Capítulo 3

Límites de funciones

Si f es una función real, queremos definir el valor límite de $f(x)$ cuando x es un punto de su dominio que se acerca a un valor dado a. El punto a, en general, no tiene que pertenecer necesariamente al dominio de f. Lo que interesa es estudiar cómo se comporta f en puntos de su dominio cercanos al punto a.

3.1. Límites de funciones reales de variable real

Definición 3.1.1. Sean $a, r \in \mathbb{R}$, con $r > 0$. Se define el *entorno (abierto) reducido de centro a y radio* r, y se denota por $E_r^*(a)$, como

$$E_r^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < r\} = (a - r, a + r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r).$$

Definición 3.1.2. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Diremos que x es *un punto de acumulación de* A si, para todo $\delta > 0$, existe $a \in A$ tal que $a \in E_\delta^*(x)$.

Ejemplo 3.1.3.

1. Sea $A = (0, 1)$. Se tiene entonces que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ son puntos de acumulación de A. Además, 0 y 1 son también puntos de acumulación de A.

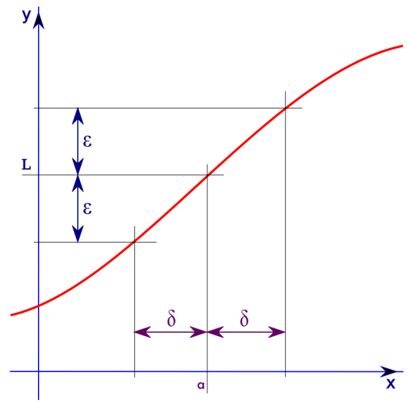
2. Consideremos ahora $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. No es difícil ver que 0 es punto de acumulación de A. En efecto, dado $\delta > 0$, $E_\delta^*(0) = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Por el Corolario 1.4.8, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \delta$, es decir $\frac{1}{n} \in A$ verifica que $\frac{1}{n} \in E_\delta^*(0)$.

3. El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, no tiene puntos de acumulación.

4. Sea ahora $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Entonces todo punto del intervalo $[0, 1]$ es de acumulación para A.

5. Si A es un conjunto finito, entonces no tiene puntos de acumulación.

Definición 3.1.4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de A y sea $L \in \mathbb{R}$. Decimos que la función f tiene límite L cuando x tiende a a, y se denota por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in A$, con $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Observación 3.1.5.

1. La condición $0 < |x - a| < \delta$ significa que x pertenece a un entorno abierto reducido de a, $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$. Con lo que, para que tenga sentido estudiar el límite de f en un punto a, la función debe estar definida en algún entorno reducido de a.

2. Si x es un punto de A, contenido en un entorno reducido de centro a y radio δ, la imagen de x, $f(x)$, es un punto del entorno abierto de centro L y radio ε. Intuitivamente, esto significa que el valor al que se aproxima $f(x)$ es L, cuando x se aproxima a a.

3. El valor del límite de una función f cuando x tiende a a no depende de los valores de f para puntos x situados "lejos" de a (esto significa que el límite de una función en un punto es una *propiedad local*). Tampoco depende del valor de f en a. De hecho, podría no existir $f(a)$ ya que, por definición, a no tiene por qué estar en el dominio de f.

Ejemplo 3.1.6.

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$ constante. Es claro entonces que, para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ya que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que $|f(x) - c| = 0$, con lo que, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\delta > 0$, se tiene que $0 = |f(x) - c| < \varepsilon$, si $0 < |x - a| < \delta$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y tomando $\delta = \varepsilon > 0$ se tiene que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

3. Aplicando la definición de límite, probar que $\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{2} = 2$.

   Sea $\varepsilon > 0$. Necesitamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

   Por una parte, tenemos que

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x+3}{2} - 2\right| = \left|\frac{x+3-4}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2}.$$

   Luego, tomando $\delta = 2\varepsilon > 0$, obtenemos que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces

$$|f(x) - 2| = \frac{|x-1|}{2} < \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Con lo que $\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{2} = 2$.

