Capítulo 1

La recta real. Números complejos

En este capítulo se presenta una descripción del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, a partir de sus propiedades algebraicas, de orden total y de la propiedad del supremo (o completitud). Estudiaremos también el conjunto de los número complejos, $\mathbb{C}$, aprendiendo a manejar los conceptos básicos de este conjunto numérico.

1.1. Estructura algebraica de los números reales

Sean $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las operaciones binarias de *suma* y *producto* usuales sobre $\mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma $+$ y producto $\cdot$ tiene *estructura de cuerpo*, es decir, se verifican las siguientes propiedades:

1. **(A1) Propiedad conmutativa de la suma:** $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

2. **(A2) Propiedad asociativa de la suma:** $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. **(A3) Existencia de elemento neutro para la suma:** existe un elemento, $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

4. **(A4) Existencia de elemento opuesto:** dado $a \in \mathbb{R}$, existe $(-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

5. **(P1) Propiedad conmutativa del producto:** $ab = ba$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

6. **(P2) Propiedad asociativa del producto:** $a(bc) = (ab)c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7. **(P3) Existencia de elemento neutro para el producto:** existe un elemento, $1 \in \mathbb{R}$, con $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

8. **(P4) Existencia de elemento inverso:** dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Al inverso de un elemento $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se le denota también por $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9. **(D) Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:** $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   Así, se verifica que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Observación 1.1.1. Con estas operaciones, es fácil ver que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es también un cuerpo. Sin embargo, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no son cuerpos ya que, por ejemplo, ni en $\mathbb{N}$ ni en $\mathbb{Z}$ existen elemento inverso (salvo para $\pm 1 \in \mathbb{Z}$).

Corolario 1.1.2. (Propiedades inmediatas): *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. Regla de cancelación:
   - Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.
   - Si $ab = ac$, y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

   En particular, las reglas de cancelación implican la unicidad de los elementos neutros 0 y 1.
2. Unicidad del opuesto y del inverso:
   - Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$.
   - Si $ab = 1$, y $a \neq 0$, entonces $b = a^{-1}$.
3. Unicidad de soluciones de ecuaciones lineales:
   - La ecuación $a + x = b$ tiene solución única en $\mathbb{R}$, $x = b - a$.
     Observación 1.1.3. Esta propiedad también ocurre en $\mathbb{Z}$, pero no en $\mathbb{N}$.
   - Si $a \neq 0$, la ecuación $ax = b$ tiene solución única en $\mathbb{R}$, $x = a^{-1}b$.
     Observación 1.1.4. Esta propiedad también es válida en $\mathbb{Q}$, pero no en $\mathbb{Z}$.
4. $a0 = 0$.
5. $(-1)a = -a$.
6. $-(-a) = a$.
7. $(-1)(-1) = 1$.
8. Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(a^{-1})^{-1} = a$.
9. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

1.2. Las propiedades de orden de los números reales

En el conjunto de los números reales existe una noción de orden natural, ésta es la relación "menor que". Esta relación de orden se representa en la recta real por medio de la orientación usual de izquierda a derecha. Existe una forma conveniente de introducir esta relación de orden en $\mathbb{R}$ por medio de unas propiedades fundamentales de los números positivos.

Axiomas de orden. Existe un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\mathbb{R}^+$, verificando los siguientes axiomas:

1. **(O1)** Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$.

2. **(O2)** Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $ab \in \mathbb{R}^+$.

3. **(O3) Propiedad de tricotomía.** Si $a \in \mathbb{R}$, entonces ocurre una, y sólo una, de las siguientes ocurrencias:
   - $a \in \mathbb{R}^+$.
   - $a = 0$.
   - $-a \in \mathbb{R}^+$.

Definición 1.2.1. Sea $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a \in \mathbb{R}^+$, diremos que a es *(estrictamente) positivo*, y lo denotaremos por $a > 0$.
- Si $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, diremos que a es *no negativo*, y lo denotaremos por $a \geq 0$.
- Si $-a \in \mathbb{R}^+$, diremos que a es *negativo*, y lo denotaremos por $a < 0$.
- Si $-a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, diremos que a es *no positivo*, y lo denotaremos por $a \leq 0$.

Definición 1.2.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que *a es menor que b*, y lo denotaremos por $a < b$, si, y solo si, $b - a \in \mathbb{R}^+$. Análogamente, diremos que *a es menor o igual que b*, y lo denotaremos por $a \leq b$, si, y solo si, $b - a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Proposición 1.2.3. *En el conjunto de los números reales, la relación $\leq$ es una relación de orden, y la relación $<$ es una relación de orden estricto total.*

1.2.1. Intervalos

Una vez tenemos un orden en $\mathbb{R}$, vamos a definir los diferentes tipos de intervalos en la recta real.

