DISTRIBUCIONES

CONTINUAS

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

- **Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar cualquiera de los valores de un intervalo específico de números reales (conjunto infinito no numerable).**
- **Como entre dos números reales cualquiera existen infinitos valores entonces, una variable aleatoria continua puede tomar un número infinito de números reales.**

Ejemplo:

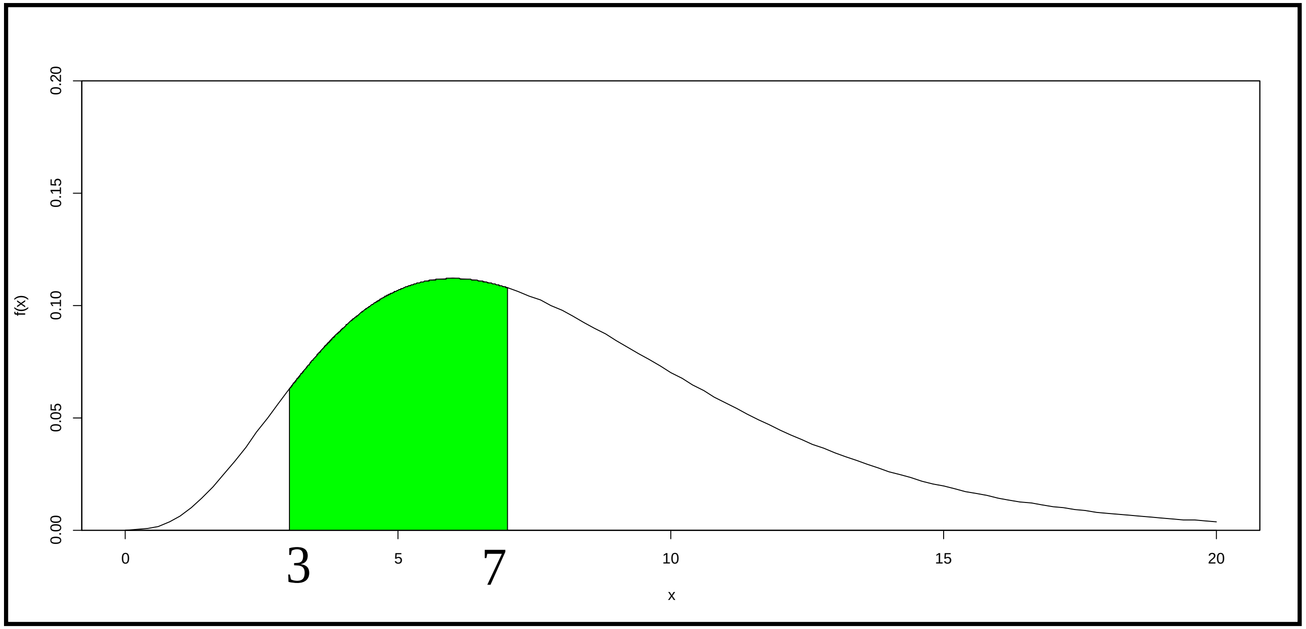
- **X: “El peso de una persona”**
- **Y: “El tiempo de duración de una determinada enfermedad”**

FUNCIÓN DENSIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Esta función cumple dos propiedades:

1°) $f(x) \geq 0$

2°) El área debajo de la curva es igual a 1



PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD

Definición: La función f(x) es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X, definida como

$$f_x : R \rightarrow R^+$$

Propiedades Fundamentales:

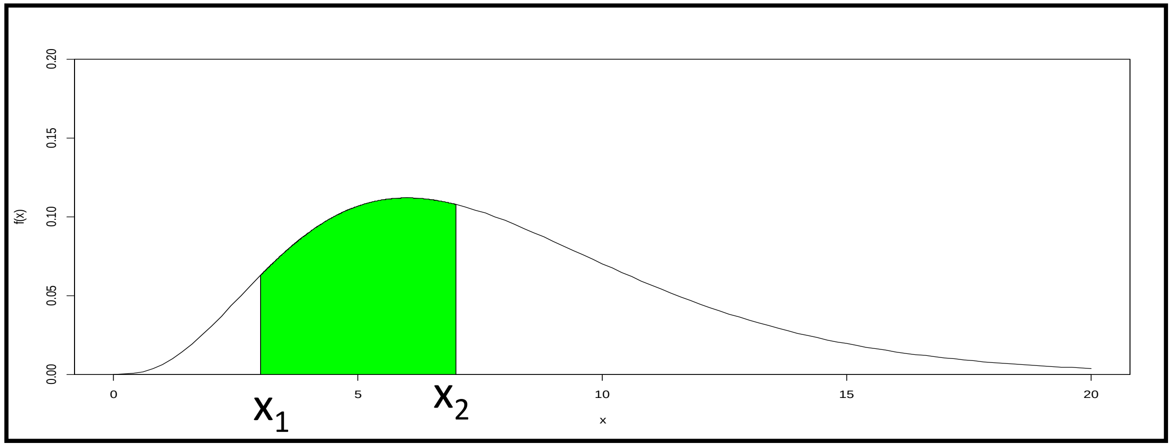
1. $f(x) \geq 0, \quad para \quad todo \quad x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Observaciones

- **El área total debajo de la curva debe sumar uno.**
- **La probabilidad de que X tome valores del intervalo de extremos x1 y x2, es igual al área debajo y arriba del intervalo de extremos x1 y x2**
- **La probabilidad de que la variable aleatoria continua tome exactamente cualquiera de sus valores es igual a cero.**

$$P(X=x)=0 \qquad \forall x \in R$$



$P(x_1<X<x_2)$= área sombreada

DISTRIBUCIÓN NORMAL O DISTRIBUCIÓN DE GAUSS

- Una v. a. continua X tiene distribución normal o de Gauss si su distribución esta dada por la **función de densidad**:

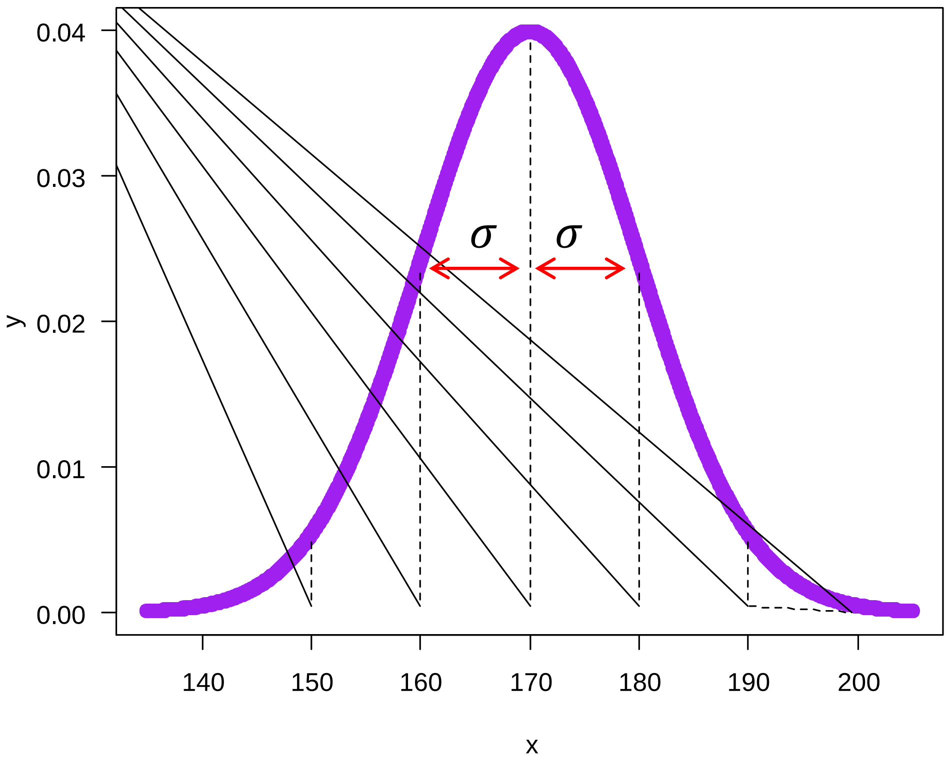
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ **para $- \infty < x < + \infty$**

Siendo μ la media y σ^2 la varianza , denominados **parámetros**,

$$- \infty < \mu < + \infty \text{ , y } \sigma^2 > 0$$

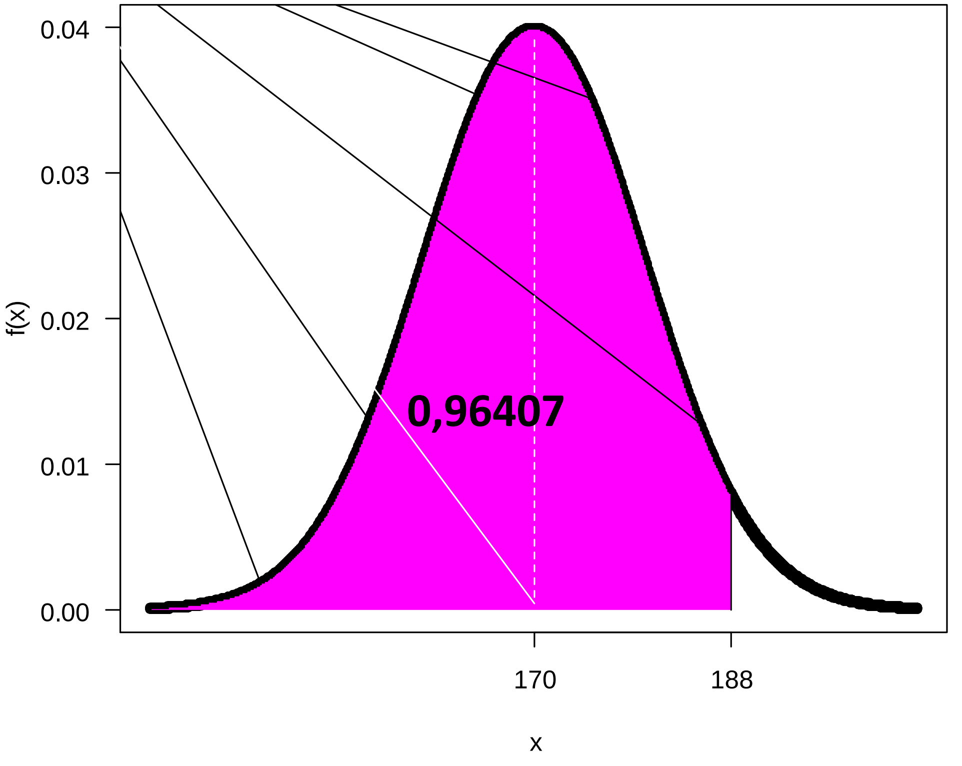
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se lee: X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2