4. Utilizando la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

   Consideremos $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. Es claro que $\mathrm{Dom}(f)=[0,\infty)\setminus\{1\}=[0,1)\cup(1,\infty)$. Además

$$|f(x)-2|=\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}-2\right|=\left|\frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\right|=\left|\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right|=\left|\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1}\right|=\left|\sqrt{x}-1\right|.$$

   Ahora bien, como $x\neq 1$, entonces se tiene que

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{x}+1}<1,$$

   con lo que $\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right|=\frac{\left|\sqrt{x}-1\right|}{|x-1|}<1$ y, por tanto, $|\sqrt{x}-1|<|x-1|$.

   Sea entonces $\varepsilon>0$. Necesitamos encontrar $\delta>0$ tal que si $0<|x-1|<\delta$, entonces se verifique que $|f(x)-2|<\varepsilon$.

   Como tenemos que $x\neq 1$ entonces, por lo anterior, tenemos que $|\sqrt{x}-1|<|x-1|$, con lo que basta tomar $\varepsilon=\delta$. En efecto, si $0<|x-1|<\delta$, entonces

$$|f(x)-2|=\left|\sqrt{x}-1\right|<|x-1|<\delta=\varepsilon.$$

   Luego $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.

Teorema 3.1.7. *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y sea $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de A. Sean $L,L'\in\mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L'$. Entonces $L=L'$. Es decir, si existe el límite de f cuando x tiene a a, entonces es único.*

Proposición 3.1.8. (Aritmética de límites). *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y sean $f,g:A\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones. Sea a un punto de acumulación de A y sean $L,L'\in\mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L'$. Entonces se verifica:*

1. $\lim\limits_{x\to a}(rf(x)+sg(x))=rL+sL'$, *para todo* $r,s\in\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=LL'$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L}{L'}$, *si* $L'\neq 0$.

4. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=L^{L'}$, *si L y L' no son ambos cero.*

5. $\lim\limits_{x\to a}\log_b(f(x))=\log_b L$, *para todo $b>0$, siempre que $L>0$.*

6. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$.

7. *Si para todo $x\in A$ se verifica que $f(x)\leq g(x)$, entonces $L\leq L'$.*

Observación 3.1.9. Es fácil comprobar que los apartados 1 y 2 de la proposición anterior se puede generalizar para un número finito de funciones.

Ejemplo 3.1.10.

1. Por los apartados 1, 2 y 3 de la proposición anterior, tenemos que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-2}{2x^2+1}=\frac{1}{3}$.

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}$.

   En este caso, no podemos aplicar el apartado 3 de la proposición anterior, ya que $\lim\limits_{x\to 2}(2x+4)=0$. Sin embargo, para $x\neq 2$, tenemos que

   $$\frac{x^3-8}{2x-4}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}=\frac{x^2+2x+4}{2}.$$

   Con lo que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2}=6$.

Definición 3.1.11. Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y sea $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Sea $B\subseteq A$. Diremos que f *está (o es) acotada* en B si existe $M\geq 0$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in B$.

Ejemplo 3.1.12. Las funciones seno y coseno son acotadas en todo su dominio, ya que $|\mathrm{sen}(x)|\leq 1$ y $|\cos(x)|\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Proposición 3.1.13. *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y sea $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que existe $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ en un punto a de acumulación de A. Entonces f está acotada en un entorno abierto de a, es decir, existe $\delta>0$ y $M=M(\delta)\geq 0$ tal que $|f(x)|\leq M$ para todo $x\in(a-\delta,a+\delta)$.*

Demostración. Sea $L=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ y sea $\varepsilon>0$. Como $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ existe entonces $\delta>0$ tal que si $x\in A$, con $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Luego si x está en un entorno reducido de centro a y radio δ, se tiene entonces que $f(x)$ está en el entorno abierto de centro L y radio ε. Con lo que f está acotada en un entorno de a. □

Observación 3.1.14. Como consecuencia de esta proposición, tenemos que si f no es acotada en ningún entorno de a, entonces no existe $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Ejemplo 3.1.15. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$. Veamos que no existe el límite de f cuando x tiende a 0. Para ello, veamos que f no es acotada en ningún entorno de 0.