Definición 1.2.4. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que I es *un intervalo* si, para todo $x, y \in I$ y todo $u \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq u \leq y$, se verifica que $u \in I$.

Definición 1.2.5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$. Diremos que $I \subset \mathbb{R}$ es un *intervalo acotado* si es de alguna de las siguientes formas:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. En este caso, diremos que I es un *intervalo abierto*.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. En este caso, diremos que I es un *intervalo cerrado*.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, o bien $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$. En este caso, diremos que I es un *intervalo semiabierto (o semicerrado)*.

En estas circunstancias, se define la *longitud del intervalo I*, y se denotará por $\ell(I)$, como $\ell(I) = b - a$.

Ejemplo 1.2.6.

- Los intervalos $(0, 1)$ y $(a, a) = \emptyset$, con $a \in \mathbb{R}$, son intervalos abiertos.
- Los intervalos $[0, 1]$ y $[a, a] = \{a\}$, con $a \in \mathbb{R}$, son intervalos cerrados.

- Los intervalos $[0,1)$ y $(6,7]$ son intervalos semiabiertos.

Definición 1.2.7. Sea $a \in \mathbb{R}$. Diremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un *intervalo no acotado* si es de alguna de las siguientes formas:

- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, o bien $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. En este caso, diremos que I es un *intervalo abierto no acotado*.
- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, o bien $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$. En este caso, diremos que I es un *intervalo cerrado no acotado*.
- $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

Ejemplo 1.2.8.

- Los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(4,\infty)$ son intervalos abiertos no acotados.
- Los intervalos $(-\infty,0]$ y $[0,\infty)$ son intervalos cerrados no acotados.

1.2.2. Desigualdades

Ahora debemos que conocer qué operaciones algebraicas se pueden utilizar para simplificar una desigualdad, preservando la información original.

Proposición 1.2.9. *Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica:*

1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$.
2. *Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $a^2 > 0$.*
3. *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*
4. *Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.*
5. *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.*
6. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*
7. *Si $a > 0$, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$.*
8. *Si $a < 0$, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a} < 0$.*
9. *Si $a \geq 0$ es tal que $a \leq b$, para todo $b > 0$, entonces $a = 0$.*
10. *Si $ab > 0$, entonces a y b tienen el mismo signo.*
11. *Si $ab < 0$, entonces a y b tienen signo opuesto.*
12. *Si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$.*

Demostración. Vamos a demostrar solo el punto 12 de esta proposición.

Por una parte, como $a < b$ entonces, por 3, se tiene que $a + a < a + b$, es decir, $2a < a + b$. Ahora bien, como $\frac{1}{2} > 0$ entonces, por 5, $\frac{1}{2} \cdot 2a < \frac{1}{2}(a + b)$ o, equivalentemente, $a < \frac{a+b}{2}$.

Por otra parte, como $a < b$ entonces, por 3, se tiene que $a + b < b + b$, es decir, $a + b < 2b$. De forma análoga a la anterior, como $\frac{1}{2} > 0$ entonces, por 5, $\frac{1}{2} \cdot (a + b) < \frac{1}{2} \cdot 2b$, con lo que $\frac{a+b}{2} < b$.

Uniendo ambas desigualdades, obtenemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$. □

Observación 1.2.10. Si cambiamos la relación $<$ por la relación $\leq$ en los puntos 2, 3, 4, 5 y 6, se obtienen propiedades análogas.

Observación 1.2.11. Nótese que, el punto 9 de la proposición anterior, implica que el conjunto $\mathbb{R}^+$ es acotado inferiormente por 0, pero no tiene mínimo.

Proposición 1.2.12. (Desigualdad de Bernoulli). *Sea $x \in \mathbb{R}$, con $x > -1$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Teorema 1.2.13. (Desigualdad de Cauchy). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

con lo que $2ab \leq a^2 + b^2$ y, por tanto, $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. □

Corolario 1.2.14. (Desigualdad de la media aritmética-geométrica). *Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.*

Ejemplo 1.2.15.

1. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $3x + 5 \leq 5x - 3$.

   $3x + 5 \leq 5x - 3 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \Leftrightarrow 4 \leq x$, con lo que obtenemos que el conjunto de números reales que verifican la desigualdad dada es $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\} = [4, +\infty)$.

2. Determinar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 6x > -3\}$.

   $3x^2 - 6x > -3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

   Luego $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.3. Valor absoluto

La función valor absoluto es muy útil si queremos estimar los valores posibles de funciones reales, y su definición está íntimamente relacionada con la definición de distancia entre dos números reales.

Definición 1.3.1. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define el *valor absoluto de a*, y se denota por $|a|$, como

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Directamente de la definición obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.3.2. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica:*

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| = 0$ *si, y solo si,* $a = 0$.
3. $|a| = |-a|$.
4. $a \leq |a|$.

Ejemplo 1.3.3. Hallar las soluciones de la ecuación $|x-2| = |2x-1|$.

