Capítulo 4

Teoría de grafos

Los grafos son modelos matemáticos utilizados para representar relaciones entre objetos de un conjunto y que generalizan el modelo de las relaciones binarias que estudiamos anteriormente. Utilizamos grafos para estudiar conexiones entre objetos, datos o fuentes de información. Un ejemplo de grafo lo encontramos en las redes de carreteras, dónde las poblaciones se enlazan o conectan con una o varias carreteras. Las redes de ordenadores también se pueden representar y estudiar como grafos.

4.1. Grafos, digrafos y multigrafos

Definición 4.1.1. Un *grafo simple* G es un par $G = (V, E)$ formado por un conjunto finito de *vértices* V y un conjunto E de pares no ordenados de vértices distintos, es decir,

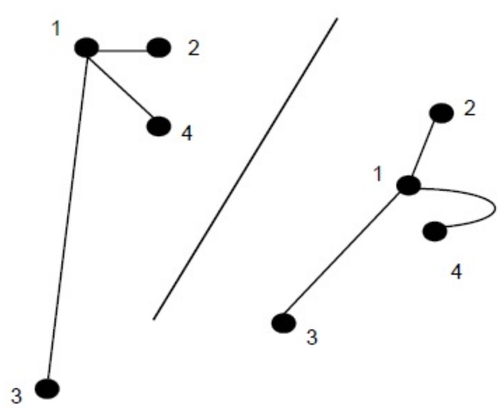
$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}.$$

A los elementos de E se les denomina *aristas* (no dirigidas o no orientadas).

Observación 4.1.2. El que E sea un conjunto significa que no hay aristas repetidas. Además, la condición $u \neq v$ en el conjunto $\{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$, nos indica que G no tiene lazos o bucles.

Ejemplo 4.1.3. Un grafo simple es, por ejemplo, el grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$.

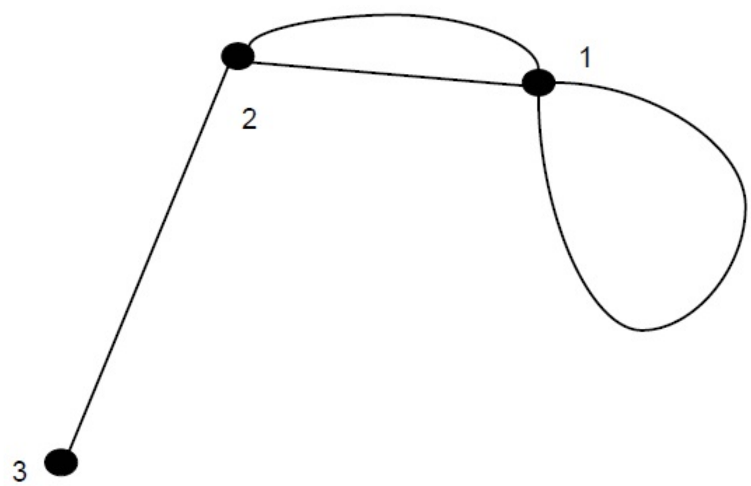
Observación 4.1.4. Podemos representar los vértices como puntos del plano y las aristas $\{u, v\}$ como el segmento uv dando una representación gráfica del grafo. Conviene observar que la representación no es necesariamente única. Por ejemplo podemos ver a continuación dos representaciones distintas del grafo del ejemplo anterior.



Definición 4.1.5. Un *multigrafo* G es un par (V, E) formado por un conjunto finito de *vértices* V y una familia finita E de *arista*s no orientadas $E = \{e_i\}_{i \in I}$, con I un conjunto finito de índices y, para todo $i \in I$, se verifica que $e_i = \{u_i, v_i\}$, con $u_i, v_i \in V$.

Observación 4.1.6. Nótese que en un multigrafo, E es una familia (no un conjunto), con lo que G puede tener varias aristas entre dos vértices. Además, un multigrafo G admite lazos o bucles.

