Capítulo 1

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

1.1.1. Ecuaciones lineales

Definición 1.1.1. Una *ecuación lineal* con coeficientes en los números reales $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, donde $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ son términos conocidos. A los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ se les denominan *coeficientes*, a b *término independiente* y a los símbolos $x_1, x_2, ..., x_n$ incógnitas.

Como es habitual, para un número pequeño de incógnitas utilizaremos las letras x, y, z, t, etc.

Observación 1.1.2. Nótese que, en una ecuación lineal, no pueden aparecer incógnitas al cuadrado, producto de incógnitas, ni funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.

Ejemplo 1.1.3. Las ecuaciones $2x + 5y = 0$ y $3x - y + 7z = 13$ son ecuaciones lineales, mientras que las ecuaciones $2x^2 + y = 5$, $xy + z = 0$ y $\operatorname{sen}(x) + y + z = 9$ no lo son.

Definición 1.1.4. Una *solución* de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ es un conjunto de n valores en $\mathbb{R}$, $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, tales que $a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b$.

Ejemplo 1.1.5. Consideremos la ecuación $2x + 3y = 5$. Una solución de esta ecuación sería $x = 1$, $y = 1$; otra solución sería $x = 0$ e $y = \frac{5}{3}$.

1.1.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 1.1.6. Llamamos *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* a una expresión de la forma

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

Llamaremos *solución del sistema* a cada asignación de valores reales a las incógnitas, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, que sea solución de todas las ecuaciones del sistema. Se dirá también que $(c_1, c_2, ..., c_n)$ es solución del sistema. Se llama *solución general* del sistema al conjunto de todas las soluciones del sistema. Diremos que dos sistemas son *sistemas equivalentes* si tienen la misma solución general, es decir, si tienen exactamente las mismas soluciones.

Ejemplo 1.1.7. Una solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

es $x = 1$ e $y = 1$. De hecho, es la única solución del sistema. Sin embargo, el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

no tienen solución, mientras que el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones. De hecho, la solución general del sistema es el conjunto $(\lambda, 2 - \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.1.3. Discusión de un sistema

Dado un sistema de ecuaciones, vamos a poder clasificarlo según el número de soluciones que tenga de la siguiente forma:

- **Sistema compatible determinado:** El sistema tiene una única solución.
- **Sistema compatible indeterminado:** El sistema tiene infinitas soluciones.
- **Sistema incompatible:** El sistema no tiene solución.

Al proceso de estudiar a cuál de estos tipos pertenece un sistema dado se le denomina *discutir* el sistema.

Definición 1.1.8. Se dice que un sistema de ecuaciones es *homogéneo* si cada término independiente es cero, es decir, el sistema es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Observación 1.1.9. Como todo sistema homogéneo admite la solución trivial, es decir, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, entonces es compatible.

1.1.4. Método de Gauss-Jordan

Veamos ahora cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales. La filosofía de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan es simple: a partir de un sistema dado, conseguir otro con exactamente las mismas soluciones (es decir, un sistema equivalente) pero más simple. Veamos un ejemplo práctico.

Ejemplo 1.1.10. Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+2y+10z=18 \\ 2x+3y+12z=23 \\ 2y+5z=11 \end{array}\right. .$$

Podemos simplificar la primera ecuación dividiéndola entre 2 (esto no afecta a las soluciones del sistema):

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+5z=9 \\ 2x+3y+12z=23 \\ 2y+5z=11 \end{array}\right. .$$

Ahora, si restamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por 2, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+5z=9 \\ y+2z=5 \\ 2y+5z=11 \end{array}\right. .$$

De igual forma, podemos restar a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 2:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+5z=9 \\ y+2z=5 \\ z=1 \end{array}\right. .$$

Tenemos entonces lo que llamaremos un sistema escalonado y podemos seguir dos caminos en este momento:

- **El método de Gauss:** consiste en hacer sustitución regresiva, es decir, sustituir en la segunda ecuación el valor obtenido para z ($z=1$) y despejar la variable y:

  $$y=5-2z=5-2=3$$

  para, posteriormente, sustituir en la primera ecuación los valores obtenidos de z e y, despejando así la variable x:

  $$x=9-y-5z=9-3-5=1.$$

  Luego, ya tenemos el sistema resuelto, cuya única solución es $x=1$, $y=3$, $z=1$.

- **El método de Gauss-Jordan:** consiste en seguir simplificando el sistema. Restamos ahora a la segunda ecuación la tercera multiplicada por 2, y a la primera la tercera multiplicada por 5:

  $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & & =4 \\ & y & & =3 \\ & & z & =1 \end{array}\right. .$$

  Finalmente, a la primera ecuación le restamos la segunda:

  $$\left\{\begin{array}{rrrl} x & & & =1 \\ & y & & =3 \\ & & z & =1 \end{array}\right. ,$$

  obteniendo así la única solución del sistema.

Proposición 1.1.11. *Si en un sistema de ecuaciones se intercambian dos ecuaciones, se multiplica una ecuación por un número real distinto de cero o se suma a una ecuación otra multiplicada por un número real, se obtiene un sistema de ecuaciones equivalente.*

Algoritmo para convertir un sistema en escalonado reducido:

1. Se lleva al primer lugar una ecuación con coeficiente no nulo para la incógnita x_1.

2. Se divide esta primera ecuación por el coeficiente de x_1 de forma que se obtenga coeficiente 1 para x_1 (si, en el paso 1, podemos poner como primera ecuación una que ya tenga el coeficiente de x_1 igual a 1, este paso no sería neesario).

