Capítulo 6

Estudio de funciones y representación gráfica

En este tema estudiaremos las aplicaciones de las derivadas al estudio de la representación gráfica de una función. Gracias a la derivada (y derivadas sucesivas) de una función, construiremos técnicas que nos permitirán conocer cómo es su gráfica, a partir de sus elementos más significativos.

6.1. Monotonía y extremos de una función

La derivada de una función es una herramienta muy satisfactoria a la hora de estudiar la monotonía de una función y, por tanto, del estudio de sus extremos. Comenzaremos el tema con el siguiente teorema, que nos determina la monotonía de una función derivable en un intervalo abierto.

Teorema 6.1.1. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces se verifica:*

1. *f es creciente si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*
2. *f es estrictamente creciente si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$.*
3. *f es decreciente si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.*
4. *f es estrictamente decreciente si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.*

Ejemplo 6.1.2.

1. Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) = 2x$ entonces

   - si $x < 0$, se tiene que $f'(x) < 0$,
   - si $x = 0$, entonces $f'(x) = 0$,
   - si $x > 0$, se verifica que $f'(x) > 0$.

   Luego f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es estrictamente creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

2. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Como $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \neq 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso, $f'(x) = 3x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, con lo que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Como $f(0) = 0$ y f es continua en 0, podemos afirmar que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Definición 6.1.3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in A$.

- Diremos que a es un *máximo absoluto de f en A* si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in A$.
- Diremos que a es un *mínimo absoluto de f en A* si $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

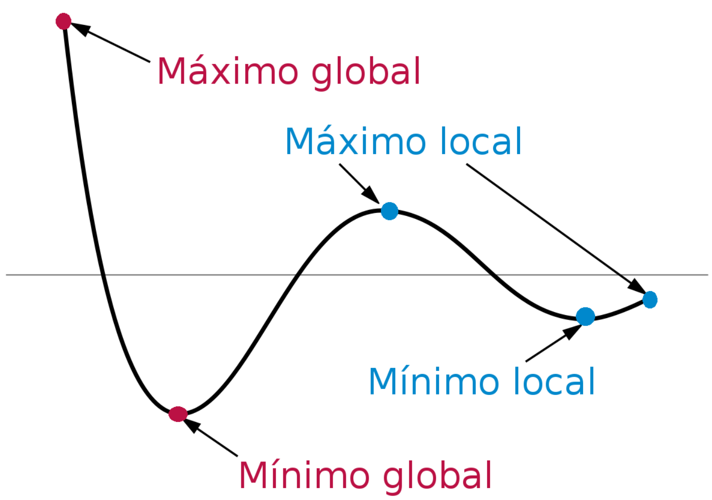
En cualquiera de los casos anteriores, diremos que a es un *extremo absoluto* de f.

Definición 6.1.4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in A$.

- Diremos que a es un *máximo relativo de f en A* si existe un entorno abierto de a, $E_r(a)$, con $r > 0$, tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in E_r(a) \cap A$.
- Diremos que a es un *mínimo relativo de f en A* si existe un entorno abierto de a, $E_r(a)$, con $r > 0$, tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in E_r(a) \cap A$.

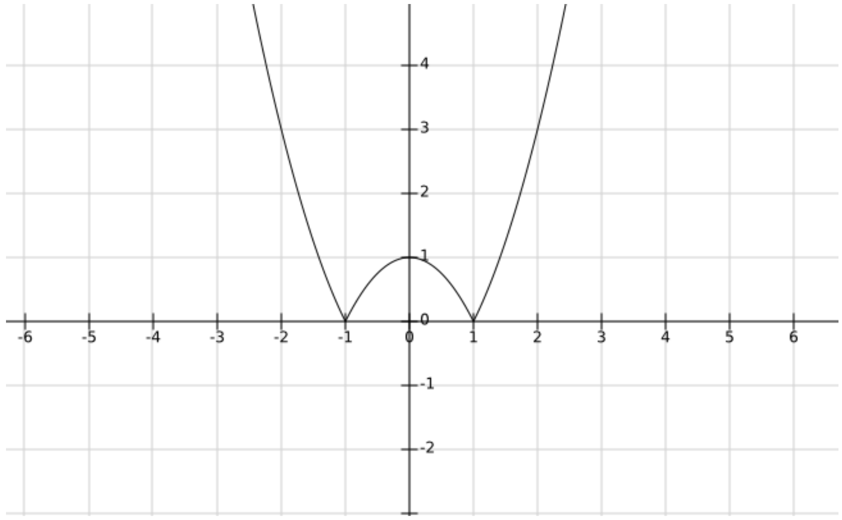
En cualquiera de los casos anteriores, diremos que a es un *extremo relativo* de f.