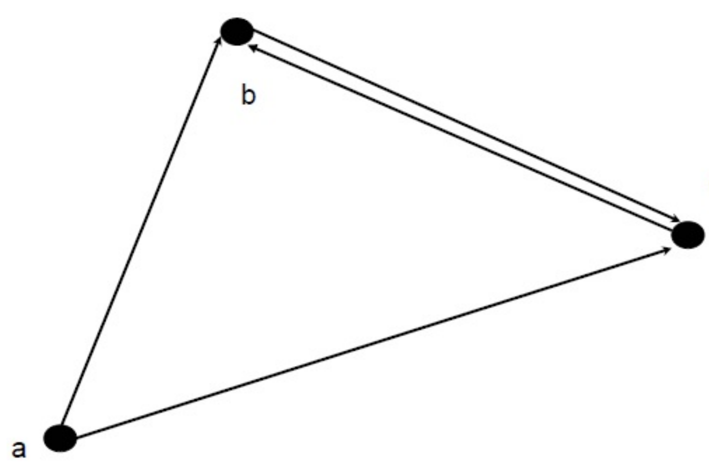
Ejemplo 4.1.7. Un multigrafo puede ser, por ejemplo, $(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\})$.



Observación 4.1.8. Nótese que, en un multigrafo, dos aristas distintas pueden conectar los mismos vértices, es decir, que E es una familia y no un conjunto, pudiendo tener elementos repetidos. Nótese también que se permiten los *lazos* o *bucles*, esto eso, aristas del tipo $\{u, u\}$.

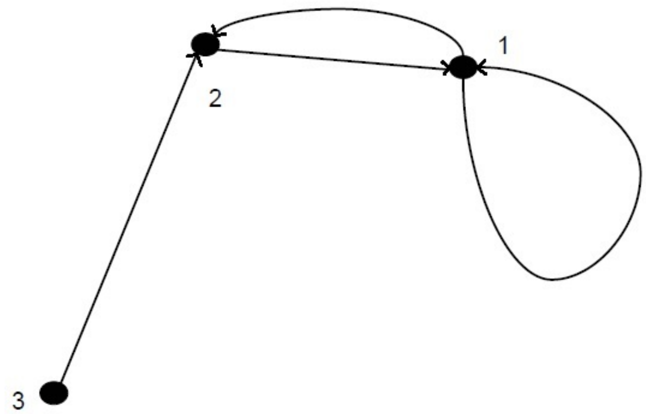
Definición 4.1.9. Un *digrafo* G es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subseteq (V, V) \setminus \Delta$, siendo $\Delta = \{(u, u) : u \in V\}$. A los elementos de V se les denomina *vértices* y a los de E *aristas* (dirigidas u orientadas, ya que $(V, V) \setminus \Delta$ es un conjunto de pares ordenados).

Ejemplo 4.1.10. $(\{a, b, c\}, (a, b), (a, c), (b, c), (c, b))$ es un digrafo que podemos representar utilizando puntos para representar los vértices y flechas para representar las aristas. Nótese que la arista (b, c) es distinta de la arista (c, b).



Definición 4.1.11. Un *multidigrafo* G es un par (V, E), formado por un conjunto finito de *vértices* V y una familia finita E de *arista*s orientadas $E = \{e_i\}_{i \in I}$, donde I es un conjunto finito y para todo $i \in I$ se verifica que $e_i \in V \times V$.

Ejemplo 4.1.12. $G = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\})$ es un ejemplo de multidigrafo.