3. Se elimina la incógnita x_1 de las restantes ecuaciones, restándoles la primera multiplicada por el número conveniente. Así, la incógnita x_1 aparecerá solamente en la primera ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

Ahora, se fija la primera ecuación, y se repite el proceso (pasos 1, 2 y 3) para las restantes ecuaciones y la incógnita x_2:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a'_{3n}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots \\ a'_{m3}x_3 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array} \right. .$$

Repitiendo el proceso mientras sea posible, obtendremos un *sistema escalonado* (la primera incógnita de cada ecuación tiene coeficiente 1 y no aparece en las siguientes). Además, la ecuación $0 = 0$ es verificada por cualquier asignación de valores que se dé a las incógnitas y, si aparece, puede ser eliminada. (Hasta aquí, hemos aplicado el método de Gauss).

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + ... + a'_{3r}x_r + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots \\ x_r + ... + a''_{rn}x_n = b''_r \end{array} \right. .$$

Pero aún podemos simplificar más. Llamaremos *incógnitas principales* a las incógnitas que aparecen como primera incógnita en alguna de las ecuaciones, e *incógnitas libres o secundarias* a las restantes (si las hay). Cada incógnita principal de una ecuación puede ser eliminada de las restantes (aplicando el método de Gauss-Jordan) y obtenemos así un *sistema de ecuaciones escalonado reducido* (cada incógnita que es la primera de una ecuación no aparece en las restantes ecuaciones).

Discusión y resolución de sistemas escalonados reducidos:

Ya sabemos simplificar un sistema hasta obtener un sistema escalonado reducido (método de Gauss-Jordan), pero no todos los sistemas escalonados reducidos son tan simples como el del ejemplo 1.1.10. Veamos los distintos casos que se nos pueden presentar:

1. Si aparece una ecuación del tipo $0 = b$, con $b \neq 0$, el sistema será incompatible, ya que ninguna asignación de valores a las incógnitas pueden ser solución de esta ecuación.

2. Si todas las incógnitas son principales, es decir, el sistema escalonado reducido es de la forma

$$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 \\ & x_2 & & = b_2 \\ & & \dots & \\ & & x_n & = b_n \end{cases}$$

entonces obtenemos un sistema compatible determinado, cuya única solución es $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, ..., $x_n = b_n$.

3. Si existen incógnitas libres, entonces las incógnitas principales pueden despejarse en función de las libres y, por tanto, existe una solución del sistema para cada elección que se haga de las incógnitas libres. El sistema será entonces compatible indeterminado, y la solución general del sistema se obtendrá asignando un parámetro a cada una de las incógnitas libres.

Ejemplo 1.1.12. En el sistema escalonado reducido

$$\begin{cases} x \quad + z = 1 \\ \quad y + z = 1 \end{cases}$$

las incógnitas x e y son las principales, y la incógnita z es libre. Despejando las incógnitas principales se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x \quad = 1 - z \\ \quad y = 1 - z \end{cases}$$

y, por tanto, las soluciones del sistema son $x = 1 - \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = \lambda$, donde λ varía entre todos los núeros reales.

1.2. Matrices. Transformaciones elementales

1.2.1. Matrices

Definición 1.2.1. Una *matriz*, de dimensión (o orden) $m \times n$, con coeficientes en $\mathbb{R}$ es una "tabla" de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

constituida por mn elementos de $\mathbb{R}$ distribuidos en m filas y n columnas, de forma que denotamos por a_{ij} al elemento situado en la fila i, columna j. De forma reducida, $A = (a_{ij})_{i,j}$.

Ejemplo 1.2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden 2×3, es decir, tienes dos filas y tres columnas. Por ejemplo, a_{13} es el elemento que se encuentra en la primera fila, tercera columna, es decir, $a_{13} = 9$.

Observación 1.2.3. Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión e iguales elementos en cada una de sus posiciones.

Ejemplo 1.2.4.

- Las matrices
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & b \end{pmatrix}$$
son iguales si, y sólo si, $a = 1$ y $b = 6$.

- Las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
no son iguales, ya que no tienen la misma dimensión.

De una matriz que tenga una sola fila, diremos que es una *matriz fila* y, de una matriz que tenga una única columna, diremos que es una *matriz columna*. Una matriz diremos que es *cuadrada* si tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, tiene dimensión $n \times n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Al conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si $n = m$, escribiremos simplemente $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Para una matriz A, llamaremos *submatriz de* A a cada matriz que se obtenga de A suprimiendo algunas de sus filas y sus columnas.

1.2.2. Matrices triangulares y diagonales

Definición 1.2.5. Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} constituyen su *diagonal principal*. Se dice que A es una *matriz diagonal* si todos los elementos fuera de su diagonal principal son cero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diremos que A es *triangular superior* si todos los elementos por debajo de su diagonal principal son cero
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
diremos que A es *triangular inferor* si todos los elementos por encima de su diagonal principal son cero
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Llamaremos *matriz identidad de orden* n, y la denotaremos por I_n, a la matriz cuadrada de orden n cuya diagonal principal está formada por unos, y ceros fuera de ella,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, llamaremos *traza de* A, y lo denotaremos por $\operatorname{tr}(A)$, a la suma de los elementos de su diagonal principal, $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

1.2.3. Matrices escalonadas reducidas

Definición 1.2.6. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz. Llamaremos *pivote* de una fila (o una columna) de A al primer elemento no nulo de dicha fila (o columna), si es que hay alguno. La matriz A se dice que es *escalonada por filas* si verifica las siguientes propiedades:

1. Si A tiene filas compuestas enteramente por ceros (filas nulas), estas están agrupadas en la parte inferior de la matriz.