DISTRIBUCIÓN NORMAL



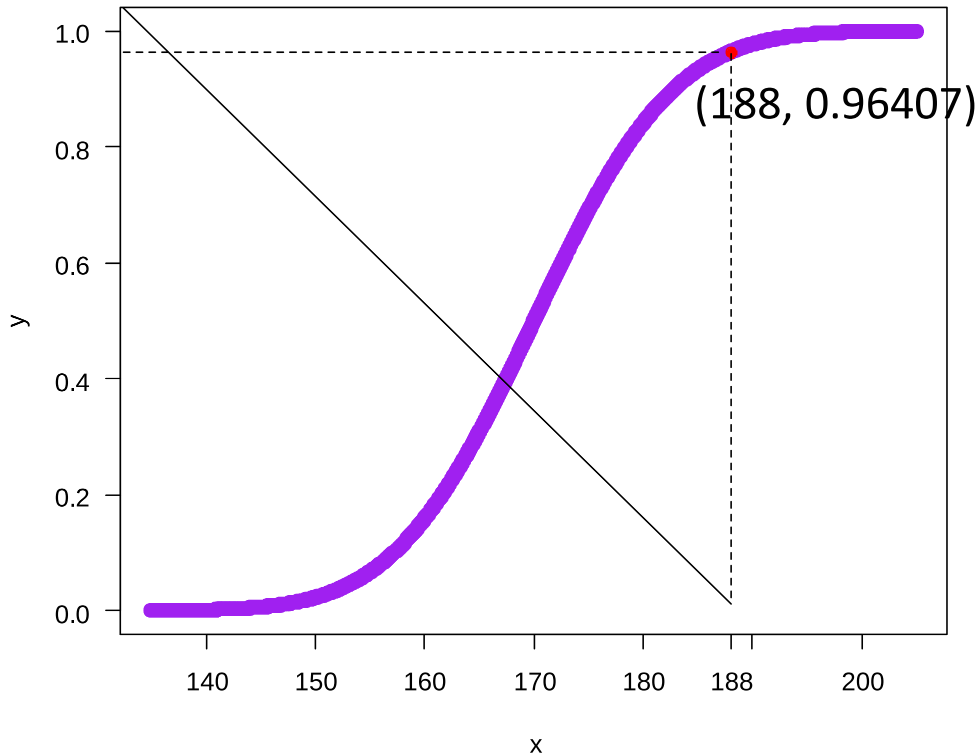
X ~ N (μ= 170, σ=10)

P(X < 188) =0,96407



Función de distribución acumulada

F : R $\longrightarrow$ [0,1] porque F(x)= P(X < x)

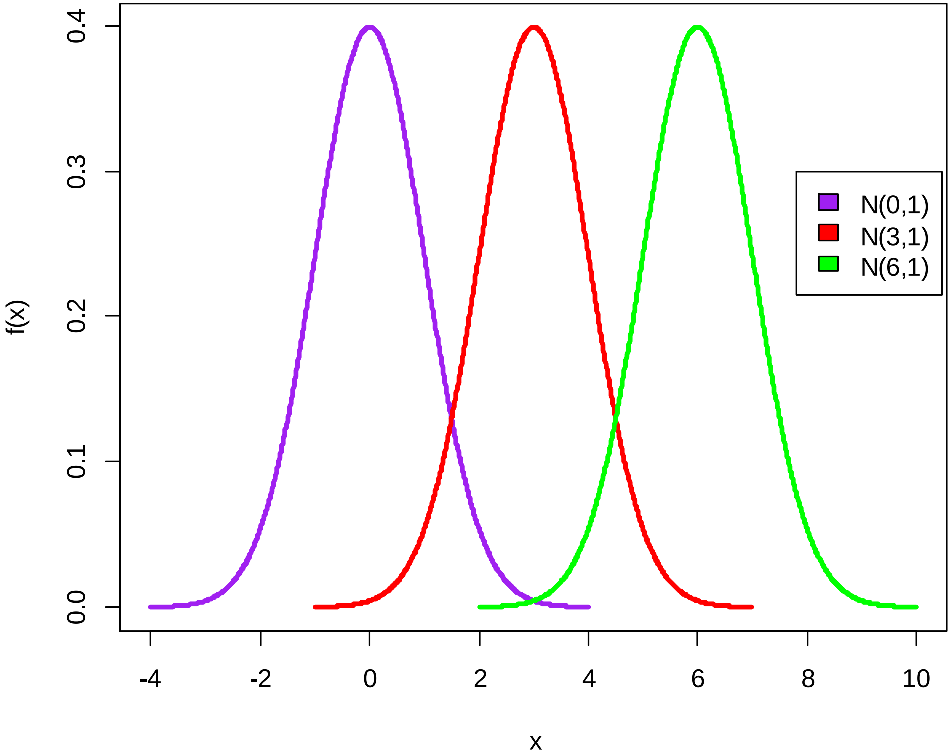


F(188)= P(X < 188)= 0,96407

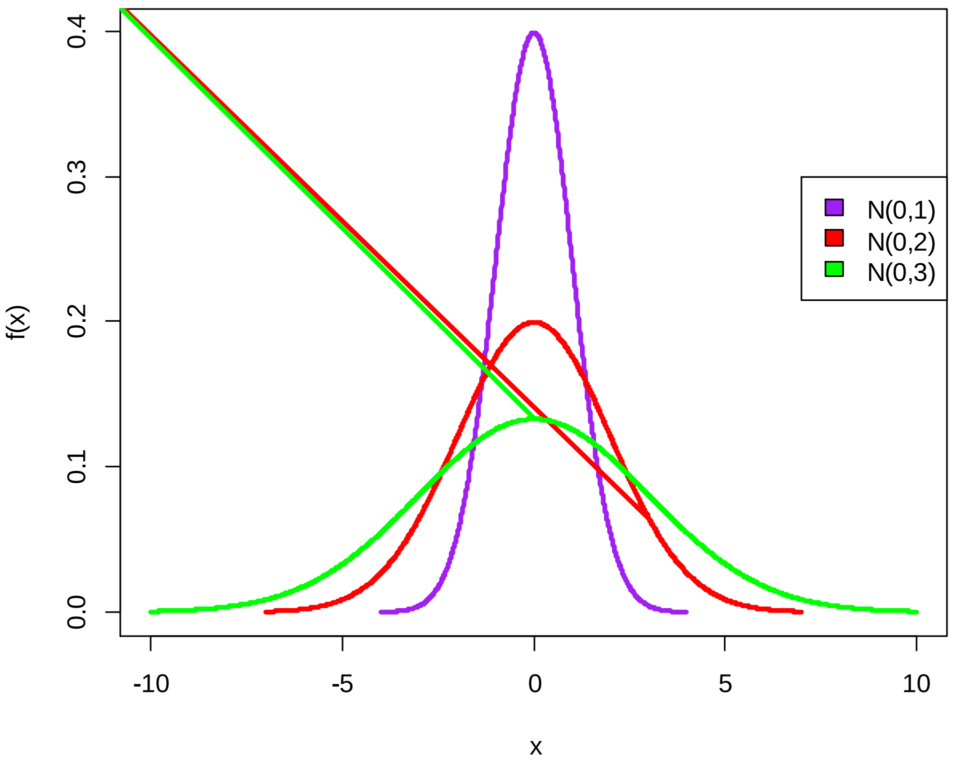
CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

- X es una variable aleatoria continua.
- Es simétrica respecto a su media μ .
- Tiene un máximo en $x = \mu$, por lo que la distribución es unimodal.
- $E(X) = \mu$.
- La mediana, la moda y la media aritmética coinciden.
- La curva es asintótica al eje x