Sea $M\geq 0$ y sea $E_\delta(0)=(-\delta,\delta)$, con $\delta>0$, un entorno (arbitrario) de 0. Por la Propiedad Arquimediana, existe $n\in\mathbb{N}$ con $n>M$ y tal que $0<\frac{1}{n}<\delta$, con lo que $f\left(\frac{1}{n}\right)=n>M$ y, por tanto, f no está acotada en ningún entorno de 0.

Luego no existe $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Teorema 3.1.16. *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y sea $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ en un punto de acumulación a de A. Si g es una función acotada en un entorno reducido de a, entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=0$.*

Ejemplo 3.1.17. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Sean $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y $g(x)=\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, respectivamente.

Por una parte, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Por otra parte, como $|\text{sen}(x)|\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$ entonces, en particular, $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Luego, por el teorema anterior, $\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Teorema 3.1.18. (Criterio del sandwich). *Sea $A\subseteq\mathbb{R}$ y sean $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y $h:A\longrightarrow\mathbb{R}$ tres funciones tales que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ para todo $x\in A$. Sea a un punto de acumulación de A. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L\in\mathbb{R}$,* entonces *$\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$.*

Ejemplo 3.1.19. Comprobar, aplicando el criterio del sandwich, que $\lim\limits_{x\to 0} -x^2\cos(20\pi x)=0$.

Por una parte, tenemos que

$$\left|-x^2\cos(20\pi x)\right|=\left|-x^2\right||\cos(20\pi x)|=x^2\,|\cos(20\pi x)|\leq x^2,$$

ya que $|\cos(20\pi x)|\leq 1$. Luego, tenemos así que $-x^2\leq -x^2\cos(20\pi x)\leq x^2$.

Por otra parte, es claro que $\lim\limits_{x\to 0} -x^2=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$. Luego, por el criterio del sandwich, $\lim\limits_{x\to 0} -x^2\cos(20\pi x)=0$.

Algunos límites importantes:

Como consecuencia del criterio del sandwich, y utilizando algunas propiedades geométricas de las funciones trigonométricas, se calculan los dos límites siguiente, que resultan ser muy útiles:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$.

Ejemplo 3.1.20.

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}(x)}{x}$.

   Como $\text{tg}(x)=\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, entonces

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=1\cdot 1=1.$$

2. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(16x)}{2x}=8$.

   Por una parte,

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(16x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\text{sen}(16x)}{8\cdot 2x}=8\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(16x)}{16x}.$$

Por otra parte, realizando el cambio de variable $y = 16x$, tenemos entonces que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(16x)}{2x} = 8\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(16x)}{16x} = 8\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 8\cdot 1 = 8.$$

Nótese que, si $y = 16x$, como $x \to 0$, entonces $y \to 0$.

3.1.1. Límites laterales

Definición 3.1.21. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de $A \cap (a, +\infty)$ y sea $L \in \mathbb{R}$. Diremos que L *es el límite por la derecha de* f *en* a, y se denota por $f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in A$, con $0 < x - a < \delta$ (es decir, $x \in A \cap (a, a + \delta)$), entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición 3.1.22. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de $(-\infty, a) \cap A$ y sea $L \in \mathbb{R}$. Diremos que L *es el límite por la izquierda de* f *en* a, y se denota por $f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in A$, con $0 < a - x < \delta$ (es decir, $x \in (a - \delta, a) \cap A$), entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observación 3.1.23. Los resultados de unicidad del límite y de aritmética de límites tienen sus análogos en el caso de límites laterales, siempre que tengan sentido. Esto mismo ocurrirá cuando estudiemos límites infinitos y límites en el infinito.

Teorema 3.1.24. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de $A \cap (a, +\infty)$ y de $(-\infty, a) \cap A$ y sea $L \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, y solo si, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.*

Ejemplo 3.1.25.

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ x + 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

   En este caso, tenemos que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$.
   Luego no existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, ya que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$ para todo $x \neq 0$.
   Por las propiedades del valor absoluto, tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

   Luego $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, con lo que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3.2. Límites infinitos y en el infinito

3.2.1. Límites infinitos

Definición 3.2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de A.

