函数的求导

对于一般形式的幂指函数 $y=u^v\ (u>0)$，如果 $u=u(x),v=v(x)$ 都可导，则：

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right).$$

二、微分

1. 函数的微分

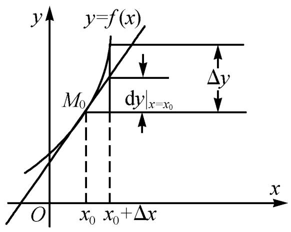
(1)微分的定义

设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于增量 Δx 的微分，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$.

(2)函数连续、可导与可微之间的关系

①函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x 处可导，此时 $A=f'(x)$，即 $dy=f'(x)dx$.

②函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.



(3)微分的几何意义：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处对应于自变量的增量 Δx 的纵坐标的增量，而微分 $dy\big|_{x=x_0}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的纵坐标相应的增量.

2. 复合函数的微分法则：设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为：

$dy=y'_x dx=f'(u)g'(x)dx$.由于 $g'(x)dx=du$，所以复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分也可以写为 $dy=f'(u)du$ 或 $dy=y'_u du$. 因此，无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变，该性质称为一阶微分形式不变性.

第三讲　微分中值定理及导数的应用

一、微分中值定理

1. 罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 在区间端点处的函数值相等， $f(a)=f(b)$；

则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f^{'}(\xi)=0$.

2. 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

那么在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f(b)-f(a)=f^{'}(\xi)(b-a)$.

3. 柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) 对任一 $x\in(a,b)$， $g'(x)\neq 0$；

那么在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

二、洛比达法则

1. $x\to a$ 时的未定型

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

(1)当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于零；

(2)在点 a 的某去心邻域内， $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大)，

则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. $x\to\infty$时的未定型

设函数$f(x)$和$g(x)$满足：

(1)当$x\to\infty$时，函数$f(x)$和$g(x)$都趋于零；

(2)当$|x|>A$时，$f'(x)$和$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大)，

则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注：仅当$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型才可以考虑用洛比达法则. 对于$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0型的未定型可以通过转化成为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型后，再考虑使用洛比达法则.

三、泰勒公式

1. 泰勒中值定理

设$f(x)$在含有x_0的某开区间I内有直到$(n+1)$阶导数，则对于$\forall\ x\in I$，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f(n+1)(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x_0$与$x$之间.

2. 麦克劳林公式

设$f(x)$在含有$x=0$的某开区间I内有直到$(n+1)$阶导数，则对于$\forall\ x\in I$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

四、函数的单调性

1. 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

(1)如果在在(a,b)内$f'(x)>0$，那么$y=f(x)$在$[a,b]$内单调增加.

(2)如果在在(a,b)内$f'(x)<0$，那么$y=f(x)$在$[a,b]$内单调减少.

注：上述所给的只是判别单调性的充分条件，并非必要条件，即$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$单调，而不能由$f(x)$单调$\Rightarrow f'(x)>0$，只能得到$f'(x)\geq 0$.

五、曲线的凸凹性和拐点

1. 曲线的凸凹性

(1)定义

设函数$f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点x_1,x_2恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称$f(x)$在$I$上的图形是(向上)凹的(或凹弧)；如果恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$那么称$f(x)$在$I$上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

(2)判别法

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，则

①若在(a,b)内$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上图形是凹的；

②若在(a,b)内$f''(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上图形是凸的.

2. 拐点

(1)定义

设$y=f(x)$在区间I上连续，如果点x_0为I的内点，如果曲线$y=f(x)$在经过$\left(x_0,f(x_0)\right)$时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点$\left(x_0,f(x_0)\right)$为曲线的拐点.

(2)拐点的判定

若$f''(x_0)=0$(或$f''(x_0)$不存在但$f(x)$在x_0点连续)，当在x_0点的左、右邻域内$f''(x)$异号时，$\left(x_0,f(x_0)\right)$是曲线的$y=f(x)$的一个拐点.

3. 渐近线

(1)水平渐近线：若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则直线$y=c$是曲线$y=f(x)$的一条水平渐近线.

(2)垂直渐近线：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$是曲线$y=f(x)$的一条垂直渐近线.

(3)斜渐近线：如果存在直线$L:y=kx+b$使得当$x\to\infty$(或$x\to+\infty$，$x\to-\infty$)时，曲线

$y=f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离 $d(M,L)\to 0$，则称直线 L 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 若直线 L 的斜率 $k\neq 0$，则称 L 为斜渐近线.

(4)直线 $L: y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线，则 $k=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\left[f(x)-kx\right]$.

六、函数的极值与最值

1. 函数的极值

(1)函数极值的定义

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于 $\forall x\in \overset{o}{U}(x_0)$ 有 $f(x)<f(x_0)$ $\left(或f(x)>f(x_0)\right)$ 那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

(2)函数的极大(小)值只是它的局部的最大(小)值，不一定是它的全局的最大(小)值.

(3)必要条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

注：①驻点不一定是极值点.

②极值点不一定是驻点，但在可导的条件下，极值点一定是驻点.

2. 判定极值充分条件

(1)第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 内可导，则

①若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

②若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(2)第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

①当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(3)函数的最大(小)值不一定是它的极大(小)值.

第四讲　一元函数积分学

一、不定积分

1. 原函数的定义

如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$ 那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的原函数.

2. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则它在区间 I 上存在原函数.

3. 不定积分的定义

在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)dx$，其中 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)dx$ 为被积表达式，x 称为积分变量.

4. 基本积分公式

(1) $\int kdx=kx+C$（k 是常数），

(2) $\int x^{\mu}dx=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\left(\mu\neq-1\right)$，

(3) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$，

(4) $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$，

(5) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$，

(6) $\int\cos xdx=\sin x+C$，(7) $\int\sin xdx=-\cos x+C$，

(8) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 xdx=\tan x+C$，

(9) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-\cot x+C$，

(10) $\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$，

(11) $\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$，

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

二、不定积分的积分法

1. 第一换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$ 具有原函数, $u=\varphi(x)$ 可导, 则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \xrightarrow{令u=\varphi(x)}$

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[u]du = F(u)+C = F[\varphi(x)]+C$.

2. 第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 单调的可导函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = G(t)+C$，则

$\int f(x)dx \overset{令x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t)+C = G[\varphi^{-1}(x)]+C$.

3. 分部积分法

设 $u=u(x),\ v=v(x)$ 具有连续导数，则 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$.

四、定积分

1. 定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上有界，在 $\left[a,b\right]$ 中任意插入若干个分点把区间 $\left[a,b\right]$ 分成 n 个小区间 $\left[x_0,x_1\right]$，$\left[x_1,x_2\right]$，$\cdots$，$\left[x_{n-1},x_n\right]$， 各个小区间的长度依次为 $\Delta x_1 = x_1 - x_0$，$\Delta x_2 = x_2 - x_1$，$\cdots$，$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ 在每个小区间 $\left[x_{i-1},x_i\right]$ 上任取一点 ξ_i ($x_{i-1}\le \xi_i \le x_i$)，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，并作出和 $S=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda = \max\left\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\right\}$，如果不论对 $\left[a,b\right]$ 怎么样划分，也不论在小区间 $\left[x_{i-1},x_i\right]$ 上 ξ_i 怎样选取，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$.，即：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad .$$

其中， $f(x)$ 叫做被积函数， $f(x)dx$ 称为被积表达式， x 称为积分变量， a 叫做积分下限，

b 叫做积分下限，$\left[a,b\right]$叫做积分区间.

2. 定积分的几何意义：函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$，x 轴所围成的曲边梯形面积的代数和.

3. 定积分的性质

(1)两条规定

①$\int_a^a f(x)dx=0$；

②$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

(2)定积分的性质

①$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$.

②$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k 是常数).

③设 $a<c<b$，则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

④如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\equiv 1$，则$\int_a^b f(x)dx=b-a$.

⑤如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)dx\geq 0\ (a<b)$.

推论 1：如果在区间上，$f(x)\leq g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx\ (a<b)$.

推论 2：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$.

⑥设 M 和 m 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上最大值及最小值，$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.

⑦如果函数 $f(x)$ 在积分区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

⑧奇偶函数的积分性质：

$\int_{-a}^a f(x)dx=0$ ($f(x)$ 奇函数).

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ ($f(x)$ 偶函数).

⑨周期函数的积分性质:

设 $f(x)$ 以 T 为周期，a 为常数，则 $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$.

五、微积分基本公式

1. 积分上限的函数及其导数

(1)积分上限的函数的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则任取 $x \in [a,b]$，定积分 $\int_{a}^{x} f(t)dt$ 有一个对应值，所以它在区间 $[a,b]$ 上定义了一个函数，记作：$\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt \ (a \le x \le b)$，称为积分上限函数.

(2)积分上限的函数的导数

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数 $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x) = \dfrac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$（$a \le x \le b$）.

(3)（推广形式）设 $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$，$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，则

$$F'(x) = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

注：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

2. 牛顿-莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$.

六、定积分的换元积分法和分部积分法

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件：

①$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$；

②$\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$(或 $[\beta, \alpha]$)上具有连续导数，且其值域 $R_{\varphi} = [a,b]$，

则有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

2. 分部积分法$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$.

七、定积分的应用

1. 平面图形的面积

(1)直角坐标系

由曲线 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 围成的图形的面积为：$S_1=\int_a^b|y_2(x)-y_1(x)|dx$.

(2)极坐标系

由曲线$\rho=\gamma_1(\theta)$，$\rho=\gamma_2(\theta)$及射线$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$围成的图形的面积为：

$$S_2=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[\gamma_2^{\ 2}(\theta)-\gamma_1^{\ 2}(\theta)\right]d\theta.$$

2. 旋转体的体积

(1)由曲线$y=f(x)$($f(x)\geq 0$) 与直线$x=a$，$x=b$和x轴围成的平面图形

绕x轴旋转一周的体积为：$V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$.

绕y轴旋转一周的体积为：$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

(2)由曲线$x=g(y)$($g(y)\geq 0$)，与直线$y=c$，$y=d$和y轴围成的平面图形

绕y轴旋转一周的体积为：$V_y=\pi\int_c^d\left[g(x)\right]^2dy$.

绕x轴旋转一周的体积为：$V_x=2\pi\int_c^d yg(y)dy$.

(3)平行截面面积为已知的立体的体积

平面$x=a$，$x=b$之间的立体，若过点x且垂直与x轴的截面面积为$A(x)$已知，则该立体的体积为$V=\int_a^b A(x)dx$.

3. 平面曲线的弧长*○

(1)参数方程所表曲线的弧长

设光滑曲线$L:\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$，$\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的导数，则曲线L的弧长为$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$.

(2)直角坐标系

设光滑曲线$L:y=f(x)$，$(a\le x\le b)$，$f(x)$有连续的导数，则曲线L的弧长$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

(3)极坐标系

设光滑曲线$L:r=\rho(\theta)$，$(\alpha\le\theta\le\beta)$，$\rho(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，则曲线$L$的弧长$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}d\theta$.

4. 旋转体的侧面积*○

曲线$y=f(x)$ ($f(x)\ge0$) 与直线$x=a$，$x=b$和x轴围成的曲边梯形绕x轴旋转一周得到的旋转体的侧面积为：$V_y=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+y'^2}dx$.

第五讲　微分方程

一、微分方程的基本概念

1. 微分方程的定义：凡表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程称为微分方程.

2. 微分方程的阶：微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为该微分方程的阶.

3. 微分方程的解

(1)若将函数带入微分方程中能使方程变为恒等式，这样的函数称为微分方程的解.

(2)微分方程的解中含有自由常数，且含有独立常数的个数等于方程的阶数，这样的解称为微分方程的通解.

(3)微分方程的不含有自由常数的解称为微分方程的特解.

二、一阶微分方程

1. 可分离变量的微分方程

(1)方程形式：$\frac{dy}{dx}=P(x)Q(y)\ (Q(y)\neq 0)$ 或 $M_1(x)N_1(y)dx-M_2(x)N_2(y)dy=0$.

(2)解法：先分离变量成 $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$，再两边积分 $\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy+C$.

2. 齐次方程

(1)方程形式：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

(2)解法：$\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$，两边积分得 $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$.

三、一阶线性微分方程

1. 一阶线性微分方程

(1)方程形式 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$.

(2)解法：常数变易法求得通解 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$.

2. 贝努利方程*

(1)方程形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$.

(2)解法：设 $z=y^{1-n}$，则方程化成 $\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$，再用一阶线性微分方程的求解方法求解.

3. 全微分方程*

(1)方程形式：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，满足条件 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(2)解法：上述全微分方程通解为 $u(x,y)=C$，求 $u(x,y)$ 的常用方法：

①特殊路径积分法：$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，

$$=u(x_0,y_0)+\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy.$$

②不定积分法：由 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ 得 $u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)$，对 y 求导得

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]+C'(y)$$，求出 $C'(y)$，然后积分即可.

四、可降阶的高阶微分方程*○

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型

解法：用 n 次积分求解，通解 $y=\underbrace{\int\cdots\int}_{n次} f(x)(dx)^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n$.

2. $y''=f(x,y')$ 型(方程中不显含 y)

解法：设 $y'=p$ ，则 $y''=p'$ ，原方程变为 $p'=f(x,p)$ ，该方程为一阶微分方程. 设其解为 $p=g(x,C_1)$ ，即 $y'=g(x,C_1)$ ，则原方程的通解为 $y=\int g(x,C_1)dx+C_2$.

3. $y''=f(y,y')$ 型(方程中不显含 x)

解法：设 $y'=p$ ，把 p 看成 y 的函数，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ ，把 y',y'' 的表达式代入原方程得 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$ ，设其解为 $p=g(y,C_1)$, 则原方程的通解为 $\int\dfrac{dy}{g(y,C_1)}=x+C_2$.

五、二阶线性微分方程解的性质与结构

二阶齐次线性方程： $y''+p(x)y'+q(x)y=0$　　①

二阶非齐次线性方程： $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$　　②

1.若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程①的两个解，则它们的线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为方程①的解. 特别地，当 $y_1(x)$与$y_2(x)$ 线性无关时，则齐次方程①的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

2.若 $y^*(x)$ 方程②的一个特解，而 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 为方程①的通解，则非齐次方程②的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$.

3.若 $y_1(x),y_2(x)$ 为非齐次方程②的两个解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x),(C_1+C_2=1)$ 仍为②的解； $y_1(x)-y_2(x)$ 是齐次方程①的解.

4.设 $y_1(x)$与$y_2(x)$ 分别是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$与 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y_1(x)+y_2(x)$是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

六、常系数齐次线性微分方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程

(1)方程形式： $y''+py'+qy=0$.

(2)解法：先求其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根，其通解结构为

①当 $\Delta=p^2-4q>0$, 特征方程有两个不同的实根 λ_1,λ_2 ，则通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

②当 $\Delta=p^2-4q=0$ ，特征方程有二重根 $\lambda_1=\lambda_2$ ，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$.

③当 $\Delta=p^2-4q<0$, 特征方程有共轭复根 $\alpha\pm\beta i$ ，则通解为

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

2. n阶常系数齐次线性方程*○

(1) $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$，其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数.

(2)解法：由特征方程 $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$ 的根写出微分方程的通解中含有的对应项如下：

①若特征方程有 n 个不同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则通解 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\cdots+C_ne^{\lambda_nx}$.

②若 λ 为特征方程的 k 重实根 $(k\le n)$，则通解中含有 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$.

③若 $\alpha\pm i\beta$ 为特征方程的 k 重共轭复根 $(2k\le n)$，则通解中含有

$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$.

七、二阶常系数非齐次线性方程

方程的形式： $y''+py'+qy=f(x)$，其中 p,q 为常数，特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

1. $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，λ 为实常数，则方程的特解 y^* 的形式为：

(1)若 λ 不是特征根，则令 $y^*=R_n(x)e^{\lambda x}$，

(2)若 λ 是特征方程单根，则令 $y^*=xR_n(x)e^{\lambda x}$，

(3)若 λ 是特征方程的重根，则令 $y^*=x^2R_n(x)e^{\lambda x}$，其中 $R_n(x)$ 为 n 次多项式，将 y^* 代入原方程求出 $R_n(x)$ 的各系数得到原方程的特解.

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_n(x)\cos\omega x+P_l\sin\omega x]$，其中 $P_n(x)$，$P_l(x)$ 分别为 n，l 次多项式，则方程的特解 y^* 的形式为：

(1)若 $\lambda\pm\omega i$ 不是特征方程的根，则令 $y^*=e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$，

(2)若 $\lambda\pm\omega i$ 是特征方程的根，则令 $y^*=xe^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$，其中 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{n,l\}$，将 y^* 代入原方程求出 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 的各系数，从而得原方程的特解.

第六讲　多元函数微分学

一、多元函数的概念

1. 二元函数的定义

设 D 是 R^2 的一个非空子集，称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$，其中点集 D 称为该函数的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量.

2. 二元函数的极限的定义

设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，使得当点 $P(x,y)\in D\cap\overset{o}{U}(P_0,\delta)$ 时，都有 $|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

3. 二元函数的连续性定义

设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

二、偏导数

1. 偏导数的定义：

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $f_x(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为 $\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$，记作 $f_y(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

2. 偏导数的几何意义

$f_x'(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的截线在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线关于 x 轴的斜率；$f_y'(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的截线在点

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线关于 y 轴的斜率.

3. 二元函数的二阶偏导数

设 $z = f(x, y)$, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

4. 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 都在区域 D 内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

三、全微分

1. 全微分的定义

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内有定义，如果函数在点 (x, y) 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$，而仅与 x, y 相关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分，而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记作 dz，即 $dz = A\Delta z + B\Delta y$.

2. 可微的必要条件

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分，则该函数在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

3. 可微的充分条件

如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续，则函数在该点可微分.

四、多元复合函数的求导法则

1. 多元复合函数的求导法则(链式法则)

(1)一元函数与多元函数复合的情形

如果函数 $u = \varphi(t)$ 及 $v = \psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ 在点 t 可导，且有 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$.

(2)多元函数与多元函数复合的情形

如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. 全微分形式的不变性

$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$，不管 u， v 是中间变量还是自变量都成立，该性质叫全微分形式的不变性.

五、隐函数的求导

1. 由方程确定的隐函数

(1)一元隐函数

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，且 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

(2)二元隐函数

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

2. 由方程组确定的隐函数

设 $F(x,y,u,v)$， $G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$， $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式

$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

六、多元函数的极值及其求法

1. 多元函数的极值的定义

设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点,若 $\exists U(P_0)\subset D$,使得 $\forall(x,y)\in\overset{o}{U}(P_0)$，都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值 $f(x_0,y_0)$，点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的极大值点；若 $\forall(x,y)\in\overset{o}{U}(P_0)$，都有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极小值 $f(x_0,y_0)$,点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的极小值点.

2.取极值的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

注：函数的驻点不一定是极值点.

3. 取极值的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，需另作讨论.

注：二元函数的极值点不一定是驻点.

4. 求函数的最大值与最小值

求函数在有界闭区域 D 上的最大值与最小值用比较法. 即比较驻点、偏导数不存在但连续点处的函数值及在区域 D 的边界上函数的最大、最小值而得.

5. 条件极值

求 $z=F(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值点，先构造辅助函数

$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，解方程组 $\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y), \\ F'_x=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y), \\ F'_\lambda=\varphi'(x,y). \end{cases}$ 求驻点，由问题的实际意义确定极值，此法叫拉格朗日数乘法.

第七讲　重积分

一、二重积分

1. 二重积分的定义：

设函数 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中，$\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.如果各个小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，即 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，其中，$f(x,y)$ 叫做被积函数，$f(x,y)d\sigma$ 叫做被积表达式，$d\sigma$ 叫面积元素，x 与 y 叫做积分变量，D 叫做积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和.

2. 二重积分的几何意义：

当 $f(x,y)$ 为闭区域 D 上的连续函数，且 $f(x,y)\ge 0$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，侧面以 D 的边界曲线为准线，母线平行于 z 轴的曲顶柱体的体积。

3. 二重积分的性质

(1) $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ (k 为常数).

(2) $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

(3) 如果区域 D 分为两个闭区域 D_1,D_2，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$.

(4)如果在区域 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，

特殊地，$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$.

(5)设 m,M 分别为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值，σ 是 D 的面积，则 $m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$.

(6)积分中值定理：设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$.

二、二重积分的计算

1. 在直角坐标系中

模型 I：设有界闭区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$，

其中 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

模型 II：设有界闭区域 $D=\{(x,y)|\varphi_1(y)\le x\le \varphi_2(y),c\le y\le d\}$

其中 $\varphi_1(y),\varphi_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，$f(x,y)$ 在 D 上连续则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

2. 在极坐标系中

模型 I 设有界闭区域 $D=\{(r,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,\ \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\}$，其中 $\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续， $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 在 D 上连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

模型 II 设有界闭区域 $D=\{(r,\theta)|\alpha\le\theta\le\beta,\ 0\le r\le\varphi(\theta)\}$，其中 $\varphi(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续， $f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 在 D 上连续. 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

3. 对称区域上二重积分的性质

(1)设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0 & f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴的上半平面部分.

(2)设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0 & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D_2 为 D 在 y 轴的右半平面部分.

(3)设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于原点对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0 & f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_3} f(x,y)d\sigma & f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 D_3 为 D 的上半平面或右半平面.

(4)设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]d\sigma.$$

三、三重积分*

1. 三重积分的定义

设函数 $f(x,y,z)$ 是有界闭区域 Ω 上的有界函数.将闭区域 Ω 任意分成 n 个小闭区域 Δv_1，Δv_2，$\cdots$，Δv_n，其中，Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积.在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$. 如果各个小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 D 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$，即 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$，其中，$dv$ 叫体积元素.

2. 三重积分的性质

(1) $\iiint\limits_{\Omega}kf(x,y,z)dv=k\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$ (k 为常数).

(2) $\iiint\limits_{\Omega}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dv=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv\pm\iiint\limits_{\Omega}g(x,y,z)dv$

(3) $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega_2}f(x,y,z)dv$，其中 $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2$，除公共边界外，$\Omega_1$ 与 Ω_2 不重叠.

(4)若 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$，$(x,y,z)\in\Omega$，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv\le\iiint\limits_{\Omega}g(x,y,z)dv$.

(5)若 $m\le f(x,y,z)\le M$，$(x,y,z)\in\Omega$，则 $mV\le\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv\le MV$，其中 V 为 Ω 的体积.

(6) $\left|\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv\right|\le\iiint\limits_{\Omega}|f(x,y,z)|dv$.

(7)(积分中值定理)设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，V 为 Ω 的体积，则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=f(\xi,\eta,\zeta)V$.