DISTRIBUCIONES NORMALES CON DISTINTAS MEDIAS E IGUAL VARIANZA



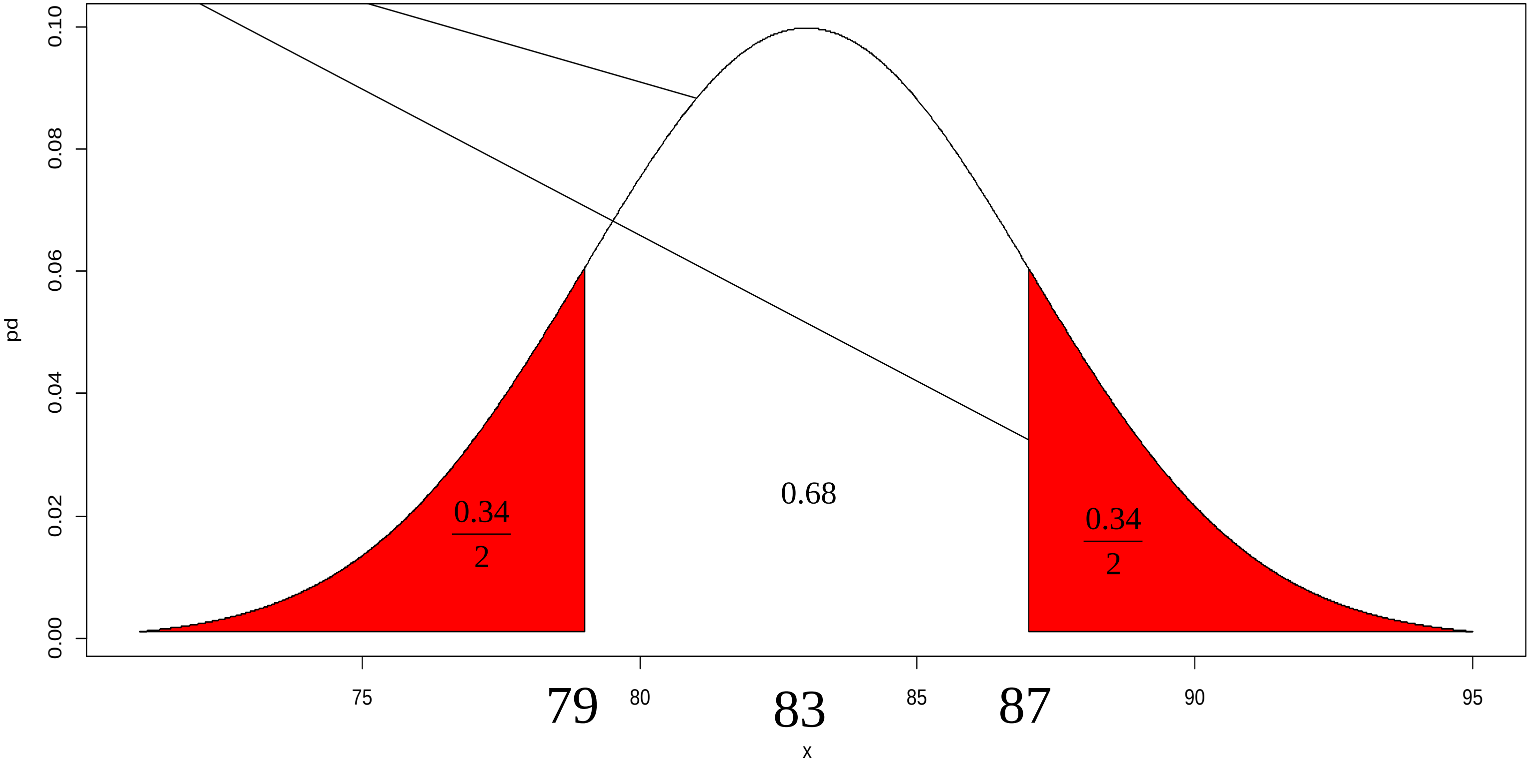
DISTRIBUCIONES CON IGUAL MEDIA Y DISTINTAS VARIANZAS



ÁREAS DEBAJO DE LA CURVA NORMAL

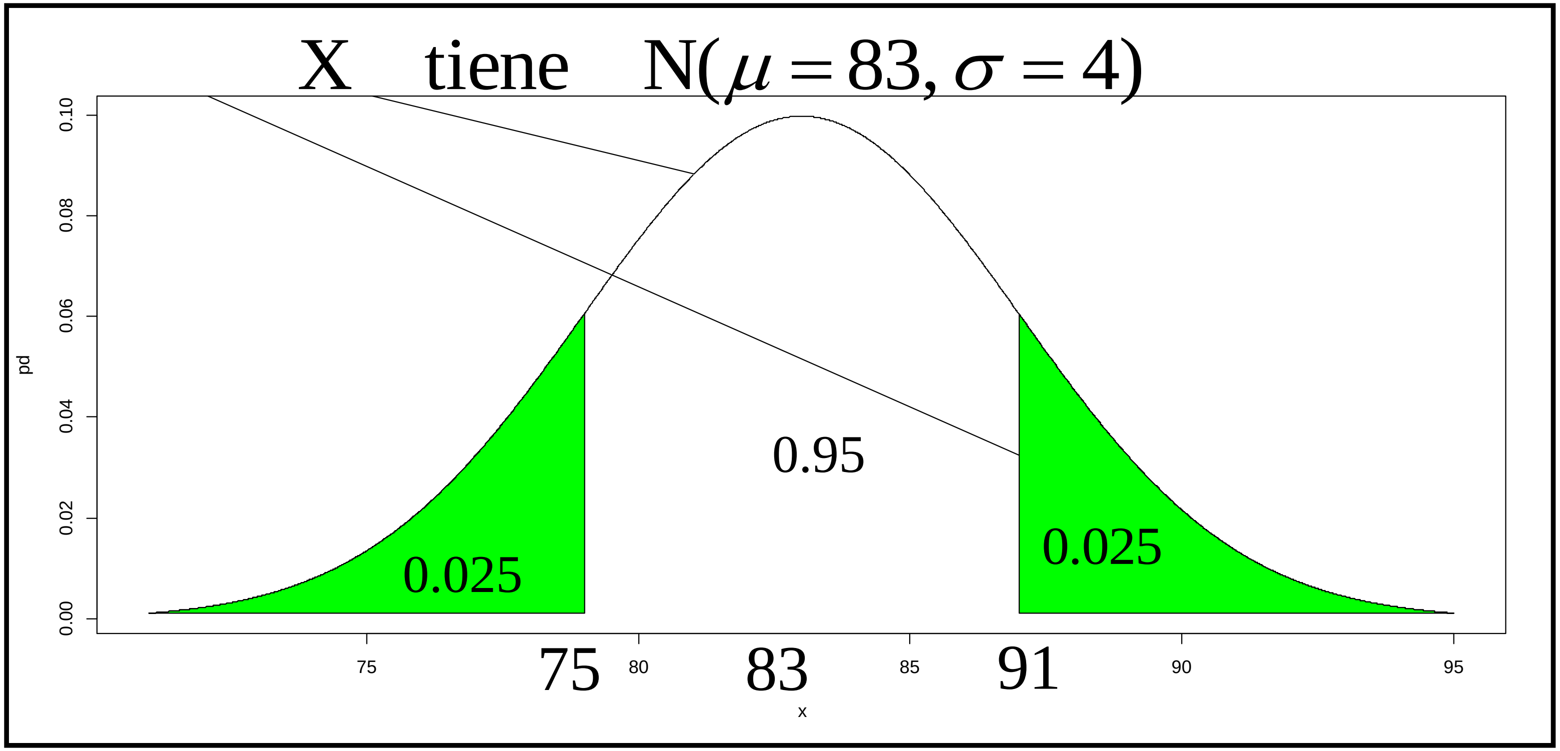
$$P(\mu\text{-}\sigma < X < \mu + \sigma) = P(83\text{-}4 < X < 83+4) =$$
$$P(79 < X < 87) = 0.68$$

$$X \quad \text{tiene} \quad N(\mu = 83, \sigma = 4)$$



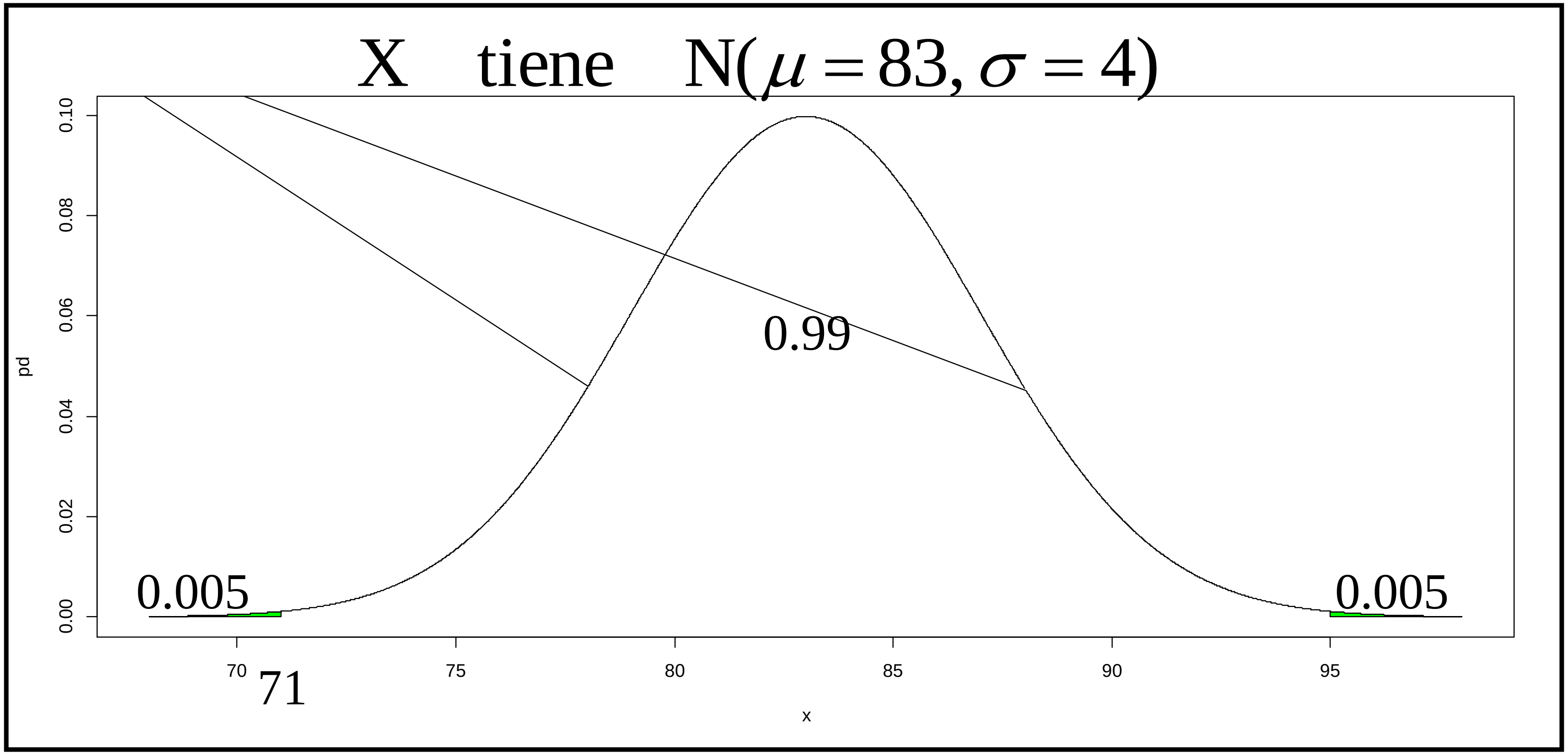
ÁREAS DEBAJO DE LA CURVA NORMAL

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(83-8 < X < 83+8) =$$
$$P(75 < X < 91) = 0.95$$



ÁREAS DEBAJO DE LA CURVA NORMAL

$$P(\mu\text{-}3\sigma < X < \mu+3\sigma) = P(83\text{-}12 < X < 83+12) =$$
$$P(71 < X < 95) = 0.99$$