Aplicando la definición de valor absoluto, tenemos

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ 2-x, & \text{si } x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

y

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x, & \text{si } 2x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Así, nos aparecen los siguientes tres casos:

1. Si $x < \frac{1}{2}$, entonces $2-x = 1-2x$, con lo que $x = -1$.
2. Si $\frac{1}{2} \leq x < 2$, entonces $2-x = 2x-1$, con lo que $-3x = -3$ y, por tanto, $x = 1$.
3. Si $x \geq 2$, entonces $x-2 = 2x-1$, con lo que $-x = 1$ y, por tanto, $x = -1$. Pero, en este caso, $-1 \notin [2, +\infty)$, por lo que este resultado no es válido.

Luego, las soluciones de la ecuación $|x-2| = |2x-1|$, son $x = -1$ y $x = 1$.

Proposición 1.3.4. (Propiedades del valor absoluto). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica:*

1. $|ab| = |a|\,|b|$.
2. *Si $c \geq 0$, entonces $|a| \leq c$ si, y solo si, $-c \leq a \leq c$.*
3. *Si $c \geq 0$, entonces $c \leq |a|$ si, y solo si, $c \leq a$ o $a \leq -c$.*
4. *Desigualdad triangular:* $|a+b| \leq |a| + |b|$.
5. $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

1.3.1. Distancia en $\mathbb{R}$

Si a es un número real, su valor absoluto representa su distancia del cero. En esta observación se basa las definiciones de distancia y de entorno abierto en $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.5. Sean a y b dos números reales. Se define la *distancia entre a y b*, y se denota por $d(a,b)$, como $d(a,b) = |a-b|$.

Definición 1.3.6. Sean $a, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. Se define el *entorno abierto de centro a y radio r*, y se denota por $E_r(a)$, como $E_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$.

1.4. Completitud de $\mathbb{R}$

1.4.1. Supremos e ínfimos

Dado un subconjunto de los números reales, es a menudo importante poder hallar sus puntos extremos, es decir los números "más grandes y más pequeños" que el conjunto puede contener. Es evidente que si estamos estudiando un intervalo acotado y cerrado $[a, b]$, entonces a es el valor mínimo y b es el valor máximo de este conjunto. Pero si nuestro conjunto es, por ejemplo, el intervalo $(0, 5]$ o el intervalo $[-15, +\infty)$, tenemos que extender las ideas intuitivas de máximo y mínimo.

Definición 1.4.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Se dice que $s \in \mathbb{R}$ es *una cota superior de* A (o que A está acotado superiormente por s) si, para todo $x \in A$, se verifica que $x \leq s$.
- Se dice que $S \in \mathbb{R}$ es *un supremo de* A, y se denota por $\sup(A) = S$, si S es una cota superior de A y, si $u \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de A, entonces $S \leq u$ (S es la cota superior mínima).
- Se dice que $i \in \mathbb{R}$ es *una cota inferior de* A (o que A está acotado inferiormente por i) si, para todo $x \in A$, se verifica que $i \leq x$.
- Se dice que $I \in \mathbb{R}$ es *un ínfimo de* A, y se denota por $\inf(A) = I$, si I es una cota inferior de A y, si $u \in \mathbb{R}$ es otra cota inferior de A, entonces $u \leq I$ (I es la cota inferior máxima).

Proposición 1.4.2. (Unicidad del supremo e ínfimo). *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces se verifica:*

1. *Si S_1 y S_2 son dos supremos de A, entonces $S_1 = S_2$.*
2. *Si I_1 e I_2 son dos ínfimos de A, entonces $I_1 = I_2$.*

Gracias a la unicidad del supremo y del ínfimo podemos definir el concepto de máximo y mínimo.

Definición 1.4.3. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Se dice que $M \in \mathbb{R}$ es el *máximo de* A, y se denota por $\max(A) = M$, si M es el supremo de A y, además, $M \in A$.
- Se dice que $m \in \mathbb{R}$ es el *mínimo de* A, y se denota por $\min(A) = m$, si m es el ínfimo de A y, además, $m \in A$.

Teorema 1.4.4. (Axioma de completitud de $\mathbb{R}$). *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que tenga cota superior (inferior), tiene un supremo (ínfimo) en $\mathbb{R}$.*

Observación 1.4.5. Nótese que, un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que esté acotado superiormente (inferiormente), no tiene por qué tener máximo (ínfimo).

Ejemplo 1.4.6. Consideremos el conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Este conjunto está acotado inferiormente por 0 (de hecho, 0 es el ínfimo de A). Sin embargo, no tiene mínimo. Nótese que el conjunto A sí que tiene máximo, ya que 1 es el supremo de A y $1 \in A$.