3. 三重积分的计算

(1)直角坐标系

设Ω是有界闭区域，若$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ \ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\right\}$，

则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\,.$$

若$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in D_z,c\le z\le d\right\}$，其中$D_z$是平行于$xy$的平面截$\Omega$所得到的平面区域，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)dxdy$$

(2)柱坐标系

设Ω是有界闭区域，若$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|z_1(r,\theta)\le z\le z_2(r,\theta),\ \ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\right\}$，

则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}dr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz\,.$$

注：直角坐标系与柱面坐标系的关系为：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$，

(3)球坐标系

设Ω是有界闭区域 若$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta),\ \ \varphi_1(\theta)\le\varphi\le\varphi_2(\theta),\ \ \alpha\le\theta\le\beta\right\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x,y,z\right)dxdydz$$
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr\,.$$

注：直角坐标系与球面坐标系的关系为：$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$.

第八讲　曲线积分与曲面积分*

一、对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

1. 对弧长的曲线积分的定义：

设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧,函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界.在 L 上任意插入一列点 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段.设第 i 个小段的长度为 Δs_i,又 (ξ_i,η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点,作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$,并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$,如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时,这和的极限总存在,称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分,记作 $\int\limits_L f(x,y)ds$，即 $\int\limits_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

2. 对弧长的曲线积分的性质

(1)设 α，β 为常数，则 $\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$.

(2)若积分弧段 L 可分成光滑的曲线 L_1 和 L_2，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds$.

(3)设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$.

特别地，有 $\left|\int_L f(x,y)ds\right|\le\int_L|f(x,y)|ds$.

3. 对弧长的曲线积分的计算

(1)设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$(\alpha\le t\le\beta)$，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，且 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\ (\alpha<\beta)$.

(2)设空间曲线 L 的参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$，$(\alpha\le t\le\beta)$，

则 $\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}dt$.

二、对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

1. 对坐标的曲线积分的定义：

设 L 为 xOy 面内从 A 点到 B 点的一条有向光滑曲线弧,函数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在 L 上有界.在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$,把 L 分成 n 个有向小弧段

$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i=1,2,\cdots,n;M_0=A,M_n=B)$. 设 $\Delta x_i=x_i-x_j$ ，$\Delta y_i=y_i-y_j$ ，点 (ξ_i,η_i) 为 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点.如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的极限总存在，称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的曲线积分，记作 $\int\limits_L P(x,y)dx$.

类似地，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 总存在，则此极限为函数 $Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 y ，记作 $\int\limits_L Q(x,y)dy$.

2. 对坐标的曲线积分的性质

(1) $\int_L[\alpha F_1(x,y)+\beta F_2(x,y)]\cdot dr=\alpha\int_L F_1(x,y)\cdot dr+\beta\int_L \beta F_2(x,y)\cdot dr$.

(2)若有向曲线弧 L 可分为两段光滑的有向曲线弧 L_1 和 L_2 ，则

$\int_L F(x,y)\cdot dr=\int_{L_1}F(x,y)\cdot dr+\int_{L_2}F(x,y)\cdot dr$.

(3)设 L 是有向光滑曲线弧，L^- 是 L 的反向曲线弧，则 $\int_{L^-}F(x,y)\cdot dr=-\int_L F(x,y)\cdot dr$.

其中 $F(x,y)\cdot dr=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

3. 对坐标的曲线积分的计算

(1)设 $P(x,y)$ ，$Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ ，当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点沿 L 运动到终点，$\varphi(t),\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$ ，则曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt .$$

(2) 空间曲线 L 的参数方程 $x=\varphi(t)$ ，$y=\psi(t)$ ，$z=\omega(t)$ ，$(\alpha\le t\le\beta)$ ，则

$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt.$$

三、两类曲线积分之间的关系

1. 平面曲线弧 L 上的两类曲线积分之间的关系为

$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中 $\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角.

2. 空间曲线弧 L 上的两类曲线积分之间的关系为：

$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$，其中 α，β，γ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y,z) 处的切向量的方向角.

四、格林公式

1. 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$，其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

2. 平面上曲线积分与路径无关

设区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关的充分必要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立.

3. 设区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立.

4. 设区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关的充要条件是在 G 内存在函数 $u(x,y)$ 使 $du=Pdx+Qdy$.

五、对面积的曲面积分(第一类曲面积分)

1. 对面积的曲面积分的定义

设曲面Σ是光滑的,函数$f(x,y,z)$在Σ上有界,把Σ任意分成n小块ΔS_i (ΔS_i同时也代表第i小块曲面的面积),设(ξ_i,η_i,ζ_i)是ΔS_i上任意取定的一点,作乘积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i(i=1,2,3,\cdots,n)$,并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$,如果当小块曲面的直径的最大值$\lambda\to 0$时,这和的极限总存在,则称此极限为函数$f(x,y,z)$在曲面$\Sigma$上对面积的曲面积分或第一类曲面积分,记作$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$,即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

2. 对面积积分的计算

(1)若曲面Σ的方程为$z=z(x,y)$，则

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$，其中$D_{xy}$是曲面$\Sigma$在$xy$平面上的投影.

(2)若曲面Σ的方程为$y=y(x,z)$， $x=x(y,z)$，也可类似地把对面积的曲面积分化成二重积分.

六、对坐标的曲面积分(第二类曲面积分)

1. 对坐标的曲面积分的定义

设Σ是光滑的有向曲面,函数$R(x,y,z)$在Σ上有界,把Σ任意分成n块小曲面ΔS_i (ΔS_i同时也代表第i块小曲面的面积),ΔS_i在xOy面上的投影为$(\Delta S_i)_{xy}$,(ξ_i,η_i,ζ_i)是ΔS_i上任意取定的一点,如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda\to 0$时,$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$的极限总存在,则称此极限为函数$R(x,y,z)$在有向曲面$\Sigma$上对坐标$x,y$的曲面积分,记作$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$,即

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

其中$R(x,y,z)$叫做被积函数,Σ叫做积分曲面.

类似地,

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

2. 对坐标的面积积分的性质

(1)如果$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$
$$= \iint_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy .$$

(2)设Σ是有向曲面，Σ^-表示与Σ取相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{\Sigma^-} P(x,y,z)dydz = -\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz ,$$

$$\iint_{\Sigma^-} Q(x,y,z)dzdx = -\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx ,$$

$$\iint_{\Sigma^-} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy .$$

3. 对坐标的曲面积分的计算

(1)若曲面Σ的方程为$z = z(x,y)$，$(x,y) \in D_{xy}$，$z(x,y)$在D_{xy}上连续，$R(x,y,z)$在Σ上连续，则$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy$，其中$D_{xy}$是$\Sigma$在$xy$平面的投影，若曲面$\Sigma$指定一侧的法向量与$z$轴的正向成锐角取正号，成钝角取负号.

(2)若曲面Σ的方程为$x = x(y,z)$，$(y,z) \in D_{yz}$，$x(y,z)$在D_{yz}上连续，$P(x,y,z)$在Σ上连续，则$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P\left[x(y,z),y,z\right]dydz$，其中$D_{yz}$是$\Sigma$在$yz$平面的投影，若曲面$\Sigma$指定一侧的法向量与$x$轴的正向成锐角取正号，成钝角取负号.

(3)若曲面Σ的方程为$y = y(z,x)$，$(z,x) \in D_{zx}$，$y(z,x)$在D_{zx}上连续，$Q(x,y,z)$在Σ上连续，则$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q\left[x,y(z,x),z\right]dzdx$，其中$D_{zx}$是$\Sigma$在$zx$平面的投影，若曲面$\Sigma$指定一侧的法向量与$y$轴的正向成锐角取正号，成钝角取负号.

七、两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right]dS ,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的三个方向余弦.

八、高斯公式、斯托克斯公式

1. 高斯公式

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy，或$$

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}\left[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right]ds,$$

其中 Σ 是 Ω 是整个边界的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 在 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

2. 斯托克斯公式

(1)设 Γ 是分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧(即法向量的指向)符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 Σ (连同边界 Γ)上具有连续的一阶偏导数，则有

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

(2)为了便于记忆，利用行列式将上式记为：

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}，或=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 与 R 的“积”为 $\dfrac{\partial R}{\partial y}$.

第九讲　无穷级数*△

一、级数的概念

1. 级数的定义：

如果给定一个数列 u_1，u_2，$\cdots$，u_n ，$\cdots$，由这个数列构成的表达式 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 叫做(常数项)无穷级数，简称(常数项)级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，

其中第n项u_n叫做级数的一般项.

2. 级数收敛与发散的定义：

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{s_n\}$有极限s，即$\lim_{n\to\infty}s_n=s$，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，s称为级数的和，并写成$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$；如果$\{s_n\}$极限不存在，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

二、收敛级数的性质

1. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和s，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，且其和为ks.

2. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于s、σ，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且其和为$s\pm\sigma$.

(1)当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$不一定发散.

(2)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$必发散.

3. 改变级数的有限项不改变级数的敛散性. 当改变收敛级数的有限项时，一般其和会改变.

4. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

(1)收敛级数去括号后所得的级数不一定收敛.

(2)发散级数加括号后所得的级数不一定发散.

(3)发散级数去括号后所得的级数一定发散.

5. 级数收敛的必要条件：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必有$\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

三、正项级数

1. 正项级数的定义：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的通项$u_n\geq 0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数.

2. 正项级数收敛的充要条件：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow$部分和数列$\{s_n\}$有界.

3. 比较判别法

(1)设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n\ (n=1,2,\cdots)$，

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

(2)设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则

①若$0<l<=\infty$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$有相同的敛散性；

②若$l=0$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，必有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

③若$l=+\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，必有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

4. 比值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$)时级数发散；$\rho=1$级数可能发散也可能收敛.

5. 根值判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时级数发散；$\rho=1$级数可能发散也可能收敛.

四、交错级数

1. 交错级数的定义：

2. 莱布尼茨定理

如果交错级数数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$满足：(1)$u_{n+1}\le u_n\left(n=1,2,3,\cdots\right)$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛，且和$s\le u_1$，其余项$\left|r_n\right|\le u_{n+1}$.

3. 绝对收敛的定义

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$各项的绝对值所构成的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收

敛.

4. 条件收敛的定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而级数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

注：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛.

五、函数项级数

1. 函数项级数的定义：

对于区间 I 上的函数列 $u_1(x)$，$u_2(x)$，$\cdots$，$u_n(x)$，$\cdots$，则由这函数列构成的表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

称为定义在区间 I 上的(函数项)无穷级数，简称(函数项)无穷级数.

2. 收敛(发散)点，收敛(发散)域

对于 $\forall x_0 \in I$，函数项级数(1)成为常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots \tag{2}$$

如果级数(2)收敛，就称点 x_0 是函数项级数的收敛点；如果级数(2)发散，则称点 x_0 是函数项级数的发散点. 函数项级数的收敛点的全体称为它的收敛域，发散点全体称为它的发散域.

3. 和函数

在收敛域上，函数项级数的和是 x 的和函数 $s(x)$，通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数. 这时，函数的定义域就是级数的收敛域，并写成 $s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$.

六、幂级数

1. 幂级数的定义

各项都是幂函数的函数项级数称为幂级数，形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$.

2. 阿贝尔定理

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0$ ($x_0 \neq 0$)时收敛，则适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛；反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0$ 时发散，则适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 使

这幂级数发散.

3. 幂级数的收敛半径和区域:

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$不是仅在$x=0$一点收敛，则必有一个确定的正数$R$存在，使得

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散；

当$x=R$与$x=-R$时，幂级数可能收敛也可能发散；

这时，正数R通常叫做幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径. $\boxed{\text{开区间}}$$(-R,R)$叫做幂级数的收敛区间.

4. 如果$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的相邻两项的系数，则

$$R=\begin{cases}+\infty, & \rho=0\\ \frac{1}{\rho}, & \rho\neq 0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}.$$

5. 幂级数的性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R>0$，$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$为和函数，则

(1)和函数$s(x)$在其收敛域I上连续.

(2)和函数$s(x)$在其收敛域I上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

注：积分后所得的幂级数和原幂级数有相同的收敛半径.

(3)和函数$s(x)$在其收敛区间I上可导，并有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

注：求导后所得的幂级数和原幂级数有相同的收敛半径.

6. 将函数展成幂级数

(1)泰勒级数的定义:

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内能展开成幂级数，即有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots，\quad x\in U(x_0) \qquad (1)$$

那么，根据和函数的性质，可知 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 具有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\cdots$$

由此可得 $f^{(n)}(x_0)=n!a_n$，于是 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，即该幂级数必为

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)} \qquad (2)$$

而展开式必为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{(n)}，\quad x\in U(x_0) \qquad (3)$$

幂函数(2)叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数. 展开式(3)叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒展开式.

(2)函数展成幂级数的条件

设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内有任意阶导数，则在该邻域内能展成泰勒级数的充分必要条件是在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，$x\in U(x_0)$.

(3)将函数展成幂级数的方法：

①直接展开法：按公式 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，计算幂级数的系数，并验证 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

②间接展开法：利用一些已知的函数展开式，通过幂级数的运算(如四则运算，逐项求导，逐项积分)以及变量代换等，将所给函数展成幂级数.

(4)几个常用的幂级数展开式

① $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},(-\infty<x<+\infty)$

② $\sin x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2k+1)!}x^{2k+1},(-\infty<x<+\infty)$

③ $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$,$(-\infty<x<+\infty)$

④ $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$,$(-1<x\le 1)$

⑤ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$,$(-1<x<1)$

⑥ $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$,$(-1<x<1)$

七、傅里叶级数

1. 傅里叶系数

若下列积分都存在，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ (n=1,2,\cdots)$$

则称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

2. 傅里叶级数

若 a_n，b_n 是傅里叶系数，则称 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

3. 收敛定理

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

(1)在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

(2)在一个周期内至多只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且当 x 是 $f(x)$ 是连续点时，级数收敛于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

4. 正、余弦级数

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(x)\cos nx$ 是奇函数，$f(x)\sin nx$ 是偶函数，故

$$\begin{cases}a_n=0\quad(n=0,1,\cdots),\\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots).\end{cases}$$，称 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 为正弦级数.

当 $f(x)$ 为偶函数时， $f(x)\cos nx$ 是偶函数， $f(x)\sin nx$ 是奇函数，故

$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,\cdots), \\ b_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$，称 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ 为余弦级数.

5. 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$，$(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$，$(n=1,2,\cdots)$.

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}(x\in C)$，$b_n=\dfrac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,\cdots)$.

当 $f(x)$ 为偶函数时，$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}(x\in C)$，$a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,\cdots)$.

目　录

第一讲　行列式

考研大纲

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

知识要点

一、行列式的概念

1．n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，且 $M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$(j=1,2,\cdots,n)$.

二、行列式的性质

1．行列式与它的转置行列式相等.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^T.$$

2．互换行列式的两行（列），行列式变号.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论：如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

3．行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数λ，等于用数λ乘此行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论：（1）行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

（2）行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零.

4．如果行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，两个行列式在该行（列）分别取第一个和第二个元素，其余各行（列）都不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{i3}+b_{i3} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5．把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & a_{j2}+\lambda a_{i2} & a_{j3}+\lambda a_{i3} & \cdots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6．行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\text{（其中}1\le i\le n\text{）}.$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\text{（其中}1\le j\le n\text{）}.$$

推论：行列式某一行（列）的各元素与另一行（列）对应的元素的代数余子式乘积之和等于

零.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\text{（其中}1\le i\ne j\le n\text{）}.$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\text{（其中}1\le i\ne j\le n\text{）}.$$

7．拉普拉斯定理：行列式等于某几行的所有子式与其对应的代数余子式乘积的和.

三、克莱姆法则

设含有n个未知数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的n个线性方程的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}(\mathrm{I})\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}(\mathrm{II})$$

定理：如果线性方程组(I)的系数行列式不等于零，即$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\ne0$，那

么，方程组(I)有唯一解$x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots$，$x_n=\dfrac{D_n}{D}$，其中：

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(j=1,2,\cdots,\ n).$$

推论：

（1）如果线性方程组(I)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

（2）如果齐次线性方程组(II)有非零解，则它的系数行列式必为零.

例1． 设A是n阶矩阵，证明：存在非零的n阶矩阵B使$AB=0$的充要条件是$|A|=0$.

四、重要公式

1． $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

2． $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & * & \cdots & * & a_n \\ * & * & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ * & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.

3．奇数阶反对称行列式等于0.

4．范德蒙德行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

5．设A是m阶矩阵，B是n阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|;\quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A|\cdot|B|.$$

典型例题

一、填空题

例 2． 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$，$B$是$3$阶非零矩阵，且$AB=0$，则$a=$______.

例 3． 设A为三阶矩阵，将A的所有关于次对角线对称的元素对换得到的矩阵记为B，已知$|A|=a$，则$|B|=$______.

例 4． 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$都是4维列向量，且$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta|=5$，$|\beta+\gamma,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1|=4$，则$|2\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=$______.

例5. 设α,β,γ是方程$x^3+px+q=0$的三个互异实根，则行列式$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=$______.

二、n阶行列式的计算

1．利用行列式定义计算

例6．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x & y & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y\\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$.

2．各行（列）元素之和相等的行列式

例7．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$.

例8．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & -n\\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1\\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$.

3．各行（列）加减同一行（列）的倍数

例9．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n\end{vmatrix}$.

4．各行（列）依次加减上一行（列）的倍数

例 10．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&1&3&\cdots&n-1&n\\2&3&1&\cdots&n-1&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\2&3&4&\cdots&1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}$.

例 11．计算行列式$D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&0&\cdots&0\\1&0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，其中$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

5．加边法

例 12．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}a_1+\lambda_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+\lambda_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+\lambda_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+\lambda_n\end{vmatrix}$，其中：

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$.

6．拆分法

例 13．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$.

例 14．设n阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1)$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$维列向量，已知$|A|=a\ (a\neq 0)$，则行列式$|B|$的值.

7．递推法

例 15．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$.

8．三对角行列式

例 16．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

9．利用行列式展开定理

例 17．设行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$D$中$a_{ij}$的余子式和代数余子式依次记为$M_{ij}$和$A_{ij}$，求$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$及$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

三、利用克莱姆法则求方程的解

例 18．证明：如果n次多项式$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$对$n+1$个不同的$x$值都是$0$，则此多项式恒等于$0$.

第二讲　矩阵及其运算

考研大纲

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.
2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式性质.
3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.
5. 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算方法.

知识要点

一、矩阵的概念

1. 矩阵：由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2\cdots m;\ n=1,2\cdots n)$ 排成 m 行 n 列的数表，称为 $m\times n$ 的矩阵，记作

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. 几类特殊矩阵
（1）方阵：矩阵 A 行数和列数相等的矩阵.
（2）零矩阵：若矩阵 A 中所有元素都是 0，记 $A=O$.
（3）三角矩阵：主对角线下方的元素全为零的方阵为上三角矩阵；主对角线上方的元素全为零的方阵为下三角矩阵.
（4）对角矩阵：主对角线上元素为任意常数，而主对角线外的元素都是零的矩阵，记作：

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

（5）数量矩阵：主对角线上元素均相等的对角矩阵，记作：$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

（6）单位矩阵：主对角线上元素均为 1 的数量矩阵，记作：$E=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

（7）同型矩阵：若矩阵 A 与 B 的行数和列数分别相等的矩阵.
（8）相等矩阵：若同型矩阵 A 与 B 对应元素也相等，记作 $A=B$.

备注：若 $A=B$，则 $|A|=|B|$，反之不成立.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法：设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

2. 矩阵的减法：设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

3. 数与矩阵相乘：设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， λ 是一个常数，则 $\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})_{m\times n}$.

4. 矩阵与矩阵的乘法：设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times p}$，则 $A\times B=(c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\,,\quad i=1,2\cdots m\,,\quad j=1,2\cdots p\,.$$

5. 矩阵与矩阵乘法的运算律

（1）结合律：$(AB)C=A(BC)$；$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.

（2）分配律：$A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$.

备注：（1）一般情况下 $AB\neq BA$，若 $AB=BA$，则称 A，B 为可交换矩阵，特殊地：$E_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}$；(2)设 $AB=0$，则 A，B 不一定为零矩阵；(3)设 $AB=AC$，$A\neq 0$，则 B，C 不一定相等；但 $AB=AC$，且 $|A|\neq 0$，则 $B=C$.

（3）方阵的幂：$A\cdot A\cdots A=A^n$.

例 1. 判断下列命题是否正确，错误的命题举出反例.

（1）若 $A^2=0$，则 $A=0$.

（2）若 $A^2=A$，则 $A=0$ 或 $A=E$.

（3）若 $AB=AC$，且 $A\neq 0$，则 $B=C$.

（4）若 A，B 为 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则 $(A+B)^2=A^2+B^2$.

（5）若 $A^T=A$，$B^T=B$，则 $(AB)^T=AB$.

例 2. 证明下列命题.

（1）两个上（或下）三角矩阵的乘积仍是上（或下）三角矩阵.

（2）主对角元全为 0 的上（或下）三角矩阵的乘积，仍是主对角元为 0 的上（或下）三角矩阵.

（3）主对角元全为1的上（或下）三角矩阵的乘积，仍是主对角元为1的上（或下）三角

矩阵.

例 3. 设 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不相等，证明：与 Λ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

三、矩阵的转置及其运算律

1. 定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的转置，记作 A^T.

2. 矩阵转置的运算律

（1）$(A^T)^T=A$.　（2）$(A+B)^T=A^T+B^T$.　（3）$(\lambda A)^T=\lambda\cdot A^T$.

（4）$(AB)^T=B^T\cdot A^T$.（5）$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.　（6）$(A^T)^*=(A^*)^T$.

3. 对称矩阵：若 $A^T=A$，则 A 为对称矩阵.

4. 反对称矩阵：若 $A^T=-A$，则 A 为反对称矩阵.

例 4. 对于任意的 n 阶矩阵 A，证明：（1）$A+A^T$ 是对称矩阵，$A-A^T$ 是反对称矩阵.

（2）A 可表示为对称矩阵与反对称矩阵之和.

四、行列式的乘法定理

1. 定理：设 A，B 是两个 n 阶矩阵，则乘积 AB 的行列式等于 A 和 B 行列式的乘积，即

$$|AB|=|A|\cdot|B|.$$

备注：一般情况下，$|A+B|\neq|A|+|B|$.

2. 方阵行列式的性质

（1）$|\lambda A|=\lambda^n A$.（2）$|A^T|=|A|$.（3）$|A^*|=|A|^{n-1}$.（4）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

（5）若 $A\sim B$，则 $|A|=|B|$.

五、逆矩阵及其运算律

1. 定义：对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，则 A 可逆，且

$A^{-1}=B$.

2. 逆矩阵的运算律

（1）$(A^{-1})^{-1}=A$. （2）$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}\ (\lambda\neq 0)$. （3）$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

（4）$(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$. （5）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$. （6）$(A^{-1})^{*}=(A^{*})^{-1}$.