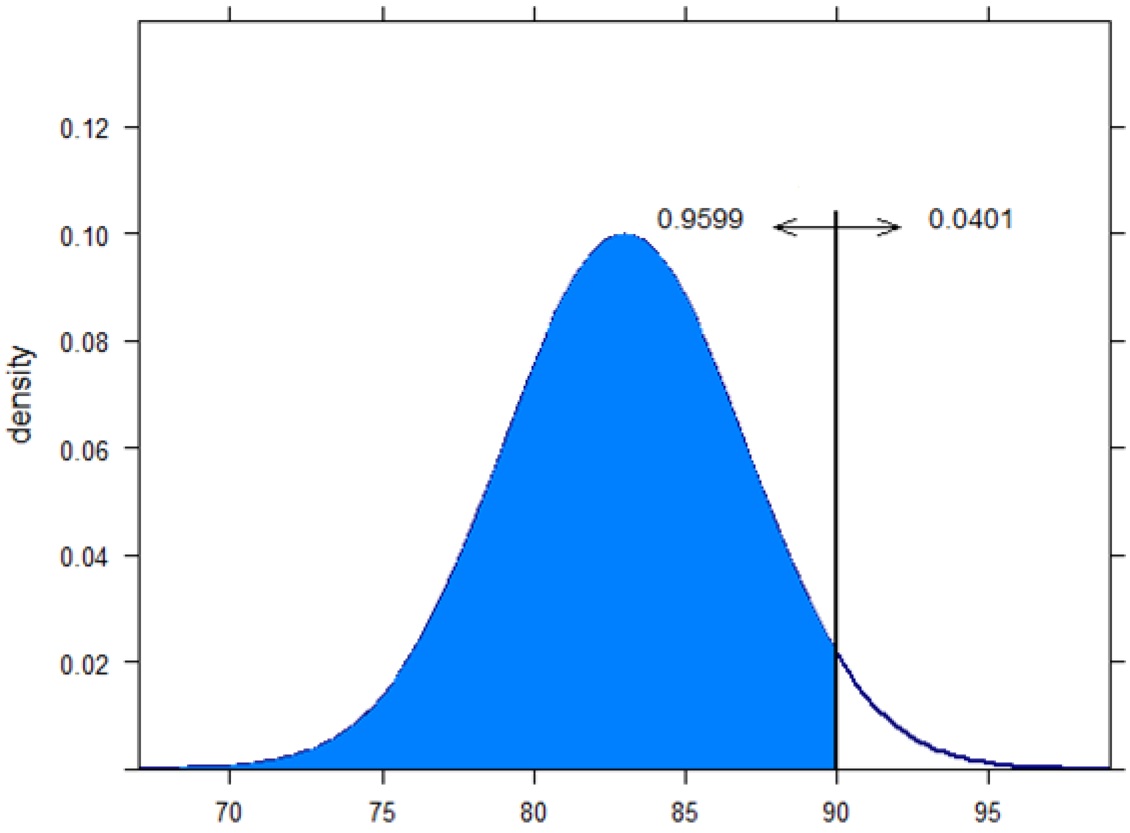
Ejemplo

- Supongamos que la glucosa sanguínea en mg por 100 ml de sangre tiene distribución normal con promedio **83** y desviación estándar **4.**

- Supongamos que en un paciente se encuentra un valor **superior a 90**. Para determinar si es habitual tener un valor de esa magnitud o superior, debemos conocer la probabilidad con que esto ocurre.

- Para calcular dicha probabilidad debemos calcular el área bajo la curva normal.

$P(X > 90) = 0.0401$



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

- **Definición:** La distribución de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno se llama **distribución normal estándar**
- **Esta transformación puede realizarse mediante la siguiente fórmula:**

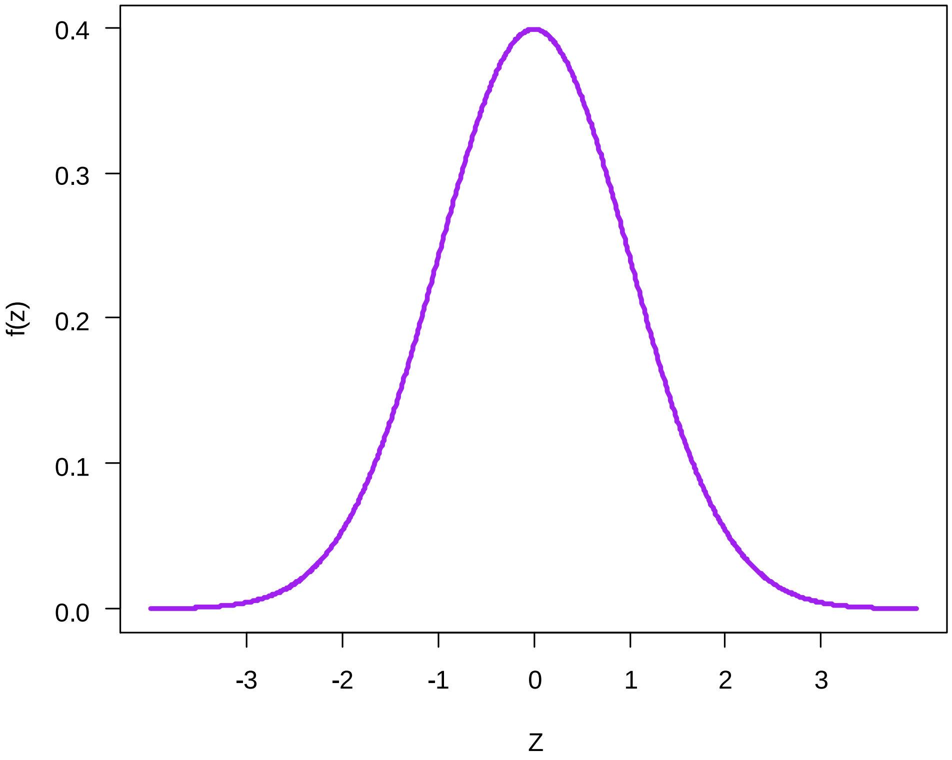
- **Si X ~ N(μ, σ) entonces:**

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x} - \mu}{\sigma}$$

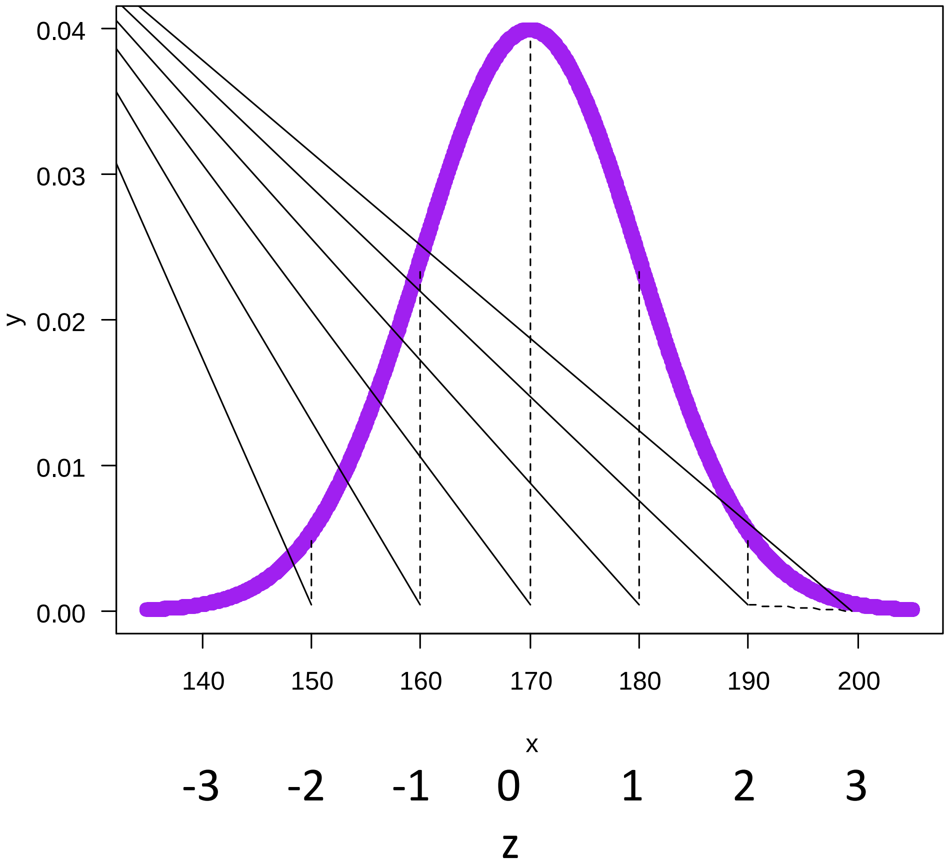
$$Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1^2)$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

$Z \sim N(\mu=0, \ \sigma=1)$



$X \sim N(\mu = 170, \ \sigma = 10)$ $Z \sim N(\mu = 0, \ \sigma = 1)$ $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$



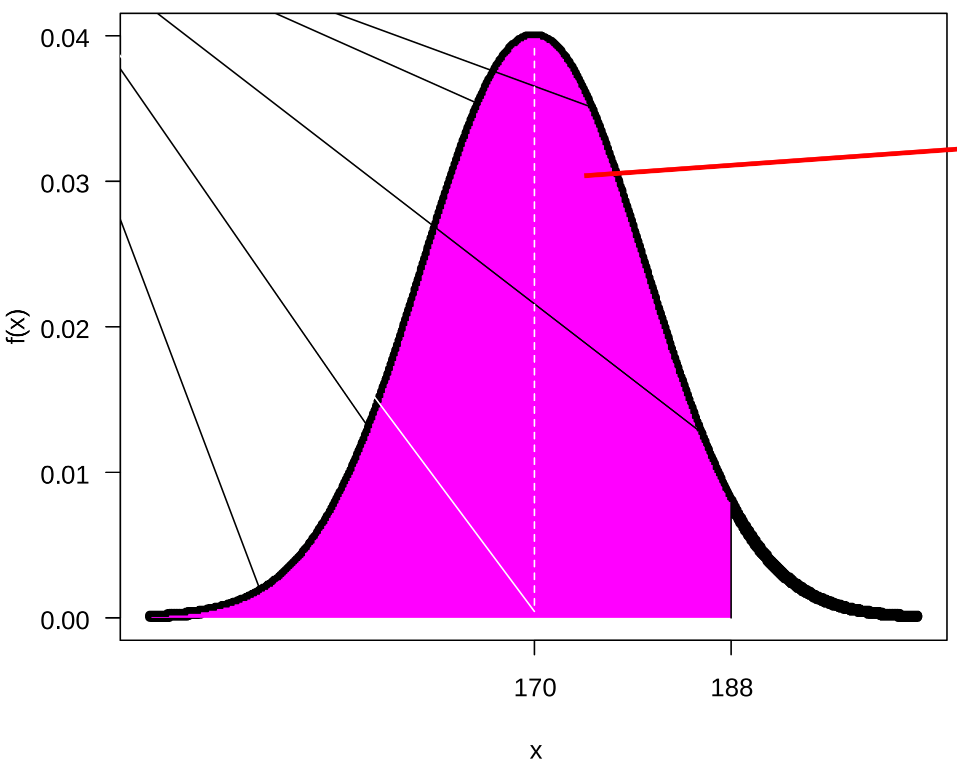
CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EJEMPLO 1:

X ~ N (μ= 170, σ=10)

P(X < 188) = F(188)= 0,96407 si estandarizamos

$$P(Z < \frac{188-170}{10}) = P(Z < 1,8) = 0,96407$$



P(X <188)=0,96407

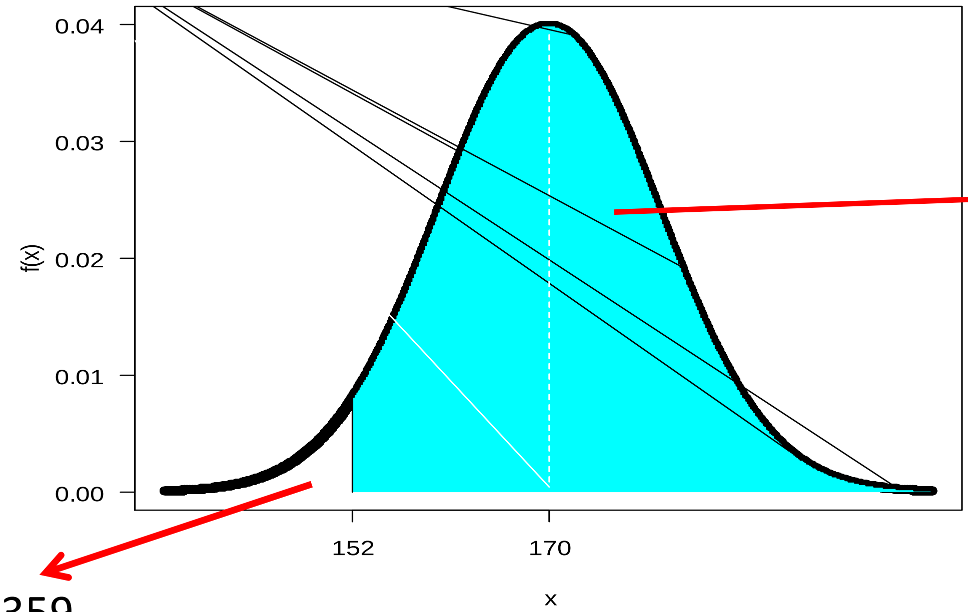
CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EJEMPLO 2:

X ~ N (μ= 170, σ=10)

P(X > 152) = 1- P(X < 152) = 1 - 0,0359 = 0,96407

Si estandarizamos : P(Z > $\frac{152-170}{10}$ **)= P(Z > - 1,8) = 1- P(Z < -1,8)= 1- 0,0359= 0,96407**



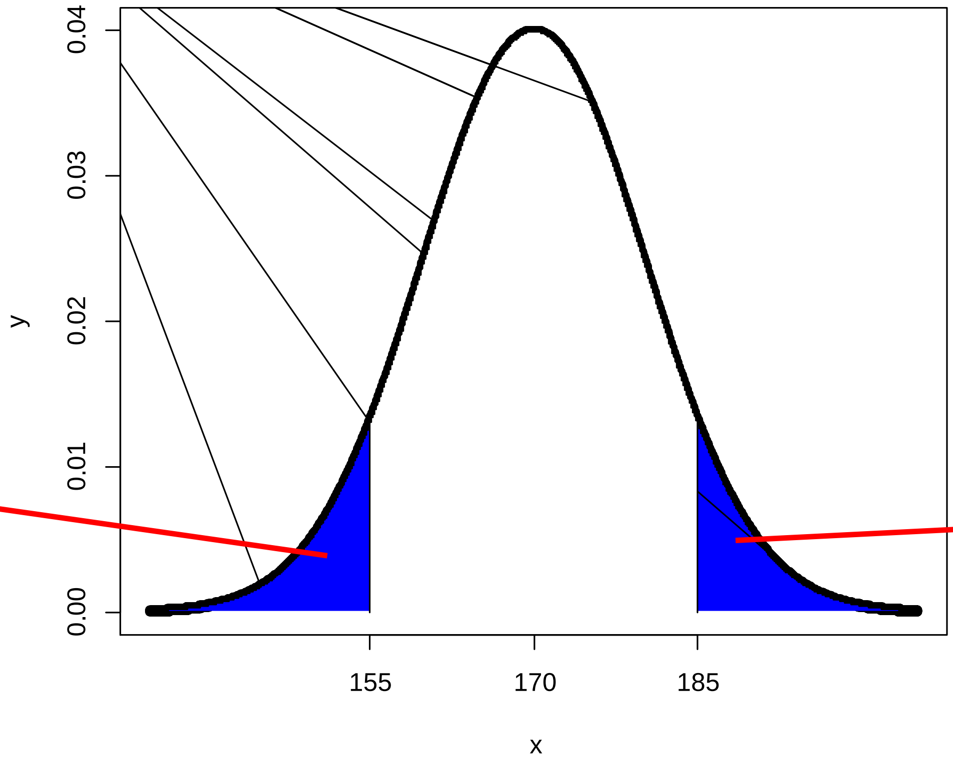
P(X>152)=0,96407

P(X<152)=0,0359

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EJEMPLO 2

P(X< 155)



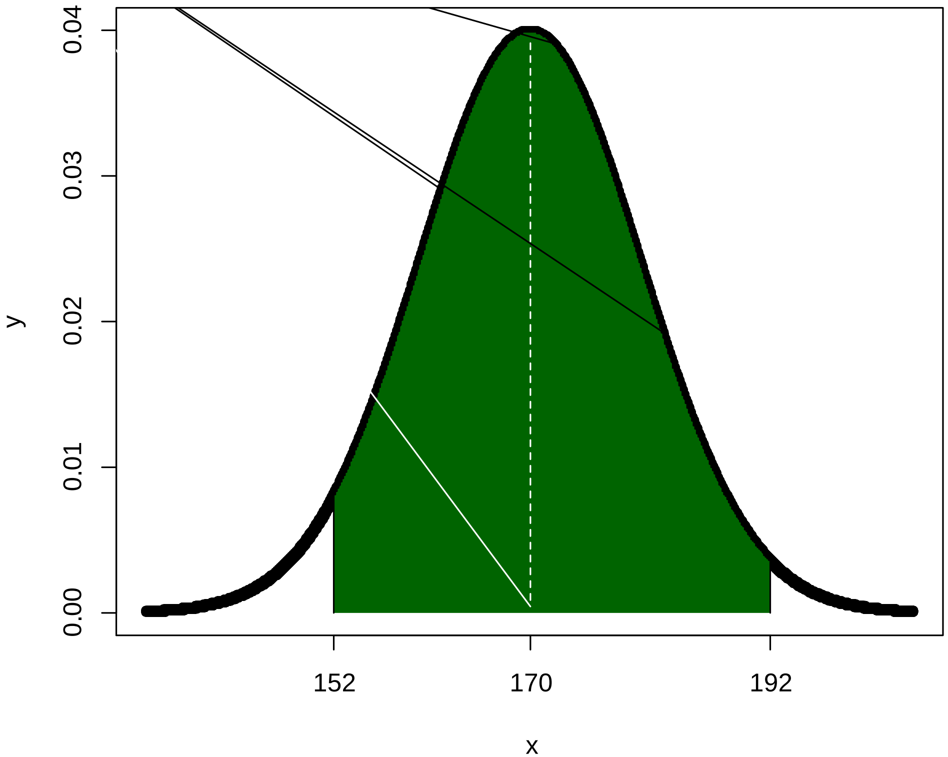
P(X > 185)

Como 155 y 185 son simétricos (están a la misma distancia de la media)

P(X< 155)= P(X> 185)= 0,0668 $\cong 0,067$

P(155 < X < 185)= 1- 2. P(X<155) = 1- 2. 0,067= 1- 0,134= 0,866

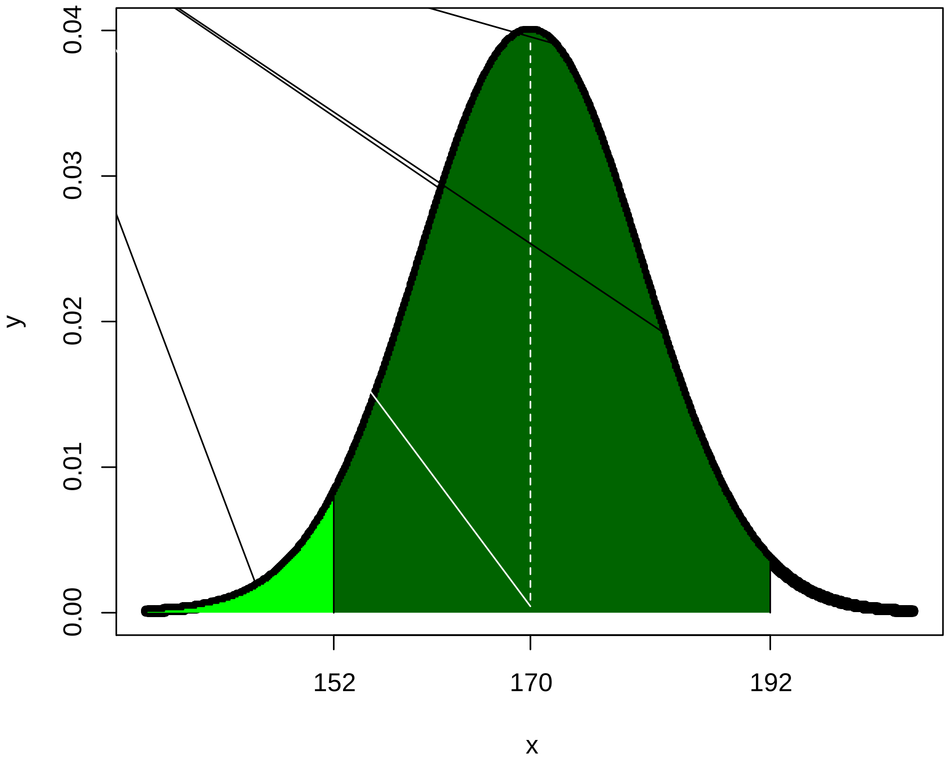
EJEMPLO 3 : P(152<X<192)   152 y 192 no son simétricos



P(152<X<192)= área coloreada – área verde claro

P(152<X<192= P(X<192)-P(X<152)

P(152<X<192)= 0,9861-0,0359=0,9502



CÁLCULO DE CUANTILES (PERCENTILES)

Percentil 25 = Cuantil 0,25 = Primer cuartil

Calcular el cuantil 0,25 de X ~ N(170,10) si se sabe que P(Z < -0,67)=0,25 entonces:

$$z_{0,25} = -0{,}67$$

$$z_{0,25} = \frac{x_{0,25} - \mu}{\sigma}$$

$$x_{0,25} = z_{0,25} . \sigma + \mu$$

$$x_{0,25} = -0{,}67 . 10 + 170 = 163{,}3$$

CÁLCULO DE CUANTILES (PERCENTILES)

- Si X tiene distribución normal con $\mu=170$ y $\sigma=10$

¿Entre que valores se encuentra el 90% central de los valores de X?