2. El pivote de cada fila no nula es 1.

3. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior.

4. Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila y debajo de él, son todos ceros.

Diremos que A es *escalonada reducida por filas* si verifica los puntos 1, 2 y 3 anteriores y, además,

- Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila son todos ceros.

Ejemplo 1.2.7. Consideremos las siguientes matrices, en las que se han señalado los pivotes de cada fila:

$$A = \begin{pmatrix} [2] & 0 & 0 & 5 \\ 0 & [1] & 0 & -2 \\ 0 & 0 & [1] & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 & 5 \\ 0 & [1] & 0 & -2 \\ 0 & [1] & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 & 5 \\ 0 & [1] & 1 & -2 \\ 0 & 0 & [1] & 4 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 & 5 \\ 0 & [1] & 0 & -2 \\ 0 & 0 & [1] & 4 \end{pmatrix}.$$

La matriz A no es escalonada por filas, ya que el pivote de la primera fila no es 1.

La matriz B no es escalonada por filas, ya que el pivote de la tercera fila no está a la derecha de el pivote de la segunda fila.

La matriz C es escalonada por filas, pero no es escalonada reducida por filas, ya que encima de el pivote de la tercera fila hay un 1, en lugar de un 0.

La matriz D es escalonada reducida por filas.

De forma análoga se definen los conceptos de matriz escalonada por columnas y matriz escalonada reducida por columnas.

Definición 1.2.8. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz. La matriz A se dice que es *escalonada por columnas* si verifica las siguientes propiedades:

1. Si A tiene columnas compuestas enteramente por ceros (columnas nulas), estas son las últimas columnas de la matriz.
2. El pivote de cada columna no nula es 1.
3. El pivote de cada columna no nula está más abajo que el de la columna anterior.
4. Los elementos que aparecen en la misma fila que el pivote de una columnas y a la derecha de él, son todos ceros.

Diremos que A es *escalonada reducida por columnas* si verifica los puntos 1, 2 y 3 anteriores y, además,

- Los elementos que aparecen en la misma fila que el pivote de una columna son todos ceros.

Ejemplo 1.2.9. Consideremos las siguientes matrices, en las que se han señalado los pivotes de cada columna:

$$E = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [1] \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & [1] \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 0 \\ 3 & 1 & [1] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz E es escalonada reducida por columnas.

La matriz F no es escalonada por columnas, ya que el pivote de la tercera columna no está más abajo que el de la segunda columna.

La matriz G es escalonada por columnas, pero no es escalonada reducida por columnas, ya que los elementos de la tercera fila, que no son el pivote, no son ceros

1.2.4. Transformaciones elementales:

Definición 1.2.10. Llamaremos *transformaciones elementales de filas* (o columnas) a cada una de los siguientes tipos:

1. Intercambiar la posición de dos filas (columnas).
2. Multiplicar todos los elementos de una fila (columna) por un escalar (número real) no nulo.
3. Sumar a una fila (columna) otra multiplicada por un escalar.

Definición 1.2.11. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diremos que A y B son *equivalentes por filas* (columnas), y lo denotaremos por $A \sim_f B$ (respectivamente, $A \sim_c B$), si se puede pasar de A a B mediante varias transformaciones elementales de filas (columnas).

Teorema 1.2.12. *Toda matriz es equivalente por filas (columnas) a una única matriz escalonada reducida por filas (columnas).*

Definición 1.2.13. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Llamaremos *forma normal de Hermite por filas* (columnas) de A a la única matriz escalonada reducida por filas (columnas) que se obtiene de A por transformaciones elementales de filas (columnas).

Ejemplo 1.2.14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & 18 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

El primer paso deseado sería realizar alguna transformación elemental para conseguir que el pivote de la primera fila fuese un 1. En este caso, podemos hacerlo dividiendo toda la primera fila entre 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ahora, utilizamos ese 1 en la posición del pivote para hacer ceros en el resto de las filas, en la misma columa que el pivote. En este caso, a la segunda fila le restamos dos veces la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ahora, desearíamos tener un 1 en la posición del pivote de la segunda fila. En este caso, ya lo tenemos, luego lo utilizamos para hacer ceros en su misma columna. En este caso, a la fila 1 le restamos la fila 2 y, a la fila 3, le restamos dos veces la fila 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, como tenemos un 1 en la posición del pivote de la tercera fila, entonces lo utilizamos para hacer ceros en su columna. A la fila 1 le restamos tres veces la fila 3 y, a la fila 2 le restamos dos veces la fila 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la forma normal de Hermite por filas de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Todos estos pasos, lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & 18 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 - 3F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.5. Rango de una matriz

Definición 1.2.15. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Llamaremos *rango de* A, y lo denotaremos por $\mathrm{rg}(A)$, al número de filas (columnas) no nulas de su forma normal de Hermite por filas (columnas).

Proposición 1.2.16. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Entonces* $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Ejemplo 1.2.17. Consideremos la matriz del ejemplo anterior,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 & 18 \\ 2 & 3 & 12 & 23 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Como vimos en el **Ejemplo 1.2.14.** la forma normal de Hermite por filas de la matriz A era

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Observación 1.2.18. Nótese que, para calcular el rango de una matriz, no es necesario calcular su forma normal de Hermite, sino que basta con llegar a una matriz escalonada equivalente por filas con A, ya que en el proceso de pasar de una matriz escalonada a una matriz escalonada reducida no cambia el número de filas no nulas.