Observación 6.1.5. Todo extremo absoluto es extremo relativo, pero un extremo relativo no tiene por qué ser extremo absoluto.

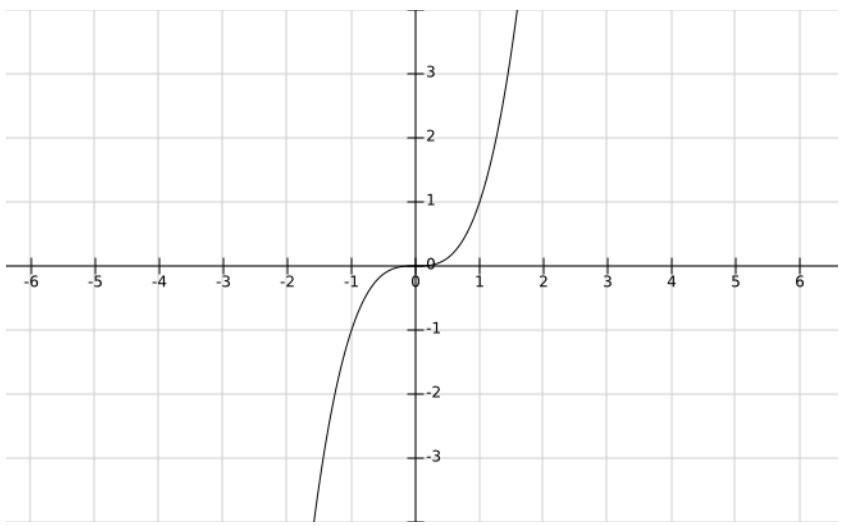


Ejemplo 6.1.6.

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta función tiene un mínimo absoluto en $x = -1$ y en $x = 1$, y un máximo relativo en $x = 0$. Pero no tiene máximo absoluto.



2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso, f no tiene extremos, ni absolutos, ni relativos.



Teorema 6.1.7. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a, entonces o bien no existe $f'(a)$ o bien $f'(a) = 0$.*

Definición 6.1.8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in A$. Diremos que *a es un punto crítico de f* si no existe $f'(a)$, o bien $f'(a) = 0$.

Observación 6.1.9. Tenemos entonces que, si f tiene un extremo relativo en a, entonces a es un punto crítico de f. Sin embargo, el recíproco no es cierto, es decir, un punto crítico no tiene por qué ser un extremo relativo. Por ejemplo, basta considerar la función $f(x) = x^3$ del ejemplo anterior. Así, se tiene que 0 es un punto crítico de f, ya que $f'(0) = 0$, pero 0 no es extremo relativo de f.

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 6.1.1.

Teorema 6.1.10. (Criterio de la primera derivada). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f. Entonces se verifica:*

1. *Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$, entonces c es un máximo relativo de f.*

2. *Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$, entonces c es un mínimo relativo de f.*

3. *En otro caso, c no es un extremo relativo.*

Definición 6.1.11. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $n \in \mathbb{N}$. Diremos que f es *de clase n en I*, y lo denotaremos por $f \in \mathcal{C}^n(I)$, si f es n veces derivable y las funciones f', f'', ..., $f^{n-1)}$, $f^{n)}$ son continuas en I. Como caso particular, diremos que f es *de clase infinito en I*, $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.1.12. (Condición suficiente para extremos relativos). *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f \in \mathcal{C}^n(I)$ tal que $f'(a) = f''(a) = ... = f^{n-1)}(a) = 0$ y $f^{n)}(a) \neq 0$. Entonces se verifica:*

1. *Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$, entonces a es un mínimo relativo de f.*

2. *Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$, entonces a es un máximo relativo de f.*

3. *Si n es impar, entonces a no es extremo relativo de f.*

Corolario 6.1.13. (Criterio de la segunda derivada). *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y dos veces derivable en I, con f' y f'' continuas en I. Sea $a \in I$ un punto crítico de f, es decir, $f'(a) = 0$. Entonces se verifica:*

1. *Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo relativo de f.*

2. *Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo relativo de f.*

Ejemplo 6.1.14.

1. Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 4x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos a hallar los puntos críticos de f.

   Como f es derivable en $\mathbb{R}$, entonces los puntos críticos son los $x \in \mathbb{R}$ donde la función derivada se anula. Luego

   $$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 3.$$

   Luego los puntos críticos de f son 0 y 3. Vamos a clasificar estos puntos críticos.

   - Si $x = 0$, entonces $f''(0) = 0$ y $f^{3)}(0) = -24 < 0$, ya que $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ y $f'''(x) = 24x - 24 = 24(x-1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

     Luego 0 no es un extremo relativo de f.