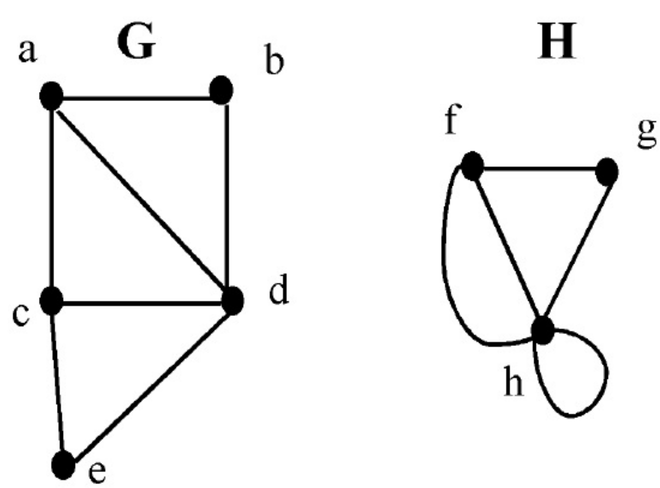


En lo que sigue, el término *grafo* se empleará en sentido general, para describir grafos con aristas dirigidas o no dirigidas, con o sin lazos y con o sin aristas múltiples. Por otro lado, el término *grafo no dirigido* se entenderá como sinónimo de multigrafo, admitiendo, por tanto, la eventual existencia de aristas múltiples y lazos. De igual manera, el término *grafo dirigido* se entenderá como multidigrafo.

Definición 4.1.13. Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ son *adyacentes* si $\{u, v\} \in E$. En ese caso se dice que la arista $e = \{u, v\}$ *conecta* los vértices u y v, que es *incidente* con los vértices u y v, y que los vértices u y v son los *extremos* de la arista e.

Definición 4.1.14. El *grado* de un vértice en un grafo no dirigido, que denotaremos por $\mathrm{gr}(u)$, es el número de aristas incidentes con él, imponiendo por conveniencia que un lazo en un vértice contribuye dos veces al grado de ese vértice. Si un vértice tiene grado cero se dice que es un *vértice aislado*.

Ejemplo 4.1.15. Consideremos los grafos G y H de la siguiente figura:



En el grafo G se verifica que $\mathrm{gr}(a) = 3 = \mathrm{gr}(c)$, $\mathrm{gr}(b) = 2 = \mathrm{gr}(e)$ y $\mathrm{gr}(d) = 4$.

En el grafo H, tenemos que $\mathrm{gr}(f) = 3$, $\mathrm{gr}(g) = 2$ y $\mathrm{gr}(h) = 5$.

Teorema 4.1.16. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Entonces*

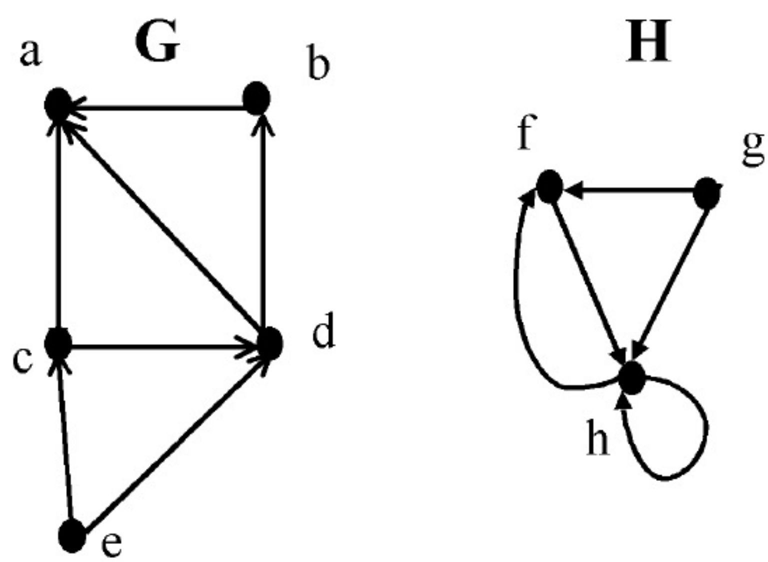
$$\sum_{v \in V} \mathrm{gr}(v) = 2\,|E|\,.$$

Corolario 4.1.17. *Cualquier grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.*

Definición 4.1.18. Sea $G = (V, E)$ es un grafo dirigido y sea $(u, v) \in E$. Se dice que u es el *vértice inicial* de la arista (u, v) y que v es el *vértice final* de dicha arista. Del mismo modo, dado $u \in V$, se denomina *grado de entrada de u*, y lo denotaremos por $\mathrm{gr}^+(u)$, al número de aristas que tienen a u como vértice final y, se denominará *grado de salida de u*, denotado por $\mathrm{gr}^-(u)$, al número de aristas que tienen a u como vértice inicial.

