Capítulo 4

Diagonalización. Autovalores y autovectores

4.1. Autovalores y autovectores

Definición 4.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* (o *valor propio*) si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Ejemplo 4.1.2. Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

En este caso, se tiene que

$$f(2, 2, 0) = (4, 4, 0) = 2(2, 2, 0) \text{ y}$$

$$f(1, 1, 1) = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1),$$

con lo que 2 y 3 son autovalores de f.

Definición 4.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Para un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, llamaremos *autovector* (o *vector propio*) asociado a λ a cada vector $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. En este caso, denotaremos por

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}.$$

Proposición 4.1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica:*

1. $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.
2. *V_λ es un subespacio vectorial de V.*
3. $\dim(V_\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.
4. *λ es un autovalor de f si, y solo si,* $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

Observación 4.1.5. Al subespacio V_λ se le denomina *subespacio propio* de λ.

Ejemplo 4.1.6. Consideremos de nuevo el ejemplo anterior, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Su matriz asociada A respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el subespacio propio V_2, asociado al autovalor 2:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, se tiene que $(x, y, z) \in V_2$ si, y solo si,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y \quad & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

con lo que obtenemos las ecuaciones cartesianas de V_2. Para hallar una base de V_2 podemos, por ejemplo, pasar estas ecuaciones cartesianas a paramétricas, obteniendo así

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Por lo tanto, una base de V_2 sería $\{(1, 1, 0)\}$, es decir, $V_2 = \langle\{(1, 1, 0)\}\rangle$.

4.2. Polinomio característico

Según la proposición anterior, para un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, con matriz asociada A respecto una base de V, un escalar λ es un autovalor de f si, y solo si, $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$. Ahora bien, considerando λ como una indeterminada (una incógnita) se tiene que $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ es un polinomio de grado n, $p(\lambda)$ que recibe el nombre de *polinomio característico.*

Así, se tiene que los autovalores de f son, precisamente, las raíces del polinomio característico.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6.$$

Mediante el método de Ruffini se tiene que $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$ y, por tanto, los autovalores de f son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$.

Ejemplo 4.2.2. Consideremos ahora el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3,$$

con lo que $p(\lambda)$ tiene a 2 como única raíz con multiplicidad 3 y, por tanto, el único autovalor de A es $\lambda_1 = 2$.

4.3. Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

Definición 4.3.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo con A su matriz asociada respecto a una base de V. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ $(r \leq n)$ los distintos autovalores de f (o de A). Se define:

- La *multiplicidad algebraica* del autovalor λ_i, con $i = 1, 2, ..., r$, como la multiplicidad α_i de λ_i como raíz del polinomio característico.

- La *multiplicidad geométrica* del autovalor λ_i, con $i = 1, 2, ..., r$, como la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}, es decir,

$$d_i = \dim(V_{\lambda_i}) = n - \operatorname{rg}(A - \lambda_i \mathrm{I}_n).$$

Ejemplo 4.3.2. Consideremos de nuevo el endomorfismo del ejemplo anterior, cuya matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = (2-\lambda)^3$, con lo que A tiene como único autovalor a $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad algebráica $\alpha_1 = 3$. Veamos cuál es su multiplicidad geométrica.

$$d_1 = \dim(V_2) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Proposición 4.3.3. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ $(r \leq n)$ los distintos autovalores de f. Entonces, para cada $i = 1, 2, ..., r$, se verifica que $1 \leq d_i \leq \alpha_i$.*

4.4. Endomorfismos y matrices diagonales

Definición 4.4.1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dos matrices de orden n. Se dice que A y B son *semejantes* si existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Definición 4.4.2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diremos que A es *diagonalizable* si A es semejante a una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Definición 4.4.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V. Diremos que el endomorfismo f es *diagonalizable* si existe una base de V con respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Proposición 4.4.4. *Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si, y solo si, existe una base de V formada por vectores propios de f.*

Veamos ahora cómo podemos hallar una base de autovectores para un espacio vectorial V.

Lema 4.4.5. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V. Entonces*

1. *Vectores propios no nulos, asociados a autovalores distintos, son linealmente independientes.*
2. *Los subespacios propios, asociados a autovalores distintos, son subespacios independientes.*

Teorema 4.4.6. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ ($r \leq n$) los distintos autovalores de f. Entonces f es diagonalizable si, y solo si, se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r = n$.
2. $d_i = \alpha_i$ *para todo* $i = 1, 2, ..., r$.

Corolario 4.4.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada de orden n. Si A tiene n autovalores distintos en $\mathbb{K}$, entonces A es diagonalizable.*

Podemos entonces estructurar el problema de la diagonaliación de una matriz cuadrada (o endomorfismo) de la siguiente manera:

1. Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.
2. Descomponiendo el polinomio característico, se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable (en $\mathbb{R}$). En caso contrario, tendremos los autovalores y sus multiplicidades algebraicas.
3. Se calculan las multiplicidades geométricas, $d_i = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I_n)$.
4. Si para algún subíndice i, se tiene que $d_i \neq \alpha_i$, entonces la matriz (o el endomorfismo) no es diagonalizable. En caso contrario, si $d_i = \alpha_i$ para todo i y $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = n$, la matriz es diagonalizable y su forma diagonal es la matriz diagonal cuya diagonal está formada por los autovalores, repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.
5. Obtenemos bases de los subespacios propios $V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$.