（7）$(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}$. （8）$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$.

例5. 求下列矩阵的的逆矩阵.

（1）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中$ad-bc\neq 0$.

（2）$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$，其中$a_1\cdot a_2\cdots a_n\neq 0$.

（3）$A=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$，其中$a_1\cdot a_2\cdots a_n\neq 0$.

例6. 设A，B为n阶矩阵，下面命题是否正确.
（1）若A，B皆可逆，则$A+B$也可逆.
（2）若A，B皆不可逆，则$A+B$也不可逆.
（3）若AB可逆，则A，B都可逆.
（4）若AB不可逆，则A，B都不可逆.

例7. 证明下列命题.
（1）可逆的对称矩阵的逆矩阵仍是对称矩阵.
（2）可逆上（或下）三角矩阵的逆矩阵仍是上（或下）三角矩阵.
（3）主对角元全为1的上（或下）三角矩阵的逆矩阵仍是主对角元为1的上（或下）三角矩阵.

六、转置伴随矩阵

1．定义：由行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下矩阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的转置伴随矩阵.

2．伴随矩阵的运算律

（1） $A^*A = AA^* = |A|E$．（2） $|A^*| = |A|^{n-1}\ (n \geq 2)$．　（3） $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$．

（4） $(kA)^* = k^{n-1}A^*$．　（5） $A^* = |A|A^{-1}$．　（6） $(A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$．

（7） $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$．　（8） $(A^*)^T = (A^T)^*$．　（9） $(AB)^* = B^* \cdot A^*$．

例 8．设 A 是 3 阶可逆矩阵，且 A 的伴随矩阵 $A^* = A^T$，证明：$|A| = 1$．

七、分块矩阵的运算法则

1．$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$．

2．$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} & A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22} \\ A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21} & A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} \end{pmatrix}$．

3．$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$．

4．$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S^{-1} \end{pmatrix}$，其中 $|A_i| \neq 0$，$(i = 1,2\cdots s)$．

5．$\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$，其中 $|A_i| \neq 0$，$(i = 1,2\cdots s)$．

6. $\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S \end{vmatrix} = |A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_S|$.

7. $r\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_S \end{pmatrix} = r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)$.

八、矩阵的初等变换与初等矩阵

1．初等变换：下面三种变换称为矩阵的初等变换

（1）交换矩阵的两行（列），记作 $r_i \leftrightarrow r_j\ (c_i \leftrightarrow c_j)$.

（2）以数 $k\ (k \neq 0)$ 乘某一行（列）的所有元素，记作 $k\cdot r_i\ (k\cdot c_i)$.

（3）某一行（列）的所有元素的 $k\ (k \neq 0)$ 加到另一行（列）的对应元素上，记作

$$r_j + k\cdot r_i\ (c_j + k\cdot c_i).$$

2．矩阵 A 与 B 等价：把矩阵 A 经过初等变换变成矩阵 B，记作 $A \sim B$.

3．初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.\quad E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

4．初等矩阵的运算性质

（1）$E_{ij}{}^T = E_{ij}$，$E_i(k)^T = E_i(k)$，$E_{ij}(k)^T = E_{ji}(k)$.

（2）$E_{ij}{}^{-1} = E_{ij}$，$E_i(k)^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$，$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$.

（3）对 A 进行一次初等行变换相当于对 A 左乘一个对应的初等矩阵；对 A 进行一次初等列变换相当于对 A 右乘一个对应的初等矩阵.

5．利用初等变换求逆矩阵

定理：方阵 A 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，使得

$$A = P_1 \cdot P_2 \cdots P_s.$$

典型例题

一、选择题

例 9．设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}+a_{32} \end{pmatrix}$，

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $B =$ ______ .

(A) AP_1P_2. (B) AP_1P_3. (C) AP_3P_1. (D) AP_2P_3.

例 10．设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则 $Q^TAQ =$ ______ .

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

例 11．设 A，B，$A+B$，$A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ ______ .

(A) $A+B$．(B) $A^{-1}+B^{-1}$．(C) $A(A+B)^{-1}B$．(D) $(A+B)^{-1}$．

例 12．设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ______．

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$．$(B)$ $\begin{pmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{pmatrix}$．

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$．$(D)$ $\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$．

二、填空题

例 13．设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且 $AB=BC=CA=E$，则 $A^2+B^2+C^2=$ ______．

例 14．设 A，B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ______．

例 15．设 $\alpha=(1,-2,3)^T$ $\beta=(-1,\frac{1}{2},1)^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $|A^{100}|=$ ______．

例 16．设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(2A)^{-1}-5A^*|=$ ______．

例 17．设 4 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则行列式 $|A|$ 的所有代数余子式的和为 ______．

三. 解答题

1．矩阵的运算

例 18．设 $\alpha=(a,\ b,\ c)^T$，$\beta=(x,\ y,\ z)^T$，$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，求 $\alpha^T\beta$．

例 19．设 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{pmatrix}$，$AP=P\Lambda$，求 $\varphi(A)=A^3+2A^2-3A$．

2．方阵的幂

例 20．设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求 A^n．

例 21．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$，求 A^n．

3．有关对称矩阵的证明

例 22．设 A，B 为 n 阶对称矩阵，证明: AB 是对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$．

例 23．设 A 是实对称矩阵，且 $A^2=0$，证明：$A=0$．

4．行列式的乘法定理

例 24．设 A ，B 为4阶矩阵，且$|A|=-2$，$|B|=3$，求$|-AB^T|$．

例 25．设 A 是$m\times n$矩阵，B 是$n\times m$矩阵，证明：$|E_m-AB|=|E_n-BA|$．

5．逆矩阵的计算与证明

例 26．设$A^k=0$（k为正整数），证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$．

例 27．解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，求$X$．

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求$X$．

（3）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求 X .

例 28. 设 $A=E-\alpha\alpha^T$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，α 是 n 维非零列向量，证明:（1）$A^2=A$ 的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha=1$.（2）当 $\alpha^T\alpha=1$ 时，A 不是可逆矩阵.

6．分块矩阵的运算

例 29. $A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，其中 $a_1\cdot a_2\cdots a_n\neq 0$，求 A^{-1} .

例 30. 设 $Q=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，且 A 可逆，证明：$|Q|=|A|\cdot|D-C\cdot A^{-1}\cdot B|$.

例 31. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，证明：$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B|\cdot|A-B|$.

7．初等矩阵

例 32．计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2013} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2014}$.

例 33．设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，且 $|A| = 3$，$B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} - 2a_{11} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} - 2a_{21} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} - 2a_{31} \end{pmatrix}$，求 $A^* B$.

第三讲 n维向量

考研大纲

1. 理解n维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判
   别法.
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系.
5. 了解n维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念（数学二、三不要求）.
6. 了解基变换和坐标变换公式，会求过度矩阵（数学二、三不要求）.
7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法.
8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质（数学二、三不要求）.

知识要点

一、n维向量的概念与运算

1. n维向量：n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的有序数组，记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{或} \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T .$$

2. 向量的运算：设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

（1）向量的加法：$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$.

（2）向量的数乘：$\lambda\cdot\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T$.

（3）向量的内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\cdot\beta=\beta^T\cdot\alpha=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n$.

3. 向量的模：$\|\alpha\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$，且$(\alpha,\alpha)=0$的充分必要条件是$\alpha=0$.

二、线性组合与线性表示

1. 线性组合：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，对于任意实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，则$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_m\cdot\alpha_m$被称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合.

2. 线性表示：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$及向量$\beta$，如果存在一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$\beta=k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_m\cdot\alpha_m$，则称向量$\beta$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合.

3. 向量组等价：设向量组$(I)\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$(II)\,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，如果$(I)$中的每一个向量都可以由$(II)$中的向量线性表示，同时$(II)$中的每一个向量都可以由$(I)$中的向量线性表示，则称向量组$(I)$与$(II)$等价，记作$(I)\sim(II)$.

三、线性相关与线性无关

1. 线性相关：对于n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

得$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_s\cdot\alpha_s=0$，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

2. 线性无关：对于n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，只有当$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0$时，才有$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_s\cdot\alpha_s=0$，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

3. 有关线性相关性定理：

（1）定理：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的充分必要条件是其中某一个向量可以由其余$s-1$个向量线性表示.

（2）定理：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中有部分向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$线性相关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

推论：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则任意部分向量线性无关.

（3）定理：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，并且表示唯一.

（4）定理：设向量组$(I)\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由向量组$(II)\,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$s\le t$.

推论：①设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，且$s>t$，则向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关. ②两个等价的线性无关组所含向量个数相等. ③$n+1$个n维向量组一定线性相关.

（5）定理：n个n维向量构成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

（6）定理：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\boldsymbol{m}})<\boldsymbol{m}$.

例1. 判断下列命题是否正确.

（1）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为一组向量，若有一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\cdot\alpha_1+k_2\cdot\alpha_2+\cdots+k_n\cdot\alpha_n\neq 0$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$一定线性无关.

（2）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则其中任一向量都可以由其余向量线性表示.

（3）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则$\alpha_n$一定可以由其余向量线性表示.

（4）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$两两线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$一定线性无关.

例 2．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且向量$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，判断$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$的线性相关性.

四、向量组的秩

1. 极大线性无关组：如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$满足以下条件

（1）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关.

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r+1$个向量都线性相关.

备注：①向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组不唯一；②向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与极大线性无关组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$等价.

2. 向量组的秩

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组中所含向量的个数，记作$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\boldsymbol{r}$.

3. 向量组的秩的性质

（1）若向量组(I)可以由向量组(II)线性表示，则$r(I)\le r(II)$.

（2）若向量组(I)与(II)等价，则$r(I)=r(II)$，反之不成立，但若向量组(II)可以由向量组(I)线性表示，且$r(I)=r(II)$，则向量组(I)与(II)等价.

（3）向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示的充分必要条件是

$$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t);$$

（4）向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的充分必要条件是

$$\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\boldsymbol{r}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=\boldsymbol{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$$

五、矩阵的秩

1. 矩阵A的k阶子式：在$m\times n$矩阵A中任取k行k列，由交叉元素按原来次序构成的k阶行列式.

2. 矩阵的秩：矩阵 $A_{m\times n}$ 中不等于零的子式的最高阶数，记作 $r(A)$.

备注：（1）若 $r(A)=r$ ，则所有高于 r 阶的子式都为 0 .（2） $r(A)=0$ 的充分必要条件是 $A=0$.

3. 定理：初等变换不改变矩阵的秩.
4. 定理：矩阵的秩等于它行向量组的秩，也等于它列向量组的秩.
5. 矩阵的秩的性质

（1） $0\le r(A)\le \min\{m,n\}$.

（2） $r(A^T)=r(A)$.

（3）若 $A\sim B$ ，则 $r(A)=r(B)$.

（4）若 P ， Q 可逆，则 $r(PAQ)=r(A)$.

（5） $\max\{r(A),r(B)\}\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$.

（6） $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

（7） $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$.

（8）若 $A_{m\times n}B_{n\times p}=0$ ，则 $r(A)+r(B)\le n$.

（9）设 A 是 n 阶矩阵，则 $r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)\le n-2 \end{cases}$.

六、施密特正交化

1. 正交：若 $(\alpha,\beta)=0$ ，则向量 α 与 β 正交.

2. 定理：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，令 $\beta_1=\alpha_1$ ， $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1$ ，

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\cdot\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\cdot\beta_2,\cdots\cdots,$$

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \cdot \beta_1 - \frac{(\alpha_m, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \cdot \beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_m, \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}, \beta_{m-1})} \cdot \beta_{m-1},$$

则向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是正交向量组，$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$，$\eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \cdots, \eta_m = \frac{\beta_m}{\|\beta_m\|}$ 是标准正交向量组.

例 3．用施密特正交化把向量组 $\alpha_1 = (1,1,1)^T$，$\alpha_2 = (-1,0,-1)^T$，$\alpha_3 = (-1,2,3)^T$ 规范正交化.

七、向量空间

1. 定义：设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及乘数两种运算封闭，那么称集合 V 为向量空间.

例 4．判断下列集合是否为向量空间.

（1）$W_1 = \{(x_1, 0, \cdots, 0, x_n) | x_1, x_n \in R\}$.

（2）$W_2 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 + x_2 + x_n = 0\}$.

（3）$W_3 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 + 2x_2 + nx_n = 1\}$.

（4）$W_4 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \text{是整数}\}$.

2. 基：设 V 为向量空间，如果 r 个向量 α_1，$\alpha_2, \cdots$，$\alpha_r \in V$，且满足

（1）α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_r 线性无关.

（2）V 中任一向量都可由 α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_r 线性表示.

3. 维数：基中向量的个数称为向量的维数，记 $\dim W = s$.

4. 坐标：设 α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_r 是向量空间 V 的一个基，则 V 中任一向量 β 可唯一地表示为 $\beta = x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + x_r \cdot \alpha_r$，称 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)^T$ 为向量 β 关于基 α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_r 的坐标.

5. 过度矩阵：设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n与β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n为R^n的两组基，且

$$\begin{cases}\beta_1 = a_{11}\cdot\alpha_1 + a_{12}\cdot\alpha_2+\cdots+a_{1n}\cdot\alpha_n\\ \beta_2 = a_{21}\cdot\alpha_1 + a_{22}\cdot\alpha_2+\cdots+a_{2n}\cdot\alpha_n\\ \cdots\cdots\cdots\\ \beta_n = a_{n1}\cdot\alpha_1 + a_{n2}\cdot\alpha_2+\cdots+a_{nn}\cdot\alpha_n\end{cases}$$，则矩阵$P=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$被称为从

基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n到基β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n的过度矩阵.

备注：过度矩阵一定可逆.

6. 基变换：设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为向量α关于基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n的坐标，

$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$为向量α关于基β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n的坐标，则$x=Py$或$y=P^{-1}x$.

典型例题

一、选择题

例5．设向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，下列正确的的是_______.

(A) α必可由β,γ,δ线性表示. (B) β必不可由α,γ,δ线性表示.

(C) δ必可由α,β,γ线性表示. (D) δ必不可由α,β,γ线性表示.

例6．向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组$(II)$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则_______.

(A)当$r<s$时，向量组(II)必线性相关.

(B)当$r<s$时，向量组(I)必线性相关.

(C)当$r>s$时，向量组(II)必线性相关.

(D)当$r>s$时，向量组(I)必线性相关.

例7．设A,B为满足$AB=0$的任意两个非零矩阵，则必有_______.

(A) A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关.

(B) A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

例 8．设$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 是3阶非零矩阵，且$PQ=0$，则_______.

(A) $t=6$时，$r(P)=1$．(B) $t=6$时，$r(P)=2$.

(C) $t\neq 6$时，$r(P)=1$．(D) $t\neq 6$时，$r(P)=2$.

例 9．向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则命题正确的是_______.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关.

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

例 10．设$A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，$r(A^*)=1$，则________.

(A) $a=b\neq 0$．(B) $a\neq b$，且$a+2b=0$．(C) $a+2b\neq 0$．(D) $a\neq b$，且$a+2b\neq 0$.

二、填空题

例 11．设n阶矩阵$A=\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{pmatrix}$ $(n\geq 3)$，且$r(A^*)=1$，则$a=$______ .

例 12．设$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，则$\lambda=$______，$\mu=$______ .

例 13．设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 5 & 2 & 0\\ 3 & a & 4\end{pmatrix}$，$B$ 是 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $a=$ ______ .

例 14．设 A 是 3×2 矩阵，B 是 2×3 矩阵，则 $\left|A\cdot B\right|=$ ______ .

三、解答题

1．讨论向量组的线性相关性

例 15．判断下列向量组的线性相关性.

（1）$e_1=(1,0,\cdots,0)^T$，$e_2=(0,1,\cdots,0)^T$，$\cdots e_n=(0,0,\cdots,1)^T$.

（2）$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,2,5)^T$，$\alpha_3=(2,4,7)^T$.

（3）$\alpha_1=(1,3,\text{-}5,1)^T$，$\alpha_2=(2,6,1,4)^T$，$\alpha_3=(3,9,7,10)^T$.

例 16．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数，$\alpha_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_n^{n-1})\ (i=1,2,\cdots,r)$，判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{\mathbf{r}}\ (r<n)$ 的线性相关性.

2．证明向量组的线性相关性

例 17．设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 $k\ (k\geq 2)$，使得 $A^k\cdot\alpha=0$，但 $A^{k-1}\cdot\alpha\neq 0$，其中 α 为 n 维非零向量，证明：$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

例 18．证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充要条件是 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

例 19．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关.

例 20．设 n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成一个向量组，证明：它们线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可由它们线性表示.

例 21．设 A,B 分别为 $n\times m,m\times n$ 矩阵 $(n<m)$，且 $AB=E$，证明：B 的列向量组线性无关.

3．求向量组的极大线性无关组

例 22．设向量组 $\alpha_1=(2,3,4,5)^T$，$\alpha_2=(3,4,5,6)^T$，$\alpha_3=(4,5,6,7)^T$，$\alpha_4=(5,6,7,8)^T$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组表示.

4．有关向量组的秩或矩阵的秩的计算与证明

例 23．设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩及 A 的一个最高阶非零子式.

例 24．设 $\begin{cases} \beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n \\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1} \end{cases}$，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价.

例 25．设 n 个 n 维向量构成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且 n 维单位坐标向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由它们线性表示，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

例 26．设向量组 $\alpha_1=(1,-1,1,-1)^T$，$\alpha_2=(3,1,1,3)^T$，$\beta_1=(2,0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0,2)^T$，$\beta_3=(3,-1,2,0)^T$，证明：向量组 α_1,α_2 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价.

例 27．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，证明：$\left|A^TA\right|=0$.

5．有关向量空间命题的证明

例 28． 设 R^3 的两个基为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，及 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，

$\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$，求（1）由基 α_1，α_2，α_3 到基 β_1，β_2，β_3 的过度矩阵；（2）若向量 α 关于基 α_1，α_2，α_3 的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，则向量 α 关于基 β_1，β_2，β_3 的坐标.

第四讲　线性方程组

考研大纲

1. 会用克拉姆法则解线性方程组.
2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的
求法.
4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

知识要点

一、线性方程组的概念

定义：含有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

或 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

或 $x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\cdots+x_n\cdot\alpha_n=b$，其中 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^T$.

二、线性方程组解的性质

1．定理：若 ξ_1，ξ_2 是 $Ax=0$ 的两个解，则其线性组合 $k_1\cdot\xi_1+k_2\cdot\xi_2$（$k_1,k_2$ 为任意实数）仍是 $Ax=0$ 的解.

2．定理：若 ξ_1，ξ_2 是 $Ax=b$ 的两个解，则 $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

3．定理：若 ξ 是 $Ax=0$ 的解，η 是 $Ax=b$ 的解，则 $\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.

4．基础解系：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $Ax=0$ 的解，且满足以下性质：(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关，(2) $Ax=0$ 的任一个解均可以由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

5．定理：若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，η 是 $Ax=b$ 的特解，则 $k_1\cdot\xi_1+k_2\cdot\xi_2+\cdots+k_s\cdot\xi_s$ 是 $Ax=0$ 的通解，$k_1\cdot\xi_1+k_2\cdot\xi_2+\cdots+k_s\cdot\xi_s+\eta$ 是 $Ax=b$ 的通解.

例 1．证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系.

三、齐次线性方程组解的结构定理

1．定理：n 元齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $r(A)<n$.

2．定理：n 元齐次方程组 $Ax=0$ 只有零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $r(A)=n$.

3．定理：设 $r(A_{m\times n})=r$，则 n 元齐次方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $r(S)=n-r$.

例 2．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，证明：存在 $n\times s$ 的矩阵 $B\neq 0$，使得 $AB=0$ 的充要条件是 $r(A)<n$.

四、非齐次线性方程组解的结构定理

1．定理：n元非齐次方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，

即 $r(A)=r(A|b)$.

（1） $Ax=b$ 有唯一解的充分必要条件是 $r(A)=r(A|b)=n$.

（2） $Ax=b$ 有无穷解的充分必要条件是 $r(A)=r(A|b)<n$.

2．定理：n元非齐次方程组 $Ax=b$ 无解的充分必要条件是系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩，

即 $r(A)<r(A|b)$.

例 3．设 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解，求（1）系数矩阵的秩.（2）a，b 的值.

典型例题

一、选择题

例 4．设 η_1，η_2 是方程组 $Ax=b$ 两个不同的解，ξ_1，ξ_2 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=b$ 的一般解是_______.

(A) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$；　　(B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_2-\xi_1)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$；

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$；　　(D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$.

例 5．设 ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则此方程组的基础解系可以为________.

(A) $\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3+\xi_4$，$\xi_4+\xi_1$；　(B) ξ_1，ξ_2，$\xi_3+\xi_4$，$\xi_3-\xi_4$；

(C) ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4的一个等价向量组；(D) ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4的一个等秩的向量组．

二. 解答题

1．含有未知数的线性方程解的讨论

例6．设线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$，讨论$\lambda$取何值时，方程组解的情况，有解时并求其解．

例7．设矩阵$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$，其中$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量$b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求方程组$Ax=b$的通解．

例8．设n阶矩阵A的每行元素之和均为零，且$r(A)=n-1$，求齐次线性方程组$Ax=0$通解．

2．讨论两个方程组的公共解或同解

例9．设4元齐次线性方程组(I)为$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_3-x_4=0\end{cases}$，4元齐次线性方程组$(II)$的基础解系为$\xi_3=(0,1,2,0)^T$，$\xi_4=(-1,-3,-3,1)^T$．（1）求线性方程组$(I)$的通解；（2）线性方程组

(I) 和 (II) 是否有非零的公共解，若有，求出其所有的非零公共解，若没有，则说明理由.

3．有关方程组的证明

例 10．设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\cdots$，ξ_{n-r} 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：η^*，$\xi_1,\cdots$，ξ_{n-r} 线性无关.

例 11．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，证明：若任一个 n 维列向量都是 $Ax=0$ 的解，则 $A=0$.

例 12．设 A 是 n 阶矩阵，证明：非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对任何 b 都有解的充要条件是 $|A|\neq 0$.

例 13．设 $m\times n$ 矩阵 A 的 m 个行向量是齐次线性方程组 $Cx=0$ 的一个基础解系，又 B 是一个 m 阶可逆矩阵，证明：BA 的行向量也是 $Cx=0$ 的一个基础解系.

例 14．设 A 为 n 阶矩阵，满足 $|A|=0$，而 A 中元素 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}\neq 0$，求方程组 $Ax=0$ 的基础解系与通解.