Observación 4.1.19. Un lazo en un vértie u suma uno al grado de entrada y uno al grado de salida.

Ejemplo 4.1.20. Consideremos los grafos G y H de la siguiente figura:



En el grafo G, se verifica que

$$\mathrm{gr}^+(a) = 3 \text{ y } \mathrm{gr}^-(a) = 0,$$
$$\mathrm{gr}^+(b) = 1 \text{ y } \mathrm{gr}^-(b) = 1,$$
$$\mathrm{gr}^+(c) = 1 \text{ y } \mathrm{gr}^-(c) = 2,$$
$$\mathrm{gr}^+(d) = 2 \text{ y } \mathrm{gr}^-(d) = 2,$$
$$\mathrm{gr}^+(e) = 0 \text{ y } \mathrm{gr}^-(e) = 2.$$

Por otra parte, en el grafo H tenemos

$$\mathrm{gr}^+(f) = 2 \text{ y } \mathrm{gr}^-(f) = 1,$$
$$\mathrm{gr}^+(g) = 0 \text{ y } \mathrm{gr}^-(g) = 2,$$
$$\mathrm{gr}^+(h) = 3 \text{ y } \mathrm{gr}^-(h) = 2.$$

Teorema 4.1.21. *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces se verifica*

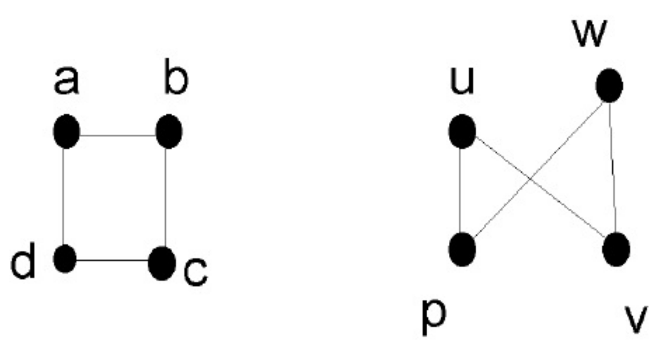
$$|E| = \sum_{v \in V} \mathrm{gr}^+(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{gr}^-(v).$$

4.2. Isomorfismos de grafos

Definición 4.2.1. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos simples. Se dirá que G_1 y G_2 son grafos *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que, para todo $u, v \in V_1$, se verifica que $\{u, v\} \in E_1$ si, y solo si, $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. A la función f que satisface esta condición se dice que es un *isomorfismo de grafos* entre los grafos G_1 y G_2.

Observación 4.2.2. En otras palabras, dos grafos simples son isomorfos si tienen el mismo número de vértices y existe una función biyectiva entre los dos conjuntos de vértices que preserva las adyacencias. Esta definición puede extenderse a multigrafos y multidigrafos teniendo en cuenta el número de aristas entre cada par de vértices y, en su caso, la orientación de las aristas.

Ejemplo 4.2.3. Los dos grafos de la siguiente figura son isomorfos.



Para verlo, basta comprobar que la función $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{u, v, w, p\}$, definida por $f(a) = u$, $f(b) = v$, $f(c) = w$ y $f(d) = p$, es un isomorfismo de grafos.

En efecto, se tiene que $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{d, c\}\}$ y

$$f(a) = u, f(b) = v \Rightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2,$$

$$f(a) = u, f(d) = p \Rightarrow \{f(a), f(d)\} \in E_2,$$
$$f(b) = v, f(c) = w \Rightarrow \{f(b), f(c)\} \in E_2,$$
$$f(d) = p, f(c) = w \Rightarrow \{f(d), f(c)\} \in E_2,$$

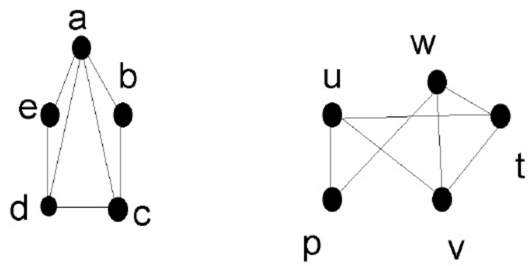
y viceversa.

