Capítulo 3

Aplicaciones lineales

3.1. Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen

3.1.1. Definición y ejemplos

Definición 3.1.1. Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Diremos que f es una *aplicación lineal* si verifica las siguientes propiedades:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in V$.

2. $f(av) = af(v)$ para todo $v \in V$ y para todo $a \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 3.1.2. Para cada $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, podemos considerar la aplicación identidad $\mathrm{Id} : V \longrightarrow V$ definida por $\mathrm{Id}(v) = v$ para todo $v \in V$.

Claramente, Id es una aplicación lineal ya que, dados $u, v \in V$, $a \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{Id}(u+v) = u + v = \mathrm{Id}(u) + \mathrm{Id}(v) \text{ y}$$

$$\mathrm{Id}(av) = av = a\mathrm{Id}(v).$$

Más generalmente, para cada subespacio vectorial U de V, podemos considerar la aplicación lineal inclusión $i : U \longrightarrow V$, definida por $i(u) = u$ para todo $u \in U$.

Ejemplo 3.1.3. Para dos espacios vectoriales cualesquiera V y V', podemos considerar la aplicación lineal nula, $0 : V \longrightarrow V'$ definida por $0(v) = 0$ para todo $v \in V$.

Ejemplo 3.1.4. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (y, x)$ es lineal. En efecto, sean $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$f(u+v) = f((x,y) + (x',y')) = f((x+x', y+y')) = (y+y', x+x').$$

Por otro lado,

$$f(u) + f(v) = f(x,y) + f(x',y') = (y,x) + (y',x') = (y+y', x+x').$$

Con lo que $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Análogamente,

$$f(au) = f(a(x,y)) = f(ax,ay) = (ay,ax), \text{ y}$$
$$af(x,y) = a(y,x) = (ay,ax),$$

con lo que $f(au) = af(u)$.

Ejemplo 3.1.5. La aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = (y,x^2)$ no es lineal, ya que

$$g(2(1,0)) = g(2,0) = (0,4),$$

pero

$$2g(1,0) = 2(0,1) = (0,2).$$

Ejemplo 3.1.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la aplicación $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$ dada por $D(p(x)) = p'(x)$ (su derivada). Entonces D es lineal, ya que la derivada de la suma es la suma de las derivadas y la derivada de una constante por un polinomio es la constante por la derivada del polinomio.

Ejemplo 3.1.7. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la aplicación $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Es claro que f es lineal, ya que

$$f(A+B) = \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = f(A) + f(B) \text{ y}$$

$$f(\alpha A) = \mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A) = \alpha f(A)$$

para toda $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 3.1.8. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Entonces f es lineal si, y solo si, $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$ para todo $x, y \in V$ y para todo $a, b \in \mathbb{K}$.*

Proposición 3.1.9. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Entonces se verifica:*

1. $f(0) = 0$.
2. *$f(-v) = -f(v)$ para todo $v \in V$.*
3. *$f(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + ... + a_nf(v_n)$ para todo $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ y para todo $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$.*

Observación 3.1.10. El primero de estos puntos nos puede servir para ver si una aplicación no es lineal. Aunque hay aplicaciones no lineales que sí verifican la propiedad 1.

Ejemplo 3.1.11. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x+1,y)$ no es lineal, ya que $f(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$. Sin embargo, la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = (y,x^2)$ vimos que no era lineal, pero si que verifica que $g(0,0) = (0,0)$.

3.1.2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Definición 3.1.12. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Se define

- La *imagen de* f, y se denota por $\mathrm{Im}(f)$, como $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in V\}$.
- El *núcleo de* f, y se denota por $\mathrm{Ker}(f)$, como $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V : f(x) = 0\}$.

Observación 3.1.13. Se tiene que $\mathrm{Ker}(f) \leq V$ y $\mathrm{Im}(f) \leq V'$.

Lema 3.1.14. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un sistema generador de V, entonces $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\}$ es un sistema generador de* $\mathrm{Im}(f)$.

Veamos ahora como se calcula el núcleo y la imagen de una aplicación lineal.

Ejemplo 3.1.15. Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + z, y, x + 2y + z)$. Vamos a calcular el núcleo y la imagen de f.