Si se sabe que $P(-1.64 < Z < 1.64) = 0.90$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

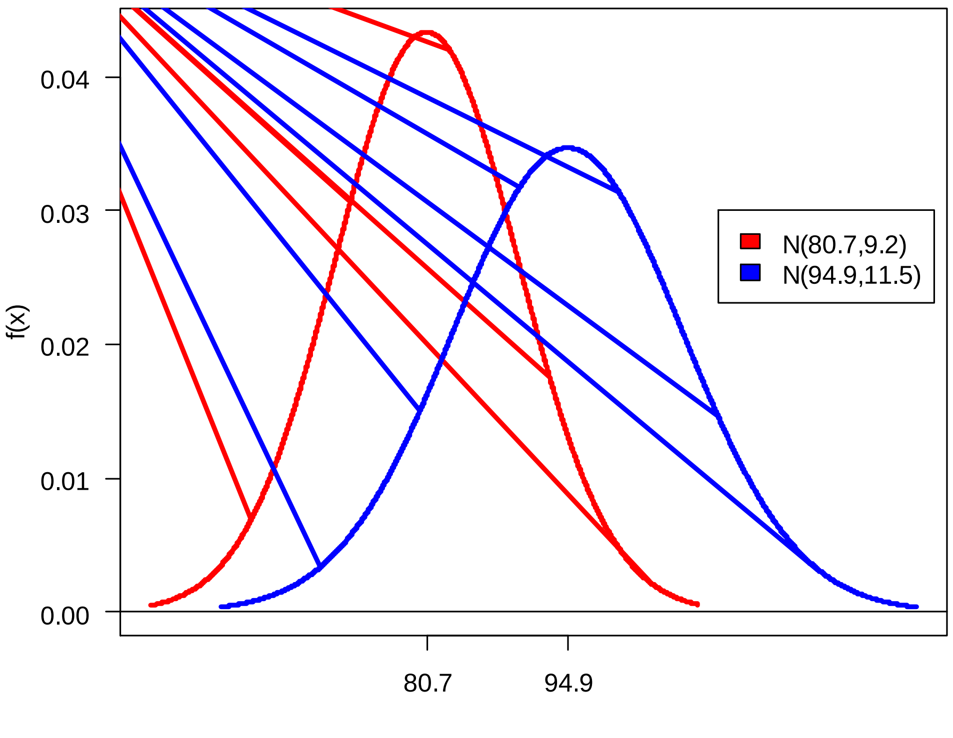
$$x_1 = -z \cdot \sigma + \mu = -1{,}64 \cdot 10 + 170 = 153{,}6$$
$$x_2 = z \cdot \sigma + \mu = 1{,}64 \cdot 10 + 170 = 186{,}4$$

$$P(153{,}6 < X < 186{,}4) = 0{,}90$$

APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Supongamos dos poblaciones de hombres. En una de las poblaciones, los hombres no toman medicamentos, tienen una presión diastólica que se distribuye de manera aproximadamente normal con $\mu_n = 80{,}7\ mmHg,\ \sigma_n = 9{,}2\ mmHg$.

En la otra población, los hombres toman medicamentos antihipertensivos, y en ellos la presión diastólica tiene distribución aproximadamente normal con $\mu_a = 94.9\ mmHg\ y\ \sigma_a = 11{,}5\ mmHg$



Nuestro objetivo es determinar si un hombre elegido al azar goza de una presión arterial normal o si es un hombre que toma antihipertensivos, basándonos exclusivamente en la lectura de la presión arterial diastólica.

Pero dado el alto grado de superposición de las curvas será difícil identificar a que población pertenece.

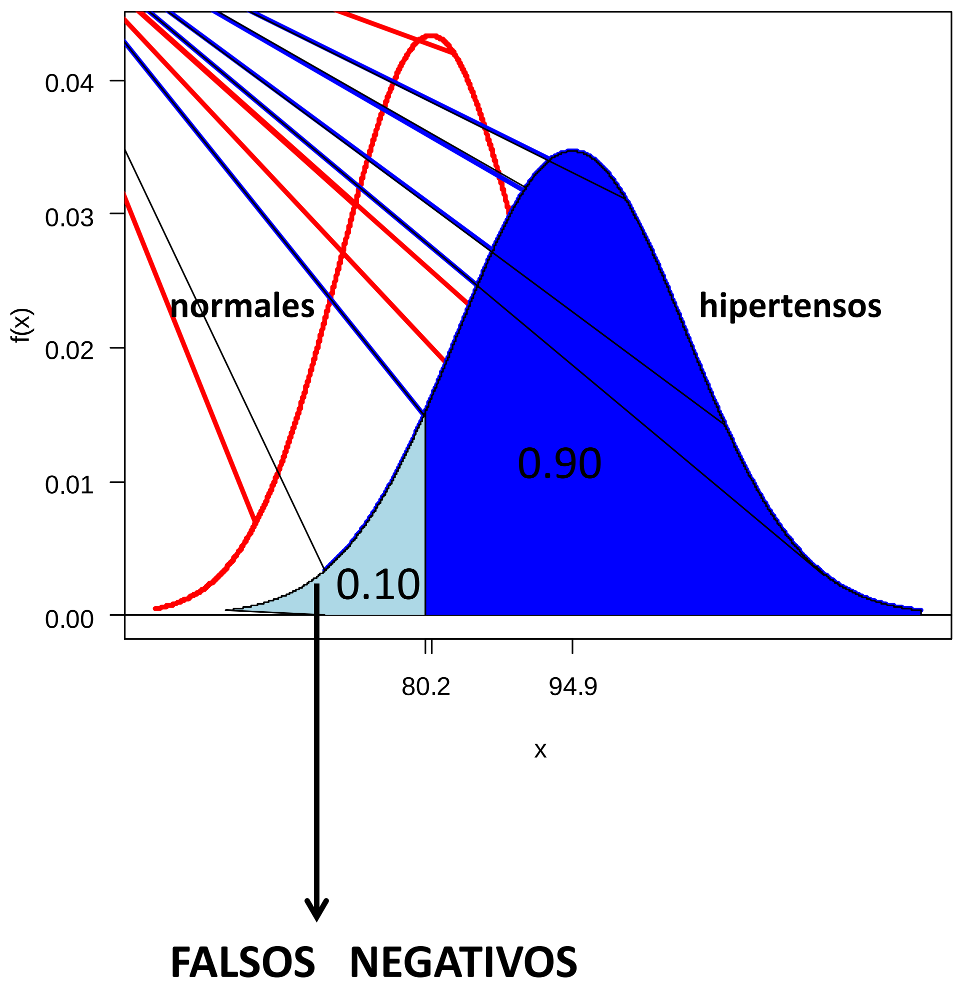
Si nuestro objetivo es identificar al 90% de los varones que toman medicamentos; debemos encontrar el valor de la variable que separa al 10% inferior del 90% superior

$$z_{0.10} = -1{,}28$$

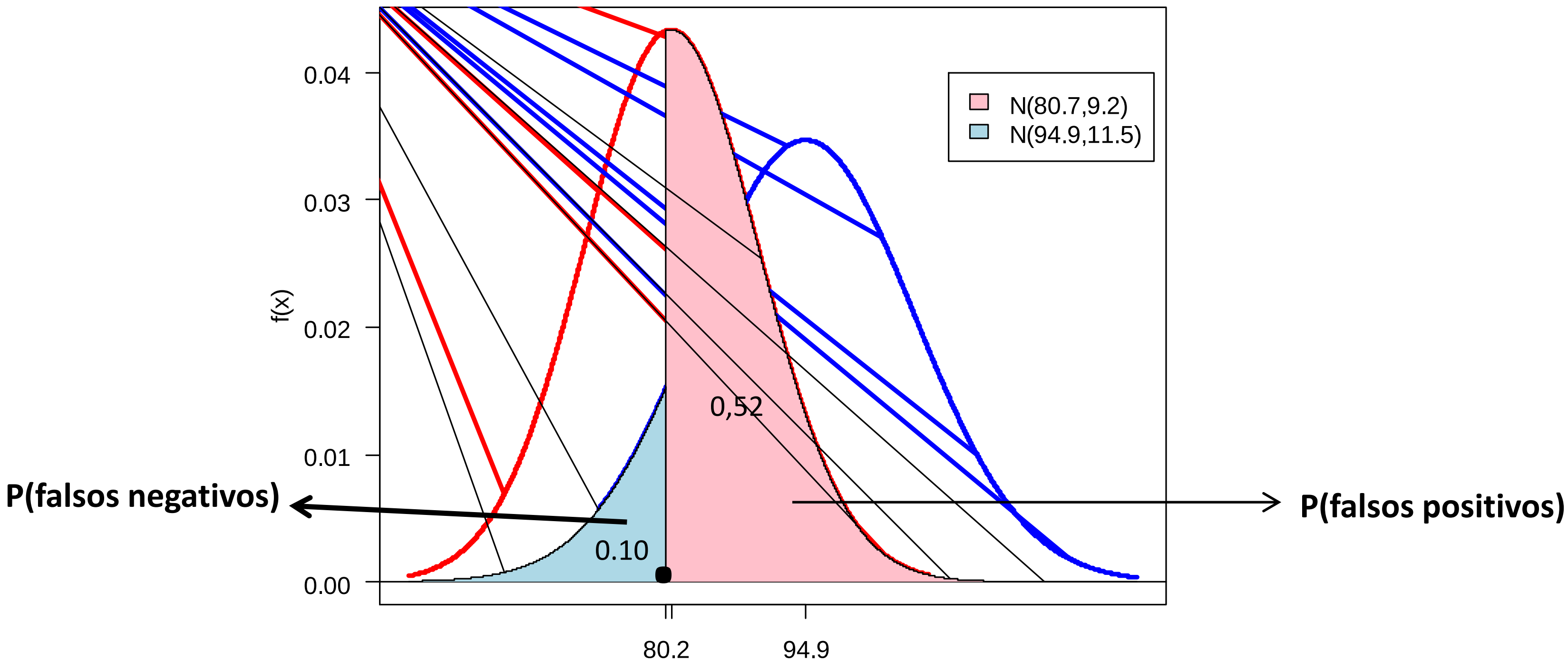
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x_{0.10} = 94{,}9 + (-1{,}28)11{,}5$$
$$= 80{,}2$$

SE HA TOMADO COMO PUNTO DE CORTE EL VALOR 80,2



0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
f(x)
normales
hipertensos
0.90
0.10
80.2
94.9
x
FALSOS NEGATIVOS



El 90% de los varones que toman medicamentos tienen presiones diastólicas mayores a 80,2 mmHg. Por lo tanto, tenemos el 10% de falsos negativos.