1.2.6. Matrices y sistemas de ecuaciones

Definición 1.2.19. Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

llamaremos *matriz principal* (o matriz de coeficientes) *del sistema* a la matriz de dimensión $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y llamaremos *matriz ampliada del sistema* a la matriz de orden $m \times (n+1)$

$$A^* = (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2.20. El sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + 2y \qquad = 6 \\ 3y + 5z = 1 \end{array} \right.$$

tiene como matriz principal y matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado resume el método de Gauss-Jordan.

Proposición 1.2.21. *Dado un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada A^*. Si H es la forma normal de Hermite por filas de A^*, entonces el sistema cuya matriz ampliada es H es un sistema escalonado reducido equivalente al de partida.*

Ejemplo 1.2.22. El sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 6y - 5z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 9 \\ 2x + 4y - 3z & = & 1 \end{array} \right.$$

tiene por matriz ampliada a la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

cuya forma normal de Hermite es

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego, el sistema de partida

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 6y - 5z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 9 \\ 2x + 4y - 3z & = & 1 \end{array} \right.$$

es equivalente (y, por tanto, tiene las mismas soluciones) al sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array} \right. ,$$

que es un sistema compatible determinado cuya única solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Teorema 1.2.23. (Teorema de Rouché-Frobenius). *Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz principal A y matriz ampliada A^* se verifica:*

1. *El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $rg(A) = rg(A^*) = n$.*
2. *El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $rg(A) = rg(A^*) < n$.*
3. *El sistema es incompatible si, y sólo si, $rg(A) \neq rg(A^*)$.*

1.3. Operaciones con matrices

1.3.1. Suma de matrices

Definición 1.3.1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, con $A = (a_{ij})_{i,j}$ y $B = (b_{ij})_{i,j}$. Se define la *suma de A y B* como la matriz de orden $m \times n$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.3.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propiedades de la suma de matrices:

1. **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$ para toda matriz $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. **Conmutativa:** $A + B = B + A$ para toda matriz $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. **Elemento neutro:** Existe $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (matriz nula: todos sus elementos son ceros) tal que $A + 0 = 0 + A = A$ para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. **Elemento opuesto:** Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

1.3.2. Producto de un escalar por una matriz

Definición 1.3.3. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, con $A = (a_{ij})_{i,j}$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define el producto de α con A como la matriz de orden $m \times n$ dada por

$$\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.3.4. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (-0{,}5)A = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & -2{,}5 \\ -1{,}5 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto por escalares:

1. **Distributiva respecto de la suma de escalares:** $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. **Distributiva respecto de la suma de matrices:** $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para toda $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. **Pseudoasociativa:** $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. **Ley de identidad:** $1A = A$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

1.3.3. Producto de matrices

Definición 1.3.5. Dadas dos matrices $A = (a_{ik})_{i,k} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B = (b_{kj})_{k,j} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. Se define el producto de la matriz A con B como la matriz

$$AB = (c_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}.$$

Observación 1.3.6. El producto de dos matrices A y B solo está definido cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B y, en ese caso, la matriz producto AB tiene tantas filas como A y tantas columnas como B

$$\underset{m\times p}{A} \cdot \underset{p\times n}{B} = \underset{m\times n}{AB}.$$

El elemento c_{ij} que ocupa el lugar i, j en AB se obtiene a partir de la i-ésima fila de A y la columna j-ésima de B (que han de tener el mismo número de elementos, en este caso p).

Ejemplo 1.3.7. Consideremos el producto

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 4}{B} = \underset{2\times 4}{AB}.$$

Por lo tanto, el produto está bien definido y el resultado será una matriz de orden 2×4. Denotando esta matriz por

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

el elemento c_{11} se obtiene de la primera fila de A y la primera columna de B:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}.$$

Así pues,

$$c_{11} = 2{\cdot}0 + 3{\cdot}3 + 1{\cdot}0 = 9,$$

de igual forma

$$c_{12} = 2{\cdot}1 + 3{\cdot}5 + 1{\cdot}1 = 18.$$

Y calculando todos los elementos c_{ij} de esta forma obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 18 & 4 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de matrices:

1. **Asociativa:** $A(BC) = (AB)C$ para toda matriz A, B, C; siempre que tenga sentido tales productos.

2. **Distributiva:**

   - $A(B + C) = AB + AC$ para toda matriz A, B, C; siempre que tenga sentido tales productos.
   - $(A + B)C = AC + BC$ para toda matriz A, B, C; siempre que tenga sentido tales productos.

3. **Elemento neutro:** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $I_m A = A = A I_n$.

4. **Conmutatividad respecto a escalares:** $\alpha(AB) = (\alpha A)B$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y toda matriz A, B; siempre que tenga sentido.

Observación 1.3.8. Nótese que el producto de dos matrices, por lo general, no es conmutativo, es decir, AB no tiene por qué ser igual a BA.

Ejemplo 1.3.9. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Así, se verifica entonces que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pero } BA = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego $AB \neq BA$.

1.3.4. División de una matriz en bloques

Dada una matriz A de orden $m \times n$, podemos considerar las submatrices de A, A_1 formada por las r primeras filas de A y A_2, formada por el resto de filas de A. Esta división puede expresarse mediante una línea horizontal después de la fila r

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \dots & a_{(r+1)n} \\ a_{(r+2)1} & a_{(r+2)2} & \dots & a_{(r+2)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

o bien escribiendo

$$A = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array} \right)$$

donde A puede verse como una matriz de dimensión 2×1 cuyos elementos son a su vez matrices a las que llamaremos *bloques*. La división puede hacerse también con líneas verticales, y los bloques quedan organizados en filas y columnas. Entonces a los bloques se les designa por la misma letra mayúscula que a la matriz que se divide, afectada por dos subíndices: el primero indica la fila (de bloques) y el segundo la columna (de bloques) donde se sitúa el bloque. Se escribirá $A = (A_{ij})_{i,j}$.