- Diremos que f *tiene límite infinito cuando* x *tiende a* a, y lo denotamos por $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, si para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(C) > 0$ tal que si $x \in A$, con $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > C$.
- Diremos que f *tiene límite menos infinito cuando* x *tiende a* a, y lo denotamos por $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si para todo $C \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(C) > 0$ tal que si $x \in A$, con $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) < C$.

Observación 3.2.2. Las definiciones correspondientes para límites laterales infinitos se obtienen sustituyendo la condición $x \in A$, con $0 < |x - a| < \delta$ (es decir, $x \in A \cap E^*_\delta(a)$), por las condiciones correspondientes, $x \in A \cap (a, a + \delta)$ para límites por la derecha o $x \in A \cap (a - \delta, a)$, para límites por la izquierda.

Ejemplo 3.2.3. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{|x|}$ para todo $x \neq 0$.

Veamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Sea $C \in \mathbb{R}$. Necesitamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $x \neq 0$, con $|x| < \delta$, entonces se verifique que $\frac{1}{|x|} > C$.

Así, tomando $\delta = \frac{1}{|C|} > 0$, entonces

$$|x| < \delta = \frac{1}{|C|} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > |C| \geq C.$$

Luego $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Observación 3.2.4. Para determinar un límite de este tipo sin pasar por la definición (es decir, una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$, con $k \neq 0$), debemos observar el signo por el que se acerca el denominador a 0 cuando realizamos límites laterales a a.

Ejemplo 3.2.5. En el ejemplo anterior, $f(x) = \frac{1}{|x|}$ para todo $x \neq 0$, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right]$. Miramos entonces el signo de los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{1}{|0^-|}\right] = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty, \text{ y}$$

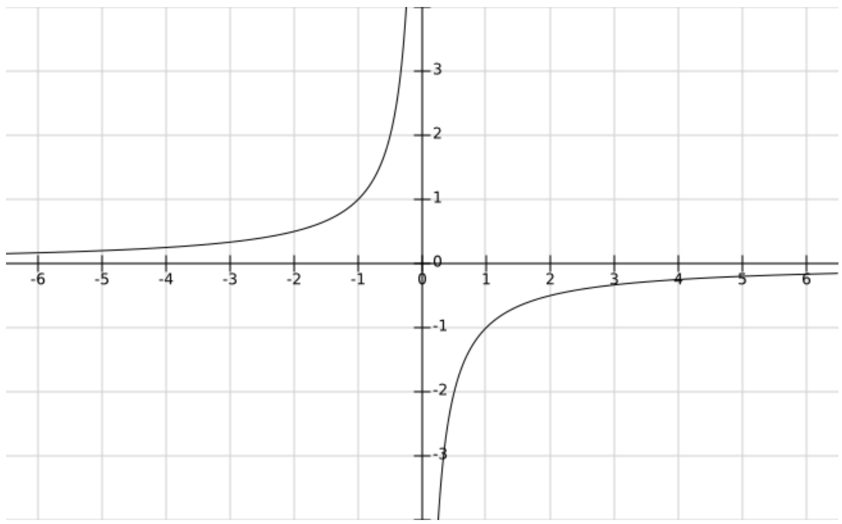
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{1}{|0^+|}\right] = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty.$$

Luego $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Definición 3.2.6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea a un punto de acumulación de A. Diremos que la recta (vertical) $x = a$ es una *asíntota vertical de* f si, al menos uno de los límites laterales de f en a, es ∞ o $-\infty$, es decir, o bien $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$, o bien $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Ejemplo 3.2.7.

1. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{-1}{x}$ para todo $x \neq 0$.
   En este caso $x = 0$ es una asíntota vertical de f, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$.