1.4.2. Algunas consecuencias de la completitud de $\mathbb{R}$

Teorema 1.4.7. (Propiedad Arquimediana). *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.*

Corolario 1.4.8. *Sea $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$. Existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.*

Teorema 1.4.9. (Teorema de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es decir, dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.*

Teorema 1.4.10. (Teorema de densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *El conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$.*

1.5. Números complejos

En matemáticas es preciso introducir los números complejos debido a que el cuadrado de cualquier número real es siempre un número positivo, por lo que ecuaciones cuadráticas elementales tales como $x^2 = -1$ no tienen solución en el cuerpo de los números reales. Los números complejos nos permiten obtener soluciones de estas ecuaciones.

1.5.1. Definición de números complejos

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ con las siguientes opeaciones:

- Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$.
- Producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$.

Proposición 1.5.1. *El conjunto $\mathbb{R}^2$, dotado con las operaciones de suma $+$ y producto $\cdot$ definidas anteriormente, tiene estructura de cuerpo.*

Demostración. Las propiedades (A1), (A2), (P1), (P2) y (D) son cuestión de cálculo.

Para (A3) basta considerar el elemento $(0, 0)$ y, para (A4), $(-a, -b)$ como elemento opuesto de $(a, b) \in \mathbb{C}$.

Para (P3) basta considerar el elemento $(1, 0)$ y, para (P4), $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ como elemento inverso de $(a, b) \in \mathbb{C}$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. $\square$

Definición 1.5.2. Al cuerpo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se le denomina *cuerpo de los números complejos*, y lo denotampos por $\mathbb{C}$.

Observación 1.5.3. Podemos ver al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$, ya que podemos identificar $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$.

Definición 1.5.4. Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.

- Se define la *parte real* de z, y se denota por $\mathrm{Re}(z)$, como $\mathrm{Re}(z) = a$.
- Se define la *parte imaginaria* de z, y se denota por $\mathrm{Im}(z)$, como $\mathrm{Im}(z) = b$.

- Se dice que z es *real (puro)* si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Se dice que z es *imaginario puro* si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Definición 1.5.5. Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. Al elemento $(0, 1) \in \mathbb{C}$ se le denomina *unidad imaginaria*, y se denota por i.

Observación 1.5.6. Se verifica que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ con lo que, mediante la identificación de $\mathbb{R} \times \{0\}$ con $\mathbb{R}$, podemos decir que $i^2 = -1$. Así, se tiene que la ecuación cuadrática $x^2 = -1$ tiene solución en el cuerpo de los números complejos.

De hecho, se tiene que $\mathbb{C}$ es el menor cuerpo algebraicamente cerrado (esto es, que contiene a las raices de todos los polinomios con coeficientes complejos) que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo.

Teorema 1.5.7. (Teorema Fundamental del Álgebra). *Sea $p(z)$ un polinomio de grado n, con $n \geq 1$, con coeficientes reales o complejos. Entonces $p(z)$ tiene exactamente n raices en $\mathbb{C}$, no necesariamente distintas.*

Observación 1.5.8. Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, hemos hallado un cuerpo algebraicamente cerrado, sin embargo, hemos perdido el orden existente en $\mathbb{R}$, es decir, es imposible hallar un orden total en $\mathbb{C}$.

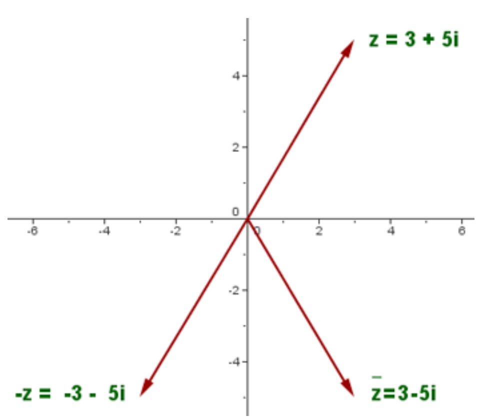
1.5.2. Forma binómica de los números complejos

Gracias a la unidad imaginaria, podemos expresar todo número complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ de forma $z = a + bi$, donde $\mathrm{Re}(z) = a$ y $\mathrm{Im}(z) = b$. A este expresión se le denomina *forma binómica*, y facilita el cálculo de operaciones con números complejos ya que, si $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$, entonces

- $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
- $z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ y
- $z{\cdot}w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$, ya que $i^2 = -1$.

Definición 1.5.9. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el *conjugado de z*, y se denota por $\overline{z}$, como $\overline{z} = a - bi$.

Observación 1.5.10. Tanto la definición original como la forma binómica permiten una representación gráfica de los números complejos, vistos como elementos del plano complejo. Gráficamente, el conjugado $\overline{z}$, de un número complejo z, es el simétrico de z, respecto al eje real



Definición 1.5.11. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el *módulo (o valor absoluto) de* z, y se denota por $|z|$, como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observación 1.5.12. Tal y como ocurría en $\mathbb{R}$, el módulo de un número complejo representa su distancia al origen $(0, 0)$.