A menudo es difícil determinar si dos grafos simples son isomorfos. Existen varios criterios para determinar si dos grafos simples son isomorfos o no sin realizar una comprobación exhaustiva. Estos criterios se apoyan en el hecho de que hay ciertas propiedades invariantes por isomorfismos, es decir, si un grafo las verifica, cualquier otro grafo isomorfo a él las debe verificar también. Por ejemplo:

1. Dos grafos isomorfos deben tener el mismo número de vértices y de aristas.
2. Si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es un isomorfismo entre dos grafos G_1 y G_2, entonces $\text{gr}(u) = \text{gr}(f(u))$ para todo $u \in V_1$.

Este tipo de resultados sirve para comprobar con facilidad que algunos grafos no son isomorfos.

Ejemplo 4.2.4. Los siguientes grafos no son isomorfos ya que, aunque ambos tienen el mismo número de vértices y aristas, en el primero $\text{gr}(a) = 4$, mientras que en el segundo no hay ningún vértice cuyo grado sea 4.



4.3. Árboles

Especialmente útil en lo que a aplicaciones informáticas se refiere. Estos grafos se emplean, entre otras cosas, para consruir algoritmos eficientes destinados a localizar items en una lista, para construir redes de ordenadores con el mínimo coste, para construir códigos eficientes destinados a almacenar y transmitir datos o para analizar algoritmos de ordenación.

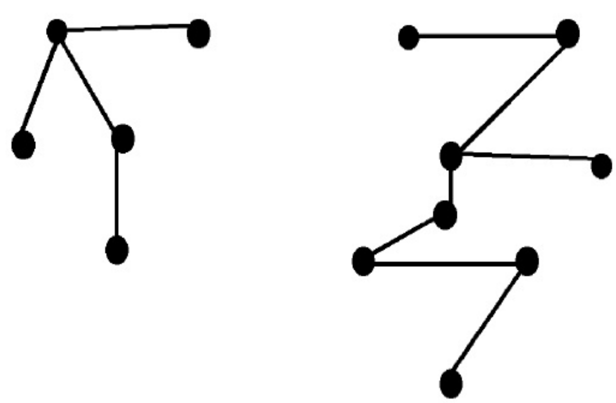
Definición 4.3.1. Un *camino entre los vértices* v_0 *y* v_k de un grafo no dirigido $G = (V, E)$, es una secuencia finita de vértices, no necesariamente distintos, $C = v_0v_1...v_k$ tal que $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Diremos que un camino C es un *ciclo* si $v_0 = v_k$ y $v_i \neq v_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, ..., k-1\}$, es decir, C empieza y acaba en el mismo vértice, pero el resto de sus vértices son distintos.

Definición 4.3.2. Un grafo $G = (V, E)$ se dice *conexo* si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.

Definición 4.3.3. Un *árbol* es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos.

Observación 4.3.4. Como un árbol no tiene ciclos, entonces no puede tener aristas múltiples o lazos, por lo tanto cualquier árbol es un grafo simple.

Ejemplo 4.3.5. Los siguientes grafos son ejemplos de árboles



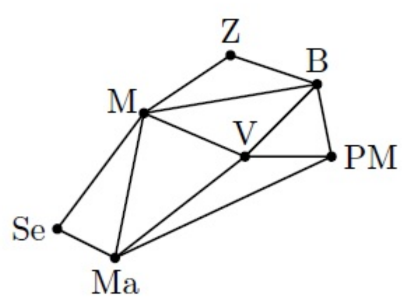
Teorema 4.3.6. (Caracterización de un árbol). *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *G es un árbol.*
2. *G es conexo y $|V| = |E| + 1$.*
3. *G no tiene ciclos y $|V| = |E| + 1$.*
4. *En G hay exactamente un camino entre cada par de vértices*
5. *El grafo G es conexo, y al suprimir cualquier de sus aristas obtenemos un grafo no conexto (G es un grafo conexo minimal).*