4．判定一个向量是否可由一组向量线性表示

例 15．设向量组 $\alpha_1=(a,2,10)^T$，$\alpha_2=(-2,1,5)^T$，$\alpha_3=(-1,1,4)^T$，及向量 $\beta=(1,\ b,-1^T)$，则 a，b 取何值时，（1）向量 β 不能由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表示；（2）向量 β 能由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表示，且表示唯一；（3）向量 β 能由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表示，且表示不唯一，并求一般表示式.

第五讲　矩阵的特征值与特征向量

考研大纲

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.
2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.
3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

知识要点

一、特征值与特征向量

1．特征值与特征向量：设 A 为 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 x，使得 $Ax=\lambda x$，则数 λ 为矩阵 A 的特征值，非零列向量 x 为矩阵 A 对应 λ 的特征向量.

2．特征多项式与特征方程：$|\lambda E-A|$ 为特征多项式，$|\lambda E-A|=0$ 为特征方程.

二、特征值与特征向量的性质

1．设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$；$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n$.

2. 设ξ_1，ξ_2是矩阵A属于特征值λ的特征向量，则$k_1\cdot\xi_1+k_2\cdot\xi_2$ $(k_1\cdot\xi_1+k_2\cdot\xi_2\neq 0)$是矩阵$A$属于特征值$\lambda$的特征向量.

例 1. 设λ是矩阵A的特征值，证明下列性质.

（1）$k\lambda$是kA的特征值；

（2）$a_1\lambda+a_0$是a_1A+a_0E的特征值；

（3）λ^2是矩阵A^2的特征值；

（4）λ^m是矩阵A^m的特征值；

（5）当矩阵A可逆时，$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}特征值；

（6）$\dfrac{|A|}{\lambda}$是矩阵A^*的特征值；

（7）$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\cdot\lambda+\cdots+a_m\cdot\lambda^m$是$\varphi(A)=a_0\cdot E+a_1\cdot A+\cdots+a_m\cdot A^m$的特征值.

备注：（1）矩阵A与A^T有相同的特征值，但特征向量不一定相同；（2）一个特征向量不能属于不同特征值.

3. 定理：设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是矩阵$A$的$m$个特征值，$\xi_1$，$\xi_2,\cdots$，$\xi_m$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等，则$\xi_1$，$\xi_2,\cdots$，$\xi_m$线性无关.

例 2. 设λ_1与λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为ξ_1，ξ_2，证明：$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

三、相似矩阵与矩阵的相似对角化

1．定义：设 A 与 B 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$，则称 B 是 A 的相似矩阵，或逆矩阵 P 为把 A 变成 B 的相似变换矩阵.

2．定理：设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

备注：设向量 x 是矩阵 A 关于特征值 λ 的特征向量，则 $P^{-1}\cdot x$ 是矩阵 B 关于同一特征值 λ 的特征向量.

3．定理：设矩阵 A 与 B 相似，则 A^m 与 B^m 相似.

4．定理：设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，且 $A\sim B$，则

$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_0\cdot E$ 与 $f(B)=a_nB^n+a_{n-1}B^{n-1}+\cdots+a_0\cdot E$ 相似.

5．定理：n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似（矩阵 A 对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的的特征向量.

推论：如果 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值互不相等，则 A 与对角矩阵相似.

四、实对称矩阵的相似对角化

1．定理：实对称矩阵的特征值为实数.

2．定理：设 λ_1 与 λ_2 是实对称矩阵 A 的两个不同特征值，ξ_1，ξ_2 是对应的特征向量，则向量 ξ_1 与 ξ_2 正交.

3．正交矩阵：设矩阵 Q，使得 $Q^T\cdot Q=Q\cdot Q^T=E$，称 Q 为正交矩阵.

4．正交矩阵的性质

（1）正交矩阵保持内积不变；

（2）若矩阵 Q 为正交矩阵，则 $|Q|=\pm1$，其 $Q^{-1}=Q^T$，且 $Q^{-1}=Q^T$ 也是正交矩阵；

（3）矩阵 Q 为正交矩阵的充分必要条件是 Q^T 也为正交矩阵；

（4）两个同阶正交矩阵的乘积也是正交矩阵；

（5）矩阵 Q 为正交矩阵的充分必要条件是它的行（列）向量组是标准正交向量组.

5．定理：设 A 为实对称矩阵，则必有正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}\cdot A\cdot Q=Q^T\cdot A\cdot Q=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵.

推论：设 A 为 n 阶对称矩阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $r(\lambda E-A)=n-k$，

从而对应特征值λ恰有k个线性无关的特征向量.

例 3．判断下列矩阵是否为正交矩阵.

（1）$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　　（2）$B=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

典型例题

一、填空题

例 4．设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$的特征值之和为$3$，特征值之积为$-24$，则$a=$____，$b=$____ .

例 5．设矩阵A的行列式$|A|\neq 0$，λ是矩阵A的一个特征值，则$\left(A^*\right)^2+E$的特征值为______.

例 6．设3阶矩阵A的特征值为$1,2,-3$，则$\left|A^*+3A+2E\right|=$______ .

二、解答题

1．求数值矩阵的特征值和特征向量

例 7．设矩阵$A=\begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$，（1）求$A$的特征值及特征向量；（2）证明：矩阵$A$可逆，并求$A^{-1}$.

2．求抽象矩阵的特征值和特征向量

例 8．设n阶矩阵A满足$A^2-3A+2E=0$，求矩阵A的特征值.

例 9．设n阶矩阵A的各行元素之和均为a.（1）证明：$\lambda=a$是矩阵A的一个特征值；

（2）当A可逆，且$a\neq 0$时，求$2A^{-1}-3A$各行元素之和.

3．有关特征值和特征向量的逆问题

例 10．设3阶矩阵A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为

$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，求矩阵$A$.

例 11．设 A 为3阶实对称矩阵，A 的秩为2，且 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求（1）$A$ 的特征值与特征向量；（2）矩阵 A .

4．矩阵相似对角化的判定问题

例 12. 设矩阵 A 是3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维线性无关的列向量，且 $A\alpha_1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2 = 2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3 = 2\alpha_2+3\alpha_3$，求（1）矩阵 A 的特征值；（2）可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

例 13．设 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求（1）参数 a,b 的值及特征向量 ξ 所对应的特征值；（2）矩阵 A 是否可以对角化，若可以，使对角化.

5．有关实对称矩阵的问题

例 14． 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -4 & \\ & & y\end{pmatrix}$ 相似，求 x 与 y 的值，并求一个正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$．

例 15． 设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3，向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解．求（1）A 的特征值与特征向量；（2）正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$．

5．有关特征值和特征向量的证明题

例 16． 设矩阵 A 为正交矩阵，且 $|A|=-1$，证明：$\lambda=-1$ 是 A 的特征值．

例 17． 设 $|E-A^2|=0$，证明：-1 或 1 至少有一个是 A 的特征值．

例 18．设向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$a_1\neq 0$，$A=\alpha\cdot\alpha^T$．

（1）证明：$\lambda=0$是矩阵A的$n-1$重特征值；
（2）求矩阵A的非零特征值及n个线性无关的特征向量.

例 19．设A为3阶矩阵，且有3个互相正交的特征向量，证明：A是对称矩阵.

例 20．设n阶可逆矩阵A与B，证明：（1）AB与BA具有相同的特征值；

（2）$tr(AB)=tr(BA)$.

第六讲　二次型

考研大纲

1. 了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换与合同矩阵的概念.
2. 了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准型、规范型等概念，了解惯性定理，会用正交变换和配方法化二次型为标准型.
3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

知识要点

一、二次型的概念

定义：设含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^T\cdot A\cdot x$$

为二次型，其中A为对称矩阵，A的秩为二次型的秩.

例 1．将二次型 $f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ 表示成矩阵的形式，并求其秩.

二、把二次型化成标准型

1. 利用合同变换把二次型化成标准型

（1）合同变换矩阵：设 A 与 B 为 n 阶矩阵，如果存在满秩矩阵 P，使得 $B = P^T AP$，则称 A 与 B 是合同的，P 为合同变换矩阵.

（2）定理：任一实对称矩阵一定合同于对角矩阵.

（3）定理：实对称矩阵 A 与 B 合同的充分必要条件是二次型 $x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数.

（4）定理：实对称矩阵 A 与 B 合同的充分条件是 A 与 B 相似.

2．利用正交变换把二次型化成标准型

定理：设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$，总有正交变换 $x = P \cdot y$，使得 f 化为标

准型 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的系数矩阵 A 的特征值.

例 2．利用正交变换化二次型 $f = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ 为标准型.

3．利用配平方法把二次型化成标准型

例 3．利用配平方法化二次型 $f = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准型.

三、正定二次型

1．定义：设二次型 $f = x^T Ax$，对于任意 $x \neq 0$，均有 $f = x^T Ax > 0$，则称二次型 $f = x^T Ax$

为正定二次型，系数矩阵 A 为正定矩阵.

2. 定理：设 n 元二次型 $f = x^T Ax$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ 二次型 $f = x^T Ax$ 的正惯性指数 $p = n$

$\Leftrightarrow$ A 与 E 合同，即有可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$ $\Leftrightarrow$ A 的特征值均为正数 $\Leftrightarrow$ A 的顺序主子式均大于零.

例 4. 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明：A^{-1}，A^* 也是正定矩阵.

例 5. 设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求 a 取值范围.

典型例题

一、选择题

例 6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为_______ .

$(A)\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$；　$(B)\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$；　$(C)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$；　$(D)\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

例 7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B________ .

(A) 合同且相似；(B) 合同但不相似；(C) 不合同但相似；(D) 既不合同也不相似.

二、填空题

例 8. 设二次型 $f=(x_1+ax_2-2x_3)^2+(2x_2+3x_3)^2+(x_1+3x_2+ax_3)^2$ 正定，则 $a=$________ .

例 9．二次型 $f = {x_2}^2 + 2x_1x_3$ 的负惯性指数 $q =$ ________ .

三、解答题

1．化二次型为标准型

例 10．设 $\alpha = (1,-2,2)^T$ 是二次型 $f = ax_1^2 + 4x_2^2 + bx_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 矩阵 A 的特征向量，求正交变换化二次型为标准型，并写出所用正交变换.

例 11．设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，且线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一，（1）求 a 的值；（2）求正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ$ 为对角矩阵.

2．二次型通过正交变换化为标准型求参数

例 12．设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经正交变换为 $3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2$，求 a，b 的值及所用正交变换.

3．有关正定二次型或正定矩阵的判断与证明

例 13．设 A，$A - E$ 都是 n 阶实对称正定矩阵，证明：$E - A^{-1}$ 是正定矩阵.

例 14．设 A，B 均是 n 阶正定矩阵，k，l 均是正数，证明：$kA+lB$ 也是正定矩阵.

例 15．设 A 是 n 阶实对称矩阵，若对任意的 n 维列向量 α 恒有 $\alpha^T A\alpha = 0$，证明：$A = 0$.

例 16．判断 n 元二次型 $f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$ 的正定性.

参考答案

第 1 讲　行列式例

例 1. 说明：“必要性”：已知存在 n 除非零矩阵 B，使得 AB=0,将 B 中的每一列记录 β_1，β_2，⋯，β_n，即 B=(β_1，β_2，⋯，β_n)且 β_1，β_2，⋯，β_n 至少有一个为非零到向量，且满足：A β_i=0，i=1,2,⋯，n。这说明 AX=0 有非零解，所以 $r(A)<n$，从而，有丨A丨=0.
“充分性”：已知丨A_n丨=0,即 $r(An)<n$.从而，方程组 AX=0 有非零解，不妨设到向量 ξ 是一个非零解，那么构选 B=(0,0,⋯，ξ，⋯，0) ≠0。则必有 AB=A(0,0,⋯，ξ，0，⋯，0)=0.

例 2. __5__.　　例 3.__a__.　　例 4. __2__.　　例 5.__0__.

例6.　　解：按第 1 列展开求 D_n.

$$D_n = x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

例7.　　解：（累加法）

$$D_n \overset{r_1+r_i\times 1}{\underset{i=2,3,\cdots,\ n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[(n-1)a+x\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i+r_1\times(-a)}{\underset{i=2,3,\cdots,\ n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \left[(n-1)a+x\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \left[(n-1)a+x\right](x-a)^{n-1}.$$

例 8. 解：（累加法）

$$D_n \overset{r_1+r_i\times 1}{\underset{i=2,3,\cdots,\ n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_i+r_1\times 1}{\underset{i=2,3,\cdots,\ n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -(n+1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n+1) & \cdots & 0 & 0 \\ -(n+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (n+1)^{n-1} \square -1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = -\ (^{\frac{n(n-1)}{2}}\,1)\, n + (^{n-1}\ 1)\quad .$$

例 9. 解：

$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,\ n]{r_1+r_i\times(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2行展开}} 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)(n-2)!.$$

例 10. 解

$$D_n \xlongequal[C_1+C_j\times 1]{j=2,3,\cdots,n} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 1 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & 1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{C_1+C_j\times(-j)} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -(n-1) \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^{n-1}\square\frac{n+1!}{2}$$

例 11. 解：列变换

$$D_n \xlongequal[C_1+C_j\times(-\frac{1}{a_j})]{j=2,3,\cdots,n} \begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\cdots\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_1-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}-\cdots-\frac{1}{a_n}\right)a_2\square a_3\cdots a_n$$

例 12. 解：（加边法）

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix}\overset{\text{——第0行}\atop r_i+r_0\times(-1)}{\underset{i=1,2,\cdots,\ n}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & a0_1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}$$

↓

第0列.

$$\overset{j=1,2,\cdots,\ n}{\underset{C_0+C_j\times\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1+\dfrac{a_1}{\lambda_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{\lambda_n} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{vmatrix}=\left(1+\frac{a_1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{a_n}{\lambda_n}\right)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 13．解：拆项法：

$$D_n\overset{\text{将第1行拆分}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}=I_1+I_2$$

$$I_1\overset{r_2+r_1\times(-1)\atop r_n+r_1\times(-1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_2y_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_2y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_2y_1\end{vmatrix}=0\text{（第2行与第3行成等比）}.$$

$$I_2\overset{\text{将第2行拆分}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}=0$$

所以，D_n=0.

例 4. 解：$|B| \overset{\text{拆分}}{=\!=\!=\!=} |\partial_1, \partial_1+\partial_3, \cdots, \partial_n+\partial_1| + |\partial_2, \partial_2+\partial_3, \cdots, \partial_n+\partial_1| = I_1 + I_2$

$$I_1 \underset{c_n+c_1\times(-1)}{\overset{\text{列变换}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} |\partial_1, \partial_2+\partial_3, \cdots, \partial_n| \underset{c_{n-1}+c_n\times(-1)}{\overset{\text{列变换}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} |\partial_1, \partial_2+\partial_3, \cdots, \partial_{n-1}, \partial_n|$$

$$=\cdots= |\partial_1, \partial_2+\partial_3, \cdots, \partial_n| = |A| = a;$$

$$I_2 \underset{c_2+c_1\times(-1)}{\overset{\text{列变换}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} |\partial_2, \partial_4, \partial_3+\partial_4, \cdots, \partial_n+\partial_1| \underset{c_3+c_2\times(-1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} |\partial_2, \partial_3, \partial_4, \cdots, \partial_n+\partial_1|$$

$=\cdots= |\partial_2, \partial_3, \partial_4, \cdots, \partial_n, \partial_1| = (-1)^{n-1}|\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_n|$（将$\partial_1$逐次与前列对换）.

=（-1）$^{n-1}|A|=(-1)^{n-1}a$;

$\therefore |B|=a[1+(-1)^{n-1}1]$.

例 15. 解：（递推法）.

$$D_n \overset{\text{按第1列展开}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} x\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} + a_1\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + a_1\times(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_1$$

得递推公式：$D_n = xD_{n-1} + a_1$

依次有：$D_{n-1} = xD_{n-2} + a_2$，$\cdots$，$D_3 = xD_2 + a_{n-2}$

逐次代回，得：$D_n = x^{n-2}D_2 + a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + a_2x + a_1$

而，$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_nx + a_{n-1}$

代入，得：$D_n = x^{n-1}a_n + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2x + a_1$.

例 16. 解：拆项，递推：

$$D_n \xlongequal{\text{按第1列拆分}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = I_1 + I_2$$

$$I_1 \xlongequal[i=2,3,\cdots,\ n]{r_i + r_{i-1}\times(-1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$I_2 \xlongequal{\text{按第1列展开求值}} 1\times(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = D_{n-1}$$

所以，$D_n = 1 + D_{n-1}$，依次可有：$D_{n-1} = 1 + D_{n-2}, \cdots$，$D_3 = 1 + D_2$

代入，得：

$$D_n = 2 + D_{n-2} = 3 + D_{n-3} = \cdots = n-2 + D_2 = n-2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = n-2+3 = n-1.$$

例 17. 解：

$$(1) A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = 1\square A_{11} + \quad A_{12} + \quad A_{13} + \quad A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$(2) M_{11} + M_{21} + M_{31} + A_{41} = 1\square(-1)^{1+1} M_{11} + - \quad (-1)^{2+1} M_{21} + \quad (-1)^{3+1} M_{31} + - \quad (-1)^{4+1} M_{41}$$

$$=1\cdot A_{11}+(-1)\square_{21}+1\quad_{31}+(-1)\quad_{41}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}=0.$$

例 18. 证明：由已知，不妨设 $x_1,x_2,\cdots x_n,x_{n+1}$ 是使 $f(x)=0$的$(n+1)$ 个不同的数值；则

代入多项式有：
$$\begin{cases}c_0+c_1x_1+\cdots+c_nx_1^n=0\\c_0+c_1x_2+\cdots+c_nx_2^n=0\\\qquad\vdots\\c_0+c_1x_1+\cdots+c_nx_n^n=0\\c_0+c_1x_{n+1}+\cdots+c_nx_{n+1}^n=0\end{cases}$$

若把 $c_0+c_1,c_2,\cdots+c_n$ 看作未知量，则上方程组就成为含有（n+1）个未知量且有（n+1）个方程。系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\\1&x_{n+1}&x_{n+1}^2&\cdots&x_{n+1}^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{n+1}\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_{n+1}^n\end{vmatrix}$$（范德蒙行列式）

$$=\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i)\neq 0\ (x_1,x_2,\cdots,\ x_n,x_{n+1}\text{互不相同}).$$

所以：上方程组有唯一解，即：$c_0=c_1=c_2=\cdots=c_n=0$

从而，$f(x)\equiv 0.$

第 2 讲　矩阵及其运算

例题解答：

例1.　解：（1）不正确举个反例：如：$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，但 $A\neq 0.$

(2)不正确；反例.如：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，且 $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A$,但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$.

(3)不正确;反例，如; $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 且 AB=0,AC=0

即：$AB=AC$, 且 $A\neq 0$,但 $B\neq C$.

(4)不正确；

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2 \overset{AB=0}{=\!=\!=\!=\!=\!=} A^2+BA+B^2\neq A^2+B^2.$$

(5)不正确；$(AB)^T=B^TA^T=BA\neq AB$ (矩阵乘法不满足交换律).

例 2. 证明：

（1） 设 A，B 为两个上三角矩阵，则

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&*&\cdots&*\\0&a_{22}&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&*&\cdots&*\\0&b_{22}&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&*&\cdots&*\\0&a_{22}b_{22}&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}$$

所以，AB 也是上三角矩阵.

（2） 设 A，B 为主对角元为 0 的上三角矩阵，则

$$AB=\begin{pmatrix}0&*&\cdots&*\\0&0&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\vartriangle&\cdots&\vartriangle\\0&0&\cdots&\vartriangle\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&*&\cdots&*\\0&0&0&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

可以，看到 AB 仍是主对角元为 0 的上三角矩阵。

（3） 设 A，B 是主对角元金为 1 的上三角矩阵，则

$$AB=\begin{pmatrix}1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&1&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&*&\cdots&*\\0&1&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

所以，命题成立.

例2. 解：设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 与 Λ 可交换，即 $B\Lambda=\Lambda B$.具体计算有：

$$B\Lambda=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Lambda B=\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix}$由 $B\Lambda=\Lambda$ 可得对应元素相等；对 $i<j$，由 $\lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ij}$

移项，得：$(\lambda_i-\lambda_j=b_{ij}=0,\because \lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j),\therefore b_{ij}=0$；

同理，可得出：当 $i>j$ 时，$b_{ij}=0$，因此，B 只能是对角矩阵.

例4.　证明：

（1）$(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T,\therefore A+A^T$ 是对称矩阵；

$(A+A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T),\therefore A-A^T$ 是反对称矩阵.

（2）由（1）可知：

$$A=\frac{1}{2}\left[(A+A^T)+(A-A^T)\right]=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$$

其中：$\frac{1}{2}(A+A^T)$ 为对称矩阵，$\frac{1}{2}(A-A^T)$ 为反对称矩阵.

例5.　解：

$$(1)A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(2)A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$(3)A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & \\ & \iddots & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{pmatrix}$$

例6.　解：（1）不正确；反例，$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,A 与 B 可逆但

$A+B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$不可逆。

（2）不正确；反例，如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, A 与 B 不可逆；但 $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是可逆的。

（3）不正确；反例，$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},AB=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

$|AB|=1\neq 0$,即 AB 可逆；但 A 与 B 不可逆。

（4）　不正确；例如：$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，可知 AB=0 不可逆，但 A 是可逆。

例 7. 略；

例7.　证明：由公式：$|A^*|=|A|^{n-1}$,得$|A^*|=|A|^2$，再由$A^*=A^T$，可得

例8.　$|A^T|=|A|^2\Rightarrow|A|=|A|^2\Rightarrow|A|(|A|-1)=0$

A 可逆即$|A|\neq 0$，所以，$|A|-1=0$，即$|A|=1$.

例9.　选（B）；例 10. 选（A）；例 11. 选（C）；例 12. 选（D）；

例13.　<u>3E</u>；　例 14. <u>3</u>；　例 15. <u>0</u>；　例 16. <u>-16</u>；例 17. <u>9</u> .

例 18. 解： $\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(x,y,z)=\begin{pmatrix}ax&ay&az\\bx&by&bz\\cx&cy&cz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&-6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow ax=-2$; $by=-2,cz=-3$

而 $\alpha^T\beta=(a,b,c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=ax+by+cz=-7.$

例 19. 解：$\because |P|=6\neq 0,\therefore P$ 可逆；

由 $AP=P\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$，且$A^n$=$P\Lambda^n P^{-1}$

$\therefore \varphi(A)=P\Lambda^3P^{-1}+2P\Lambda^2P^{-1}-3P\Lambda P^{-1}=P(\Lambda^3+2\Lambda^2-3\Lambda)P^{-1}$

而 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，代入 P 与 P^{-1},可得 $\varphi(A)=\begin{pmatrix}5&0&5\\0&0&0\\5&0&5\end{pmatrix}$

例 20. 解：$A^2=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix},A^4=\begin{pmatrix}\lambda^4&4\lambda^3&6\lambda^2\\0&\lambda^4&4\lambda^3\\0&0&\lambda^4\end{pmatrix}$

$A^5=\begin{pmatrix}\lambda^5&5\lambda^4&10\lambda^3\\0&\lambda^5&5\lambda^4\\0&0&\lambda^5\end{pmatrix},\cdots$，$A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$

上述矩阵的最右上角元素的系数为

1，3=1+2；6=1+2+3；10=1+2+3+4，…，1+2+3+…+民-1= $\frac{n(n-1)}{2}$.

