Capítulo 3

Combinatoria

La combinatoria es una rama de las matemáticas que estudia la enumeración, es decir, determinar los elementos de un conjunto descrito por alguna propiedad. Además, estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.

3.1. Técnicas de conteo en teoría de conjuntos

En esta sección, vamos a analizar algunas de las propiedades de los cardinales de conjuntos finitos.

Proposición 3.1.1. *Sean A y B dos conjuntos finitos. Se verifica:*

1. *Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
3. *Si $B \subseteq A$, entonces $|B| \leq |A|$, y $|A \setminus B| = |A| - |B|$.*
4. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
5. **Principio del Palomar:** *Si $|A| > |B|$, entonces no existe ninguna función inyectiva de A en B.*

Observación 3.1.2. Los puntos 2 y 4 se pueden generalizar a más de dos conjuntos, por ejemplo, si A, B y C son tres conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \text{ y}$$

$$|A \times B \times C| = |A|\,|B|\,|C|.$$

Ejemplo 3.1.3.

- Sea A el conjunto de alumnos matriculados en alguna asignatura de primero y B el número de alumnos matriculados en alguna asignatura de segundo. Se sabe que hay 250 alumnos matriculados en alguna asignatura de primero, 220 alumnos matriculados en alguna asignatura de segundo y exactamente 50 alumnos que tienen alguna asignatura de primero y alguna de segundo. Por lo tanto, el número de alumnos de primero y segundo será

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 250 + 220 - 50 = 420.$$

- Sea P el conjunto de palabras de cuatro letras. Si llamamos A al alfabeto español, entonces se tiene que
$$P = A \times A \times A \times A,$$
con lo que
$$\#P = 27{\cdot}27{\cdot}27{\cdot}27 = 531441.$$

- Si en el ejemplo anterior, a la segunda letra le pedimos que sea vocal entonces, el conjunto R de las palabras de cuatro letras cuya segunda letra es vocal será
$$R = A \times V \times A \times A,$$
donde V es el conjunto de las vocales. Por lo tanto,
$$\#P = 27^3{\cdot}5 = 98415.$$

- En cualquier conjunto de 368 personas hay dos cuyo cumpleaños son el mismo día. En efecto, como el conjunto de personas P tiene cardinal mayor que el de días del año D, $\#P = 368 > 365 = \#D$, entonces, por el Principio del Palomar, cualquier función de P en D es no inyectiva, es decir, hay dos personas que cumplen años el mismo día.

3.2. Variaciones

3.2.1. Variaciones sin repetición

Definición 3.2.1. Se llama *variaciones ordinarias* (sin repetición) de m elementos tomados de n en n ($m \geq n$), y se denota por $V_{m,n}$, a los distintos grupos formados por n elementos de forma que:

- No entran todos los elementos.
- Sí importa el orden.
- No se repiten los elementos.

En estas circunstancias, se tiene que
$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).$$

Ejemplo 3.2.2.

- Determinar de cuántas maneras se pueden elegir presidente y vicepresidente de una asociación de 300 miembros.
$$V_{300,2} = 300{\cdot}299\cdots(300-2+1) = 300{\cdot}299 = 89700.$$

- De cuántas maneras se puede elegir un equipo de cuatro relevistas para correr en la carrera de 4×100 entre los 10 seleccionados (entendiendo que hay que indicar el orden en el que se corre):
$$V_{10,4} = 10{\cdot}9\cdots(10-4+1) = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 5040.$$

- Si el corredor más rápido del ejemplo anterior tiene que correr necesariamente en primer lugar, entonces el problema es calcular los equipos de tres relevistas entre los nueve que quedan:
$$V_{9,3} = 9{\cdot}8\cdots(9-3+1) = 9{\cdot}8{\cdot}7 = 504.$$

3.2.2. Variaciones con repetición

Definición 3.2.3. Se llama *variaciones ordinarias con repetición* de m elementos tomados de n en n, y se denota por $VR_{m,n}$, a los distintos grupos formados por n elementos de forma que:

- No entran todos los elementos si $m > n$, pero si pueden entrar todos los elementos si $m \leq n$.
- Sí importa el orden.
- Si se repiten los elementos.