   - Si $x = 3$, entonces $f''(3) = 36 > 0$, con lo que 3 es un mínimo relativo de f.

2. Sea $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$ para todo $x \in [-2, 2]$. En este caso, tenemos que f está definida en un intervalo cerrado y acotado, con lo que los extremos absolutos podrían estar en los extremos del intervalo o en los punto críticos de f.

   Hallemos primero los puntos críticos de f.

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

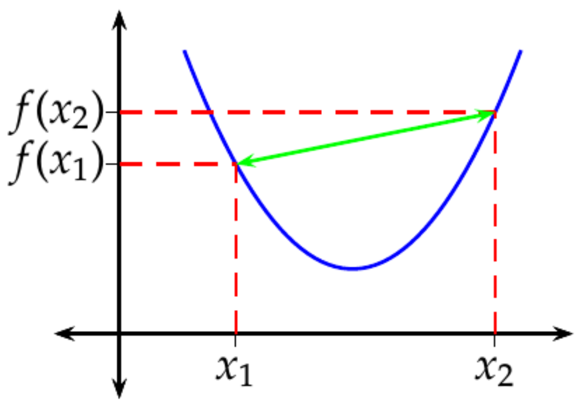
   con lo que el único punto crítico de f es $x = 1$. Además, como $f''(1) = 2 > 0$, ya que $f''(x) = 2$ para todo $x \in (-2, 2)$, entonces 1 es un mínimo relativo de f, con $f(1) = -1$.

   Ahora bien, como $f(-2) = 8$ y $f(2) = 0$, entonces f tiene un máximo absoluto en $x = -2$ y un mínimo absoluto en $x = 1$.

6.2. Curvatura y puntos de inflexión

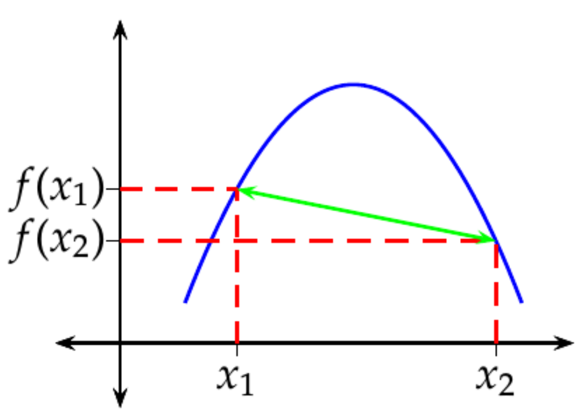
Definición 6.2.1. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *convexa* si, para todo $x_1, x_2 \in I$ y para todo $t \in [0, 1]$, se verifica que $f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

Observación 6.2.2. Graficamente, si $x_1, x_2 \in I$, el segmento de recta que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, $(1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$, queda por encima de la gráfica de f.



Definición 6.2.3. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *cóncava* si, para todo $x_1, x_2 \in I$ y para todo $t \in [0, 1]$, se verifica que $f((1-t)x_1+tx_2) \geq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

Observación 6.2.4. Graficamente, si $x_1, x_2 \in I$, el segmento de recta que une $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, $(1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$, queda por debajo de la gráfica de f.



Definición 6.2.5. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in I$. Diremos que a es un *punto de inflexión de* f si la gráfica de la función de f en el punto $(a, f(a))$ cambia de curvatura, es decir, si la función pasa de ser cóncava a ser convexa en este punto, o pasa de ser convexa a ser cóncava en este punto.

Teorema 6.2.6. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I. Entonces se verifica:*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I.*

Teorema 6.2.7. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable en un entorno de a tal que $f'(a) = f''(a) = ... = f^{n-1)}(a) = 0$ y $f^{n)}(a) \neq 0$. Entonces se verifica:*

1. *Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$, entonces f es convexa en a.*
2. *Si n es par y $f^{n)}(a) < 0$, entonces f es cóncava en a.*
3. *Si n es impar, entonces a es un punto de inflexión de f.*

Ejemplo 6.2.8. Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 4x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego $f''(x) > 0$ si $x > 0$ y $x > 2$, o bien si $x < 0$ y $x < 2$, con lo que f es convexa en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Si $x \in (0, 2)$, entonces $f''(x) < 0$, con lo que f es cóncava en $(0, 2)$.

Por lo tanto, $x = 0$ y $x = 2$ son puntos de inflexión de f.

6.3. Representación gráfica

En esta última sección del tema, veremos cómo representar la gráfica de una función.

