1. **有限图**：顶点集和边集都有限的图称为有限图；
2. **平凡图**：只有一个顶点的图称为平凡图；
3. **空图**：边集为空的图称为空图；
4. **n阶图**：顶点数为n的图称为n阶图；
5. **(n, m) 图**：顶点数为n,边数为m的图称为(n, m) 图；
6. **边的重数**：连接两个相同顶点的边的条数称为边的重数；重数大于1的边称为重边；
7. **环**：端点重合为一点的边称为环；
8. **简单图**：无环无重边的图称为简单图；其余的图称为复合图；
9. **顶点u与v相邻接**：顶点u与v间有边相连接；其中u与v称为该边的两个端点；
10. **顶点u与边e相关联**：顶点u是边e的端点；
11. **边e1与边e2相邻接**：边e1与边e2有公共端点；
12. **图同构的几个必要条件：**(1) 顶点数相同；(2) 边数相同；(3) 关联边数相同的顶点个数相同。
13. **m(Kn) = n(n-1)/2**
14. 分别用δ(G)和Δ(G)表示图G的**最小**与**最大度**
15. **途径**：指一个有限非空序列w= v0 e1 v1 e2 v2…ek vk，它的项交替地为顶点和边
16. **迹**：边不重复的途径称为图的一条迹
17. **路：**顶点不重复的途径称为图的一条路
18. **联图**：将G1中每个顶点和G2中的每个顶点连接，这样得到的新图称为G1与G2的联图。（相等+邻接）
19. **合成图**：（邻接 || 相等+邻接）
20. **点连通度**：在G中，若存在顶点割，称G的最小顶点割的顶点数称为G的点连通度；否则称n-1为其点连通度。若G不连通，k(G)=0。G的点连通度记为k(G), 简记为k。
21. **边连通度**：在G中，最小边割集所含边数称为G的边连通度。边连通度记为λ(G) 。若G不连通或G是平凡图，则定义λ(G) =0
22. **欧拉图**：对于连通图G，如果G中存在经过每条边的闭迹，则称G为欧拉图，简称G为**E图**。欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路。
23. **欧拉迹**：对于连通图G，如果G中存在经过每条边的迹，则称该迹为G的一条欧拉迹。
24. **哈密尔顿图**：如果经过图G的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，称这样的图为哈密尔顿图，简称H图。
25. **哈密尔顿圈**：所经过的闭途径是G的一个生成圈，称为G的哈密尔顿圈
26. **哈密尔顿路**：图G的经过每个顶点的路称为哈密尔顿路
27. **匹配：**任意两条边没有公共顶点
28. **最大匹配**：边数最大的匹配
29. **完美匹配：**最大匹配中包含了G的所有顶点
30. 完美匹配一定是最大匹配，最大匹配不一定是完美匹配
31. **最优匹配：**G中的一个权值最大的完美匹配称为G的最优匹配。
32. 有完美匹配一定有1因子，但是不一定有1因子分解
33. **点覆盖**：如果G的每条边都至少有一个端点在K中
34. **最小点覆盖**：G的一个包含点数最少的点覆盖
35. 一个图G的**因子Gi**：指至少包含G的一条边的生成子图
36. 一个图G的**因子分解**：指把图G分解为若干个边不重的因子之并。
37. 所谓一个图G的**n因子**：指图G的n度正则因子
38. **平面图：**如果能把图G画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称G可以嵌入平面，或称G是可平面图。可平面图G的边不交叉的一种画法，称为G的一种平面嵌入，G的平面嵌入表示的图称为平面图。
39. **极大平面图**: 设G是简单可平面图，如果G是Ki (1≦i≦4),或者在G的任意非邻接顶点间添加一条边后，得到的图均是非可平面图，则称G是极大可平面图。极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图
40. **极大外平面图**：若一个可平面图G存在一种平面嵌入，使得其所有顶点均在某个面的边界上，称该图为外可平面图。外可平面图的一种外平面嵌入，称为外平面图。
41. **握手定理及其推论**
    1. 图G= (V, E)中所有顶点的度的和等于边数m的2倍
    2. 在任何图中，奇点个数为偶数
    3. 正则图的阶数和度数不同时为奇数
42. **树的性质**
    1. 设T是(n, m)树，则m=n-1
43. **Menger敏格尔**
    1. 设x与y是图G中的两个不相邻点，则G中分离点x与y的最小点数等于独立的(x, y)路的最大数目
    2. 设x与y是图G中的两个不相邻点，则G中分离点x与y的最小边数等于G中边不重的(x, y)路的最大数目
44. **欧拉图、欧拉迹的判定**
    1. G是欧拉图⬄G的顶点度数为偶数⬄G的边集合能划分为圈
    2. 连通非欧拉图G存在欧拉迹当且仅当G中最多只有两个顶点度数为奇数
    3. 连通图G是欧拉图当且仅当G的顶点度数为偶
45. **H图的判定p78**
    1. 必要条件：若G为H图，则对V(G)的任一非空顶点子集S，有。除去这个顶点集后的连通块数<=顶点集中的顶点数
46. **偶图匹配问题**

例1 有7名研究生 A, B, C, D, E, F, G毕业寻找工作。就业处提供的公开职位是：会计师(a) ,咨询师(b),编辑(c ),程序员(d), 记者(e), 秘书(f)和教师(g)。每名学生申请的职位如下：

A : b, c ; B : a, b, d, f, g ; C : b, e ; D : b, c, e ;