- Se tiene que $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x + z, y, x + 2y + z) = (0, 0, 0)$, es decir
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \end{array}\right.$$
o, equivalentemente,
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. ,$$
con lo que obtenemos las ecuaciones cartesianas del núcleo. Pasando dichas ecuaciones cartesianas a paramétricas obtenemos
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$
y, por tanto, una base de $\mathrm{Ker}(f)$ es $\{(-1, 0, 1)\}$, con lo que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
- Calculemos ahora la imagen de f. Aplicando el lema anterior, tenemos que
$$\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}$$
es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, es decir, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1)\}$, ya que
$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (1,0,1) \\ f(0,1,0) & = & (0,1,2) \\ f(0,0,1) & = & (1,0,1) \end{array} .$$
A partir de este sistema generador, hallamos una base de $\mathrm{Im}(f)$, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ y, a partir de esta base, podemos calcular tanto las ecuaciones cartesianas como las paramétricas (si nos interesa).

3.1.3. Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas. Isomorfismos

Definición 3.1.16. Sean A y B dos conjuntos y sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Decimos que

- la función f es *inyectiva* si elementos distintos tienen imágenes distintas, es decir, si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$ o, equivalentemente, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.
- la función f es *sobreyectiva* si todo elemento de B es la imagen de algún elemento de A, es decir, si para todo $y \in B$ existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- la función f es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Proposición 3.1.17. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Entonces se verifica:*

1. *f es inyectiva si, y solo si,* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
2. *f es sobreyectiva si, y solo si,* $\mathrm{Im}(f) = V'$.

Otra caracterización sería la siguiente.

Proposición 3.1.18. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Entonces se verifica:*

1. *f es inyectiva si, y solo si, para cada conjunto linealmente independiente $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, el conjunto $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_r)\}$ es linealmente independiente.*
2. *f es sobreyectiva si, y solo si, para cada sistema generador de V, $\{v_1, v_2, ..., v_s\}$, el conjunto $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_s)\}$ es un sistema generador de V'.*

Definición 3.1.19. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

1. Si f es inyectiva, diremos que f es un *monomorfismo*.
2. Si f es sobreyectiva, diremos que f es un *epimorfismo*.
3. Si f es biyectiva, diremos que f es un *isomorfismo*. En este caso, se dirá que los espacios V y V' son *isomorfos*, y se denotará por $V \cong V'$.
4. Si $V' = V$, diremos que f es un *endomorfismo*.
5. Si $V' = V$ y f es biyectiva, diremos que f es un *automorfismo*.
6. Definimos la *función inversa de f* (si existe) como la única aplicación $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{V'}$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V$.

Proposición 3.1.20. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Entonces existe $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ si, y solo si, f es un isomorfismo.*

Proposición 3.1.21. *Sean $f : V \longrightarrow V'$, $g : V \longrightarrow V'$ y $h : V' \longrightarrow V''$ aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Entonces se verifica:*

1. *$af : V \longrightarrow V'$, definida por $(af)(v) = af(v)$ para todo $v \in V$, es una aplicación lineal, para cualquier $a \in \mathbb{K}$.*

2. *$f + g : V \longrightarrow V'$, definida por $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ para todo $v \in V$, es una aplicación lineal.*

3. *$h \circ f : V \longrightarrow V''$, definida por $(h \circ f)(v) = h(f(v))$ para todo $v \in V$, es una aplicación lineal.*

4. *Si existe $f^{-1} : V' \longrightarrow V$, entonces f^{-1} es una aplicación lineal (y, por lo tanto, un ismorfismo).*

3.2. Aplicaciones lineales y matrices

3.2.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V. Entonces f queda totalmente determinada por las imágenes de los vectores de B:

$$f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$$

ya que, para cada vector $x \in V$, con coordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)_B$, se tiene que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, con lo que

$$f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n).$$

Consideremos ahora una base $B' = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ de V' y consideremos las coordenadas de los vectores $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ respecto de B':

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f(e_1) & = & (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1})_{B'} \\ f(e_2) & = & (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2})_{B'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(e_n) & = & (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})_{B'} \end{array} \right. .$$

Así, dado un vector $x \in V$, con coordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)_B$, según hemos visto $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$. Luego, las coordenadas de $f(x)$ respecto de B' serán

$$f(x) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n)_{B'}.$$

Por último, si denotamos a las coordenadas de $f(x)$ respecto de B' por $(y_1, y_2, ..., y_m)_{B'}$, entonces tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_1 & = & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{array} \right.$$

o, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esta expresión recibe el nombre de *ecuación matricial de la aplicación lineal f respecto de las bases B y B'*. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se le denomina *matriz asociada a f respecto de las bases B y B'*, y se denota por $M_{B,B'}(f)$.