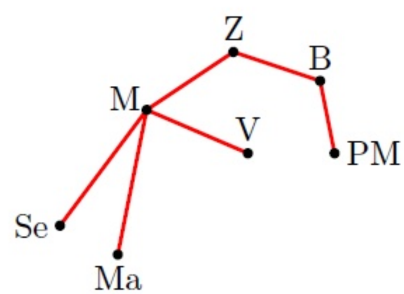
Definición 4.3.7. Un *subgrafo* de un grafo simple $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Definición 4.3.8. Un *árbol generador* de un grafo simple G es un subgrafo de G que es árbol y contiene todos los vértices de G.

Ejemplo 4.3.9. El grafo de la derecha es un árbol generador del grafo G de la izquierda:

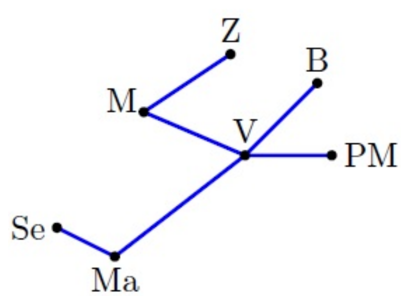


G



Árbol generador de G

Observación 4.3.10. Un grafo puede tener más de un árbol generador. Por ejemplo, abajo aparece otro árbol generador del mismo grafo anterior.



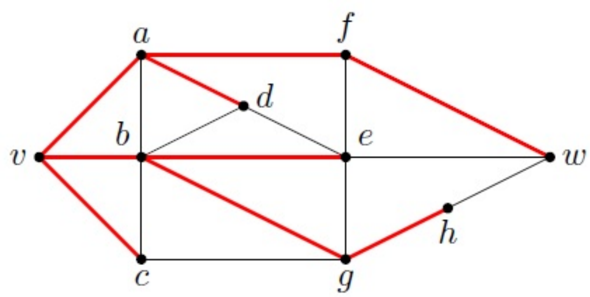
Teorema 4.3.11. *Un grafo simple G es conexo si y solo si tiene un árbol generador.*

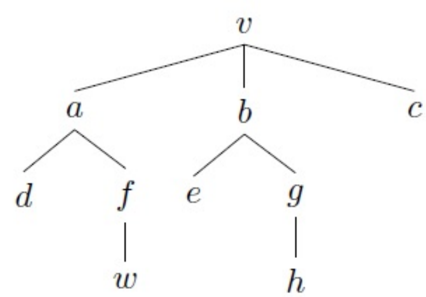
4.3.1. Búsqueda en anchura

El siguiente algoritmo construye un árbol generador siguiendo un recorrido en el grafo mediante búsqueda en anchura. La búsqueda en anchura es adecuada para resolver problemas de optimización, en los que se deba elegir la mejor solución entre varias posibles.

- Elegimos un vértice arbitrario v_0, que llamaremos raíz.
- Añadimos todas las aristas incidentes en v_0.
- Para cada uno de los vértices conectados con los vértices añadidos en el paso anterior, añadimos todas las aristas que inciden en ellos si el otro vértice que conecta no se había añadido ya al árbol.
- Con los nuevos vértices, procedemos de la misma forma hasta añadir todos los vértices de árbol.

Ejemplo 4.3.12. Empezando en el vértice v, vamos a construir un árbol generador del siguiente grafo usando búsqueda en anchura:





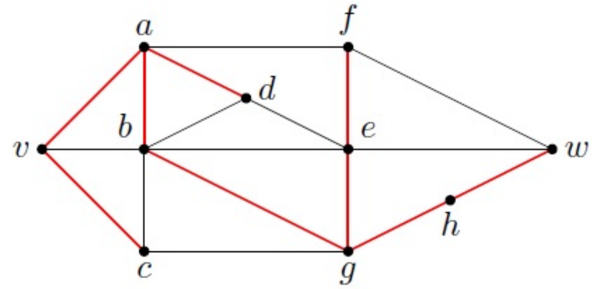
A la derecha mostramos el árbol generador dibujado con la forma habitual de un árbol.