2. Consideremos ahora la función $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$, para todo $x \notin \{-2, 2\}$.
   Si $x \neq -2, 2$ entonces, factorizando,

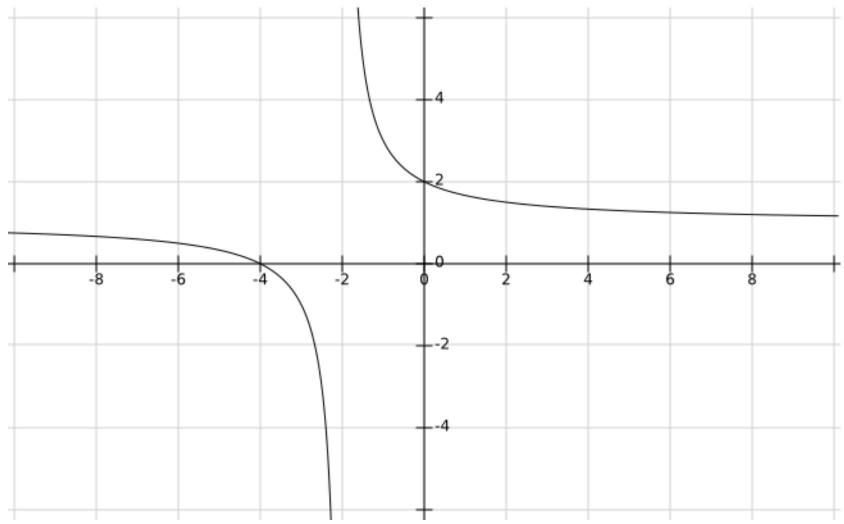
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2}.$$

   Así, tenemos que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ y $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \left[\frac{2}{0}\right]$. Miramos entonces el signo de los límites laterales de f en -2.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty, \text{ y}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty.$$

   Luego, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical de f, pero la recta $x = 2$ no es una asíntota vertical de f.



Un límite importante:

El siguiente límite será importante a la hora de calcular indeterminaciones del tipo $1^{(\pm)\infty}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = (\pm)\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

Ejemplo 3.2.8. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = [1^\infty]$, entonces debemos manipular la función $f(x)$ para obtener una expresión del tipo $f(x)=\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}$, con $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Para ello, existen varios procedimiento, uno de ellos sería el siguiente:

1. Sumamos y restamos 1 dentro de la base de la función, y operamos la parte que tiene la diferencia:

$$f(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+\frac{2x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+\frac{2x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$\left(1+\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

2. Como nuestro nuevo numerador ha de ser 1, dividimos numerador y denominador entre el numerador, es decir,

$$f(x)=\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+\frac{\frac{x-1}{x-1}}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

3. Por último, como necesitamos en el exponente la misma función que en el denominador, elevamos todo al denominador y su inverso:

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right]^{\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}} =$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right]^{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right]^{\frac{1}{x+2}}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right]^{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e},$$

ya que $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$.

3.2.2. Límites en el infinito

Definición 3.2.9. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $L \in \mathbb{R}$.

- Si A es un conjunto no acotado superiormente, diremos que *f tiene límite L cuando x tiende a infinito*, y lo denotamos por $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, con $x > M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- Si A es un conjunto no acotado inferiormente, diremos que *f tiene límite L cuando x tiende a menos infinito*, y lo denotamos por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, con $x < M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo 3.2.10. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Veamos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Veamos primero que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$, entonces $|f(x)| < \varepsilon$.

Como queremos que

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$

basta entonces considerar $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Así,

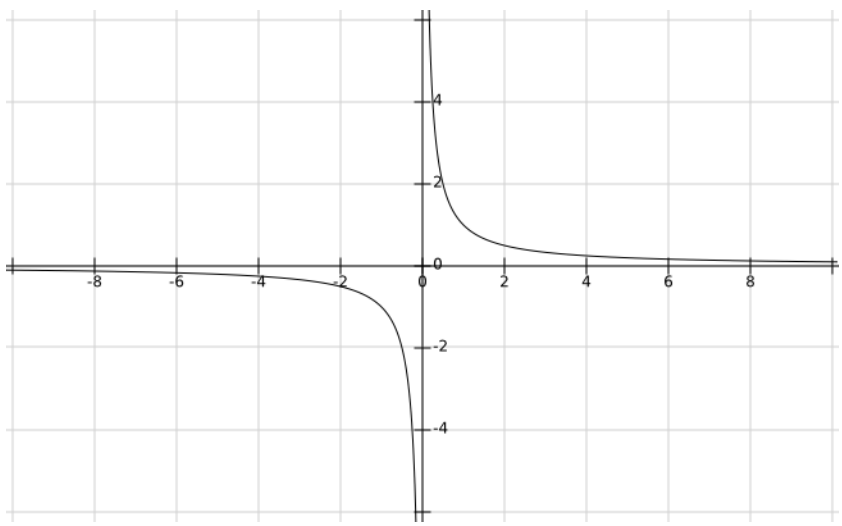
$$x > M = \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$

ya que al ser $x > M > 0$, entonces $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$.