Proposición 1.5.13. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$. *Entonces se verifica:*

1. $\overline{(\overline{z})} = z$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.
4. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, *si* $w \neq 0$.
6. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$.
7. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.
8. $|-z| = |z|$
9. $|z| = |\overline{z}|$.
10. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Corolario 1.5.14. *Sea* $z \in \mathbb{C}$, *con* $z \neq 0$. *Entonces* $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Observación 1.5.15. Este corolario (o bien el punto 10 de la proposición anterior) es muy útil cuando queremos encontrar la forma binómica de un número complejo que viene dado como cociente de dos números complejos.

Ejemplo 1.5.16. Hallar la expresión binómica de $z = \frac{2+2i}{3-3i}$.

Como el denominador es lo que nos da problemas a la hora de encontrar la forma binómica de z, para quitarlo debemos multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, es decir,

$$z = \frac{2+2i}{3-3i} = \frac{2+2i}{3-3i} \cdot \frac{3+3i}{3+3i} = \frac{(2+2i)(3+3i)}{3^2+3^2} = \frac{6+6i+6i-6}{9+9} = \frac{12i}{18} = \frac{2}{3}i.$$

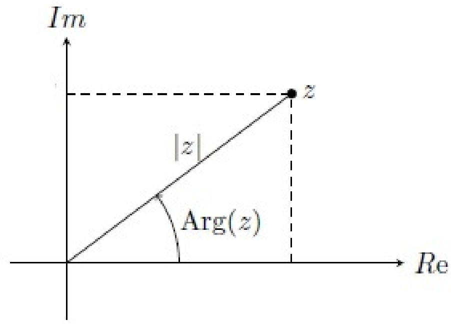
1.5.3. Forma polar de los números complejos

Gracias a la representación gráfica de un número complejo visto como elemento de $\mathbb{R}^2$, se puede considerar otra forma de expresar un número complejo.

Definición 1.5.17. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el argumento principal de z, y se denota por $\mathrm{Arg}(z)$, como el ángulo que forma el vector (a, b) con semieje real positivo.

Observación 1.5.18. Por convenio, dado $z \in \mathbb{C}$, consideraremos que $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Claramente, $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$.

Con esta definición, y teniendo en cuenta que el módulo de un número complejo es su distancia al origen de coordenadas, todo número complejo queda determinado por su módulo y su argumento principal, es decir, si $z \in \mathbb{C}$, entonces podemos escribir $z = r_\theta$, donde $r = |z|$ y $\theta = \text{Arg}(z)$. A esta expresión se le denomina *forma polar de z*.



Cálculo del argumento principal de un número complejo.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, y sea $\theta = \text{Arg}(z)$.

1. Si $a = 0$, entonces z es imaginario puro, con lo que $\theta = \frac{\pi}{2}$, si $b > 0$, o bien $\theta = -\frac{\pi}{2}$, si $b < 0$.
2. Si $b = 0$, entonces z es real, con lo que $\theta = 0$, si $a > 0$, o bien $\theta = \pi$, si $a < 0$.
3. Si $a, b \neq 0$, entonces calculamos $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$. Posteriormente, debemos mirar en qué cuadrante se encuentra z.
   a) **Primer cuadrante:** Si $a, b > 0$, entonces $\theta = \alpha$.
   b) **Segundo cuadrante:** Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $\theta = \pi - \alpha$.
   c) **Tercer cuadrante:** Si $a, b < 0$, entonces $\theta = -\pi + \alpha$.
   d) **Cuarto cuadrante:** Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $\theta = -\alpha$.

Ejemplo 1.5.19. Obtener la expresión polar de los números complejos $z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = 1-\sqrt{3}i$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$.

Por una parte, como $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = -z_2 = -\overline{z_1}$ y $z_4 = -z_1$, entonces

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Hallemos ahora los argumentos principales de cada uno de estos números complejos.

- Para $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ tenemos que $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. Como z_1 está en el primer cuadrante, entonces $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, con lo que la forma polar de z_1 es
$$z_1 = 2_{\frac{\pi}{3}}.$$
- Para $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ tenemos que $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. Como z_2 está en el cuarto cuadrante, entonces $\theta_2 = -\frac{\pi}{3}$, con lo que la forma polar de z_2 es
$$z_2 = 2_{-\frac{\pi}{3}}.$$

- Para $z_3 = -1+\sqrt{3}i$ tenemos que $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. Como z_3 está en el segundo cuadrante, entonces $\theta_3 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, con lo que la forma polar de z_3 es
$$z_3 = 2_{\frac{2\pi}{3}}.$$
- Para $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$ tenemos que $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. Como z_4 está en el tercer cuadrante, entonces $\theta_4 = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$, con lo que la forma polar de z_1 es
$$z_4 = 2_{-\frac{2\pi}{3}}.$$

1.5.4. Forma trigonométrica de un número complejo

Dado un número complejo, sabemos hallar su forma polar a partir de su forma binómica. La forma trigonométrica hace que podamos hallar la forma binómica de un número complejo que estaba en forma polar.