Ejemplo 1.3.10. Consideremos la siguiente matriz 3×3:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

que se ha dividido en cuatro bloque:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_{22} = (1)\,.$$

Entonces la matriz A es la matriz 2×2 por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right).$$

Nótese que, los bloques que aparecen al dividir una matriz no tienen por qué ser del mismo orden, solo es imprescindible que compongan la matriz A.

1.3.5. Producto por bloques

Supongamos que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se ha dividido por bloques de manera que resulta una matriz fila por bloques con k columnas

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_k \end{array} \right),$$

y que $B \in \mathcal{M}_{n\times s}$ es una matriz columnas por bloques con k filas

$$B = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline \dots \\ \hline B_k \end{array} \right),$$

entonces podemos plantearnos cómo calcular $AB \in \mathcal{M}_{m\times s}(\mathbb{R})$ utilizando los bloques como elementos de A y B. Si empleamos el método usual sería:

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i B_i \right).$$

Sin embargo, esto requiere de lo siguiente:

- Que A_iB_i pueda calcularse, es decir, que el número de columnas de A_i coincida con el número de filas de B_i. Esto ocurre cuando las divisiones en las columnas de A aparecen al mismo tiempo que en las filas de B.

- Que todas las matrices A_iB_i tengan el mismo orden que AB (pero bajo la condición del apartado anterior) entonces, si A_i es de orden $m \times l$ y B_i de orden $l \times s$, se tiene que $A_iB_i \in \mathcal{M}_{m\times s}(\mathbb{R})$.

Así que, la única condición que necesitamos puede enunciarse de la siguiente forma: "Si una línea separa las columnas r y $r+1$ de A, entonces una línea separa las filas r y $r+1$ de B, y viceversa"

Proposición 1.3.11. *Si la condición anterior ocurre en la división de bloques de A y B, entonces*

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i B_i \right).$$

Ejemplo 1.3.12. Consideremos

$$A = (\, A_1 \,|\, A_2 \,) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

y

$$B = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right).$$

Entonces

$$AB = (A_1B_1 + A_2B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.3.6. Matriz traspuesta

Definición 1.3.13. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamaremos matriz traspuesta de A, y la denotaremos por A^t, a la matriz $A^t = (a_{ji})_{j,i}$. Es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ de orden } m \times n,$$

entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ de orden } n \times m,$$

cuyas filas son las columnas de A.

Ejemplo 1.3.14. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Propiedades de la trasposición de matrices:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$, para todas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y toda $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
4. $(A^t)^t = A$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Observación 1.3.15. Obsérvese que, como las filas de A^t son las columnas de A, entonces la matriz A es escalonada reducida por columnas si, y solo si, la matriz A^t es escalonada reducida por filas. Además, dos matrices A y B serán equivalentes por columnas si, y solo si, sus traspuestas son equivalentes por filas.

Definición 1.3.16. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (una matriz cuadrada). Se dirá que A es

- *Simétrica*, si $A^t = A$.
- *Antisimétrica*, si $A^t = -A$.

Ejemplo 1.3.17. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es simétrica, ya que $A = A^t$.

La matriz B es antisimétrica, ya que $B^t = -B$.

La matriz C no es ni simétrica ni antisimétrica, ya que

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \neq \left\{ \begin{array}{c} C \\ -C \end{array} \right. .$$

1.3.7. Propiedades del rango y de la traza

Proposición 1.3.18. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces se verifica:*

1. $|rg(A) - rg(B)| \leq rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$.
2. $rg(kA) = rg(A)$, *para todo* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $rg(A) = rg(A^t)$.

Proposición 1.3.19. *Sean A y B dos matrices cuadradas, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces se verifica:*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
2. $tr(kA) = ktr(A)$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$.
3. $tr(AB) = tr(BA)$.

1.4. Matrices regulares

1.4.1. Matrices elementales

En esta sección veremos cómo aplicar transformaciones elementales a una matriz puede ser considerado como el resultado de multiplicar la matriz por ciertas matrices.

Definición 1.4.1. Llamaremos *matrices elementales* de orden n a las matrices resultantes de aplicar una, y sólamente una, transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n.

Observación 1.4.2. Puesto que hay tres tipos de transformaciones elementales, existirán también tres tipos de matrices elementales.

1. **Matrices elementales de tipo I:** Denotaremos por E_{ij} a la matriz que se obtiene de la identidad intercambiando la fila i-ésima por la fila j-ésima:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Matrices elementales de tipo II:** Denotaremos por $E_i(k)$ a lamatriz que se obtiene de la identidad multiplicando por $k \neq 0$ los elementos de la fila i-ésima:

$$E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Matrices elementales de tipo III:** Denotaremos por $E_{ij}(k)$ a la matriz que se obtiene de la identidad sumando a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por k:

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & k & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que las matrices elementales se pueden obtener también aplicando transformaciones elementales por columnas a la matriz identidad.

Ejemplo 1.4.3. En $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ se tiene

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } E_{24}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.4.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean $E \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dos matrices elementales. Entonces:*

1. *EA es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus filas la misma transformación elemental con la que se obtiene E a partir de la identidad.*

2. *AF es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus columnas la misma transformación elemental con la que se obtiene F a partir de la identidad.*

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente:

Corolario 1.4.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sean H la forma normal de Hermite por filas de A y H' la forma normal de Hermite por columas de A. Entonces:*

1. *$H = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$, para ciertas matrices elementales E_1, E_2, ..., E_k de orden m.*

2. *$H' = AF_1F_2 \cdots F_s$, para ciertas matrices elementales F_1, F_2, ..., F_s de orden n.*

1.4.2. Matriz inversa. Matrices regulares

Definición 1.4.6. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que B es *matriz inversa de A* si $AB = BA = I_n$.