Veamos ahora que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x < M$, entonces $|f(x)| < \varepsilon$.

Como queremos que
$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$
basta entonces considerar $M = -\frac{1}{\varepsilon}$. Así,
$$x < M = -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$$
ya que al ser $x < M < 0$, entonces $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.



Definición 3.2.11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $L \in \mathbb{R}$. Diremos que la recta (horizontal) $y = L$ es una *asíntota horizontal de* f si, o bien $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, o bien $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Ejemplo 3.2.12. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$, del ejemplo anterior.

Definición 3.2.13. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sean $m, n \in \mathbb{R}$, con $m \neq 0$. Diremos que la recta $y = mx + n$ es una *asíntota oblicua de* f si, o bien $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$, o bien $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

Observación 3.2.14. Si una función f tiene una asíntota oblicua, $y = mx + n$, entonces
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ y } n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Ejemplo 3.2.15. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ para todo $x \neq 2$. Veamos que la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de f.

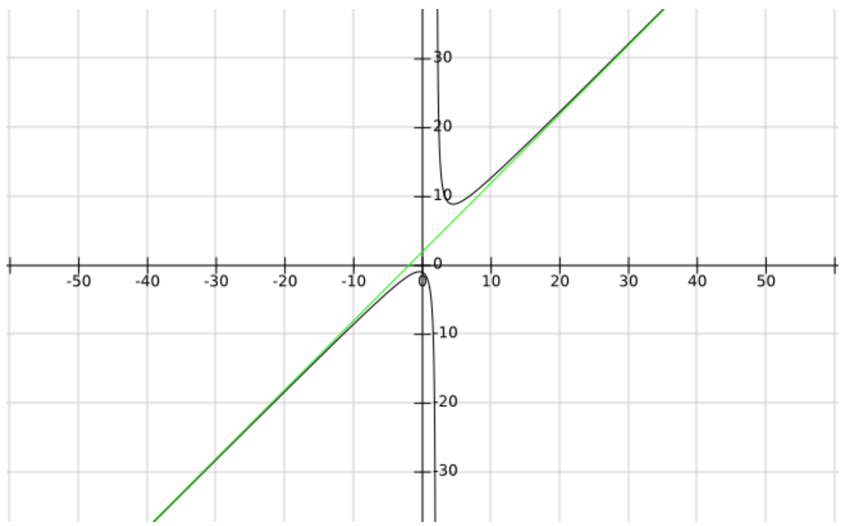
Por una parte,

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = 1.$$

Por otra parte,

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+2}{x-2} \right) = 2.$$

Luego la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de f.



3.2.3. Límites infinitos en el infinito

Definición 3.2.16. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

- Si A es un subconjunto no acotado superiormente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$) si para todo $C > 0$ existe $\delta = \delta(C) \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, con $x > \delta$, entonces $f(x) > C$ (o $f(x) < -C$).
- Si A es un subconjunto no acotado inferiormente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$) si para todo $C > 0$ existe $\delta = \delta(C) \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, con $x < \delta$, entonces $f(x) > C$ (o $f(x) < -C$).

3.3. Anexo: cálculo de límites

En esta última sección, vamos a proceder a calcular los tipos de límites más usuales.

3.3.1. Cálculo del límite en un punto

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, siempre que exista $f(a)$.