例 21. 解：

$$A^2=\begin{pmatrix}6&6&6\\12&12&12\\18&18&18\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix};A^3=6\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\\square&&\\3&3&3\end{pmatrix}=\ {}^2\begin{pmatrix}1&1&1\\&&\\3&3&3\end{pmatrix}$$

$$\cdots,\ A^n=6^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}.$$

例 22. 证明：必要性：已知 A,B 为 n 阶对称矩阵，AB 也是对称矩阵.

即：$A^T=A,B^T=B;(AB)^T=AB;$

而 $(AB)^T=B^TA^T=BA$；所以 $AB=BA$.

充分性：已知 $A^T=A,B^T=B,$ 且 $AB=BA.$ 那么

$(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB$

∴AB 为对称矩阵.

例 23. 证明：由已知，可设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ 再由 $A^2=0$

即 A^2 中所有元素为 0；其中，对角元为：$\begin{matrix}a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2=0\\a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2=0\\\vdots\\a_{1n}^2+a_{1n}^2+\cdots+a_{nn}^2=0\end{matrix}$

从而，解得：$a_{ij}=0(ij=1,2,\cdots,\ n),$ 即 $A=0.$

例 24. 解：$|-AB^T|=(-1)^4|A||B^T|=(-2)\times3=-6.$

例 25. 解构造矩阵：$C=\begin{pmatrix}E_m&A_{m\times n}\\B_{m\times m}&E_n\end{pmatrix}$

$$|C|\overset{r_2+(-B)\cdot r_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}E_m&A_{m\times n}\\O&E_n-BA\end{vmatrix}=|E_m|\cdot|E_n-BA|=|E_n-BA|.$$

$$|C|\xlongequal{r_1+(-A)\cdot r_2}\begin{vmatrix} E_m-AB & O \\ B_{n\times m} & E_n \end{vmatrix}=|E_m-AB|\cdot|E_n|=|E_m-AB|.$$

所以，$|E_n-BA|=|E_m-AB|$.

例 26. 证明：一方面:

$(E-A)(E+A+A^2\cdots+A^{k-1})=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k=E-A^k=E;$

另一方面：

$(E+A+A^2\cdots+A^{k-1})(E-A)=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k=E-A^k=E.$

由递矩阵的定义，得：

$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$

例 27. （1）$X=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{3} \\ 2 & 5 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(2) $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ (初等矩阵的逆阵).

$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

(3） $A^*X=A^{-1}+2X\Rightarrow(A^*-2E)X=A^{-1}\Rightarrow X=(A^*-2E)^{-1}\cdot A^{-1}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},A^*=|A|A^{-1}=4\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

从而

$$X=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

例 28. 证明：

$$A^2=A\Leftrightarrow(E-\partial\partial^T)(E-\partial\partial^T)=A\Leftrightarrow E-\partial\partial^T-\partial\partial^T+(\partial\partial^T)(\partial\partial^T)=A$$

（1）$\Leftrightarrow A-\partial\partial^T+\partial(\partial^T\partial)\partial^T=A\Leftrightarrow\partial(\partial^T\partial-1)\partial^T=0$

$\Leftrightarrow(\partial^T\partial-1)\partial\partial^T=0(\text{矩阵})\Leftrightarrow\partial^T\partial=1.$

（2）当$\partial^T\partial=1$时，在等式：$A=E-\partial\partial^T$ 两边右乘∂得：$A\partial=(E-\partial\partial^T)\partial$

即：$A\partial=\partial-\partial(\partial^T\partial)=\partial-\partial=0$

这说明: $AX=0$有非零解∂，即$r(A)<n$.

从而，$|A|=0$，所以，A不可逆.

例 29. 解：将A分块：

$$A=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&A_1\\A_2&0\end{pmatrix}$$利用分块矩阵的逆阵性质得：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\\frac{1}{a_1}&0&\cdots&0&0\\0&\frac{1}{a_2}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{pmatrix}$$

例 30. 证明：

$$|Q|=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}\overset{r_2+(-CA^{-1})r_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

例 31. 证明：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}\overset{r_2+E\cdot r_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}A & B\\ B+A & A+B\end{vmatrix}=|A+B|\cdot\begin{vmatrix}A & B\\ E & E\end{vmatrix}=|A+B|\cdot\begin{vmatrix}A-B & 0\\ E & E\end{vmatrix}$$

$$=|A+B|\cdot|A-B|.$$

例 32. 解：

$$\because\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$$\therefore\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2013}=\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2\right]^{1006}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

另外，

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2014}=E$$

所以，

$$\text{原式}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot E=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

例 33. 解：B 是由 A 经过初等列变换得到的，再根据初等变换与初等矩阵的关系，可得，$B=A\cdot E_{13}(-2)\cdot E_{12}$

其中：$E_{13}(-2)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^*B=(|A|\cdot A^{-1})B=3A^{-1}\cdot(AE_{13}(-2)E_{12})=3E_{13}(-2)\cdot E_{12}=3\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

第3讲　n维向量

例题解答：

例1. 解：（1）不正确；因为这是线性相关的定义，

（2）不正确；例如：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$，一定线性相关，但$\alpha_1$不能由$\alpha_2$、$\alpha_3$来线性表示。

（3）不正确；如（2）题中的例子.

（4）不正确；例如：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$；其中，$\{\alpha_1, \alpha_2\}$，$\{\alpha_1, \alpha_3\}$，$\{\alpha_2, \alpha_3\}$

每一个向量组都是线性无关的，但α_1，α_2，α_3是线性无关的。

例2.解：α_1，α_2，α_3，β是线性无关的；否则，若α_1，α_2，α_3，β线性相关，而已知中α_1，α_2，α_3线性无关，由定理可得β能由α_1，α_2，α_3线性表示，与已知中β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表示矛盾。

例3．解：由施密特正交化方法：

令$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$；$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\alpha_2, \beta_1}{\beta_1, \beta_1}\beta_1=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})^T$；

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-2,0,2)^T$$

再令：

$$\eta_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T;\eta_2=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T;\eta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1)^T.$$

例 4.解：

（1）是；因为：①任取 W 的两个向量；$\alpha=$（$x_1,v,\cdots;0,x_n$），$\beta=$（$y_1,0,0,\cdots 0,y_n$）

.

x_1，x_n，y_1，$y_n\in R$,则$\alpha+\beta=(x_1+y_1,0,\ldots 0,x_n+y_n)\in W_1$

②任取 $k\in R$；$\alpha=(x_1,0,0,\ldots,x_n)\in W$,则$kd=(kx_1,0,0,\ldots,kx_n)\in W_2$);封闭性成立.

是；因为：①任取$\alpha=(x_1,x_2,\cdots.x_n)$, $\beta=(y_1,y_2,\cdots.y_n)\in W_2$,其中：$x_1+x_2+\cdots x_n=0$ $y_1+y_2+\cdots y_n=0$　那么，

$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$其中:$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n)=0$

$\therefore\alpha+\beta\in W_2$,加法满足封闭性.

②任取 $\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in W_2$,其中:$x_1+x_2+\ldots+x_n=0$,任意实数$R$.

则 $kd=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$，其中 $k_2x_1+k x_2+kx_n=k(x_1+x_2+\cdots x_n)=0$

$\therefore kd\in W_2$，数乘也封闭。

（3）W_3 不是向量空间；因为数乘不满足封闭性，如：$d=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in W_3$

其中：$x_1+2x_2+\ldots+nx_n=1$；而 $R\alpha=$（$Rx_1+Rx_2,\ldots+Rx_n$）

其中：$Rx_1+2Rx_2+\ldots+nRx_n=R(x_1+2x_2+\ldots,nx_n)=R$

$\therefore R\alpha\notin W_3$.

(4)W_4 不是向量空间；因为数乘不满足封闭性.

例 5.解：α,β,γ线性无关$\Rightarrow\alpha,\beta$也线性无关;而α,β,δ线性相关.

由定理，得：δ 必可由α,β 线性表示，当然，δ 也可以由α,β,γ 线性表示.

故选（C）

例 6.解：选（D）　由 P_{19} 定理 4 的推论 1,可得.

例 7.解：选（A）. $AB=0\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\ldots;\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11}\cdots b_{1p} \\ b_{21}\cdots b_{2p} \\ b_{n1}\cdots b_{np}\end{pmatrix}=0,因为B\neq 0,则B中至少$ 有一个非零列向量，不妨设是第 1 列，则由上式得出

$b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\ldots+b_{n1}\alpha_n=0(b_{11},b_{21},\cdots b_{n1}不全为零)$

从而，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$线性相关;即A的列向量组是线性无关.

$AB=0\Rightarrow)\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_n\end{pmatrix}=0,因为A\neq 0,则A中至少有一个非零行向量$，不妨设是第一行，从上式可得：$\alpha_{11}\beta_1+\alpha_{12}\beta_2+\cdots+\alpha_{1n}\beta_n=0$

因为$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n}$不全为零，所以，$B$ 的行向量组线性相关.

例 8 解：选（C）

因为：$\left.\left.\begin{matrix}①t=6时，r(Q)=1\\ PQ=0\Rightarrow r(P)+r(Q)\leq 3\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\Rightarrow r(p)\leq 2\\ \\ P\neq 0\Rightarrow r(P)\geq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1\leq r(P)\leq 2$

$\left.\left.\begin{matrix}②t\neq 6时，r(Q)=2\\ PQ=0\Rightarrow r(P)+r(Q)\leq 3\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\Rightarrow r(p)\leq 1\\ \\ P\neq 0\Rightarrow r(P)\geq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow r(P)=1.$

例10.　解：选（D）.

（A）　中的四个向量设为：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2;\beta_2=\alpha_2+\alpha_3;\beta_3=\alpha_3+\alpha_4;\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$

其中：$\beta_4-\beta_1=\alpha_4-\alpha_2;\beta_3-\beta_2=\alpha_4-\alpha_2$，相减得：

$(\beta_4-\beta_1)-(\beta_3-\beta_2)=0\Rightarrow-\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4=0$

从而，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关，相同的方法可以得出

（B）,(C)中的向量组也是线性相关的.

例 10. 解：选（B）.

$r(A^*)=1 \Rightarrow r(A)=n-1=3-1=2 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow a=-2b.$

而当$a=b$时$r(A)=1$或0；所以，必有$a \neq b$.

例 11. $a=1-n.$

解：$\left.\begin{array}{l} r(A^*)=1 \Rightarrow r(A)=n-1 \Rightarrow |A|=0 \\ \text{而}\ |A|=[a+(n-1)](a-1)^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow a=1-n \text{或} a=1$

又因为$a=1$时，$r(A)=1$与$r(A)=n-1 \geq 2(n \geq 3)$矛盾。

所以，只能是 a=1-n.

例 12. $\lambda=5;\mu=1$.

$r(A)=2, \Rightarrow$ 3 阶子式都等于 0，如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \lambda \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda=5;$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & \mu \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \mu=1$

例 13. $a=\dfrac{4}{5}.$

解：$\left.\begin{array}{l} AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B) \leq 3 \\ B \neq 0 \Rightarrow r(B) \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow r(A) \leq 2 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow |a=\dfrac{4}{5}.$

例 14. $|A \cdot B|=0.$

解：$r(A) \leq 2, r(B) \leq 2$ 而 AB 是 3 阶交阵，且$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

$\Rightarrow r(AB) \leq 2 \Rightarrow |AB|=0.$

例 15. 解：

（1） 设存在$k_1,k_2,\cdots$，k_n使得：$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=0$，代入$e_1,e_2,\cdots,e_n$得

$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T=(0,0,\cdots,0)^T$，得到唯一解：

$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，所以线性无关.

（2）$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{vmatrix}=0,\therefore$ 线性相关.

（3）根据向量组的秩判断：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\\-5&1&7\\1&4&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1\\ r_3+5-r_1}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&11&22\\0&2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{11}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&2\\0&2&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+(-2)r_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\Rightarrow$ 线性无关.

例 16. 解：因为：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$，α_n 构成的行列式 $\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$

范德蒙行列式 $====\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\neq 0(a_1,a_2,\cdots$，$a_n$ 互不相等).

所以，α_1，α_2，$\cdots$，α_n 线性无关；又因为 $r<n$,

所以，α_1，α_2，$\cdots$，α_r 也线性无关.（整体无关，则部分无关）.

例 17. 证明：设存在 l_1，l_2，$\cdots$，l_k 使得 $l_1\alpha+l_2(A\alpha)+\cdots+l_k(A^{k-1}\alpha)=0;\cdots$（1）

用 A^{k-1} 在（1）式两端，得：$_1A^{k-1}\alpha+0+\cdots+0=0$，而 $A^{k-1}\alpha\neq 0$

所以，$l_1=0$；

此时，（1）式变为：$l_2(A\alpha)+\cdots+l_k(A^{k-1}\alpha)=0\cdots$（2）再用 A^{k-2}

左乘（2）式两端，得，$l_2(A^{k-1}\alpha)+0+\cdots+0=0$，而 $(A^{k-1}\alpha)\neq 0$

所以，$l_2=0$，相同方法，可得 $l_3=0,\cdots,l_k=0$.

所以，$\alpha, A\alpha,\cdots$，$A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

例 18. 证明：必要性：已知 α_1，α_2，α_3 线性无关.

设存在 k_1，k_2，k_3 使得 $k_1\beta_1$，$k_2\beta_2$，$k_3\beta_3=0$，代入已知条件得

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

整理得：$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$，因为 α_1，α_2，α_3 线性无关.

所以，有 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$，又因为 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$

所以，有唯一解：$k_1=k_2=k_3=0$，即：β_1，β_2，β_3 线性无关.

充分性：已知，β_1，β_2，β_3 线性无关.

设存在 l_1，l_2，l_3 使得：$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$ ⋯ （1）

其中：$\alpha_1=\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$，$\alpha_2=\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$，$\alpha_3=\dfrac{1}{2}(-\beta_1-\beta_2+\beta_3)$

代入（1）式，得：$l_1(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$，$l_2(\beta_1+\beta_2-\beta_3)+l_3(-\beta_1+\beta_2+\beta_3)=0$

整理得：$(l_1+l_2-l_3)\beta_1+(-l_1+l_2+l_3)\beta_2+(l_1-l_2+l_3)\beta_3=0$

$\because \beta_1$，β_2，β_3 线性无关

$\therefore$ 必有：$\begin{cases}l_1+l_2-l_3=0\\-l_1+l_2+l_3=0\\l_1-l_2+l_3=0\end{cases}$ $\quad |A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4\neq 0.$

方程组有唯一解$\begin{cases} l_1=0 \\ l_2=0 \\ l_3=0 \end{cases}$，所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

例 19. 证明：设存在k_1,k_2,k_3使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，代入已知条件，得：

$k_1(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$

整理得：$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+(2k_1+k_3)\alpha_3=0.$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，线性无关：

$\therefore \begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1-k_2=0 \\ 2k_1+k_3=0 \end{cases} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$

从而，方程组有非零解，可解得一个非零解：$k_1=1,k_2=1,k_3=-2$

即：$\beta_1+\beta_2-2\beta_3=0$，所以，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关.

例 20. 证明：“$\Rightarrow$”已知：（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$线性无关，用辅助向量组，

（Ⅱ）$e_1=(1,0,\cdots,\ 0)^T,e_2=(0,1,\cdots,\ 0)^T$，$\cdots$，$e_n=(0,0,\cdots,\ 1)^T$

向量组（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表示，且r(Ⅰ)=r(Ⅱ)=n,∴（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

因为-n维向量可由（Ⅰ）线性表示，当然也可由（Ⅱ）线性表示.“$\Leftarrow$“已知，任-n维向量可由（Ⅰ）线性表示，也意为着（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表示，而实际上，（Ⅰ）也可由（Ⅱ）线性表示。

所以（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，从而r(Ⅰ)=r(Ⅱ)=n,即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$线性无关.

例 21. 证明：$\because AB\ n$阶方阵，且$AB>E,\therefore r(AB)=n.$

又$\because r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\} \qquad \therefore r(B)\ge n$

又$\because r<m, \qquad \therefore r(B)\le n.$

从而，$r(B)=n.$而B中正好有n个列向量.
所以，B的列向量组线性无关.

例 22．解：

$$A=(d_1,d_{2,},d_3,d_4)=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+(-1)r_1\\r_3+(-1)r_1}}\begin{pmatrix}2&3&4&5\\1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-3)r_2]{r+(-2)r_2}\begin{pmatrix}2&3&4&5\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$$

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=2,\{\beta_1,\beta_2\}$ 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的一个极大线性无关组.

且：$\beta_3=(-1)\beta_2+2\beta_2,\beta_4=(-2)\beta_1+3\beta_2$.

对应的是：$r(d_1,d_2,d_3,d_4)=2,\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 是 d_1,d_2,d_3,d_4 的一个极大线性无关组.

且：$\alpha_3=(-1)d_1+2d_2;d_4=(-2)d_1+3d_2$.

例 23．解：

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3+(-2)r_1}}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-1)r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&8&-6&-2&2\\0&4&-3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+(1-\frac{1}{2})r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&8&-6&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+\frac{5}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&0&0&4&-8\\0&8&-6&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&8&-6&-2&2\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$r(A)=3$.

取 A 中的 1,2 ,4 到及 2，3，4 行.

$$\begin{bmatrix}3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{bmatrix}=-32\neq 0$$ 交叉无构成了阶子式.

例 24. 证明：等式组可写为：$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\ 1&0&1&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$意为着每一个$\beta_1$

都能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

$|p|=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0(n>1),\therefore P$可逆.

上式两端左乘P^{-1}得：$P^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$说明：每一个$\alpha_1$都能由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性表示.

综上：得：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是等价.

例 25. 证明：[利用性质：若（I）可由（II）线性表示，则$r(I)\leq r(II)$].

已知：n维单位坐标向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$是线性无关的

即$r(e_1,e_2,\cdots,e_n)=n.$

由已知，$e_1,e_2,\cdots,e_n$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

所以，$r(e_1,e_2,\cdots,e_n)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

从而有，$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$，即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关的.

例 26. 证明：[利用：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

$=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$]

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$，取两个向量的前两个分量：$\begin{bmatrix}1&3\\ -1&1\end{bmatrix}=4\neq 0$ $r(\alpha_1,\alpha_2)=2;$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&-1\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\2&1&3\\1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-1)r_1]{r_3+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&1&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-2)r_2]{r_3+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2.$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+1\bullet r]{\substack{r_2+1\bullet r_1\\ r_3+(-1)r_1}}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-\frac{3}{2})r_2]{r_4+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$,从而，得 α_1,α_2 与 β_1,β_2,β_3 等价.

例 27. 证明：$\because m<n,\therefore r(A)=r(A^T)\le m.$

A^TA是$n\times n$矩阵. $\because r(A^TA)\le\min\{r(A),r(A^T)\}\le m<n\quad\therefore |A^TA|=0.$

例 28. 解：（1）设过滤矩阵为 P，使得：$\beta_1,\beta_2,\beta_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$

解出：$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$

$$(2)\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$\therefore\alpha$于基β_1,β_2,β_3的坐标：$P^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-2\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$

坐标为：$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 2 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

第 4 讲　线物方程组

例 1　证明：设向量组 ξ_1，ξ_2∵，ξ_s是方程组 AX=Dim 基础解系，向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s是与 ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_s等价的线性无关的向量组，那么：

$$(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_s)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_s,)\ P \cdots\cdots(1)$$

即 ξ_1，ξ_2，$\cdots$，ξ_s可以由 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s来线性数字。P 为 S 阶矩阵。

若设 X 是方程 AX=Dim 任意一个解，则必有：

$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_2\xi_s=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\ \xi_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_s \end{pmatrix}$，将（1）式代入，得:

$X=(d_1,d_2,\ \cdots,\ \alpha_s)\ P\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}$，说明 x 也可以由 d_1,d_2，$\cdots$，α_s线性表示。

由基础解系的意义，可知向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s也是一个基础解系。

例 2　证明：必要性：已知 A 是 mxn 矩阵，且存在 $B_{RXS}\neq 0$，使得 AB=0，那么，将 A 写成列向量组的形式，A=（α_1，α_2，$\cdots$；α_s）;又因 $B_{RXS}\neq 0$,即 $B_{RXS}\neq 0$，即 B 中至少有一个非零列，不妨设为第 j 列,记作 $\beta_j=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$,$b_1j,b_ij,\cdots b_ij$ 不含为 0,再由

AB=0,得 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{2j} \end{pmatrix}=0 \quad b_{1j}\quad \alpha_1+b_{2j}d_2+\cdots+b_{nj}\alpha_n=0,$

因为$b_{1j},\cdots,b_{nj}$不全为 0,可以，α_1，α_2，$\cdots$；α_n线性相关;因此,$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<n$.

即　$r(A)=r(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots;\ \alpha_n)<n$.

充分性：对于方程组 $A_{mxn}x=0$,因为：$r(A)<n$.所有方程组有非重解：

不妨设非零解为：$\xi=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix},c_1,c_2,\cdots,c_s$ 不全为 0，因为可以构造矩阵 B= $\begin{pmatrix}0 & c_1\cdots 0\\0 & c_2\cdots 0\\\vdots & \vdots & \vdots\\0 & c_n\cdots 0\end{pmatrix}$，

则 B≠0，且有 AB=0，证举。

例 3 解：（1）已知 AX=b 有 3 个线性无关的解，不妨设为 η_1，η_2，η_3,则由方程组解的性质，可知，$\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$,是 AX=0 的线性无关的两个解向量（由 η_1,η_2,η_3 不可能得到 AX=0 的 3 个线性无关的解向量）。因此，AX=0 的基础解系 所含向量个等为：z =n-r(A)=4-r(A),解得：r(A)=2;

(2)由（1）可知，矩阵 A 所有 3 阶子式都为 0，那么：$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\4 & 3 & 5\\\alpha & 1 & 3\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow \alpha=2;\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\3 & 5 & 1\\1 & 3 & b\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow b=-3.$

例 4 解：

$$\because A\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2)=\frac{1}{2}(b+b)=b,\therefore\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\text{是}AX=b\text{的一个特解；}$$

$\because\left(\xi_1,\xi_2-\xi 1\right)$ 是与{ξ_1，ξ_2}等价的线性无关的向量组。

∴ ξ_1，$\xi_2-\xi_1$ 也是 AX=0 的一个基础解系。

从而：AX=B 的通解为：$k_1+k_2(\xi_2-\xi_1)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$。故选（B）.