En estas circunstancias, se tiene que

$$VR_{m,n} = m^n.$$

Ejemplo 3.2.4.

- Determinar cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5.

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125.$$

- ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5?

  Tenemos que separar el número en dos bloques ya que, el dígito que queda más a la izquierda no puede ser un 0, con lo que el primer bloque, de un solo número, tiene $VR_{5,1} = 5^1 = 5$ posibilidades.

  El segundo bloque, de dos números, lo puede ocupar cualquier dígito, con lo que tenemos $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ posibilidades.

  Así, tenemos en total $VR_{5,1} \cdot VR_{6,2} = 5 \cdot 36 = 180$ números de tres cifras formados por los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

3.3. Permutaciones

Un caso particular de las variaciones resulta cuando $m = n$.

3.3.1. Permutaciones sin repetición

Definición 3.3.1. Llamaremos *permutaciones* de n elementos, y lo denotaremos por P_n, a las distintas las formas de ordenar los n elementos de un conjunto. En este caso, se tiene que

- Sí entran todos los elementos.
- Sí importa el orden
- No se repiten los elementos.

En estas circunstancias, $P_n = n!$.

Observación 3.3.2. Por definición, se considera que $0! = 1$.

Observación 3.3.3. Imaginad que los elementos se han de ordenar "en círculo", (por ejemplo, los comensales en una mesa) de modo que el primer elemento que "se sitúe" en la muestra determina el principio y el final de muestra. En ese caso, hablamos de permutaciones circulares, y se calculan según la expresión

$$PC_n = P_{(n-1)} = (n-1)!$$

Ejemplo 3.3.4.

- Determinar de cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en una mesa rectangular de 6 sillas.

$$P_6 = 6! = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 720.$$

- En el ejemplo anterior, calcularlo sabiendo que la mesa es circular.

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 120.$$

3.3.2. Permutaciones con repetición

Definición 3.3.5. Definimos el número *permutaciones con repetición* de n elementos, donde hay s elementos que se repiten $n_1 > 1$, $n_2 > 1$, ..., $n_s > 1$ veces, respectivamente, como el número $PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ de distintas ordenaciones de esa lista con elementos repetidos. Se calcula mediante la expresión

$$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_s} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_s!}.$$

Ejemplo 3.3.6.

- Estudiar cuántos números distintos se pueden construir reordenando las cifras del número 121.

  Nótese que, en el número 121, el 1 aparece repetido dos veces, con lo que

$$PR_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3{\cdot}2}{2} = 3.$$

- Determinar las palabras de 9 letras que se pueden construir como resultado de ordenar las letras de la palabra ”cocodrilo”.

  Como en la palabra ”cocodrilo” tenemos 3 ”o” repetidas y 2 ”c”, entonces el resultado será

$$PR_9^{3,2} = \frac{9!}{3!2!} = 30240.$$

3.4. Combinaciones

El último concepto de combinatoria que vamos a definir es el de combinaciones, en el cual no importará el orden a la hora de elegir nuestra muestra.

3.4.1. Combinaciones sin repetición

Definición 3.4.1. Se llama *combinaciones* de m elementos tomados de n en n $(m \geq n)$, y lo denotaremos por $C_{m,n}$, a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

En estas circunstancias,

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Ejemplo 3.4.2.

- Determinar el número de posibles equipos de baloncesto (5 miembros) que se pueden formar con 10 personas.
$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6}{5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2} = 9{\cdot}7{\cdot}4 = 252.$$
- Sobre el ejemplo anterior, determinar en cuantos de ellos juega Pedro (solo un jugador se llama Pedro).