   Ejemplo 3.3.1.

   a) $\lim\limits_{x \to 1} (-x^2 - 5x + 6) = 0$.
   b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2}{x^2-5x+2} = -\frac{7}{4}$.
   c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{2x} \right) = 2 - \sqrt{2}$.
   d) Consideremos ahora la siguiente función

   $$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < -1 \\ x^2+1, & \text{si } -1 \le x < 0 \\ -5, & \text{si } x \ge 0 \end{cases}.$$

   Vamos a calcular $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

   - $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$:

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} -2x = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2+1) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2.$$

   - $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -5 = -5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -1} f(x).$$

2. Indeterminaciones del tipo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \left[\frac{k}{0}\right]$, con $k \neq 0$. En esta indeterminación, el resultado puede ser $-\infty$, $+\infty$ o que no exista.

   Ejemplo 3.3.2.

   $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0}\right]$. Calculamos los límites laterales:

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1}.$$

3. Indeterminaciones del tipo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Ejemplo 3.3.3.

a) **Funciones racionales:** se factoriza numerador y denominador, sacando como factor común $x-a$.

- $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Factorizando obtenemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Factorizando

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-2} = \left[\frac{4}{0}\right].$$

Calculamos límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}.$$

b) **Funciones radicales:** se multiplica y divide por el conjugado del radical problemático.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Multiplicando y dividiendo por el conjugado de $1-\sqrt{1-x}$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x\to 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2.$$

3.3.2. Cálculo del límite en el infinito

1. **Funciones polinómicas:** nos fijamos en el término de mayor grado, teniendo cuidado con los signos.

   - $\lim\limits_{x\to\infty} (5x^4 - 4x^3 + 1) = \lim\limits_{x\to\infty} 5x^4 = +\infty$.
   - $\lim\limits_{x\to\infty} (x^4 - 6x^5 + 3) = \lim\limits_{x\to\infty} -6x^5 = -\infty$.
   - $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4 - 6x^5 + 3) = \lim\limits_{x\to -\infty} -6x^5 = +\infty$.
   - $\lim\limits_{x\to\infty} (-4x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} -4x^4 = -\infty$.

2. **Funciones radicales:** nos fijamos en el término de mayor grado de dentro del radical.

   - $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5x^2 - 20x + 3} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5x^2} = +\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2 - 20x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2} = +\infty$.
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{-3x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{-3x^2}$ no existe, ya que $\lim_{x\to\infty} -3x^2 = -\infty$.

3. **Función exponencial:** $f(x) = a^x$, con $a > 0$.
   - Si $0 < a < 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.
   - Si $a > 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
4. **Función logarítmica:** $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$.
   - Si $0 < a < 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$.
   - Si $a > 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$.
5. Indeterminaciones del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

   ”Comparamos infinitos”: Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, tenemos los siguientes casos:

   a) Si el orden de g es mayor que el orden de h, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

   b) Si el orden de g es menor que el orden de h, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

   c) Si el orden de g es el mismo que el orden de h, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Comparaciones usuales entre órdenes de funciones:

   a) Dadas dos potencias de x, tiene mayor orden la de mayor exponente.

   Ejemplo 3.3.4. x^5 tiene mayor orden que x^3.

   b) Dadas dos funciones exponenciales de base mayor que 1, tiene mayor orden la de base mayor.

   Ejemplo 3.3.5. 4^x tiene mayor orden que 3^x.

   c) Toda función exponencial, de base mayor que 1, tiene mayor orden que cualquier potencia de x.

   Ejemplo 3.3.6. 5^x tiene mayor orden que x^5.

   d) Las potencias de x tienen mayor orden que las funciones logarítmicas.

   Ejemplo 3.3.7. x^3 tiene mayor orden que $\log(2x + 3x^4)$.

   e) Dos polinomios del mismo grado, tienen el mismo orden.

   Ejemplo 3.3.8. $x^5 + 2x - 2$ y $x^4 + 2x^3 - 1 + 4x^5$ tienen el mismo orden.

   Ejemplo 3.3.9.

   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = +\infty$.

   b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1} = -\infty$.

   c) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-2x+4}{-7x^4+x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{-7x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$.