例 5 解题思路：找一个与{α_1，α_2，α_j，α_4}等价的线性无关的向量组，选（B）.

例 6 解：由克莱姆法则可知，当 |A|≠0 时，方程组有唯一解即：

$$\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\1 & 1+\lambda & 1\\1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{另加}}}\begin{vmatrix}\lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3\\1 & 1+\lambda & 1\\1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1+\lambda & 1\\1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)\neq 0$$

① 当 λ≠0 且 λ≠-3 时，有唯一解：

$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{1}{\lambda};x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{2}{\lambda};x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}.$

② 当 λ≠0 时，增广矩阵

$$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\0 & 0 & 0 & \vdots & 3\\0 & 0 & 0 & \vdots & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}r(A)=1,r(A\,|\,b)=2\\r(A)\neq r(Ab)\neq 0\end{matrix}$$

∴ AX=b 无解。

③ 当λ=-3 时，增广矩阵

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2\times r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&\vdots&-1\\0&1&-1&\vdots&-2\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},r(A\,|\,b)=r(A)=2<3$$

方程组有无幂方解：

等价的对应齐次线性方程组为：$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$，其中，$x3$ 是身为未知量；推项得：

$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3,\end{cases}$ 令 $x3$=1，得 AX=0 的基础解系为：ξ=$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

等价的非解次方程视为：$\begin{cases}x_1-x_3=-1\\x_2-x_3=-2\end{cases}$,将项,得$\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=-2+x_3\end{cases}$, 令 x_3=0，解得：

AX=b 的一个特解，$i=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

∴　X=b 的通解为：　　kξ+η= $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.　k 为任意实数.

例 7　解: ∵α_1, α_2, α_3, α_4线性相关，而α_2, α_3, α_4线性无关；

∴r(A)=r(α_1, α_2, α_3, α_4)=3<4,也就得到： AX=0 的基础解系所含向量个数是：n-4(A)=4-3=1

由$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ ⇒ $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$,也可写成：$\alpha_1$-$2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$.

因此，解 x_1=1, x_2=-2, x_3=1, x_4=0,可使得：

AX=(α_1, α_2, α_3, α_4) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_3\end{pmatrix}$=($\alpha_1$, α_2, α_3, α_4) $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$=($\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$,0$\alpha_4$)=0

即： $\xi=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是 AX=0 的一个解，可作为基础解等。

∵ b=α_1，α_2，α_3，α_4

∴ 可取 $x_1=1,x_2>1,x_3=1,x_3=1$,使得 AX=(α_1，α_2，α_3，α_4) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$=($\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$)

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=b$

因此： $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$是 AX=b 的一个特解。

从而，得 AX=b 的通解：$k\xi+\eta=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 为任意实数。

例 8 解：∵r(A)=n-1, ∴ AX=0 的基础解系应含 n-r(A)=1 个解向量。

由已知矩阵 A 的每行元素之和均为 0，可得：$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,

因此，$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$是 AX=0 的一个非零解。

AX=0 基通解为 $k\xi = k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, k 为任意实数。

例 9　解：方法 1　将方程组（II）的通解代入方程组（I），得：$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\ k_1+2k_2+k_2=0\end{cases}$

解得　$k_1=-k_2$，从而：$-k_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$是方程组（I）与(II)的公共解，令 $k_2\neq 0$，

则得到方程组（I）与(II)的非零公共解为：$k(-1,1,1,1)^T, k\neq 0$.

解 2：先求出方程组（I）的通解为：$k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

再令方程组（I）与（II）的通解相等。

$$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix}\Rightarrow k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}-k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-k_4\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix}=0$$

可看作是：关于 k_1,k_2,k_3,k_4 的齐次线性方程组。

解得通解：$k(-1,1,1,1)^T,(k\neq 0)$　即为方程组（I）与（II）的非零公共解。

例 10　证明：（反证法）

假设 $\eta^*, \xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_{n-2}$ 线性相关，那么，因为 $\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关，所以，η^* 能由 $\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示，即存在 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots \alpha_{n-r}$ 使得：$\eta^*, k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+R_{n-r}\xi_{n-r}$.

且 $A\eta^*=A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+R_{n-r}\xi_{n-r})=k_1(A\xi_1)+k_2(A\xi_2)+\cdots+k_{n-r}(A\xi_{n-r})=0$，即 η^* 是 AX=0 的解，这与已知中的 η^* 是 AX=b 的解产生了矛盾。

也就是，假设错误，原命题正确 即：$\eta^*, \xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_{n-r}$ 是线性无关的。

例 11　证明：由已知：任意一个 n 维列向量都是 AX=0 的解，可知 $e1=(1,0,\cdots,0)^T, e_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots e_n=(0,0,\cdots,1)$ 是 AX=0 的解。代入方程后，可得 $\alpha_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,3\cdots, n$.即：A=0.

例 12　证明：必要性：已知 n 元非齐次线性方程组 AX=b 对任何 b 都有解。

不妨取 $b=e_1=(1,0,0,\cdots,0)^T, e_2=(0,1,0,\cdots,0)^T;\cdots, e_n=(0,0,0,\cdots,1)^T$.

对应的解设为：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$　即：$A\xi_1=e_1; A\xi_2=e_2,\cdots, A\xi_n=e_n$.

换个形式，A(ξ $_1$，ξ $_2$,…；ξ $_n$)=(A ξ $_1$, A ξ $_2$,…；A ξ $_n$)=(e_1,e_2,…；e_n)
等号两边取行列式得：
丨A(ξ $_1$，ξ $_2$,…；ξ $_n$)丨=| e_1,e_2,…；e_n |=1

即：丨A丨·丨ξ $_1$，ξ $_2$,…；ξ $_n$丨=1 $\Rightarrow |A|\neq 0.$

充分性：已知：|A|≠0，则 r(A)=r(A|b)=n.方程组 Ax=b 有解。
例 13 证明：由已知：A=(aij)mxn 的 m 个行向量是 ix=0 的一个基础解系。
可得：A 的行向量组是线性无关的。
所以 A 的行秩是 m，且 r(A)=m
同时，$CA^T=0$；对于（BA）来说，$C(BA)^T=C(A^TB^T)=(CA^T)B^T=0$,说明：BA 的行向量也是 CX=0 的解。
且根据 性质：矩阵 A 乘以可逆矩阵 B，其秩不变，从而，r(BA)=m.
即(BA)的行向量组是线性无关的，
所以：（BA）的行向量组也是 CX=0 的一个基础解系。
例 14 解：∵丨A丨=0，且 $A_{11}\neq0$, ∴r(A)=n-1，且 AX=0 的基础解系含有 n-r(A)=1 非零个解向量。令到向量 ξ =(A_{11}, A_{12},…，A_{1n},)^T,则有：

$$A\xi=\begin{pmatrix} a_n & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\therefore\xi=\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}$$ 是 AX=0 的一个非重解（$A_{11}\neq0$）

可以作为 AX=0 的基础解系。通解为：$k\begin{pmatrix}A_{11}\\A_{12}\\\vdots\\A_{1n}\end{pmatrix}.$

例 15 解：设存在 x_1,x_2,x_3,使得 $x_1d_1+x_2d_2+x_2$ α $_3$= β，代入向量得：

$$\begin{cases}\alpha x_1-2x_2-x_3=1\\ 2x_1+x_2+x_3=b\\ 10x_1+5x_2+4x_3=-1\end{cases}\qquad (\mathrm{I})$$

问题（1）⇔ 方程组无解释问题（2）⇔ 方程组有唯一解；
问题（3）⇔ 方程组有无穷多解，并求通解。
无解问题（2）：

当|A|≠0 方程组有唯一解，即：$\begin{vmatrix}a & -2 & -1\\2 & 1 & 1\\10 & 5 & 4\end{vmatrix}\neq0$ ⇒ a≠-4;b 取任意值。

再看其它两个问题：a=-4 时，对方程组（I）的增广矩阵作初等行变换：

$$(A|b)=\begin{pmatrix}-4&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_1}\begin{pmatrix}-4&-2&-1&1\\2&1&1&b\\2&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0&0&1&1+2b\\2&1&1&b\\0&0&1&1-b\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1+2b\\2&1&1&b\\0&0&0&-3b\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&1&1+2b\\0&0&0&-3b\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{b}{2}\\0&0&1&1+2b\\0&0&0&-3b\end{pmatrix}$$

当 b=0 时。R(A)=r(A|b)=2。方程组（I）有无穷多解。即问题（3）成立

当 b=0 代入上矩阵，得：

$$(A|b)\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\vdots&0\\0&0&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-\frac{1}{2})r_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\vdots&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$与方程组（I）对齐次

方程组等价的方程组：$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_2=0\\x_3=0\end{cases}$ 其中 x_2 是自由未知量，解项得：

$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2\\x_3=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，得基础解系：$\xi=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$

对应的非齐次线性方程组：$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}\\x_3=1\end{cases}$ 令 $x_2=0$，得 AX=bim 特解 $\eta=(-\frac{1}{2},0;0)^T$

通解为

$$k\xi+\eta=k\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\\k\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta=(-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2})\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3$$

问题（1）：当 a=-4，b≠0 时，r(A)=2; r(A|b)=3，r(A) ≠r(A|b)

∴方程组（I）无解；即β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表示。

第 5 讲　矩阵的特征值与特征向量

例 1.证明：已知 $A\xi=\lambda\xi$.

（1）（kA）$\xi=k$（$A\xi$）$=k$（$\lambda\xi$）=（$k\lambda$）ξ.

(2)$(a_1A+a_0E)\ \xi=a_1A\xi+a_0E\xi=a_1\lambda\xi+a_0\lambda\xi=(a_1\lambda+a_0\lambda)\xi$.

(3)$A^2\xi=A(A\xi)=A\cdot\lambda\xi=\lambda(A\xi)=\lambda^2\xi$.

（4）同（3）。

（5）A 可逆，则 $A\xi=\lambda\xi$ 两端左乘 A^{-1}，得 $\xi=\lambda A^{-1}\xi$，即 $A^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$。

（6）$A^*\xi=$（$|A|\cdot A^{-1}$）$\xi=|A|$（$A^{-1}\xi$）$=\frac{|A|}{\lambda}\xi$.

（7）φ（A）$\xi=$（$a_1E+a_1A+\cdots+a_mE^m$）$\xi=a_0E\xi+a_1A\xi+\cdots+a_mE^m\xi=$（$a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$）$\xi$.

例 2.证明：∵$\lambda_1\neq\lambda_2$，∴ ξ_1 与 ξ_2 线性无关，从而，ξ_1 与 ξ_2 不能互相线性表示.

A（$\xi_1+\xi_2$）$=A\xi_1+A\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2\neq\lambda$（$\xi_1+\xi_2$）.

其中 $\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$ 不能提出公因系数 λ.所以，$\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

例 3.解：(1）是；每一行（列）向量都是标准向量，且两两之间相互正交.

（2）不是；能找到不是标准向量的行（列）向量.

例 4.解：$\underline{a=1}$；$\underline{b=-\frac{13}{5}}$.　　$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=3\Rightarrow a=1$；$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_1\cdots\lambda_\lambda=-24\Rightarrow b=-\frac{13}{5}$.

例 5.解$\underline{\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1}$.　A^*的特征值为：$\frac{|A|}{\lambda}$. E 的特征值为 1.

例 6. $\underline{\ 25\ }$.　若 λ 是 A 的特征值. 则 $A^*+3A+2E$ 的特征值为：$\left(\frac{|A|}{\lambda}+3\lambda+2\right)$代入特征值：

得 $A^*+3A+2E$ 的特征值是：-1，5，-5；所$|A^*+3A+2E|=25$

例 7. 解：（1）A 的特征方程为：$\left|\lambda E\text{-}A\right|=0$.即：$\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=0$

计算行列式时，可先累加：

$$\begin{vmatrix}\lambda-2n+1 & \lambda-2n+1 & \cdots & \lambda-2n+1\\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}=\left(\lambda-2n+1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & \lambda-n & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{r_1+1\times r_1}\left(\lambda-2n+1\right)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & \lambda-n+1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n+1\end{vmatrix}=\left(\lambda-2n+1\right)\left(\lambda-n+1\right)^{n-1}=0$$，解得特征值：

$\lambda_1=2n-1$；$\lambda_2=n-1$，（是 n-1 重特征值）.

求特征向量：

对应 $\lambda_1=2n-1$，根据矩阵 A 的每行元素之和均为 $2n-1$，可以凑出特征向量 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$.

$$A\xi=\begin{pmatrix}2n-1\\2n-1\\ \vdots\\2n-1\end{pmatrix}=\left(2n-1\right)\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\left(2n-1\right)\xi$$. 所以特征向量为：$k\xi=k\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix};k\neq0$.

对应 $\lambda_2=n-1$，解齐次线性方和组：$\left[\left(n-1\right)E-A\right]x=0$.

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$等价的方程组是：{$\boldsymbol{x_1}$+ $\boldsymbol{x_2}$+⋯+

$\boldsymbol{x_n}$**=0**

取 x_2， x_3，…，x_n 作为自由未知量，移项得：x_1=- x_2- x_3+…+ x_n.

令 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ 所有特征向量为：

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k_1,k_2,\cdots k_{n-1}$ 不同时为 0.

（2）$\because |A|=(2n-1)(n-1)^{n-1}\neq 0, \therefore A$ 可逆.

由相似对角阵的知识，可以取 $P=(\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})$ 作为相似变换矩阵. 即

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2n-1 & & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{pmatrix}.$$

从上式可解出：

$$A^{-1}=P\Lambda^{-1}p^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} & & & \\ & \frac{1}{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(n-1)}\begin{pmatrix} n^2-1 & -n & -n & \cdots & -n \\ -n^2+n-1 & 3n-2 & n-1 & \cdots & n-1 \\ -n^2+n-1 & n-1 & 3n-2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n^2+n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 3n-2 \end{pmatrix}$$

例 8.解：由特征方程$\left|\lambda E-A\right|=0$解出特征值：由已知得：

$A^2-3A+2E=\left(A-E\right)\left(A-2E\right)=0$　　取行列式有：$\left|A-E\right|=0$，$\left|A-2E\right|=0$.

也可写成：$\left|-\left(E-A\right)\right|=\left(-1\right)^n\left|E-A\right|=0$；$\left|-\left(2E-A\right)\right|=\left(-1\right)^n\left|2E-A\right|=0$

即：$\left|E-A\right|=0$，$\left|2E-A\right|=0$

所以 A 的特征值是：1，2.

例 9.解：（1）证明：A 的各行元素之和为 a，用矩阵表示为：$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，因此，$a$

是 A 的特征值，且$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$是 A 对应$\lambda=a$的特征向量.

（2）$2a^{-1}-3A$ 的各行元素之和，可写为：$\left(2a^{-1}-3A\right)\xi=2a^{-1}\xi-3A\xi=\dfrac{2}{a}\xi-3a\xi=\left(\dfrac{2}{a}-3a\right)\xi$.

所以，$2a^{-1}-3A$ 的各行元素之和为：$\left(\dfrac{2}{a}-3a\right)$.

例 10.解：由已知，可行，ξ_1,ξ_2,ξ_3是线性无关的，也有$r\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=3$.

由特征值与特征向量的定义，得：$A\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\left(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\lambda_3\xi_3\right)$

从中解出：$A=\left(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\lambda_3\xi_3\right)\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}.$$

例 11. 解:（1）由已知 A 是实对称阵,所以可设$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a_2&d\\c&d&a_3\end{pmatrix}$,代入$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

可解出 $a_1=a_3=0;\quad b=d=0;\quad c=1$ 即 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&a_2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

又 $\because r(A)=2$，$\therefore |A|=0\Rightarrow a_2=0$；

所以 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

（2）$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$ 中，令 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则有：$A\xi_1=(-1)\xi_1$；$A\xi_2=\xi_2$.

$\therefore A$ 的特征值有 $\lambda_1=-1$；$\lambda_2=1$；对应的特征向量为：ξ_1,ξ_2.

又 $\because |A|=0$ 且 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，$\therefore \lambda_3=0$ 是 A 的第 3 个特征值.

$A\xi_3=0\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，可取 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 就能满足 $A\xi_3=0$ 且 $\xi_3\neq 0$

综上：$\lambda_1=-1$，特征向量：$k_1\xi_1=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1\neq 0$，

$\lambda_2=1$，特征向量：$k_2\xi_2=k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_2\neq 0$，

$\lambda_3=0$，特征向量：$k_3\xi_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_3\neq 0$.

例 12. 解：（1）由：$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$ 的特点，进行线性组合可得到：

① $A(2\alpha_1-\alpha_3)=2A\alpha_1-A\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_3$

$\therefore$特征值$\lambda_1=1$，对应的特征向量为$\xi_1=2\alpha_1-\alpha_3$；

② $A(\alpha_1-\alpha_2)=A\alpha_1-A\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$

$\therefore$特征值$\lambda_2=1$，对应的特征向量为$\xi_2=\alpha_1-\alpha_2$；

③ $A(\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_2-A\alpha_3=4(\alpha_2+\alpha_3)$

$\therefore$特征值$\lambda_3=4$，对应的特征向量为$\xi_3=\alpha_2-\alpha_3$.

（2）由已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，可证明：$\xi_1,\xi_2,\xi_3$也是线性无关的.

则由相似对角阵的知识可令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，且

$$p^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

例 13. 解：（1）设λ_1是对应$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$的特征值.由定义，得$A\xi=\lambda_1\xi$.即

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_1=-1;a=-3;b=0$$

从而$\lambda=-1$是一个高重特征值：

而$r(-E-A)=2$，说明：对应$\lambda=-1$的特征向量的基础解系含有 3-2=1 个线性无关的特征向量.所以，矩阵A不可以对角线.

例 14. 解：（1）$\because$相似矩阵有相同的对角元之和，以及相等的行列式.

$$\therefore\begin{cases}2+x=1+y & (\text{对角元之和})\\ |A|=|\Lambda|\Rightarrow-15x-40=-20y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}.$$

（2）$\because$相似矩阵有相同的特征值，且对角阵Λ的特征值为：5，-4，5；

$\therefore A$的特征值也是$\lambda_1=5;\ \lambda_2=-4;\ \lambda_3=5;$

对应 $\lambda_1=\lambda_3=5$ 的线性无关的特征向量为：$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

用施密特正交化方法，得标准正交向量组：$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{-4}{3\sqrt{5}}\\\frac{-2}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

对应 $\lambda_3=-4$，的线性无关的特征向量是：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，将 ξ_3 标准化，得：$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，可使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&5\end{pmatrix}$.

例 15. 解：（1）A 的各行元素之和均为 3，即：

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.　　得 $\lambda_3=3,\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

已知：ξ_1,ξ_2 是 AX=0 的两个解，即：$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. 且 ξ_1 与 ξ_2 线性无关.

（2）将 ξ_1,ξ_2 用施密特正交化方法标准正交化，得标准正交向量组：$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

$\eta_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$；同理，将 ξ_3 标准化. $\eta_3=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 且 η_1,η_2,η_3 相互正交.

构选正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，使得：$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

例 16. 证明：（分析：$\lambda=-1$ 是 A 的特征值需要：$|(-1)E-A|=0\Leftrightarrow(-1)^n|E+A|=0$）

$\because A$ 为正交矩阵； $\therefore A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}+E$

而：$|E+A|=|AA^T+A|=|A(A^T+E^T)|=|A||A+E|^T=-|A+E|$

$\therefore |E+A|=0$ 也就是：$|(-1)E-A|=0$.

所以，$\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

例 17. 证明：（分析：利用 $|\lambda E-A|=0$ 找特征值）.

$$|E-A^2|=|(E-A)(E+A)|=|E-A||E+A|=0$$

$$\Rightarrow|E-A|=0\text{或}|E+A|=0\Rightarrow|1\cdot E-A|=0\text{或}|(-1)E-A|=0$$

$\therefore \lambda=1$ 或 $\lambda=-1$ 至少有一个是 A 的特征值.

例 18. （1）证明：首先：$\because|0E-A|=0$, $\therefore\lambda=0$ 是 A 的一个特征值：

其次，观察方程组 $|0\cdot E-A|x=0$ 的基础解系，对系数矩阵做初等变换.

$$(0\cdot E-A)=\begin{pmatrix}-a_1^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-a_2a_1&-a_2^2&\cdots&-a2a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&-a_n^2\end{pmatrix}\xrightarrow[a_1\neq0]{r_1x\left(-\frac{1}{a_1}\right)}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\-a_2a_1&-a_1^2&\cdots&-a_2a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&-a_n^2\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{r_i+a_ixr}$$

$\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，得 $r(0\cdot E-A)=1$，从而基础解系所含向量个数为（n-1）个也就说明：

$\lambda=0$ 为（n-1）重特征值.

（2）

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{加边法}}}\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\text{第 0 行}\\ \\ \overline{\overline{\ r_i+a_ir_0\ }}\\ i=1,2,\cdots,n\\ \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}\overline{\overline{\underset{c_0+\left(\frac{a_i}{\lambda}\right)r_j}{j=1,3,\cdots,n}}}\begin{vmatrix}1-\frac{a_1^2}{\lambda}-\frac{a_1^2}{\lambda} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

第 0 行

$$=\lambda^n\left(1-\frac{a_1^2}{\lambda}-\frac{a_2^2}{\lambda}-\cdots-\frac{a_n^2}{\lambda}\right)=\lambda^{n-1}\left(\lambda-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2\right)$$

非重特征值为：$\lambda=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$

再看：$A\alpha=\left(\alpha\cdot\alpha^{\mathrm{T}}\right)\alpha=\alpha\left(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\right)=\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\alpha$，因此，向量 α 是 A 的对应特征值：

$\lambda=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 的特征向量.

对应 $\lambda=0$ 的特征向量，解齐次线性方程组 $(0\cdot E-A)x=0$，如（1）中，对系数矩阵 $(0\cdot E-A)$ 进行初等行变换的结果，可得等价方程组：

$x_1=-\dfrac{1}{a_1}\left(a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n\right)$，其中：$x_2,x_3,\cdots,x_n$ 是自由未知量.

令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，得：基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{a_2}{a_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{a_3}{a_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}-\frac{a_n}{a_1}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，

综上可得 A 的 n 个线性无关的特征向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{a_2}{a_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{a_3}{a_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}-\dfrac{a_{n-1}}{a_1}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},\xi_n=\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

例 19. 证明：$\because$ 相互正交的向量是线性无关的.
$\therefore$ 3 阶方阵 A 有 3 个线性无关的特征向量. 从而，也得到 A 一定能相似于一个对角阵 Λ.