Nótese que el número de columnas de A coincide con la dimensión de V, y el número de filas con la dimensión de V'.

Si denotamos por X e Y a las matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix},$$

entonces obtenemos la ecuación matricial de f de forma reducida:

$$Y = AX.$$

Resumen del procedimiento:

Sean V y V' dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y sean B y B' bases de V y V' respectivamente. Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$, la ecuación matricial de f respecto de las bases B y B' es la expresión

$$Y = AX$$

la cual, dadas las coordenadas de un vector $x \in V$ respecto de B, permite calcular las coordenadas de su imagen $y = f(x)$ respecto de B'. A es la matriz asociada a f respecto de B y B', es decir, la matriz de orden $m \times n$ cuyas columnas son las coordenadas respecto de B' de las imágenes por f de los vectores de B.

Para hallar esta matriz A, debemos calcular la imagen por f de todos los vectores de la base B, y el resultado escribirlo como combinación lineal de la base B' para poder así hallar sus coordenadas respecto de B'. Estas coordenadas formarán las columnas de la matriz A.

Nótese que, al ser las columnas de A las coordenadas respecto de B' de un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$ (ya que $\mathrm{Im}(f)$ está generado por la imagen por f de todos los vectores de la base B), entonces se tiene que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(A)$.

Ejemplo 3.2.1. Sea $D : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal derivada, es decir, $D(p(x)) = p'(x)$ para todo $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Consideremos la base estándar en $\mathbb{R}_3[x]$, $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B' = \{1, x, x^2\}$ la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$. Vamos a calcular la matriz asociada a D respecto de B y B'. Para ello, comenzamos calculando las imágenes por D de los vectores de B:

$$\begin{array}{rcl} D(1) & = & 0 \\ D(x) & = & 1 \\ D(x^2) & = & 2x \\ D(x^3) & = & 3x^2 \end{array}.$$

Ahora, calculamos las coordenadas de estos vectores respecto de la base B':

$$\begin{array}{ccccc} D(1) & = & 0 & = 0{\cdot}1 + 0{\cdot}x + 0{\cdot}x^2 = & (0,0,0)_{B'} \\ D(x) & = & 1 & = 1{\cdot}1 + 0{\cdot}x + 0{\cdot}x^2 = & (1,0,0)_{B'} \\ D(x^2) & = & 2x & = 0{\cdot}1 + 2{\cdot}x + 0{\cdot}x^2 = & (0,2,0)_{B'} \\ D(x^3) & = & 3x^2 & = 0{\cdot}1 + 0{\cdot}x + 3{\cdot}x^2 = & (0,0,3)_{B'} \end{array}.$$

Por último, calculamos la matriz asociada colocando las coordenadas respecto de B' por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nótese que, si $p(x) = -x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, entonces $D(p(x)) = -3x^2 + 4x - 7$. Ahora bien, como $p(x) = (2, -7, 2, -1)_B$, entonces podemos calcular $D(p(x))$ mediante la matriz asocida a D,

$$D(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

es decir, $D(p(x)) = (-7, 4, -3)_{B'} = -7 + 4x - 3x^2$.

Ejemplo 3.2.2. Consideremos $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por $f(A) = \operatorname{tr}(A)$ para toda $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sea

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base estándar de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y sea $B' = \{1\}$ la base canónica de $\mathbb{R}$. Vamos a hallar la matriz asociada a f respecto de B y B'. Para ello, necesitamos calcular las imágenes de los vectores de B mediante f:

$$\begin{array}{ccc} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & 1 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = & 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = & 1 \end{array}.$$

Calculamos ahora las coordenadas de estos vectores respecto de la base B':

$$\begin{array}{ccccc} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & 1{\cdot}1 & = & 1_{B'} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & 0{\cdot}1 & = & 0_{B'} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = & 0{\cdot}1 & = & 0_{B'} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = & 1{\cdot}1 & = & 1_{B'} \end{array}.$$