Sea $z = r_\theta \in \mathbb{C}$ un número complejo en forma polar. Gracias a su prepresentación gráfica y a los conceptos básicos de trigonometría, sabemos que $\cos\theta = \frac{\text{Re}(z)}{r}$ y $\text{sen}\theta = \frac{\text{Im}(z)}{r}$, con lo que $\text{Re}(z) = r\cos\theta$ y $\text{Im}(z) = r\text{sen}\theta$. Luego podemos escribir z como $z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$. A esta expresión se le conoce como *forma trigonométrica de z*. Por lo anterior, desarrollando la forma trigonométrica obtenemos la forma binómica de z
$$z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = r\cos\theta + ir\text{sen}\theta = a + bi,$$
donde $a = \text{Re}(z)$ y $b = \text{Im}(z)$.

Ejemplo 1.5.20. Pasar de forma polar a forma binómica el números complejo $z = 2\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$.

Para pasar de forma polar a binómica, primero debemos escribir z es forma trigonométrica:
$$z = 2\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Una vez tenemos el número complejo z expresado en forma trigonométrica, solo debemos desarrollar esta expresión y realizar los cálculos necesarios, es decir,
$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2 - 2i.$$

Luego, la expresión binómica del número complejo $z = 2\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$ es $z = 2 - 2i$.

Proposición 1.5.21. (Operaciones con números complejos en forma polar). *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, y sean $r, r' \in [0, +\infty)$, $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi]$ tales que $z = r_\theta$ y $w = r'_{\theta'}$. Entonces se verifica:*

1. $z \cdot w = (r \cdot r')_{\theta+\theta'}$.
2. $\frac{z}{w} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\theta'}$, *si* $w \neq 0$. *En particular, dado* $z = r_\theta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *se tiene que* $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\theta}$.

Demostración. Demostraremos solo 1.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, y sean $r, r' \in [0, +\infty)$, $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi]$ tales que $z = r_\theta$ y $w = r'_{\theta'}$. Entonces

$$z \cdot w = r_\theta \cdot r'_{\theta'} = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) r'(\cos\theta' + i\mathrm{sen}\theta') =$$

$$rr'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\mathrm{sen}\theta' + i\mathrm{sen}\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta') =$$

$$rr'((\cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta') + i(\cos\theta\mathrm{sen}\theta' + \mathrm{sen}\theta\cos\theta')) =$$

$$rr'(\cos(\theta + \theta') + i\mathrm{sen}(\theta + \theta')) = (r \cdot r')_{\theta + \theta'}.$$

□

Como consecuencia de esta proposición, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.22. (Fórmula de De Moivre). *Sea $z \in \mathbb{C}$, y sean $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ tales que $z = r_\theta = r(cos\theta + isen\theta)$. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$z^n = (r^n)_{n\theta} = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$, y sean $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ tales que $z = r_\theta = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces tenemos los siguientes casos:

1. Si $n > 0$, entonces

$$z^n = z \cdot z \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot z = (r \cdot r \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot r)_{\theta + \theta + \overset{n}{\cdots} + \theta} = (r^n)_{n\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)).$$

2. Si $n = 0$, entonces

$$z^0 = 1 = (r^n)_{n\theta} = r^0(\cos(0 \cdot \theta) + i\mathrm{sen}(0 \cdot \theta)).$$

3. Si $n < 0$, entonces

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \frac{1}{z^{-n}} \overset{\text{Caso 1, } -n>0}{=} \frac{1}{(r^{-n})_{-n\theta}} = \left(\frac{1}{r^{-n}}\right)_{-(-n\theta)} =$$

$$= \left(\left(\frac{1}{r}\right)^{-n}\right)_{n\theta} = (r^n)_{n\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)).$$

□

Ejemplo 1.5.23. Veamos los siguientes ejemplos de aplicaciones de la fórmula de De Moivre.

1. Sea $z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Demostrar que, tanto z^3 como z^{-3} son números reales.

   Por una parte, aplicando la fórmula de De Moivre,

$$z^3 = 27\left(\cos\pi + i\mathrm{sen}\pi\right) = -27.$$

   Por otra parte, aplicando de nuevo la fórmula de De Moivre,

$$z^{-3} = \frac{1}{27}\left(\cos(-\pi) + i\mathrm{sen}(-\pi)\right) = -\frac{1}{27}.$$

   Luego, efectivamente, tanto z^3 como z^{-3} son números reales.