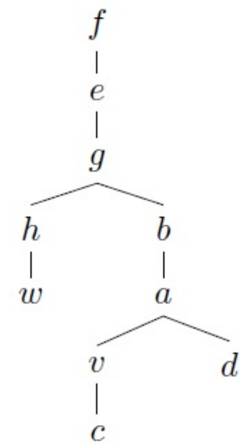
4.3.2. Búsqueda en profundidad

El siguiente algoritmo construye un árbol generador siguiendo un recorrido en el grafo mediante búsqueda en profundidad. Esta búsqueda y los árboles así construidos se usan, por ejemplo, para encontrar las componentes conexas o para comprobar si un grafo es acíclico (es decir, no contiene ciclos).

- Elegimos un vértice arbitrario v_0, que llamamo raíz.
- Construimos un camino que comenzando en v_0 y añadiendo sucesivamente aristas y vértices mientras sea posible, sin utilizar vértices ya añadidos al camino.
- Si el camino así construido pasa por todos los vértices del grafo, entonces el árbol generador es dicho camino. En caso contrario, retrocedemos al penúltimo vértice del camino y, si es posible, formamos un nuevo camino que empiece en este vértice y que pase por vértices no visitados.
- Si esto no se puede hacer, lo intentamos retrocediendo al vértice anterior.
- Repetimos el proceso hasta añadir todos los vértices.

Ejemplo 4.3.13. Empezando en el vértice f, hemos construido el árbol generador del siguiente grafo mediante búsqueda en profundidad.





A la derecha, hemos dibujado el árbol con su forma habitual.

4.4. Matriz asociada a un grafo. Matriz de adyacencia

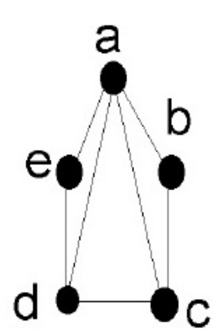
Acabaremos este tema con una de las aplicaciones de grafos que concierne a otro tipo de representación de grafos distinta al uso de dibujar puntos y líneas. Es decir, se representará un grafo mediante una matriz denominada *matriz de adyacencia*.

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, para construir una matriz de adyacencia se ordenarán previamente los vértices de G. Si $|V| = n$ y los ordenamos como $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, la matriz de adyacencia de G con respecto a esa ordenación de los vértices es la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}.$$

Observación 4.4.1. La matriz de adyacencia de un grafo simple es una matriz simétrica ($A^t = A$) cuya diagonal es nula.

Ejemplo 4.4.2. Consideremos el siguiente grafo simple



En este caso, si tomamos $V = \{a, b, c, d, e\}$, entonces su matriz de adyacencia es la matriz de 5 filas y 5 columnas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

1. Dibuja, si existen, grafos simples de cuatro vértices que tengan grados respectivos:

   a) 2, 2, 2 y 4.

   b) 2, 1, 2 y 1.

   c) 2, 2, 2 y 3.

2. Dibuja, si existen, grafos simples de cinco vértices que tengan grados respectivos:

   a) 1, 2, 3, 1 y 5.

   b) 0, 1, 2, 3 y 4.

   c) 2, 2, 2, 3 y 3.

3. Un grafo simple tiene 16 aristas y sus vértices tienen grado 3 o 4. ¿Cuántos vértices de grado 3 y cuántos de grado 4 debe tener? Indica todas las soluciones posibles.

4. Sea G el grafo dado por la siguiente tabla (denominada tabla de adyacencia, que indica las uniones entre los distintos vértices):

a	b	c	d	e	f
b	a	b	a	b	a
d	c	d	c	d	c
f	e	f	e	f	e

   Estudia si el grafo G es conexo.

5. Sea G el grafo dado por

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_3	a_3	a_1	a_1	a_3	a_4	a_1	a_2
a_4	a_4	a_2	a_2	a_7	a_7	a_5	a_5
a_7	a_8	a_5	a_6	a_8	a_8	a_6	a_6

   a) ¿Es G conexo?