Observación 1.4.7. No toda matriz cuadrada tiene inversa. Diremos que una matriz cuadrada A es *invertible* si existe una matriz inversa de A. En caso de existir una matriz inversa, esta es única, y la denotamos por A^{-1}.

Ejemplo 1.4.8. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es invertible, ya que no existe ninguna matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.4.9. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces se verifica:*

1. *Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *Si A_1, A_2, ..., A_k son invertibles, entonces $A_1A_2 \cdots A_k$ es invertible y $(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.*
3. *Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Lema 1.4.10. *Toda matriz elemental es invertible y su inversa es otra matriz elemental.*

Teorema 1.4.11. *Para una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. *A es regular a la derecha, es decir, si $BA = 0$, entonces $B = 0$.*
3. *A es regular a la izquierda, es decir, si $AB = 0$, entonces $B = 0$.*
4. *$rg(A) = n$.*
5. *La forma normal de Hermite por filas de A es la identidad.*
6. *La forma normal de Hermite por columnas de A es la identidad.*
7. *A es un producto de matrices elementales.*

Observación 1.4.12. En virtud del teorema anterior, a las matrices invertibles las llamaremos también *matrices regulares*. Una matriz que no sea regular diremos que es *singular*.

Aunque en la definición de matriz inversa se exige que $AB = I_n$ y $BA = I_n$, como consecuencia del teorema anterior tenemos que basta con que se de una de las dos condiciones.

Corolario 1.4.13. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $AB = I_n$ (o que $BA = I_n$). Entonces A es regular y $B = A^{-1}$.*

1.4.3. Cálculo de la matriz inversa

En esta sección, veremos con un ejemplo práctico, uno de los métodos para calcular la inversa de una matriz cuadrada A.

Ejemplo 1.4.14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. El primer paso consta de considerar la matriz $(\,A\,|\,I_3\,)$, es decir,

$$(\,A\,|\,I_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. Ahora, mediante transformaciones elementales, debemos transformar la matriz A en I_3:

$$(\,A\,|\,I_3\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to (-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

3. La matriz inversa de A, A^{-1}, es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.4. Matrices equivalentes

Recordemos que dos matrices A y B eran equivalentes por filas, y se denotaba por $A \sim_f B$, si se podía pasar de una a otra mediante transformaciones elementales de filas. De forma análoga, dos matrices A y B eran equivalentes por columnas, y se denotaba por $A \sim_c B$, si se podía pasar de una a otra mediante transformaciones elementales de columnas.

Lema 1.4.15. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A y B son equivalentes por filas.*

2. *A y B tienen igual forma de Hermite por filas.*

3. *Existe una matriz regular $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de forma que $B = QA$.*

Ejemplo 1.4.16. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas dos matrices son equivalentes por filas, ya que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{F_1 \to F_1 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Por lo tanto, existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ya que $A, B \in \mathcal{M}_{[3]\times 2}(\mathbb{R})$) regular tal que $B = QA$.

Veamos cómo hallar esta matriz Q. Para ello, como Q es una matriz cuadrada de dimensión 3×3, necesitaremos repetir las mismas operaciones elementales que hicimos para llegar de A a B, pero esta vez a la matriz I_3, es decir,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{F_1 \to F_1 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q.$$

Del mismo modo, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.4.17. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A y B son equivalentes por columnas.*
2. *A y B tienen igual forma de Hermite por columnas.*
3. *Existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de forma que $B = AP$.*

Ejemplo 1.4.18. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Estas dos matrices son equivalentes por columnas, ya que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 + 2C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = C.$$

Por lo tanto, existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ya que $A, C \in \mathcal{M}_{3\times [2]}(\mathbb{R})$) regular tal que $C = AP$.

Para hallar esta matriz P necesitaremos repetir las mismas operaciones elementales que hicimos para llegar de A a C, pero esta vez a la matriz I_2, es decir,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 + 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P.$$

Definición 1.4.19. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A y B son equivalentes, y se denota por $A \sim B$, si B se puede obtener de A mediante transfomaciones elementales de filas y columnas.

Observación 1.4.20. Dos matrices equivalentes por filas (o columnas), son equivalentes. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Proposición 1.4.21. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces A y B son equivalentes si, y solo si, existen matrices regulares, $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tales que $B = QAP$.*

Ejemplo 1.4.22. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas dos matrices son equivalentes, ya que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{F_1 \to -\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

Por lo tanto, existen $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ regulares tales que $D = QAP$.

Para hallar la matriz Q necesitaremos repetir las operaciones elementales por filas que se han usado para pasar de A a D, pero esta vez a la matriz I_3:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{F_1 \to -\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = Q.$$

Para hallar la matriz P necesitaremos repetir las operaciones elementales por columnas que hicimos para llegar de A a D, pero esta vez a la matriz I_2, es decir,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

Proposición 1.4.23. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces A tiene rango r si, y solo si, A es equivalente a la matriz*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Teorema 1.4.24. *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son equivalentes si, y solo si, tienen el mismo rango.*

1.5. Determinante de una matriz cuadrada

El concepto de determinante de una matriz cuadrada puede ser definido inductivamente de la siguiente forma:

Para una matriz cuadrada de orden 1, $A = (a_{11})$, se define el determinante de A, como $\det(A) = |A| = a_{11}$.