E : a, c, d, f ; F : c, e ; G : d, e, f, g ;

问：学生能找到理想工作吗？

解：如果令X=｛A, B, C, D, E, F, G｝,Y=｛a, b, c, d, e, f , g｝,X中顶点与Y中顶点连线当且仅当学生申请了该工作。于是，得到反映学生和职位之间的状态图：

**F**

**E**

**D**

**C**

**B**

**A**

**G**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**g**

问题转化为是否有饱和X每个顶点的一个匹配。

当S取X中四元点集时，若取S=｛A,C,D,F｝,则有3=|N(S)|<|S|=4

所以，不存在饱和X每个顶点的匹配。

例1 下面图中谁是欧拉图？谁是非欧拉图但存在欧拉迹？谁是非欧拉图且不存在欧拉迹？

**G1**

**G2**

**G3**

G1是欧拉图；

G2是非欧拉图，但存在欧拉迹（奇度顶点<=2）；

G3中不存在欧拉迹。

下图G是非H图

**图G**

**u**

**v**

因为在G中，边uv是割边，所以它不在G的任意圈上，于是u与v不能在G的同一个圈上。故G不存在包括所有顶点的圈，即G是非H图。

**最优H圈的下界**

可以通过如下方法求出最优H圈的一个下界：

(1) 在G中删掉一点v(任意的)得图G1;

(2) 在图G1中求出一棵最小生成树T;

(3) 在v的关联边中选出两条权值最小者e1与e2.

若H是G的最优圈，则W(H) = W(T) + W(e1) + W(e2)

例6 设G是赋权完全图，对所有的x, y, z ∈V(G),满足三角不等式：W (x， y)+ W (y， z) ≧ W ( x，z) .证明：G中最优圈的权最多是2W(T)，这里T是G中一棵最小生成树。

证明：设T是G的一棵最小生成树，将T的每条边添上一条平行边得图T1,显然T1是欧拉图。

**v1**

**v2**

**v3**

**v4**

**v5**

**v6**

**T**

**v1**

**v2**

**v3**

**v4**

**v5**

**v6**

**T1**

设Q是T1的一个欧拉环游：Q=vi1vi2….vikvi1

则：W(T1)=W(Q)=2W(T)

现在，从Q的第三点开始，删掉与前面的重复顶点，得到G的顶点的一个排列π。

由于G是完全图，所以该排列对应G的一个H圈。

在π中任意一条边(u ,v),在T中有一条唯一的(u, v)路P,而该路正好是在Q中的u与v间的部分。

由三角不等式知：W(uv)≦W(P)

由于将π中的边uv用T中的uv路P来代替就得到Q，所以：

W(π)≦W(Q)=2W(T)

即最优圈H的权值满足： W(H)≦W(π)≦W(Q)=2W(T)

例1，在下面偶图中，是否存在饱和X=｛A, B, C, D, E, F, G｝的每个顶点的匹配？

**F**

**E**

**D**

**C**

**B**

**A**

**G**

**a**

**b**

**c**

**d**

**e**

**f**

**g**

解: (1) 当S取X中单元点时，容易验证：|N(S)|>|S|

(2) 当S取X中二元点集时，容易验证：|N(S)|≧|S|

(3) 当S取X中三元点集时，容易验证：|N(S)|≧|S|

(4) 当S取X中四元点集时，若取S=｛A,C,D,F｝,则有3=|N(S)|<|S|=4

所以，不存在饱和X每个顶点的匹配。

例7 求σ(K5)和σ(K3,3).

 

 



 

 

 

例1 讨论下图G=(X, Y)是否有完美匹配。

**x1**

**x2**

**x3**

**x4**

**x5**

**y1**

**y2**

**y3**

**y4**

**y5**

**G=(X, Y)**

解：取初始匹配 M=｛x1y1, x2y3｝。

(a) S=｛x3｝,T=Φ;

(b ) N(S)= ｛y2, y3｝,N(S)≠T, 取y2 ∈N(S)-T

(c) y2为M非饱和点，加上y2和边x3y2生长树H。此时，置M=MΔE(P)=｛x1y1, x2y3, x3y2｝

(a) S=｛x4｝,T=Φ;

(b ) N(S)= ｛y2, y3｝,N(S)≠T, 取y2 ∈N(S)-T

(c) y2为M饱和点，y2x3 ∈ M。此时，置S=S∪｛x3｝

T=T∪｛y2｝。

(b ) N(S)= ｛y2, y3｝ ≠T，取y3 ∈N(S)-T

(c) y3为M饱和点，x2y3 ∈ M。此时，置S=S∪｛x2｝

T=T∪｛y3｝。

S=｛ x4 ,x3 ,x2｝

N(S)= ｛y2, y3｝ =T

(b ) N(S)= ｛y2, y3｝ =T，所以，G无完美匹配。

例2 确定下图是否是可平面图。

**u1**

**u2**

**v1**

**v2**

**y1**

**y2**

**x1**

**x2**

**w1**

**w2**

由于该图的最大度为4的顶点才4个，所以，不存在与K5同胚的子图。因此，只有寻找与K3,3同胚的子图！

解：取G中红色边的一个导出子图：也就是得到G的如下形式的一个子图：

**u1**

**u2**

**v1**

**v2**

**y1**

**y2**

**x1**

**x2**

**w1**

**w2**

上图显然和K3,3同胚。由库拉托斯基定理知，G是非可平面的。