¿Qué proporción de hombres con presiones arteriales normales se clasificarán como consumidores de medicamentos antihipertensivos? **(ZONA ROSADA)**
SON LOS FALSOS POSITIVOS

Buscamos el Z correspondiente a 80,2 mmHg en la distribución de los varones que no toman medicamentos hipertensivos (ZONA ROSADA)

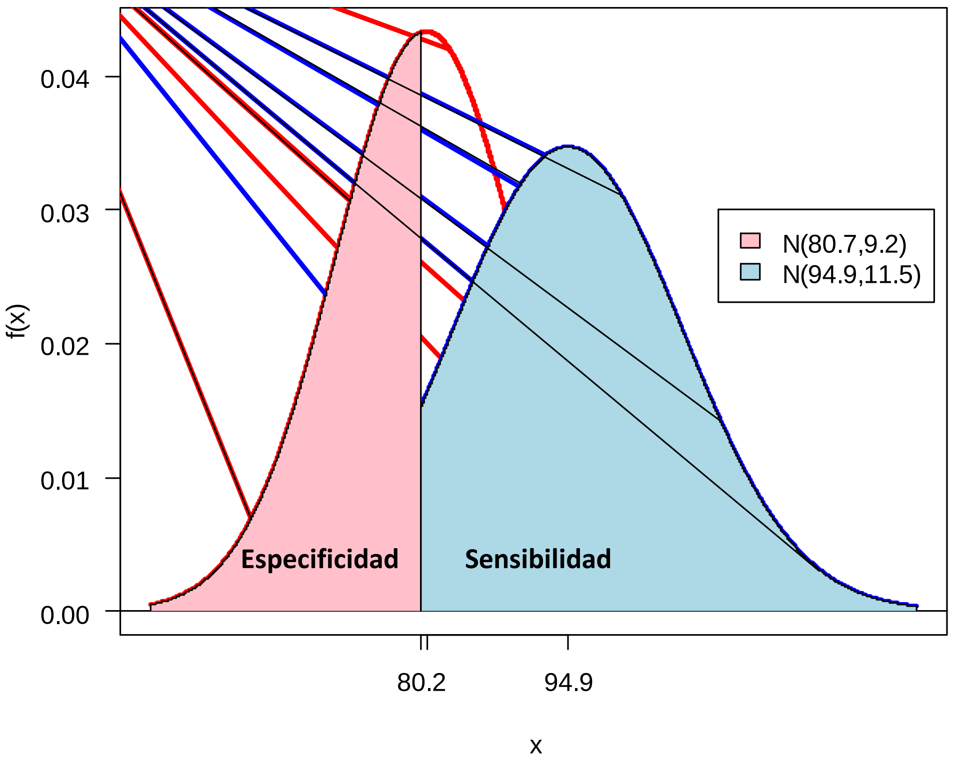
$z = \frac{80,2 - 80,7}{9,2}$ =-0,05

P(Z < -0,05)= 0,480

1- 0,48= 0,52

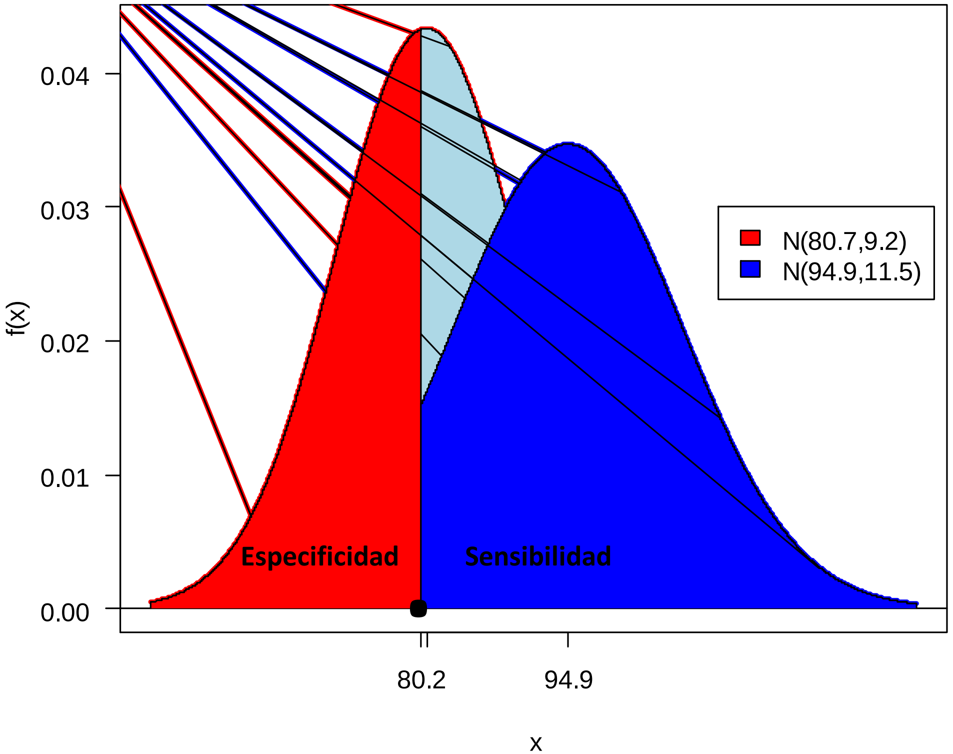
El 52% de los varones con presiones normales serán clasificados como consumidores de medicamentos. Es decir, que el 52% son falsos positivos

SENSIBILIDAD Y ESPECIFICIDAD



SI AUMENTO LA SENSIBILIDAD, DISMINUYE LA ESPECIFICIDAD Y SI DISMINUYO LA SENSIBILIDAD AUMENTA LA ESPECIFICIDAD

SENSIBILIDAD Y ESPECIFICIDAD



DISTRIBUCIÓN T- STUDENT

- Una variable aleatoria tiene distribución t de Student con parámetro υ (grados de libertad) si su función de densidad está dada por:

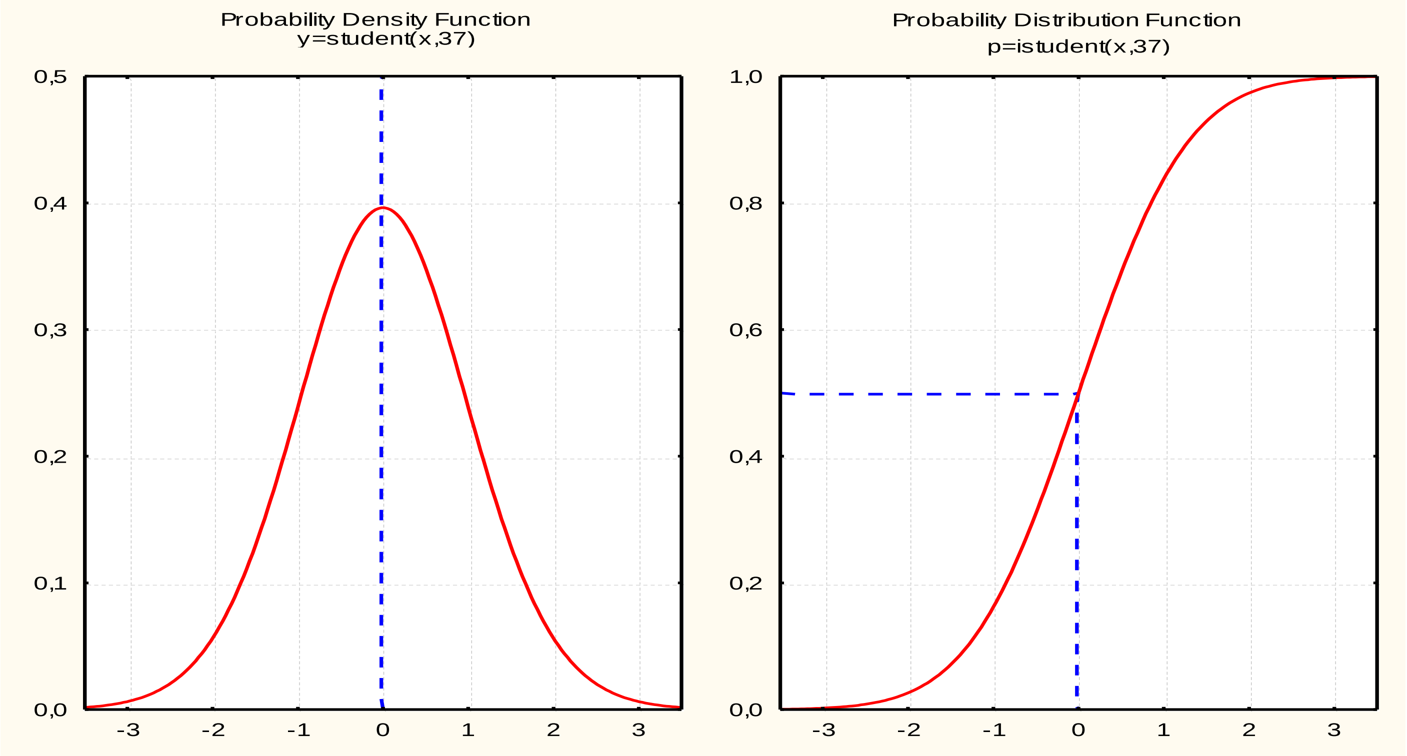
f : $R \rightarrow R+$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{\upsilon+1}{2})}{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})\sqrt{\Pi\upsilon}}\left(1+\frac{x^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}$$