  En este caso, debemos calcular el número total de equipos y restar el número de equipos en los que no juega Pedro, es decir,
$$C_{10,5} - C_{9,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} - \frac{9!}{5!(9-5)!} = 252 - \frac{9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6}{4{\cdot}3{\cdot}2} = 252 - 3{\cdot}7{\cdot}6 = 252 - 126 = 126.$$

3.4.2. Combinaciones con repetición

Definición 3.4.3. Se llama *combinaciones con repetición* de m elementos tomados de n en n $(m \geq n)$, y lo denotaremos por $CR_{m,n}$, a los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- Si se repiten los elementos.

En estas circunstancias,

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}.$$

Ejemplo 3.4.4.

- Determinar cuántos posibles resultados pueden acontecer al lanzar 3 dados indistinguibles simultáneamente:
$$CR_{6,3} = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$
- Si se extrae simultáneamente cinco cartas de cinco barajas españolas (40 cartas) el número de posibilidades es
$$CR_{40,5} = \frac{44!}{5!39!} = 1086008.$$

Ejercicios

1. Con el alfabeto español de 27 letras determinar:

   a) El número de palabras de 5 letras.

   b) El número de palabras de 5 letras sin letras repetidas.

   c) Del conjunto de palabras del apartado a), determinar cuántas de ellas contienen a la letra b.

   d) Del conjunto de palabras del apartado b), determinar cuántas de ellas contienen a la letra b.

   e) Del conjunto de palabras del apartado a), determinar cuántas de ellas empiezan por a y acaban en z.

   f) Del conjunto de palabras del apartado b), determinar cuántas de ellas empiezan por a y acaban en z.

2. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

3. A un concurso literario se han presentado 10 candidatos con sus novelas. El cuadro de honor lo forman el ganador, el finalista y un accésit. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?

4. Determina en cuántos números de teléfono de 7 cifras, que pueden empezar por cero, alguna de las cifras está repetida.

5. Dado el conjunto de los 54 alumnos de una clase, donde 30 son chicos y 24 son chicas, determinar:

   a) El número de equipos de 4 alumnos que se pueden formar.

   b) El número de equipos de 4 alumnos que contenga al menos una chica.

   c) El número de equipos formados por dos chicas y dos chicos.

6. Cuántas palabras de 10 letras se pueden construir reordenando las letras de la palabra *dodecaedro*.

7. Tenemos 10 cartas de las cuales 3 son ases de oro, 4 son caballos de bastos y las 3 cartas restantes son diferentes entre sí y a las anteriores. Si ponemos las 10 cartas en fila, determinar el número de distintas filas que se pueden formar.

8. ¿Cuántas letras de 5 signos con 3 rayas y 2 puntos podría tener el alfabeto Morse?

9. Se lanza una moneda ocho veces seguidas y se anotan sucesivamente los resultados obtenidos en cada uno de los lanzamientos. Los ocho lanzamientos constituyen una experiencia. ¿En cuántas experiencias se pueden obtener cinco caras y tres cruces?

10. Determina de cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa.

11. Consideremos 6 bombos con 5 bolas cada uno numeradas del 1 al 5 de manera que las bolas de bombos distintos con el mismo número no se distinguen entre sí. Por un proceso mecánico cada bombo deposita en una cesta una bola, simultáneamente con el resto de bombos.

   a) Determinar el número de resultados posibles.
   b) Determinar cuántos de estos resultados contienen al menos una bola numerada con el 5.

12. Si se lanzan simultáneamente 4 monedas al aire. Determina:
   a) Los resultados posibles.
   b) Cuántos casos hay en los que salgan dos caras y dos cruces.

13. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. Determinar de cuántas maneras podría elegirlas. ¿Y si las cuatro primeras son obligatorias?

14. Calcular cuántos productos diferentes de dos factores se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 5 en los siguientes casos:
   a) Sin repetición de factores.
   b) Pudiendo repetirse los factores.

15. En un torneo regional de ajedrez participan 18 jugadores y se clasifican tres de ellos para pasar a la final. ¿Cuántas posibles clasificaciones hay?