6. Uniendo estas bases se obtiene una base de V para la cual la matriz asociada es D. Así pues, la matriz de cambio de base, cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de paso, es decir, la matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$.

Ejemplo 4.4.8. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20.$$

Descomponiendo $p(\lambda)$ por el método de Ruffini, obtenemos

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 5).$$

Luego, los autovalores de A son $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$, y $\lambda_2 = 5$, con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$. Calculemos las multiplicidades geométricas.

Para $\lambda_1 = 2$, tenemos que

$$d_1 = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Para $\lambda_2 = 5$, como se tiene que $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$, entonces se tiene que $d_2 = 1$.

Así, tenemos que

	λ_i	α_i	d_i
$i=1$	2	2	2
$i=2$	5	1	1

Por lo tanto, la matriz A es diagonalizable, ya que $\alpha_1 = d_1$ y $\alpha_2 = d_2$. Además, una de su forma diagonal será

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz de paso P, necesitaremos hallar las bases de los subespacios propios V_2 y V_5.

Para $\lambda_1 = 2$, $(x, y, z) \in V_2$ si, y solo si,

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x+y+z &=& 0 \\ x+y+z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \{x+y+z=0\,.$$

Pasando esta ecuación cartesiana de V_2 a paramétricas obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcc} x &=& -\mu-\gamma \\ y &=& \mu \\ z &=& \gamma \end{array}\right. ,$$

con lo que una base de V_2 puede ser $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

Para $\lambda_2 = 5$, $(x,y,z) \in V_5$ si, y solo si,

$$(A-5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-z &=& 0 \\ y-z &=& 0 \end{array}\right. .$$

Pasando las ecuaciones cartesiana de V_5 a paramétricas obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \mu \\ y &=& \mu \\ z &=& \mu \end{array}\right. ,$$

con lo que una base de V_5 puede ser $\{(1,1,1)\}$.

Por lo tanto, una base de V formada por vectores propios es $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$. Es muy importante que los vectores de esta base estén en el mismo orden en que figuran los autovalores correspondientes en la forma diagonal.

Finalmente, la matriz de paso será

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $D = P^{-1}AP$. Veamos que esta igualdad se verifica.

Por una parte,

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D.$$

Acabaremos este capítulo con un resultado importante.

Teorema 4.4.9. *Toda matriz simétrica real es diagonalizable (en $\mathbb{R}$).*

Ejemplo 4.4.10. La matriz del ejemplo anterior,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es simétrica, ya que $A = A^t$, con lo que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$, es decir, todos sus autovalores son reales.

Ejercicios

1. Diagonalizar la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$
dando la matriz de paso, la base de vectores propios y la relación entre la matriz dada y la diagonal. Calcular A^3.

2. Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada respecto de la base canónica es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$
   a) Determina los valores y vectores propios de f.
   b) Calcula las dimensiones y determinar una base de los subespacios propios asociados a los valores propios.
   c) ¿Es posible caracterizar el endomorfismo f mediante una matriz diagonal?

3. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
respecto de la base canónica.
   a) Hallar los valores propios de A y una base de cada uno de los subespacios propios asociados.
   b) ¿Es A diagonalizable?
   c) En caso afirmativo, hallar una matriz diagonal D semejante a A, dar una matriz P que permita la diagonalización de A y escribir la relación que existe entre A y D.
   d) Dar una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, formada por vectores propios de A, tal que $D = M_{B,B}(f)$.
   e) Expresar los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ como combinación lineal de los vectores de la base B.
   f) ¿Es f biyectiva?
   g) Hallar el núcleo de f.

4. Calcular la potencia n-ésima de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Sabiendo que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene a $(-2, 0)$ como autovector asociado al autovalor $\lambda = -2$ y que el vector $(0, 5)$ pertenece a $\mathrm{Ker}(f)$. Calcula la expresión analítica de f.

6. Estudiar para qué valores del parámetro a es diagonalizable el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $f(x, y, z) = (x, ax + y, x + y + 2z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

7. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Determina para que valor de a es A diagonalizable.

   b) En el caso en que sea posible, halla una base de autovectores B.

   c) Da una matriz diagonal D que represente a f respecto de la base B.

   d) ¿Qué relación existe entre las matrices A y D?

   e) Usa la relación anterior para calcular A^6.

8. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & b & 2 \end{pmatrix},$$

   siendo a y b números reales.

   a) Calcula el polinomio característico de A, así como sus autovalores.

   b) ¿Para qué valores de a y b la matriz A es diagonalizable?

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Podemos asegurar tan solo mirando la matriz A si es diagonalizable o no?

   b) En caso de que sea diagonalizable, hallar la matriz diagonal D y la matriz de paso P, tales que $D = P^{-1}AP$.