Por último, calculamos la matriz asociada colocando las coordenadas respecto de B' por columnas:

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que, si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces $f(A) = 3$. Ahora bien, como $A = (-1, 2, 7, 4)_B$, entonces podemos calcular $f(A)$ mediante la matriz asocida a f,

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 0 + 4 = 3.$$

Ejemplo 3.2.3. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} c & a+b \\ b+c & a \end{pmatrix}$$

para todo $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. Sea $B = \{1, x, x^2\}$ la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$ y

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base estándar de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vamos a hallar la matriz asociada a f respecto de B y B'. Para ello, necesitamos calcular las imágenes de los vectores de B mediante f:

$$\begin{array}{rcccl} f(1) & = & f(1 + 0{\cdot}x + 0{\cdot}x^2) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(x) & = & f(0 + 1{\cdot}x + 0{\cdot}x^2) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f(x^2) & = & f(0 + 0{\cdot}x + 1{\cdot}x^2) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ahora, calculamos las coordenadas de estos vectores respecto de la base B':

$$\begin{array}{rclcl} f(1) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = 0{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = & (0,1,0,1)_{B'} \\ f(x) & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = 0{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = & (0,1,1,0)_{B'} \\ f(x^2) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = 1{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0{\cdot}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = & (1,0,1,0)_{B'} \end{array}.$$

Por último, calculamos la matriz asociada colocando las coordenadas respecto de B' por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.2.4. *Sean V, V' y V'' tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita y sean B, B' y B'' bases de V, V' y V'', respectivamente. Sean $f, g : V \longrightarrow V'$ y $h : V' \longrightarrow V''$ tres aplicaciones lineales. Entonces se verifica:*

1. $M_{B,B'}(f+g) = M_{B,B'}(f) + M_{B,B'}(g)$.
2. $M_{B,B'}(af) = aM_{B,B'}(f)$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$.
3. $M_{B,B''}(h \circ f) = M_{B',B''}(h)M_{B,B'}(f)$.

3.2.2. Matriz asociada y núcleo e imagen

Veamos ahora un ejemplo de cómo calcular el núcleo y la imagen de una aplicación lineal a partir de su matriz asociada.

Ejemplo 3.2.5. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + z, y, x + 2y + z).$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, bajo la matriz A, colocamos la matriz identidad y realizamos operaciones elementales por columnas hasta obtener la forma normal de Hermite de A por columnas

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_c \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Los vectores que quedan bajo las columnas nulas (en este caso, un solo vector), forman una base del núcleo de f, es decir, $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{L}(\{(-1, 0, 1)\})$ y, los vectores columna de la forma normal de Hermite por columnas no nulos, forman una base de la imagen de f, esto es, $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\})$.

Nótese que $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales:

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Entonces se verifica:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Corolario 3.2.6. *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con $\dim(V) = n$ y $\dim(V') = m$, y sea A la matriz de orden $m \times n$ asociada a f respecto a ciertas bases B y B'. Entonces:*

1. *f es inyectiva si, y solo si, $rg(A) = n$.*

2. *f es sobreyectiva si, y solo si, $rg(A) = m$.*

3. *f es un isomorfismo si, y solo si, A es cuadrada con $det(A) \neq 0$.*

Teorema 3.2.7. *Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ son isomorfos si, y solo si, tienen la misma dimensión.*

3.2.3. Matriz asociada y cambio de base

Ahora veremos cómo están relacionadas las matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal con $\dim(V) = n$ y $\dim(V') = m$. Si A y C son las matrices asociadas a f respecto de distintas bases, entonces

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(C).$$

Luego A y C tienen el mismo rango y, por lo tanto, son matrices equivalentes. Veamos esta situación más de cerca.

Sean B y $\overline{B}$ dos bases de V, con cambio de base de $\overline{B}$ a B dado por $X = P\overline{X}$ y sean B' y $\overline{B'}$ dos bases de V', con cambio de base de $\overline{B'}$ a B' dado por $Y = Q\overline{Y}$.