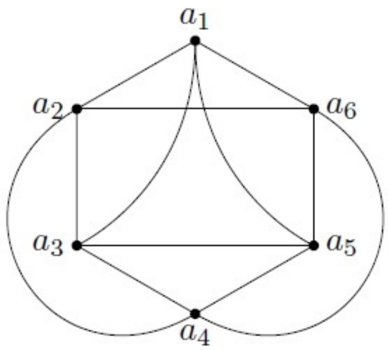
   b) ¿Cuántas aristas tiene?

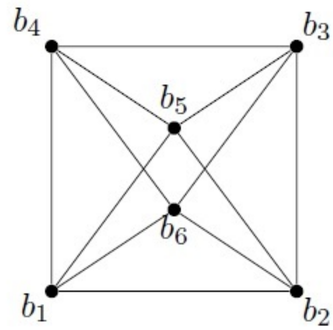
6. Dibuja, si es posible, el grafo que corresponda a cada una de las propiedades descritas a continuación. Si no es posible, explique por qué:

   a) Un grafo cuyo número de vértices sea igual al número de aristas más uno y no sea un árbol.

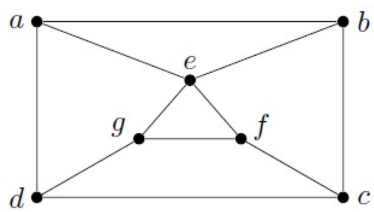
   b) Un árbol con 5 vértices con grados 1, 1, 2, 2 y 4.

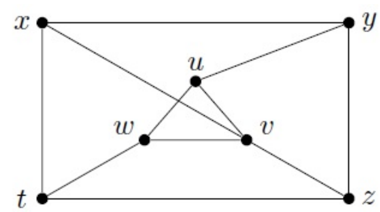
7. Determina si son isomorfos los siguientes grafos y, en tal caso, describe un isomorfismo entre ellos.



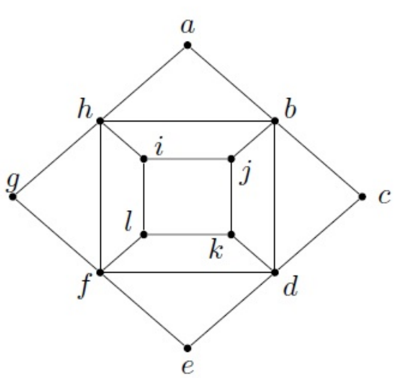


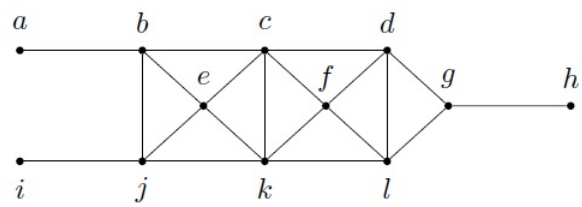
8. Estudia si los siguientes grafos son isomorfos:



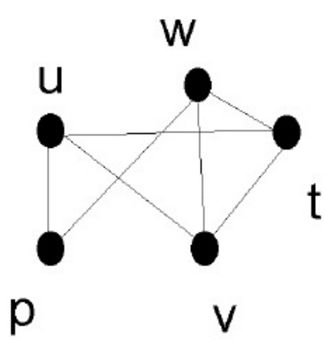


9. Para cada uno de los grafos siguientes, halla árboles generadores haciendo una búsqueda en anchura y una búsqueda en profundidad.

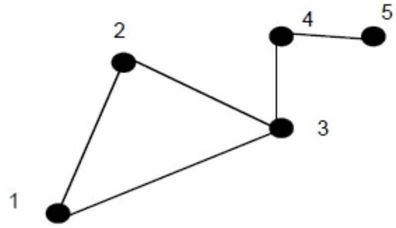




10. Halla una matriz de adyacencia de los siguientes grafos:



a)

$b)$ 

$c)$