对 3 个互相正交的特征向量 β_1,β_2,β_3，进行标准化，得到：

$\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1;\ \eta_2=\dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2;\ \eta_3=\dfrac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3$；那么，令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 Q 也是正交矩阵.即

$Q^{\mathrm T}Q=QQ^{\mathrm T}=E;\ Q^{1}=Q^{\mathrm T}$. 且 Q 可使得：$Q^{\mathrm T}AQ=\Lambda$.

也可推出：$A=Q\Lambda Q^{-1}$.

再看：$A^{\mathrm T}=\left(Q\Lambda Q^{-1}\right)^{\mathrm T}=\left(Q^{-1}\right)^{\mathrm T}\Lambda^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}\dfrac{\text{代入}Q^{-1}=Q^{\mathrm T}}{\text{或}Q^{\mathrm T}=Q^{-1}}\left(Q^{\mathrm T}\right)^{\mathrm T}\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^{-1}=A$

得出：$A^{\mathrm T}=A$. 所以，A 是对称矩阵.
例 20. （1）（思路：证明（BA）与（AB）有相同的特征多项式即可）.

$|\lambda E-AB|=\left|\lambda\left(AA^{-1}\right)-AB\right|=\left|A\left(\lambda A^{-1}-B\right)\right|=|A|\cdot\left|\lambda A^{-1}-B\right|$.

$|\lambda E-BA|=\left|\lambda\left(A^{-1}A\right)-BA\right|=\left|\left(\lambda A^{-1}-B\right)A\right|=\left|\lambda A^{-1}-B\right|\cdot|A|$.

$\therefore |\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$. 特征多项式相同.

因此，矩阵 AB 与 BA 有相同的特征值.
（2）tr（AB）等于 AB 的所有特征值之和；
tr（BA）等于 BA 的所有特征值之和.
由（1）的特征，自然得到：tr（AB）=tr（BA）.

第 6 讲　二次型

例题解答：

例 1：解：二次型 f 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}$，令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

则二次型 f 的矩阵形式是：$f=X^{\mathrm{T}}AX$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&4&2\\0&2&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&4&2\\0&0&-9\end{pmatrix}$$，故 r（A）=3

二次型 f 的秩也等于 3.

例 2. 解：①先求二次型 f 的系数矩阵 A 的特征值和特征向量，并将特征向量标准正交化；

$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}$，特征方程为：$|\lambda E-A|=0$，即 $\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda&1\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

解得特征值：$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1$.

对应 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(1\cdot E-A)X=0$，对系数矩阵作初等行变换；

$$(1\cdot E-A)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+1\cdot r_2]{r_3\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$等价的方程组是 $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2=0\end{cases}$　x_3 是自由未知量.

令 x_3=1，得特征向量的基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.标准化：$\eta_1=\dfrac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1$　$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$；

对应 $\lambda_2=2$，解齐次线性方程组：$(2E-A)X=0$，对系数矩阵作初等行变换.

$$\left(2E-A\right)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+1\cdot r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)r_2]{r_1+1\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

等价的方程组：$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，$x_3$是自由未知量. 令$x_3$=1，得基础解系：

$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. 标准化：令$\eta_2=\dfrac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2$ $\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$.

对应$\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组：$\left(-E-A\right)X=0$，对系数矩阵作初等行变换.

$$\left(-E-A\right)=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\-1&-1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

$\xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{r_1+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$等价的方程组为：$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$，其中$x_3$是自由未知量.

令x_3=1，得基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. 标准化：令$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$.

由于对实对称矩阵来说，属于不同特征值的特征向量之间是相互正交的. 所以，对ξ_1,ξ_2,ξ_3不需要正交化变形.

（2）写出正交矩阵Q，及二次型f的标准型.

令$Q=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{-1}{\sqrt3}&\dfrac{-1}{\sqrt6}\\0&\dfrac{-1}{\sqrt3}&\dfrac{2}{\sqrt6}\\\dfrac{1}{\sqrt2}&\dfrac{1}{\sqrt3}&\dfrac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ 标准型$f=y_1^2+2y_2^2-y_3^2$

正交变换为：$X=QY$，$Y=\left(y_1,y_2,y_3\right)^{\mathrm T}$.

例3. 解：（配方法）将f恒等变形：

$f=x_1^2+2x_1x_3+x_3^2+2x_2x_3+x_2^2-x_2^2=\left(x_1+x_3\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2-x_2^2$

令：$y_1=x_1+x_3, y_2=x_2+x_3$，$y_3=x_2$，则 f 的标准型为：$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

例 4.证明：[利用：正定二次型的充要条件是：系数矩阵 A 的所有特征值都大于 0]

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则因为 A 是正定矩阵，所以，$\lambda_n>0$，i=1，2，…，n.

再由特征值的性质，可知：A^{-1} 特征值为：$\frac{1}{\lambda_i}\left(i=1,3,\cdots,n\right)$，那么 $\frac{1}{\lambda_i}>0$，$i=1,3,\cdots,n$ 也成立.

A^*特征值 为：$\frac{|A|}{\lambda_i}>0$，$i=1,2,\cdots,n$；所以，A^{-1}，A^*都是正定矩阵.

例 5. 解：[例利：正定二次型 $\Leftrightarrow$ 所有顺序主子式都大于 0]

二次型 f 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$，其中：

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2>0\Rightarrow -1<a<1\\ \Delta_3=|A|=-a\left(4+5a\right)>0\Rightarrow -\frac{4}{5}<a<0\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{4}{5}<a<0.$$

例 6. 解：[利用：两矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 对应的二次型有相同的正、负惯性指数（可看，正、负特征值的个数）]

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ 的特征值：$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=3$，而矩阵 B 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=0$，$\Rightarrow A$ 与 B 合同.

故选（B）.

例 8. 解：[利用含义：对任意 $x\neq 0$，均有 $f=x^{\mathrm{T}}ax>0$]

题意中的二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax\geq 0$，$x\in R^3$；若使 f 为正定二次型.则需要 f 仅在 x=0 时，有 f=0.

即：仅在 $x_1=x_2=x_3=0$，使 f=0，

也可说明：仅在 $x_1=x_2=x_3=0$ 有：$\begin{cases}x_1+ax_2-2x_3=0\\2x_2+3x_3=0\\x_1+3x_2+ax_3=0\end{cases}$

方程组有唯一零解：即：$|A|\neq 0\Rightarrow a\neq 1$.

例 9. 解[求系数矩阵 A 的特征值]

$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，解得特征值为：$\lambda_1=-1;\lambda_2=\lambda_3=1$，

所以，负惯性指数 q=1.

例 10. 解：二次型 f 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{pmatrix}$，已知：$d=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的特征向量.

由特征值与特征向量的定义：$A\alpha=\lambda_1\alpha$. 即

$\begin{pmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$计算得：$\lambda_1=9;a=1,b=4$.

特征方程：$|\lambda E-A|=0$，即：$\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)=0$

解得特征值：$\lambda_1=\lambda_2=0$（二重特征值）；$\lambda_3=9$.

对应 $\lambda_1=\lambda_2=0$，解方程组 $(0\cdot E-A)x=0$，得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

标准正交化，得：$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$

对应 $\lambda_3=9$，解方程组 $(9E-A)x=0$，得基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$，

标准化，得：$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 Q 是正交矩阵；$X=QY$，$Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 是正交变换.

二次型的标准型为 $f=0y_1^2+0y_2^2+0y_3^2=9y_3^2$

例 11. 解：（1）由已知，方程组有解但不唯一，说明：$r(A)=r(A|\beta)<3$．也有：

$|A|=0\Rightarrow a=1\text{或}a=-2$.

而当 a=1 时，$r(A)$=1，$r(A|\beta)=2$，即 $r(A)\neq r(A|b)$, $Ax=\beta$无解.

只有在 a=-2 时，$r(A)\neq r(A|\beta)=2<3$，方程组 $Ax=\beta$ 有解且不唯一.

（2）求 A 的特征值，特征向量.

特征方程为：$|\lambda E-A|=0$　　即：$\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+1&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-9)=0$

解得特征值：$\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

对应 $\lambda_1=0$，解齐次线性方程组 $(0\cdot E-A)x=0$．得基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

标准化. 得：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

对应 $\lambda_2=3$，解齐次线性方程组：$(3E-A)x=0$，得基础解系：$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

标准化．得：$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

对应 $\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组：$(-3E-A)x=0$，得基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，

标准化．得：$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

则正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，且 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

例 12. 解：二次型 f 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&a\\-2&a&1\end{pmatrix}$，标准型对应的系数矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

则 A 与 Λ 相似且合同，
从而，A 与 Λ 有相同的行列式，且对角元之和相等.

$1+1+1=3+3+b\Rightarrow b=-3$； $|A|=|\Lambda|=-27\Rightarrow a=10$ 或 $a=-2$.

但当 a=10 时，矩阵 A 的特征值不等于 3 或-3；所以 a=10 舍去.
当 a=-2 时，求 A 的特征向量、特征值：

$$|\lambda E-A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+3)=0$$ 解得特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$.

对应 $\lambda_1=\lambda_2=3$，解齐次线性方程组 $(3E-A)x=0$，得特征向量的基础解系为：

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. 用施密特正交化方法，将其标准正交化得：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

对应 $\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=0$，得特征向量的基础解系为：$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 标准化，得：$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 Q 是一个正交矩阵，变换 $x=QY$. 即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$ 就是所求的正交变换.

例 13. 证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；则 A-E 的特征值为：$\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_n-1$；

$\because A$，A-E 是正定矩阵；$\therefore\ \lambda_i>0$，$\lambda_i-1>0$；i=1，2，…，n. 即：$\lambda_i>1$

而 A^{-1} 特征值是：$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$；且 $0<\frac{1}{\lambda_n}<1$，i=1，2，…，n；

$\therefore E$- A^{-1} 的特征值是：$1-\frac{1}{\lambda_n}>0$，=1，2，…，n.

从而：E- A^{-1} 是正定矩阵.

例 14. 证明：A 与 B 均是 n 阶正定矩阵. $\therefore$ 由定义，对任意 $x\neq 0$，均有 $f_1=x^{\mathrm T}Ax>0$，$f_2=x^{\mathrm T}Bx>0$. 则

$f_3=x^{\mathrm T}(kA+lB)x=kx^{\mathrm T}Ax+lx^{\mathrm T}Bx>0$，（$k$，$l$ 是正数）.

$\therefore kA+lB$ 也是正定矩阵.

例 15. 证明：由已知：对任意 n 维列向量 α，恒有 $x^{\mathrm{T}}A\alpha=0$.

（1）可取 $\alpha=e_i$；i=1，2，…，n. $e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$e_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$

代入二次型：$f_1=\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha_1=$，得 $a_{11}=0,\ a_{22}=0,\cdots,a_{nn}=0$；

（2）将：$\alpha=(e_i+e_j)(i\neq j,\ \ i,j=1,2,\cdots,n)$ 代入 $f=\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha=0$ 可得

$a_{ij}=0,\ \ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$；

得上，得：A=0.

例 16. 解：n 元二次型

$$f=x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2+x+x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n$$

从而，f 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{累加法}}}\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$|A|$的顺序主子式：$\Delta_1=1>0,\ \Delta_2=\frac{3}{4},\cdots,\Delta_n=|A|=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}>0$.

所以，二次型 f 是正定二次型.

目　录

第一讲　概率论的基本概念

一、随机试验、样本空间与随机事件

1. 随机试验：具有以下三个特点的试验称为随机试验，记为E，

(1)试验可在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的结果具有多种可能性，但试验之前可确知试验的所有可能结果；

(3)每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间: 随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为Ω；试验的每一个可能结果，即Ω中的元素，称为样本点，记为ω.

3. 随机事件：试验E的样本空间Ω的子集E称为随机事件，简称事件. 常用A,B,C等大写字母表示；在一次实验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

4. 样本空间Ω包含了所有的样本点，它又是自身的子集，在每次实验中它总是发生的，Ω称为必然事件；空集ϕ不包含任何样本点，它也为样本空间的子集，它在每次实验中都不发生，ϕ称为不可能事件.

二、事件的关系与运算

1. 包含关系与相等：事件A发生必导致B发生，记为$A\subset B$或$B\supset A$；$A=B\Leftrightarrow A\subset B$且$B\subset A$.

2. 和事件：事件A与B至少有一个发生，记为$A\bigcup B$或$A+B$.

类似地，称$\bigcup_{k=1}^{n}A_k$为n个事件：$A_1,A_2,\cdots A_n$的和事件；称$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

3. 积事件：事件A与B同时发生，记为$A\bigcap B$或AB.

类似地，称$\bigcap_{k=1}^{n}A_k$为n个事件：$A_1,A_2,\cdots A_n$的积事件；称$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

4. 差事件：事件A发生而B不发生，记为$A-B$称为A与B的差事件；

5. 互不相容性：若 $AB=\phi$，称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的.

6. 逆事件：若 $A\bigcap B=\phi$ 且 $A\bigcup B=\Omega$，称 A 与 B 互为逆事件，或对立事件；将 A 的对立事件记为：$\overline{A}$. 易知：$\overline{A}=\Omega-A$，$A-B=A\overline{B}$.

注： A 和 B 互斥指的是 A,B 不能同时发生，即 $AB=\phi$. A 和 B 互逆指的是 A,B 不能同时发生，但 A,B 中必有一个事件发生，即 $A\bigcap B=\phi$ 且 $A\bigcup B=\Omega$. 因此

A 和 B 互逆 $\Rightarrow$ A 和 B 互斥；反之不成立.

A 和 B 互逆 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 互逆；

A 和 B 互斥 $\not\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 互斥；

7. 事件的运算法则：

(1) 交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$(A\bigcup B)C=AC\bigcup BC$，$(AB)\bigcup C=(A\bigcup C)(B\bigcup C)$；

(4) 对偶(De Morgan)律: $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$，可推广 $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A_k}$.

8. 常用的事件运算的结论：

(1) $AB\subset A\subset(A\bigcup B)$，$A\bigcap A=A$，$A\bigcup A=A$；

(2) $A-B=A\overline{B}=A-AB$；

(3) $A=(A-B)+AB=AB+A\overline{B}$；

(4) $A\bigcup B=A+\overline{A}B=B+\overline{B}A=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$；

(5) $A\bigcup B\bigcup C=A+\overline{A}B+\overline{A\bigcup B}C$.

三、频率与概率

1. 频率：事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次，则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

2. 统计概率：当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}\to P(A)$. 即：当 n 很大时，$P(A)=P\approx f_n(A)$ 称为事件 A 的统计概率.

3. 概率的公理化定义

设实验E的样本空间为Ω，对E的任意一个事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，如果函数$P(\bullet)$满足下列条件：

(1)非负性：对于任意事件A，有$P(A)\geq 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：对于任意两两互不相容的的事件列：$A_1,A_2,\cdots A_n\cdots$，有

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$；

称$P(A)$为事件A的概率.

4. 概率的性质

(1)不可能事件概率等于零：$P(\phi)=0$.

(2)有限可加性：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\phi$，($i\neq j$)，其中$i,j=1,2,\cdots n$，则有$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

(3)单调不减性：若事件$B\supset A$，则$P(B)\geq P(A)$.

(4)求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$，且$P(A)\leq 1$.

(5)加法公式：对任意两事件A、B，有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；此性质可推广到任意$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的情形.

(6)减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$，特别地，当$B\subset A$时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

5. 古典概率：若试验的基本事件数为有限个，且每个事件发生的可能性相等，则试验对应古典概型(等可能概型)，事件A发生的概率为：

$$P(A)=\frac{A\text{中所含样本点数}}{\Omega\text{中样本点总数}}=\frac{k}{n}.$$

6. 几何概率：若实验E的样本空间Ω为几何空间中的一个有界区域，且Ω中每个样本点，即基本事件出现的可能性相同，则称实验E为几何概率. 此时，事件$A\subset\Omega$的概率定义为：

$$P(A_g)=\frac{A\text{的度量（长度、面积或体积）}}{\Omega\text{的度量（长度、面积或体积）}}.$$

四、条件概率与乘法公式

1. 条件概率：设 A、B 是 Ω 中的两个事件，且 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法公式：设 A、$B\subset\Omega$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$ 称为事件 A、B 的概率乘法公式.

3. 全概率公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则对任何概率不为零的事件 B，有 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$，称为全概率公式.

4. 贝叶斯(Bayes)公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则对任何概率不为零的事件 B，有 $P(A_j|B)=\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$， $(j=1,\cdots,n)$，称为贝叶斯公式.

5. 条件概率与积事件概率

$P(AB)$ 是在样本空间 Ω 内，事件 AB 的概率，而 $P(A|B)$ 是在试验 E 增加了新条件 B 发生后的缩减的样本空间 Ω_B 中计算事件 A 的概率. 虽然 A、B 都发生，但两者是不同的，一般说来，当 A、B 同时发生时，常用 $P(AB)$，而在有包含关系或明确的主从关系时，用 $P(A|B)$.

五、事件的独立性

1. 两事件的独立：对于事件 A、B，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

2. 若 A 和 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 分别相互独立.

3. 两事件独立的判断：

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$

(2) $P(B|A)=P(B)$，$\left(P(A)>0\right)$

(3) $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，$\left(0<P(A)<1\right)$

(4) $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，$\left(0<P(A)<1\right)$

显然，必然事件Ω、不可能事件ϕ与任何事件相互独立.

4. n个事件的两两独立：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件，对于任意$1\le i<\cdots j\le n$，有$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，称n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两独立.

5. n个事件的相互独立：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件，如果对任意的$k(1<k\le n)$，任意的$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，具有等式$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，称$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立.

第二讲　随机变量及其分布

一、随机变量

设Ω是随机试验的样本空间，如果对于试验的每一个可能结果$\omega\in\Omega$，都有唯一的实数$X(\omega)$与之对应，则称$X(\omega)$为定义在Ω上的随机变量，简记为X. 随机变量通常用大写字母X、Y、Z等表示.

二、离散型随机变量及其分布律

1. 如果随机变量X只能取有限个或可列个值，则称X为离散型随机变量. 如果X的一切可能值为$x_1,x_2,\cdots$，并且X取x_i的概率为p_i，则称$P\{X=x_i\}=p_i$ $(i=1,2,3,\cdots)$为离散型随机变量X的概率函数(概率分布或分布律). 列成表格形式如下，也称为分布列：

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

其中$p_i\ge 0,\sum\limits_i p_i=1$.

2. 设X的分布律为$P\{X=x_i\}=p_i$ $(i=1,2,3,\cdots)$，则X的分布函数为：

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)\text{，}\quad -\infty<x<+\infty.$$

显然，若已知X的分布函数$F(x)$，则易求得X的分布律为$P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0)$，$i=1,2,3,\cdots$.

3. 常见的离散型随机变量的分布：

(1) $0-1$ 分布 $X\sim B(0-1)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1,\ 0<p<1.$$

(2)二项分布 $X\sim B(n,p)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n,\ 0<p<1.$$

(3)泊松(Poisson)分布 $X\sim P(\lambda)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,\cdots,\quad \lambda>0.$$

(4)超几何分布 $X\sim H(n,M,N)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=l,l+1,\cdots,\min(n,M)\text{，其中 } l=\max(0,n-(N-M)).$$

若 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M}{N}=p$，则对于一切 $n\geq 1,k=0,1,\cdots,n$，有 $\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

(5)几何分布 $X\sim G(p)$，概率函数 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=0,1,\cdots,0<p<1$.

4. 泊松定理：设 $\lambda>0$ 是一常数，n 是任意正整数，设 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$，则对于任意的非负整数 k，有 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

当 n 很大且 p 很小时，二项分布可以用泊松分布近似代替，即 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，其中 $\lambda=np$.

三、连续型随机变量及其分布律

1. 设 X 为随机变量，x 为任意实数，函数 $F(x)=P\{X\leq x\}(-\infty<x<+\infty)$ 称为随机变量 X 的分布函数.

2. 分布函数的性质：

(1) $0\leq F(x)\leq 1\quad(-\infty<x<+\infty)$；

(2)如果 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leq F(x_2)$；

(3) $F(x)$ 为右连续，即 $F(x+0)=F(x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

(5) $P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$.

3. 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使对于任一实数 x，有 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量，函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数.

4. 概率密度函数具有以下性质：

(1) $f(x) \ge 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$；

(3) $P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$；

(4) $P\{X = a\} = 0$；

(5)如果 $f(x)$ 在 x 处连续，则 $F'(x) = f(x)$.

5. 常见的连续型随机变量的分布：

(1)均匀分布 $X \sim U(a,b)$，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, \quad 其它 \end{cases},$$

相应的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b \\ 1, \quad x > b \end{cases}$；

(2)指数分布 $X \sim E(\lambda)$，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, \quad 其它 \end{cases},$$

相应的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$；

(3)正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < X < +\infty,$$

相应的分布函数为 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$；

注：当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，即 $X\sim N(0,1)$ 时，称 X 服从标准正态分布. 用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 分别表示 X 的密度函数和分布函数，即 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. 具有性质：

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

一 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的分布函数 $F(x)$ 与标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 有关系：

$F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

四、随机变量的函数的分布

1. 离散型随机变量函数的分布

设 X 为离散型随机变量，其分布列为：

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y=g(X)$ 仍为离散型随机变量，其分布列为：

Y	$y_1=g(x_1)$	$y_2=g(x_2)$	$y_3=g(x_3)$	$\cdots$	$y_n=g(x_n)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	$\cdots$

y_i 有相同值时，要合并为一项，对应的概率相加.

2. 连续型随机变量函数的分布

设 X 为连续型随机变量，概率密度为 $f_X(x)$，则 $Y=g(X)$ 的概率密度有两种方法可求.

(1)定理法：若 $y=g(x)$ 在 X 的取值区间内有连续导数 $g'(x)$，且 $g(x)$ 单调时，$Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.

其中 (α,β) 为 $y=g(x)$ 的值域，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

(2)分布函数法：先求 $Y=g(X)$ 的分布函数

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x\le y)}f_x(x)dx$，然后求 $f_Y(y)=[F_Y(y)]'$.

第三讲 多维随机变量及其分布

一、二维随机变量

1. 设 X ，Y 为定义在同一个样本空间 Ω 上的随机变量，则称由它们构成的向量 (X,Y) 为二维随机变量.

2. 设 (X,Y) 为二维随机变量，对于任意实数 x 、 y ，称二元函数

$F(x,y)=P\{X\le x\bigcap Y\le y\}$ 为 (X,Y) 的联合分布函数，常记为

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$.

3. 联合分布函数具有以下基本性质：

① $F(x,y)$ 是变量 x 或 y 的非减函数；

② $0\le F(x,y)\le 1$ 且 $F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0, F(-\infty,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$ ；

③ $F(x,y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续；

④对任意点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ，若 $x_1<x_2,y_1<y_2$ ，则

$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$. 前式表示随机点 (X,Y) 落在区域 $[x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2]$ 内的概率为： $P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}$.