2. Comprobar, utilizando la fórmula de De Moivre, las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\begin{array}{c} \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \\ \text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\theta\cos\theta \end{array}.$$

Consideremos $z = 1_\theta = \cos\theta + i\text{sen}\theta$ y sea $n = 2$. Por una parte, aplicando la fórmula de De Moivre, tenemos que

$$z^2 = (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\text{sen}(2\theta).$$

Por otra parte, desarrollando la potencia $(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^2$ obtenemos

$$(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\text{sen}\theta i - \text{sen}^2\theta = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + 2\cos\theta\text{sen}\theta i.$$

Por último, como $\cos(2\theta) + i\text{sen}(2\theta) = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + 2\cos\theta\text{sen}\theta i$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \\ \text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\theta\cos\theta \end{array} \right. ,$$

ya que igualar dos números complejos significa que, tanto sus partes reales como imaginarias, deben ser las mismas.

3. Calcular z^5, donde $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. Expresar el resultado en forma binómica.

Para hallar la potencia de un número complejo, primero debemos expresarlo en forma polar,

$$\left. \begin{array}{l} |z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4 \\ \alpha = \text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \text{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \overset{\text{Re}(z),\text{Im}(z)>0}{\Longrightarrow} z = 4_{\frac{\pi}{3}}.$$

Aplicando la fórmula de De Moivre,

$$z^5 = \left(4_{\frac{\pi}{3}}\right)^5 = 4^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 - 512\sqrt{3}i.$$

1.5.5. Raíces de números complejos

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que la ecuación $w^n = z$ tiene solución para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, si $z \neq 0$, se da que esta ecuación tiene n soluciones distintas. En esta última parte del tema veremos cómo calcular dichas soluciones o, lo que es lo mismo, cómo calcular raíces n-ésimas de un número complejo z.

Definición 1.5.24. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que w es una *raíz n-ésima de* z si $w^n = z$.

Proposición 1.5.25. *Sea $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $z = r_\theta$, con $r \in (0, +\infty)$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$. Entonces, para cada $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ se verifica que*

$$w_k = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

es una raíz n-ésima de z.

Demostración. Trivial aplicando la fórmula de De Moivre. Sea $z = r_\theta \in \mathbb{C}$, con $r \in [0, +\infty)$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos, para cada $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $w_k = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$. Entonces, aplicando la fórmula de De Moivre,

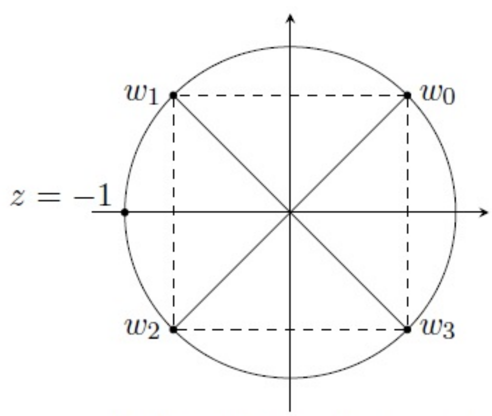
$$(w_k)^n = \left((\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \right)^n = (\sqrt[n]{r})^n \left(\cos\left(n \cdot \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i\mathrm{sen}\left(n \cdot \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) =$$

$$= r\left(\cos\left(\theta + 2k\pi\right) + i\mathrm{sen}\left(\theta + 2k\pi\right)\right) = r\left(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta\right) = z.$$

□

Observación 1.5.26. Si $z = 0$, es evidente que $z^{\frac{1}{n}} = 0$.

Observación 1.5.27. Una observación interesente de las raíces n-ésimas de un número complejo z es su interpretación geométrica. Resultando que las n raíces w_k son los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio $|z|^{\frac{1}{n}}$.



Raíces cuartas de $z = -1$

Ejemplo 1.5.28.

1. Obtener las raíces cúbicas de i.

   Consideremos $z = i$. El primer paso para hallar las raíces 3-ésimas de z es expresar z en su forma polar, $z = 1_{\frac{\pi}{2}}$. Ahora, para cada $k = 0, 1, 2$, tenemos

$$w_0 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2. Obtener las soluciones de la ecuación $w^2 + 1 = 0$.

   Como $w^2 + 1 = 0$, entonces tenemos que $w^2 = -1$, es decir, debemos hallar las raíces 2-ésimas (cuadradas) del número complejo $z = -1$.