Supuesto conocido el valor del determinante de cada matriz de orden $n-1$, para una matriz cuadrada de orden n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

se define el *ij-ésimo menor adjunto de A*, y se denota por α_{ij}, como $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, donde A_{ij} es la matriz (de orden $n-1$) que se obtiene de A eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima, y se define el *determinante de A* por

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + ... + a_{n1}\alpha_{n1},$$

es decir, la suma de los elementos de la primera columna de A multiplicado cada uno por su adjunto correspondiente. A esta fórmula se le conoce como **desarrollo de Laplace** del determinante de A por su primera columna.

Observación 1.5.1. En lugar de la primera columna de A, podemos elegir cualquier línea (fila o columna) de una matriz para calcular su determinante.

Aún dando esta definición, se conoce la forma de calcular los determinantes de matrices de orden 2 y orden 3.

Cálculo de determinantes de matrices orden 2:

Si A es una matriz cuadrada de orden 2, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

entonces $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

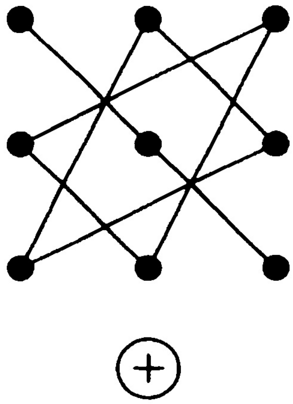
Ejemplo 1.5.2. Consideremos la matriz

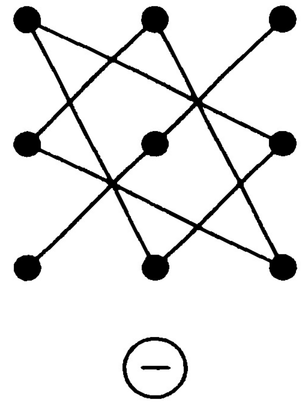
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\det(A) = 1{\cdot}5 - 2{\cdot}2 = 5 - 4 = 1$.

Cálculo de determinantes de matrices orden 3:

Para calcular el determinante de una cuadrada de orden 3, se utiliza la conocida **regla de Sarrus**:





Ejemplo 1.5.3. Consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\det(A) = 1{\cdot}1{\cdot}0 + 2{\cdot}2{\cdot}2 + 0{\cdot}1{\cdot}3 - (3{\cdot}1{\cdot}2 + 2{\cdot}0{\cdot}0 + 2{\cdot}1{\cdot}1) = 8 - 8 = 0.$$

Para calcular cualquier determinante de una matriz cuadrada de dimensión mayor a 3, es necesario utilizar el desarrollo de Laplace.

1.5.1. Propiedades de los determinantes

1. Si tres matrices cuadradas del mismo orden, A, A' y A'', son indénticas salvo que la i-ésima fila (o columna) de A es la suma de las filas (o columnas) correspondientes de A' y A'', entonces $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Si una matriz cuadrada A tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces su determinante vale 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si se intercambian dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada A, entonces su determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Si se multiplican los elementos de una fila o una columna de una matriz cuadrada A por un número k, entonces su determinante queda multiplicado por k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kx_1 & kx_2 & \dots & kx_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

   En particular, si tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$.

5. Si a una fila o columna de una matriz cuadrada A se le suma otra multiplicada por un escalar k, entonces su determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 + ky_1 & x_2 + ky_2 & \dots & x_n + ky_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Una matriz cuadrada A es regular si, y solo si, $\det(A) \neq 0$.

7. El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

8. El determinante de una matriz cuadrada A es igual al de su traspuesta, $\det(A) = \det(A^t)$.

Ejemplo 1.5.4. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 2F_1]{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Luego, por la propiedad 5,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 12+24+20-(32+12+15) = 56-59 = -3.$$

Veamos a continuación otro método para calcular la matriz inversa de una matriz regular.

Definición 1.5.5. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, llamaremos *matriz adjunta de* A, y la denotaremos por $\mathrm{Adj}(A)$, a la matriz $\mathrm{Adj}(A) = (\alpha_{ij})_{i,j}$, es decir, la matriz que, en cada posición, tiene el correspondiente menor adjunto de A.

Teorema 1.5.6. *Si una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *es regular, entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A^t) = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)^t.$$

Ejemplo 1.5.7. Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, como $\det(A) = 18+24+24-(27+16+24) = -1 \neq 0$, entonces A es regular, es decir, tiene inversa.

Por una parte,

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$\mathrm{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, veamos cómo los determinantes nos proporcionan un nuevo método para calcular el rango de una matriz.

Teorema 1.5.8. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces el rango de A coincide con el mayor orden de una submatriz cuadrada regular de A.*

Ejemplo 1.5.9. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $\mathrm{rg}(A) \leq 3$.

Las distintas submatrices de orden 3 tienen todas determinantes cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Así pues, $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. Consideremos ahora las submatrices cuadradas de orden 2. Como, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

entonces $\mathrm{rg}(A) = 2$.

1.5.2. Sistemas de ecuaciones y determinantes. Regla de Cramer

Dado un sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

Si denotamos por A a la matriz de coeficientes y por X y B a las matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ (matriz incógnita)}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ (matriz de términos independientes)}$$

podemos expresar entonces el sistema matricialmente como $AX = B$.

Definición 1.5.10. Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones expresado de forma matricial. Diremos que se trata de un *sistema de Cramer* si A es una matriz cuadrada y regular.

Observación 1.5.11. Todo sistema de Cramer es un sistema compatible determinado, por el Teorema de Rouché-Frobenius.

Veamos el método de resolución de de la regla de Cramer.