Consideremos la matriz asociada a f respecto de B y B', $A = M_{B,B'}(f) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, y la ecuación matricial de f respecto a estas bases

$$Y = AX.$$

Análogamente, consideremos la matriz asociada a f respecto de $\overline{B}$ y $\overline{B'}$, $C = M_{\overline{B},\overline{B'}}(f) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, y la ecuación matricial de f asociada a estas bases

$$\overline{Y} = C\overline{X}.$$

Gráficamente, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] & V' \\
B \arrow[r, "A"] & B' \\
\overline{B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \overline{B'} \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Con lo que

$$\overline{Y} = Q^{-1}Y = Q^{-1}AX = Q^{-1}AP\overline{X},$$

es decir,

$$C = Q^{-1}AP.$$

Ejemplo 3.2.8. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x+y, -y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Hallar la expresión analítica de f respecto de la base $B = \{(0, -1), (-1, 1)\}$

Claramente, respecto de la base canónica, la matriz asociada a f es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular la matriz asociada a f respecto de B. Para ello, realizamos el cambio de base de B a la base canónica.

$$\begin{array}{rcl} (0,-1) & = & 0\cdot(1,0) + (-1)\cdot(0,1) \\ (-1,1) & = & (-1)\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1) \end{array},$$

con lo que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como sabemos que $M_{B,B}(f) = P^{-1}AP$, entonces

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la expresión analítica de f respecto de la base B será

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

es decir, $f(x, y) = (y, x)$, respecto de la base B, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicios

1. En los siguientes casos estudiar si f es una aplicación lineal y, en caso afirmativo, hallar una matriz A asociada a f respecto de las bases canónicas, así como los subespacios vectoriales $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (2x, -y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + y, x - y - z)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2, \sqrt[3]{xy})$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Se pide:

   a) Hallar, respecto de la base canónica, la ecuación de la transformación de f, sabiendo que $f(2, 1, 0) = (7, 0, 0)$, $f(-1, 3, 1) = (0, 7, 0)$ y $f(0, 5, 7) = (5, 10, 0)$.

   b) ¿Es f biyectiva?

   c) Hallar el núcleo de f y su imagen.

   d) ¿Qué condición debe satisfacer la matriz A asociada a un endomorfismo para que las imágenes de vectores linealmente independientes sean linealmente independientes?

3. Sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ y f un endomorfismo que, respecto de la base B, tiene por ecuación $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$. Hallar la ecuación de f respecto de la base B' siendo $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + e_2$ y $u_3 = e_1$.

4. Dada la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$.

   a) Calcula la matriz A de f respecto a las bases canónicas.

   b) Calcula las ecuaciones cartesianas y paramétricas del núcleo y de la imagen de f. Indicar si f es entonces inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

   c) Buscar la relación entre la matriz A y aquella otra B de f que está expresada respecto a las bases $\{(1, -1, 0), (-2, 0, 1), (0, 0, -2)\}$ y $\{(-1, 0), (-2, 1)\}$. Hallar dicha matriz B.

5. La matriz de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ expresada respecto a las bases $\{(3, 1), (1, 1)\}$ y $\{(0, 2), (-1, 1)\}$ es
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Determina matricialmente cual sería la matriz respecto a las bases canónicas.

6. Dada la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z)$.

   a) Halla las ecuaciones paramétricas y cartesianas del núcleo y de la imagen de f y clasifícala.

   b) Halla una base de $f(V)$ siendo V el subespacio cuya ecuación cartesiana es $z = 0$.

   c) Halla las coordenadas de $f(2, 3, 0)$ en la base de $f(V)$ obtenida anteriormente.

   d) Determina $f^{-1}(3, 2, 1)$.

7. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2).$$

   a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

   b) Hallar la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base estándar de $\mathbb{R}_2[x]$.

   c) Determinar el núcleo y la imagen de esta aplicación.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\mathrm{Ker}(f) = \langle (5, 1, 0), (3, 0, 1) \rangle$ y $f(1, 0, 0) = (2, -1, 1)$.

   a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.

   b) Calcula la imagen de f.

9. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = 3e_1 + 2e_2,\ f(e_2) = -5e_1 + e_2 \text{ y } f(e_3) = 4e_2.$$

   a) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base B.

   b) Escribir su ecuación matricial.

   c) Hallar la expresión analítica de f respecto de la base B.

   d) Obtener el subespacio núcleo f. Dar una base.

   e) Obtener el subespacio imagen f. Dar una base.

   f) ¿Es f un epimorfismo?

   g) ¿Es f un monomorfismo?