Primero, expresamos $z = -1$ en su forma polar, es decir, $z = 1_\pi$. Por lo tanto

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = i,$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot \pi}{2}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot \pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Ejercicios

1. Determinar qué valores de $\mathbb{R}$ puede tomar x para que cumpla:

   a) $\frac{3x-1}{x+1} \leq 2$
   b) $4(x-2) - 2(x+3) < -3x+1$
   c) $\frac{5x-2}{3} + \frac{6x+1}{9} \geq \frac{-x-2}{18} + \frac{5x}{4}$
   d) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$
   e) $\frac{x^2-1}{-x^2+2x-1} \leq 0$
   f) $\frac{2x+8}{x^2+8x+7} > 0$

2. Aplicar la desigualdad de Cauchy para desmostrar la desigualdad de la media aritmética-geométrica.

3. Determinar qué valores de $\mathbb{R}$ puede tomar x para que cumpla:

   a) $|x-3| \leq 8$
   b) $|x-2| \geq 10$
   c) $|x-1| < |x|$
   d) $|x| > |x+1|$
   e) $|2x-1| < |x-1|$
   f) $|x-1| - |x-2| > 1$
   g) $|x+2| + |x-2| \leq 12$
   h) $|x+2| - |x| > 1$

4. Sea $x \in \mathbb{R}$, con $x > 0$. Demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

5. Demuestra que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica la identidad

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

6. Probar si los siguientes conjuntos están o no acotados y, en su caso, encuentra el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 < 8\}$.
   b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$.
   c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 < 0\}$.
   d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$.
   e) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

7. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

   a) $(3+2i)(-7-i)$.
   b) $(5-4i)(2i-6)$.
   c) $(\sqrt{3}-i) - i(1-\sqrt{3}i)$.
   d) $\overline{(5-2i)(1+4i)}(2-i)$.
   e) $\frac{4-2i}{-1+i}$.
   f) $\frac{(5+5i)(1-i)}{3-4i}$.

8. Determinar dos números complejos cuya suma sea $1+4i$, cuyo cociente sea imaginario y de manera que la parte real de uno de ellos sea -1.

9. Sea $z = \frac{3-2ai}{4-3i}$, con $a \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de a para que z sea real, y hallar la forma binómica de z.

10. Hallar dos números complejos cuya suma sea 4 y cuyo producto sea 8.

11. Determinar los números complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$ y $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.

12. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

13. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ y $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

14. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con $w \neq 0$. Sean $r \geq 0$, $r' > 0$, $\theta, \theta' \in (-\pi, \pi]$ tales que $z = r_\theta$ y $w = r'_{\theta'}$. Demostrar que $\frac{z}{w} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\theta'}$.

15. Comprobar las siguientes igualdades:

    a) $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$.
    b) $i^{25} = i$, $i^{127} = -i$.
    c) $\frac{1}{i} = -i$, $\frac{1}{i^2} = -1$, $\frac{1}{i^3} = i$.

16. Si $z \neq i$, probar que $\overline{\frac{i+\bar{z}}{i-z}} = -1$.

17. Si $|z| = 1$, probar que $\frac{1+z}{1-z}$ es un número imaginario puro.

18. Halla el módulo de $z = \frac{2+\sqrt{5}i}{4+3i}$.

19. Expresar en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

    a) $z_1 = -2 - 2i$
    b) $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
    c) $z_3 = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$
    d) $z_4 = \frac{i}{-2-2i}$

20. Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado en forma polar:

    a) $\frac{\left(5_{\frac{\pi}{4}}\right)\left(7_{-\frac{\pi}{2}}\right)}{2_{\frac{\pi}{3}}}$
    b) $\frac{\left(1_{\frac{\pi}{4}}\right)\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)}{3_{\frac{\pi}{2}}}$

21. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas, aplicando la fórmula de De Moivre:

    a) $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\mathrm{sen}^2\theta$
    b) $\mathrm{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\mathrm{sen}\theta - \mathrm{sen}^3\theta$

22. Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado en forma binómica:

    a) $(2+i)^5$
    b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2017}$

23. Obtener las siguientes raíces en forma binómica y representarlas gráficamente:

    a) $\sqrt{-1-\sqrt{3}i}$
    b) $\sqrt[3]{1-i}$
    c) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$
    d) $z^4 + 4 = 0$
    e) $z^3 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)^{32}$
    f) $z^3 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)^{40}$

24. Sabiendo que la ecuación compleja $z^3 - (1-i)z^2 - 2iz - p = 0$ tiene como solución $z_1 = 1+i$, hallar p y las otras dos raíces.

25. Sea $p(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales. Demostrar que si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(z)$, entonces $\overline{w}$ es también raíz de $p(z)$.

26. Comprobar que $z = 3+4i$ es solución de la ecuación $z^4 - 10z^3 + 62z^2 - 178z + 325 = 0$ y hallar sus otras tres raíces.

27. Calcula las siguientes raíces complejas:

a) $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ c) $\sqrt[3]{-8}$
b) $\sqrt[4]{1+i}$ d) $\sqrt[5]{-3888 - 3888\sqrt{3}i}$

28. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 16 = 0$ c) $(z-2)^2 - 4 = 0$
b) $z^5 + 243 = 0$ d) $(z-2)^2 + 4 = 0$