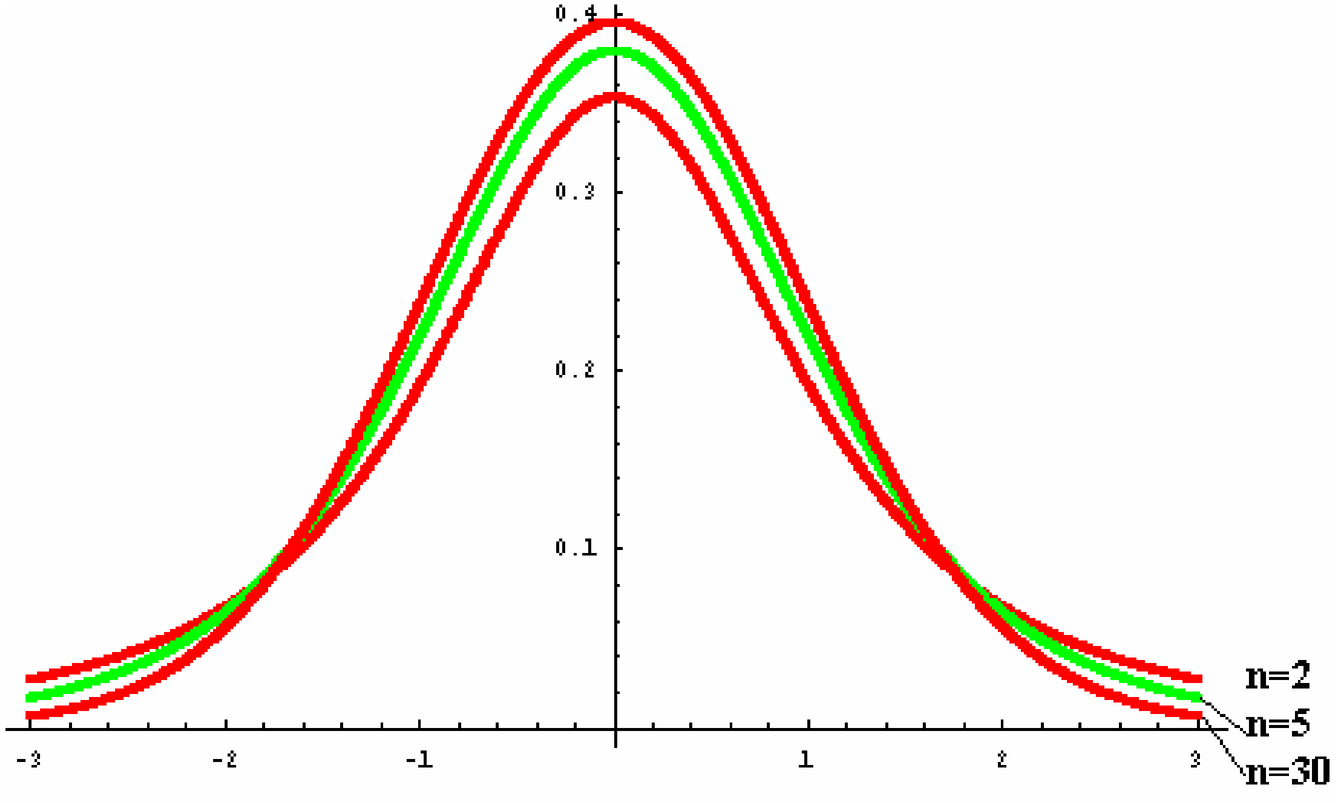
υ= enteros positivos

$$E(X) = 0 \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{\upsilon}{\upsilon - 2} \qquad \upsilon > 2$$

GRAFICA DE LA F DENSIDAD Y F. DE DISTRIBUCIÓN DE UNA V. CON DISTRIBUCIÓN T-STUDENT



FUNCIÓN DENSIDAD DE UNA VARIABLE CON DISTRIBUCIÓN T – STUDENT CON DISTINTOS GRADOS DE LIBERTAD



En el gráfico vemos que para *n* grande la distribución *t* con *n* grados de libertad es aproximadamente igual a la distribución normal.

DISTRIBUCIÓN CHI-UADRADO

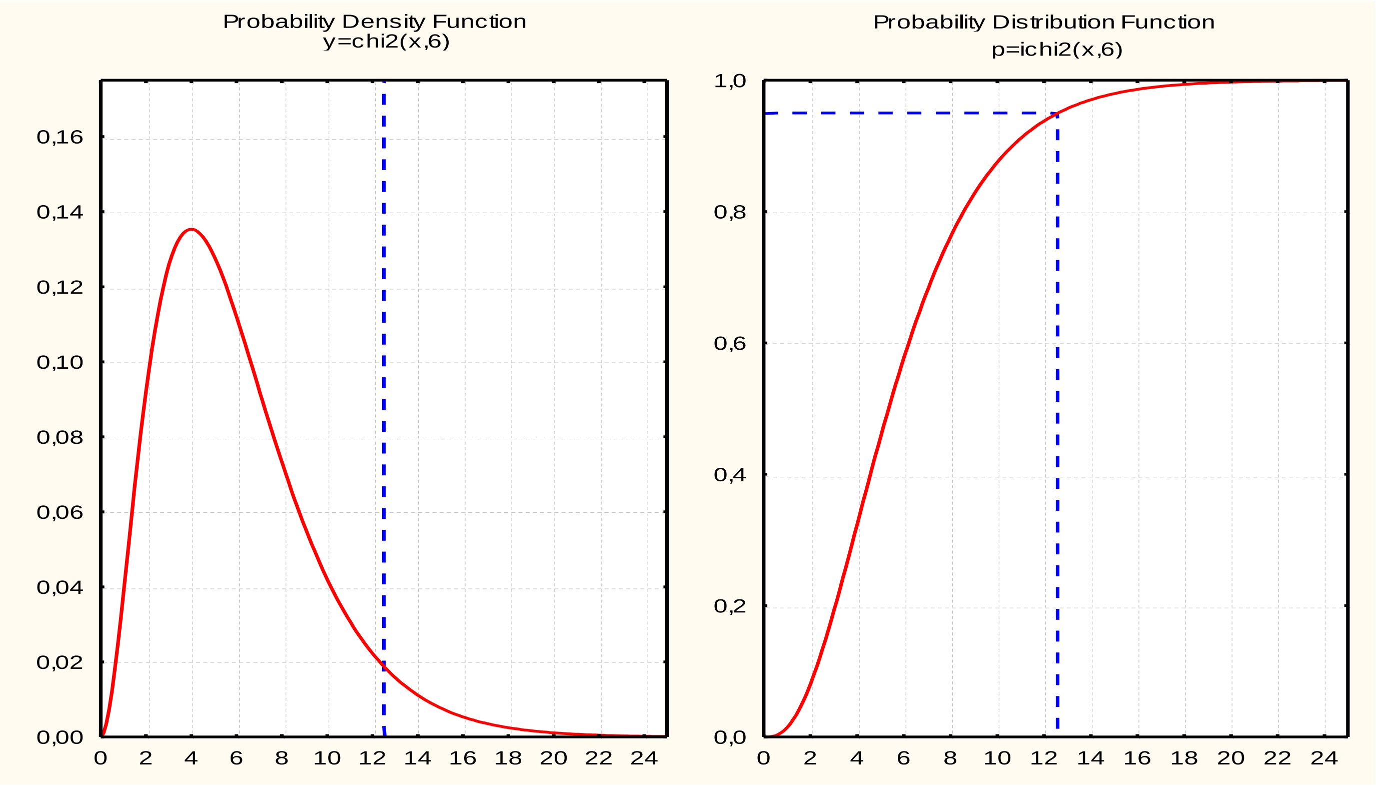
$$\chi^2$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\ 2^{\frac{\upsilon}{2}}}\ x^{\frac{\upsilon}{2}-1}\ e^{-\frac{x}{2}}\ I_{(0,\infty)}(x)$$

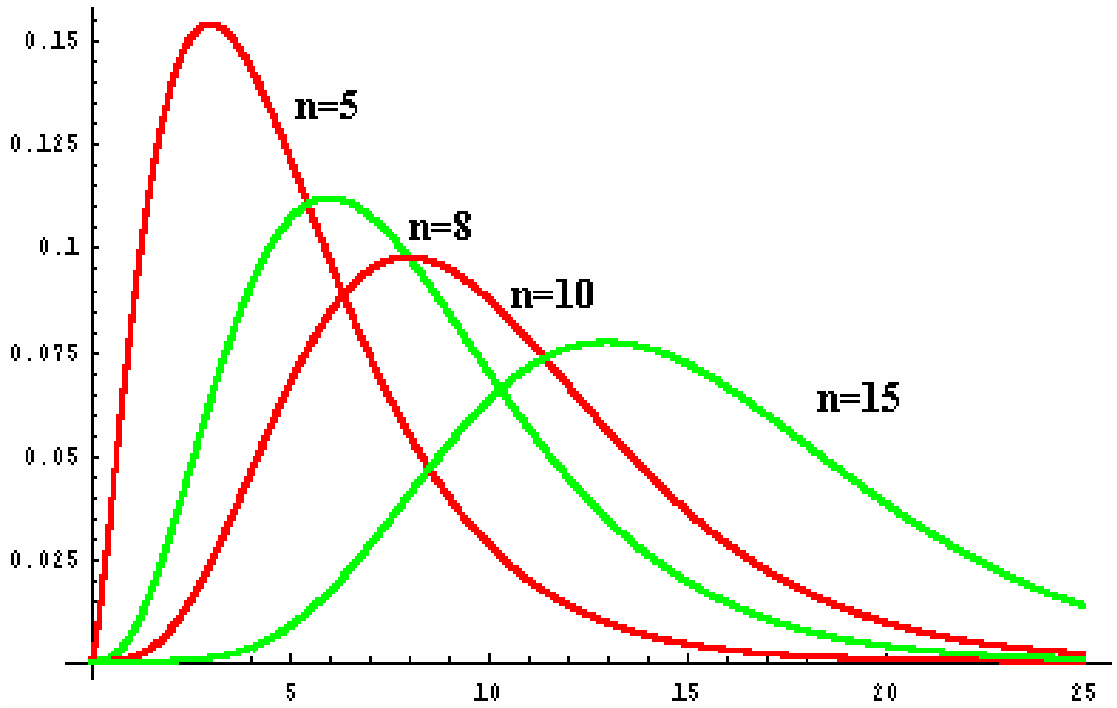
$$E(X) = \upsilon$$

$$Var(X) = 2\upsilon$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD Y FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA V. A. CHI-CUADRADO



Función densidad de una variable con distribución Chi-Cuadrado con distintos Grados de libertad.



Obsérvese que a medida que el número de libertad aumenta la curva se achata, esto se debe que aumenta también la media y la varianza.