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^5-3}{4x+2x^5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^5}{2x^5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-2} = -1.$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0.$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$

g) $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{4^x} = 0.$

h) $\lim_{x \to \infty} \frac{42^x}{3^x} = +\infty.$

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5-1}}{x} = \infty.$

j) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x^5-2x)}{x^2-5} = 0.$

k) $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{x^{16}} = +\infty.$

l) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2+2} = \infty.$

6. Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$.

a) **Comparación de infinitos:**

- Si f tiene orden mayor que g, entonces $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = \infty$.
- Si f tiene orden menor que g, entonces $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$.

Ejemplo 3.3.10.

- $\lim_{x \to \infty} (x^7 - x^6 + x^5) = \lim_{x \to \infty} (x^7 - x^6) = +\infty.$
- $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 - \sqrt{x+3}\right) = \infty.$
- $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 - \sqrt{x^5+3}\right) = -\infty.$
- $\lim_{x \to \infty} \left(3^x - \sqrt{x^5-1}\right) = +\infty.$

b) **Funciones racionales:** operar las fracciones.

Ejemplo 3.3.11.

- $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3}\right) = [\infty - \infty]$. Operando obtenemos

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{(x-3)(x-1)}\right) =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-1)^2 - (x+5)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x + 1 - x - 5}{x^2 - 4x + 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-4}{0}\right].$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-3x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-3x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}.$$

c) **Funciones irracionales:** multiplicar y dividir por el conjugado.

Ejemplo 3.3.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)=[\infty-\infty]$. Multiplicando y dividiendo por el conjugado tenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2-x^2-x}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

7. Indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$.

   Reducimos a alguno de los casos conocidos.

   Ejemplo 3.3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}=[\infty\cdot 0]$. En este caso, introduciendo el facto $x+7$ dentro de la raíz, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

   Ahora bien,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{4x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

   Luego $\lim\limits_{x\to\infty}(x+7)\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}=\frac{1}{2}$.

8. Indeterminaciones del tipo 1^∞.

   Debemos aplicar que $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$, si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

   Ejemplo 3.3.14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

   Como $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]$, entonces debemos manipular la función $f(x)$ para obtener una expresión del tipo $f(x)=\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}$, con $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

   En este caso,

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=e,$$

   ya que $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$.

Ejercicios

1. Utilizando la definicion de límite, demostrar que

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-3}{3} = -1.$

   b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x-1) = \frac{11}{2}.$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2. Calcular los límites de las siguientes funciones en el origen, en caso de que existan:

   (a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

   (c) $f(x) = \log(x^2)$

   (d) $f(x) = \frac{x^2}{\text{sen}(x)}$

   (e) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$

   (f) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

   (g) $f(x) = x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (h) $f(x) = x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (i) $f(x) = x^3\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (j) $f(x) = \frac{|x|}{x^2+x}$

3. Calcula los siguientes límites en caso de que existan:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{\cos(x)+e^{-\frac{1}{x}}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\text{sen}(x)-\text{sen}(a)}{x-a}$, con $a \in \mathbb{R}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)-\text{sen}(x)}{x^2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{2\text{tg}(x)}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{\text{sen}(x)}}$

   (g) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, con $a \geq 0$

   (h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x-1}}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{x}$

   (k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\text{tg}(x)}{\text{sen}(x)-\cos(x)}$

   (l) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

   (m) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

   (n) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

   (ñ) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

   (o) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

   (p) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

   (q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$, con $a \geq 0$

4. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}=1$ y que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{2x}$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$.

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}$, con $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5. Calcula los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+\text{sen}^2(x)}{3x+1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{\sqrt{3x^2-\sqrt{4x^6+3x^3}}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\text{sen}(x)}{2x+7-5\text{sen}(x)}$

   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}$

6. Calcula los siguientes límites laterales:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)^{[x]}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{[x]}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{3x}{2x-10}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{3x}{2x-10}$

7. Hallar las constantes reales a y b que verifican

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

8. Estudiar las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

   (a) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

   (b) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

   (c) $f(x)=\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

   (d) $f(x)=\frac{\text{sen}(x)}{x}$

9. Determinar los posibles valores reales de a para que exista $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}, & \text{si } x<1\\[2ex] \frac{x^3-a^3}{x-a}, & \text{si } x>1\end{cases}$$

   y calcular el límite para tales valores de a.