Teorema 1.5.12. (Regla de Cramer). *Dado un sistema de Cramer*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

la solución única del sistema viene dada por:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

donde cada $|A_i|$ es el determinante de la matriz obtenida al cambiar la i-ésima columna por la columna de la matriz B, es decir,

$$|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 2_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 1.5.13. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{cases}.$$

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$\det(A) = 8 + 1 + 1 - (2 + 2 + 2) = 4 \neq 0.$$

Por lo tanto, A es regular (el sistema es compatible determinado) y se trata de un sistema de Cramer.

La solución única del sistema vendrá dada por:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4 + 3 + 2 - (6 + 1 + 4)}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{8 + 1 + 3 - (2 + 6 + 2)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{12+2+1-(2+4+3)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Veamos ahora cómo transformar un sistema compatible indeterminado, en un sistema de Cramer.

Ejemplo 1.5.14. Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + \ y - \ z & = & 0 \\ x - 2y + \ z & = & 0 \\ 2x - \ y \qquad & = & 0 \end{array} \right. .$$

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$\det(A) = 0 + 2 + 1 - (4 - 1 + 0) = 0.$$

Por lo tanto, el $\text{rg}(A) \leq 2$. Además, al tratarse de un sistema homogéneo, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.

Ahora bien, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0,$$

entonces tenemos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas. Luego, por el Teorema de Rouché-Frobenius, se trata de un sistema compatible indeterminado.

Como en el menor distinto de cero que hemos elegido no intervienen la tercera fila ni la tercera columna, eso nos indica dos cosas:

- La tercera fila es combinación lineal de las otras dos, ya que $\det(A) = 0$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

  Esto significa que podemos prescindir de esta última fila.

- Como la columna que queda fuera de este menor es la correspondiente a la incógnita z, hacemos el cambio $z = \lambda$, y movemos de las dos primeras ecuaciones este parámetro hacia el lado de los términos independientes.

  Como resultado de estos cambios, obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + \ y & = & \lambda \\ x - 2y & = & -\lambda \end{array} \right. .$$

La matriz de coeficientes es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$\det(A') = -2 - 1 = -3 \neq 0.$$

Por lo tanto, A' es regular (el sistema es compatible determinado) y se trata de un sistema de Cramer.

La solución única del sistema vendrá dada por:

$$x = \frac{|A'_x|}{|A'|} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2\lambda + \lambda}{-3} = \frac{-\lambda}{-3} = \frac{\lambda}{3},$$

$$y = \frac{|A'_y|}{|A'|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-\lambda - \lambda}{-3} = \frac{-2\lambda}{-3} = \frac{2\lambda}{3}.$$

Luego, las soluciones del sistema original son

$$x = \frac{\lambda}{3}, y = \frac{2\lambda}{3}, z = \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios

1. Transforme los siguientes sistemas en sistemas escalonados, discútalos y resuélvalos en el caso de que sea posible:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcr} y - 3z &=& -5 \\ 2x + 3y - z &=& 7 \\ 4x + 5y - 2z &=& 10 \end{array} \right. . \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + 2z &=& 2 \\ y + z &=& 1 \\ 2x + 2z &=& 2 \end{array} \right. .$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + z &=& 7 \\ 2x - 5y + 2z &=& 6 \\ 2x + 2y - z &=& 1 \end{array} \right. . \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{rcr} 2x - 3y + z + t &=& 0 \\ x - y + z + t &=& 0 \\ 6x - 6y + 3z + 3t &=& 0 \end{array} \right. .$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{rcr} 3x + 2y + z &=& 0 \\ 2x + 3y + z &=& 0 \\ 2x + y + 3z &=& 0 \end{array} \right. . \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z + t &=& 6 \\ x - y + z - t &=& -2 \\ 3x - y + 3z - t &=& 2 \\ 7x - 5y + 7z - 5t &=& -6 \end{array} \right. .$$

2. Dadas las matrices A, B y C, comprobar que $AB = AC$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Concluir que la igualdad $AB = AC$ no implica necesariamente $B = C$.

3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular una matriz regular Q tal que $QA = H$.

   b) Calcular una matriz regular P tal que $AP = C$.

   c) ¿Son H y C equivalentes? ¿Por qué?

4. Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice idempotente si verifica que $A^2 = A$. Demostrar que una matriz idempotente distinta de la identidad no puede ser regular.

5. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro que aparece, y resolverlo cuando sea posible

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z &=& 1 \\ x + ay + z &=& a \\ x + y + az &=& a^2 \end{array} \right. .$$

6. Determinar cuales de las siguientes matrices son regulares y calcular la inversa de las que lo sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular la forma normal de Hermite por columnas de B.

   b) Encontrar una matriz Q regular verificando

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   calcular una matriz regular P tal que

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   calcular una matriz regular Q tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   ¿Cómo podría utilizarse este resultado para resolver el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y + t & = & 2 \\ x + y + 2z & = & 1 \\ x + 2z - t & = & -2 \end{array} \right. .$$

10. Estudiar si las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   son equivalentes.

11. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones en función de los parámetros que aparecen:

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcl} 3x - y & = & ax \\ 5x + y + 2z & = & ay \\ 4y + 3z & = & az \end{array}\right. .$$

$$(b)\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x - ay + bz & = & 4 \\ x + z & = & 2 \\ x + y + z & = & 2 \end{array}\right. .$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax + 2z & = & 2 \\ 5x + 2y & = & 1 \\ x - 2y + bz & = & 3 \end{array}\right. .$$

12. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y - az & = & 4 \\ -ax + y + az & = & 0 \\ -x + 2ay & = & a+2 \\ 2x - y - 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$