4. 二维离散型随机变量及其联合分布律

如果二维随机变量 (X,Y) 所有可能取值是有限对或可列对，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，它的所有可能取值为 (x_i,y_j) ， $i,j=1,2,\cdots$ 将 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots)$ 或下表称为 (X,Y) 的联合分布律.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

联合分布律具有下列性质：(1) $p_{ij} \ge 0$；　(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

5. 二维连续型随机变量及其概率密度函数

如果存在一个非负函数 $f(x,y)$，使得二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 对任意实数 x,y 有

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$，则称 (X,Y) 是二维连续型随机变量，称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合密度函数(或概率密度函数).

6. 联合密度函数具有下列性质：

(1)对一切实数 x,y，有 $f(x,y)\ge 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$；

(3)设 D 是平面上的区域，点 (X,Y) 落在区域 D 上的概率 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$；

(4)如果 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续，则 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

7. 两个常见的二维分布

(1)二维均匀分布

若(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)},(x,y)\in D\\ 0,\text{其他}\end{cases}.$$

其中 D 为一平面有界区域，$S(D)$ 为 D 的面积，则称 (X,Y) 服从二维均匀分布，常记为 $(X,Y)\sim U(D)$.

(2)二维正态分布

若(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中 $\mu_1,\mu_2\in R,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$，则称（$X,Y$）服从二维均匀分布，常记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

二、边缘分布

1. 设 (X,Y) 为二维随机变量，则

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}=F(x,+\infty),$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty,Y\le y\}=F(+\infty,y)$$

分别称为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数.

2. 当 (X,Y) 为离散型随机变量，则

$$p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad (i=1,2,\cdots),$$

$$p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad (j=1,2,\cdots)$$

分别称为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

3. 当 (X,Y) 为连续型随机变量，则

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx,\quad F_Y(x)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\right)dy$$

分别称为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数；

而 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 分别称为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘密度函数.

三、条件分布

1. 离散型随机变量的条件分布

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，其联合分布律和边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad P\{X=x_i\}=p_{i\cdot},\quad P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j},\quad (i,j=1,2,\cdots)$$

对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0$，称

$$p_{i|j}=P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

类似地，对于固定的 i，若 $P\{X=x_j\}=p_i>0$，称 $p_{j|i}=P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_i}, j=1,2,\cdots.$

为在 $X=x_j$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

2. 连续型随机变量的条件分布

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，其联合密度函数和边缘密度函数分别为：$f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$.

对于给定的 x，若 $f_Y(y)>0$ 时，称 $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，$-\infty<x<+\infty$，为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件概率密度函数.

类似地，$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 称为在条件 $X=x$ 下 Y 的条件概率密度函数.

四、相互独立的随机变量

1. 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$、$F_Y(y)$ 分别是 (X,Y) 的联合分布函数及边缘分布函数. 如果对任何实数 x,y 有 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$ 则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

2. 设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，X 与 Y 相互独立的充要条件是

$p_{ij}=p_i\times p_j (i,j=1,2,\cdots)$.

3. 设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，X 与 Y 相互独立的充要条件是对任何实数 x,y，有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

五、二维随机变量的函数的分布

1. 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率分布(如联合分布函数、联合密度、或联合分布律)，随机变量 Z 是 X,Y 的函数，即 $Z=\varphi(X,Y)$，则 Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\varphi(x,y)\le z)$，$-\infty<z<+\infty$.

2. $Z=X+Y$ 的分布

若 (X,Y) 为连续型随机变量，概率密度函数为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy.$$

当 X 和 Y 独立时，有卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$.

3. $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

若(X,Y)为连续型随机变量，概率密度函数为 $f(x,y)$，则$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度函数为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)dy.$$

当X和Y独立时，有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz),f_Y(y)dy$.

4. $Z=XY$的分布

若(X,Y)为连续型随机变量，概率密度函数为 $f(x,y)$，则$Z=XY$的概率密度函数为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx.$$

当X和Y独立时，有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\dfrac{z}{x})dx$.

5. $M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设 X 和 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则 $Z_1=\max\{X,Y\}$，$Z_2=\min\{X,Y\}$的分布函数分别为：

$$F_{Z_1}(z)=P(Z_1\le z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$\begin{aligned}F_{Z_2}(z)&=P(Z_2\le z)=P(\min(X,Y)\le z)=1-P(\min(X,Y)\ge z)\\&=1-P(X>z,Y>z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))\end{aligned}$$

第四讲　随机变量的数字特征

一、数学期望

1. 设离散型随机变量X的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$，如果级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛，则称级数的和为随机变量X的数学期望.

2. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称此积分值 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 为随机变量 X 的数学期望.

3. 数学期望的性质：

(1)设 C 是常数，则 $E(C)=C$；

(2)设 C 是常数，则 $E(CX)=CE(X)$；

(3)若 X_1、X_2 是随机变量，则 $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$；

对任意 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，有

$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$；

(4)若 X_1、X_2 相互独立，则 $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$；

对任意 n 个相互独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，有

$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$.

(5) $[E(X_1X_2)]^2 \le E^2(X_1)E^2(X_2)$

4. 随机变量函数的数学期望

设 Y 是随机变量 X 的函数：$Y=g(X)$

(1)设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$，

若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则：$E(Y)=E[g(x)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$.

(2)设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则 $E(Y)=E[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$.

二、方差

1. 设 X 是一个随机变量，则 $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$ 称为 X 的方差. $\sqrt{D(X)}=\sigma(X)$ 称为 X 的标准差或均方差. 常用方差计算公式

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

2. 方差的性质：

(1)设 C 是常数，则 $D(C)=0$；

(2)设C是常数，则$D(CX)=C^2D(X)$， $D(X+C)=D(X)$；

(3)若X_1、X_2相互独立，则$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$；

对任意n个相互独立的随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$，有

$D(C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_nX_n)={C_1}^2D(X_1)+{C_2}^2D(X_2)+\cdots+{C_n}^2D(X_n)$；

(4) $D(X)=0$的充要条件是：存在常数C，使$P\{X=C\}=1(C=E(X))$.

3. 契比雪夫不等式：设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数ε，有$P\left\{\left|X-\mu\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$成立.

三、协方差与相关系数

1. $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X与Y的协方差，记为$\operatorname{cov}(X,Y)$，即$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$. 计算公式：$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

2. 对于随机变量X与Y，如果$D(X)\neq 0$，$D(Y)\neq 0$，称$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$为随机变量$X$与$Y$的

相关系数. 当$\rho_{XY}=0$时，称X与Y不相关.

3. 协方差及相关系数的性质：

(1) $\operatorname{Cov}(X,Y)=D(X)$;

(2) $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(Y,X)$;

(3) $\operatorname{Cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{Cov}(X_1,Y)+\operatorname{Cov}(X_2,Y)$;

(4) $\operatorname{Cov}(aX+c,bY+d)=ab\operatorname{Cov}(X,Y)$， a,b,c,d是常数；

(5) $\left|\rho_{XY}\right|\leq 1$；

(6) $\left|\rho_{XY}\right|=1\Leftrightarrow$存在常数$a,b$，且$a\neq 0$，使$P\{Y=aX+b\}$=1，即$X$与$Y$以概率1线性相关；

4. 若X,Y独立，则$\rho_{XY}=0$，即X,Y不相关. 反之，不一定成立.

四、矩

1. 设X是随机变量，若$E(X^k),k=1,2,\cdots$存在，称它为X的k阶原点矩.

2. 设X是随机变量，若$E\{[X-E(X)]^k\},k=1,2,\cdots$存在，称它为$X$的$k$阶中心矩.

3. 设 X 和 Y 是随机变量，若 $E(X^kY^l), k,l=1,2,\cdots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩；

4. 设 X 和 Y 是随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}, k,l=1,2,\cdots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

注：数学期望为一阶原点矩，方差为二阶中心矩，协方差为1+1阶混合中心距.

五、几种常见分布的数学期望与方差

分布	数学期望	方差
(1) $(0-1)$ 分布 $X\sim B(0-1)$	$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
(2)二项分布 $X\sim B(n,p)$	$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$
(3)Poisson 分布 $X\sim\pi(\lambda)$	$E(X)=\lambda$	$D(X)=\lambda$
(4)几何分布 $X\sim G(p)$	$E(X)=\dfrac{1}{p}$	$D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$
(5)超几何分布 $X\sim H(n,M,N)$	$E(X)=\dfrac{nM}{N}$	

$$D(X)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

(6)均匀分布 $X\sim U(a,b)$	$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
(7)指数分布 $X\sim E(\lambda)$	$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$	$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
(8)正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$E(X)=\mu$	$D(X)=\sigma^2$

第五讲　大数定律及中心极限定理

A. 重要内容与结论

一、大数定律

1. 弱大数定理：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立，服从同一分布的随机变量，且具有数学期望 $E(X_i)=\mu\ (i=1,2,\cdots)$，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i-\mu]\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

2. 伯努利大数定理:设 n_A 是 n 次重复独立试验中事件 A 发生的次数， p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}=0.$$

贝努利大数定理给出了当 n 很大时， A 发生的频率 $\frac{n_A}{A}$ 依概率收敛于 A 的概率.

二、中心极限定律

1. 独立同分布中心极限定理:设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，具有数学期望和方差， $E(X_k)=\mu$， $D(X_k)=\sigma^2\ge 0(k=1,2,\cdots)$. 则，随机变量之和 $\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n}X_k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对任意实数 x 满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\{Y_n\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\Phi(x).$$

2. 李雅普诺夫定理:设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，它们具有数学期望和方差:

$E(X_k)=\mu_k$, $D(X_k)={\sigma_k}^2\ge 0(k=1,2,\cdots)$，记 $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$. 若存在正数 δ，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\{\left|X_k-\mu_k\right|^{2+\delta}\}\to 0$，则随机变量变量之和 $\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的标准化变量

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n}X_k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意的 x，满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{Z_n\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt.$$

当 n 很大时，$Z_n\sim N(0,1)$. 因此当 n 很大时，$\sum_{k=1}^{n}X_k=B_nZ_n+\sum_{k=1}^{n}\mu_k$ 近似地服从正态分布

$N(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,B_n^2)$.

3. 德莫佛—拉普拉斯定理：设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n,p(0<p<1)$ 的二项分布，则对于任意的 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\Phi(x).$$

三、重要公式与结论

1. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，它们具有相同的数学期望和方差：$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2\ge 0(k=1,2,\cdots)$，则

(1) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从 $N(0,1)$；

(2) $\sum_{k=1}^{n}X_k$ 近似服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$；

(3) $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 近似服从 $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$；

(4)近似计算公式：

$$P(a\le\sum_{k=1}^{n}X_k\le b)=P\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

2. 设 $X_n\sim B(n,p)(n=1,2,\cdots)(0<p<1)$,则

(1) $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ 近似服从 $N(0,1)$；

(2) X_n 近似服从 $N(np, npq)$；

(3)近似计算公式：

$$P(a \le X_n \le b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)，\text{其中 } q = 1-p$$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布服从 $B(1, p)$分布 ,则

(1) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{npq}}$ 近似服从 $N(0,1)$；

(2) $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 近似服从 $N(np, npq)$；

(3) $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 近似服从 $N(p, \dfrac{pq}{n})$；

(4)近似计算公式：

$$P(a \le \sum_{k=1}^{n} X_k \le b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)，\text{其中 } q = 1-p .$$

第六讲　样本及抽样分布

A. 重要内容与结论

一、随机样本

1. 在数理统计中，将实验的全部可能的观察值称为总体；每一个可能观察值称为个体. 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量. 容量为有限的称为有限总体，容量为无限的陈为无限总体.

2. 设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是具有同一分布函数 F 的、互相独立的随机变量，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 从分布函数为 F 得到的容量为 n 的简单随机样本，简称样本. 它们的观察值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为样本值，又称为 X 的 n 个独立的观察值.

3. 样本的联合分布函数

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 F 的一个样本， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且他们的分布函数都是 $F(x)$，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F(x_k)$.

(1)若总体 X 的概率密度函数为 $f(x)$，

则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合密度函数为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)$.

(2)若离散型总体 X 的分布律为：$P\{X = x_k\} = p_k$, $(k = 1, 2, 3, \cdots)$，

则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k) = \prod_{k=1}^{n} p_k .$$

4. 分位数

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，满足 $P(X > z_\alpha) = \alpha$， $0 < \alpha < 1$ 的点 z_α 称为 X 的上分位数；满足 $P(X \le z_\alpha) = \alpha$， $0 < \alpha < 1$ 的点 z_α 称为 X 的下分位数.

二、抽样分布

1. 统计量

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的函数，若g中不含未知参数，则称$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一统计量.

2. 常见的统计量

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1,x_2,\ldots,x_n$是这样一样本的观察值，定义：

(1)样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；

(2)样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-n\overline{X}^2\right)$；

(3)样本标准差：$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-n\overline{X}^2\right)}$；

(4)样本k阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ k},k=1,2,\cdots$；

(5)样本k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,k=1,2,\cdots$.

3. 经验分布函数

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是总体X的一组观察值将它们按大小顺序排列为：$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$，称它为顺序统计量. 则称

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \frac{k}{n}, & x_k\le x<x_{k+1}\\ 1, & x\ge x_n\end{cases}$$

为经验分布函数(或样本分布函数).

三、三大抽样分布

1. χ^2分布

设$X\sim N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的一个样本，则统计量$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，记作$\chi^2\sim\chi^2(n)$.

(1) $\chi^2(n)$ 分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中伽马函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$，且 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$；$\Gamma(k+1)=k!$，$k\in N$.

χ^2 分布是一种非负连续型随机变量的分布，其密度函数的图形位于第一象限，峰值随着 n 的增大而向右移动.

(2) $\chi^2(n)$ 分布的可加性：若 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X,Y 相互独立，则 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$. 一般地，若 $X_i\sim\chi^2(n_i)$，$i=1,2,\cdots k$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 相互独立，则 $\sum_{i=1}^{k}X_i\sim\chi^2(n_1+n_2+\cdots+n_k)$.

(3)若 $X\sim\chi^2(n)$，$E(X)=n$，$D(X)=2n$.

(4) χ^2 分布的上 α 分位数

设随机变量 $X\sim\chi^2(n)$，对于任意给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\left\{\chi^2(n)>\chi^2_\alpha(n)\right\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty}f(x)dx=\alpha$$

的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 的上 α 分位数. 当 $n>45$ 时，$\chi^2_\alpha(n)\approx\dfrac{1}{2}\left(z_\alpha+\sqrt{2n-1}\right)^2$，$z_\alpha$ 是标准正态分布上 α 分位数.

2. t 分布

设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则随机变量 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $t\sim t(n)$. t 分布又称为学生分布.

(1) t 分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<x<+\infty .$$

t 分布是一种连续型随机变量的分布，其密度函数的图形关于 y 轴对称，形状与标准正态分布类似.

(2)若 $t\sim t(n)$，则 $E(t(n))=0$，$n>1$；$D(t(n))=\dfrac{n}{n-2}$，$n>2$.

(3) t 分布的上 α 分位数

设随机变量 $X\sim t(n)$，对于任意给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 称满足条件

$$P\left\{t(n)>t_\alpha(n)\right\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}f(x)dx=\alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 的上 α 分位数. 且有 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$，$t_{0.5}(n)=0$；当 $n>45$ 时，$t_\alpha(n)\approx z_\alpha$.

3. F 分布

设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X,Y 相互独立，则随机变量 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$.

(1) F 分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

F 分布是一种连续随机变量的分布，其密度函数包含两个参数.

(2)若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

(3)若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $E\left[F(n_1,n_2)\right]=\dfrac{n_2}{n_2-2}$，$D\left[F(n_1,n_2)\right]=\dfrac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$，$n_2>4$.

(4) F 分布上 α 分位数

设随机变量 $X \sim F(n_1,n_2)$，对于任意给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 称满足条件

$$P\left\{F(n_1,n_2) > F_\alpha(n_1,n_2)\right\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 的上 α 分位数. 且有 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

四、正态总体统计量的分布

1. 单个正态总体的抽样分布：设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本均值与样本方差，则

(1)样本均值 $\overline{X}$ 服从正态分布，有 $\overline{X} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；

(2) $\overline{X}$，S^2 相互独立，并且 $E(\overline{X}) = \mu$，$E(S^2) = \sigma^2$；

(3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$；

(4) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$；

(5) $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-\mu}{S} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

2. 两个正态总体的抽样分布：设 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是 X 的一个样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是 Y 的一个样本，两者相互独立. 则

(1) $\overline{X} \pm \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$，$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$；

(3) $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1}}{\dfrac{\frac{1}{\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{n_2}} \sim F(n_1,n_2)$；

(4) $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$；

(5)当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，其中

$$S_w=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

第七讲　参数估计

A. 重要内容与结论

一、点估计

1. 估计量

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的一个样本，将样本的某个函数 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为总体分布中未知参数 θ 的估计，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的点估计．$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为估计量，$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为估计值，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的一个样本值.

2. 矩估计法

用样本矩代替相应的总体矩，样本矩的函数代替相应的总体矩的统一函数，从而求出未知参数的一种估计方法. 其思想是：如果总体中有 k 个未知参数，可以用前 k 阶样本矩估计取代相应的前 k 阶总体矩，然后利用未知参数与总体矩的函数关系，求出参数的估计量.

3. 极大似然估计法

设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta)$，其中 θ 为未知参数，　$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一组样本观测值，则总体 X 的联合密度函数称为似然函数，记作

$L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$，取对数 $\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i,\theta)$，由 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$，求得似然函数 L 的极大值 $\hat{\theta}$，即为未知参数 θ 的极大似然估计. 其思想是：在已知总体 X 概率分布时，对总体进行 n 次观测，得到一个样本，选取概率最大的 θ 值 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的真值的估计是最合理的.

二、估计量的评选标准*

1. 无偏性：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),E(\hat{\theta})$ 存在，若对于任意 $\theta\in\Theta$，有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称值 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量；否则称为有偏估计量.

2. 有效性：设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 均为参数 θ 的无偏估计量，如果对于任意 $\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，且至少对于某一个 $\theta\in\Theta$ 上式中的不等号成立，则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

3. 相合性(一致性)：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的估计量，对于任意 $\theta\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时，$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量. 即，对于任意 $\theta\in\Theta$ 都满足：对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

三、区间估计

设总体 X 的分布 $F(x;\theta)$ 中含有一个未知参数 θ，$\theta\in\Theta$ (Θ 是 θ 可能取值的范围)，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由来自 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ ($\underline{\theta}<\overline{\theta}$)，对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足：

$$P\left\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\}\ge 1-\alpha,$$

则随机区间($\underline{\theta},\overline{\theta}$)称是参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 称为置信水平.

四、正态总体均值与方差的区间估计

1.单个正态总体均值与方差的置信区间表

估计参数	参数的情况	统计量	置信度为$1-\alpha$的置信区间
μ	σ^2已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ^2	μ已知	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)},\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$
	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right)$

2. 两个正态总体均值差与方差比的置信区间表

估计参数	参数的情况		置信度为$1-\alpha$的置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1=n_2-2)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2已知	$\dfrac{\dfrac{\frac{1}{\sigma_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1}}{\dfrac{\frac{1}{\sigma_2^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{n_2}}\sim F(n_1,n_2)$	$\left(\dfrac{\frac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)},\ \dfrac{\frac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}\right)$

	μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

五、单侧置信区间

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足 $P\{\theta>\underline{\theta}\}\geq 1-\alpha$，称随机区间 $(\underline{\theta},\infty)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，$\underline{\theta}$ 称为 θ 置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足 $P\{\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$，称随机区间 $(-\infty,\overline{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，$\overline{\theta}$ 称为 θ 置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

第八讲　假设检验

A. 重要内容与结论

一、假设检验的基本概念

1.假设检验

对总体的分布提出某种假设，然后利用样本所提供的信息，根据概率论的原理对假设作出“接受”还是“拒绝”的判断，这一类统计推断问题统称为假设检验.

假设检验的统计思想：小概率事件在一次试验中可以认为基本上是不会发生的，即小概率原理.

2.两类错误

在根据样本作推断时，由于样本的随机性，难免会作出错误的决定. 当原假设 H_0 为真时，而作出拒绝 H_0 的判断，称为犯第一类错误；当原假设 H_0 不真时, 而作出接受 H_0 的判断，称为犯第二类错误.

控制犯第一类错误的概率不大于一个较小的数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 称为检验的显著性水平.

二、单个正态总体的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

1. 关于均值 μ 的检验

	H_0	H_1	统计量	拒绝域
Z 检验法 (σ^2 已知)	$\mu=\mu_0$ $\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\lvert z\rvert>z_{\alpha/2}$ $z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$
t 检验法 (σ^2 未知)	$\mu=\mu_0$ $\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S_n/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert>t_{\alpha/2}(n-1)$ $t\ge t_\alpha(n-1)$ $t\le -t_\alpha(n-1)$

2. 关于方差 σ^2 的检验

	H_0	H_1	统计量	拒绝域
χ^2 检验法 (μ 已知)	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2\ne\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$	$\chi^2\ge x_{\alpha/2}^2(n)$或 $\chi^2\le x_{1-\alpha/2}^2(n)$ $\chi^2\ge x_\alpha^2(n)$ $\chi^2\le x_{1-\alpha}^2(n)$
χ^2 检验法 (μ 未知)	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2\ne\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$k^2=\dfrac{(n-1){S_n}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2\ge x_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2\le x_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ $\chi^2\ge x_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2\le x_{1-\alpha}^2(n-1)$

三、两个正态总体的假设检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$，样本容量为 n_1；$Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$，样本容量为 n_2.

1. 两个正态总体均值的检验

	H_0	H_1	统计量	拒绝域
μ 检验法 (σ_1^2,σ_2^2已知)	$\mu_1=\mu_2$ $\mu_1\le\mu_2$ $\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$ $\mu_1>\mu_2$ $\mu_1<\mu_2$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert z\rvert\ge z_{\alpha/2}$ $z\ge z_\alpha$ $z\le -z_\alpha$
t 检验法 ($\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知)	$\mu_1=\mu_2$ $\mu_1\le\mu_2$ $\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$ $\mu_1>\mu_2$ $\mu_1<\mu_2$	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ $t\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

2. 两个正态总体方差的检验

	H_0	H_1	统计量	拒绝域
F 检验法 (μ_1,μ_2 已知)	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\dfrac{n_1\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_2\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}$	$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ 或 $F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ $F\ge F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$ $F\le F_\alpha(n_1,n_2)$
F 检验法 (μ_1,μ_2 未知)	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$或 $F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ $F\ge F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$