Representación de funciones. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Para representar gráficamente la curva de ecuación $y = f(x)$ realizaremos el siguiente estudio:

1. Determinar el *dominio* de f, $\mathrm{Dom}(f)$ y, si es posible, su *imagen*, $\mathrm{Im}(f)$.
2. Hallar los *cortes de $y = f(x)$ con los ejes*, si los hubiera:
   - *Puntos de corte con el eje X ($y = 0$)*: resolver la ecuación $f(x) = 0$, obteniendo los puntos (si existen soluciones x_1, ..., x_n), $(x_1, 0)$, ..., $(x_n, 0)$.
   - *Punto de corte con el eje Y ($x = 0$)*: calcular $f(0)$ (si existe o tiene sentido $x = 0$), obteniendo el punto $(0, f(0))$.

3. Estudiar si f presenta o no *simetría*. Puede ser de dos tipos:
   - *Simetría par*: si para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tiene que $-x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(-x) = f(x)$.
   - *Simetría impar*: si para cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tiene que $-x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(-x) = -f(x)$.
4. *Periodicidad de f*: determinar si existe $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, donde T es la menor constante positiva que cumple dicha propiedad (T es el periodo mínimo de f).
5. Determinar las *asíntotas* de la gráfica de f. Pueden ser de tres tipos:
   - *Horizontales*: si $\mathrm{Dom}(f)$ no está acotado superiormente y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, existe entonces una asíntota horizontal de ecuación $y = L$. Lo mismo ocurre si $\mathrm{Dom}(f)$ no está acotado inferiormente y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.
   - *Verticales*: si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.
   - *Oblicuas*: cuando $\mathrm{Dom}(f)$ no está acotado superiormente y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$, entonces la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua. Lo mismo puede decirse si $\mathrm{Dom}(f)$ no está acotado inferiormente y se cumplen las condiciones anteriores cuando tomamos los límites en $-\infty$.
6. Estudiar la *monotonía de f*, así como sus *extremos relativos*.
7. Estudiar la *curvatura de f*, así como sus *puntos de inflexión*.

Ejemplo 6.3.1. Representar la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$.

1. Dominio de f:

   Como f es racional, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\}$. Resolvamos entonces dicha ecuación.
   $$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,$$
   por lo que
   $$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$
2. Cortes con los ejes:
   - Puntos de corte con el eje X ($y = 0$):
     $$\frac{x^3}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
     Con lo que obtenemos el punto $(0, 0)$.
   - Punto de corte con el eje Y ($x = 0$):
     $$f(0) = 0.$$
     Con lo que obtenemos (de nuevo) el punto $(0, 0)$.

3. Simetría de f:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3}{x^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$$

   y, por tanto, tenemos que f presenta una simetría impar.

4. Periodicidad de f:

   Es fácil ver que f no es periódica.

5. Asíntotas de la gráfica de f:

   - Horizontales: no tiene, ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty.$$

   - Verticales: tiene dos, una en la recta $x=-2$ y otra en la recta $x=2$, ya que

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^3}{(x+2)(x-2)}=\left[\frac{-8}{0^+}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^3}{(x+2)(x-2)}=\left[\frac{-8}{0^-}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^3}{(x+2)(x-2)}=\left[\frac{8}{0^-}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^3}{(x+2)(x-2)}=\left[\frac{8}{0^+}\right]=+\infty.$$

   - Oblicuas: tiene una asíntota oblicua en la recta $y=x$, ya que

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1,\text{ y}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0.$$

6. Monotonía y extremos relativos de f:

   Comenzamos calculando la derivada de f:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-2x\cdot x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

   Por lo tanto,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}\Leftrightarrow 0\Leftrightarrow x^2(x^2-12)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}x&=&-2\sqrt{3}\\x&=&0\\x&=&2\sqrt{3}\end{array}\right.,$$

   con lo que obtenemos los puntos críticos $x_1=-2\sqrt{3}$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=2$ y $x_5=2\sqrt{3}$. Nótese que tanto x^2 como $(x^2-4)^2$ son términos positivos, con lo que solo habrá que estudiar el signo de x^2-12 para determinar el signo de f' en cada intervalo:

Intervalo	$(-\infty,-2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3},-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3},\infty)$
Signo de f'	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego tenemos que f es creciente en $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$ y decreciente en $\left(-2\sqrt{3},-2\right)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup\left(2,2\sqrt{3}\right)$. Además, tenemos que f tiene un máximo relativo en $x=-2\sqrt{3}$, $\left(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3}\right)$, y un mínimo en $x=2\sqrt{3}$, $\left(2\sqrt{3},3\sqrt{3}\right)$.

7. Curvatura y puntos de inflexión de f:

   Comenzamos calculando la segunda derivada de f:

$$f''(x)=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-2(x^2-4)(2x)(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^4}=$$
$$\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^3}=$$
$$\frac{4x^5-16x^3-24x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3}=\frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

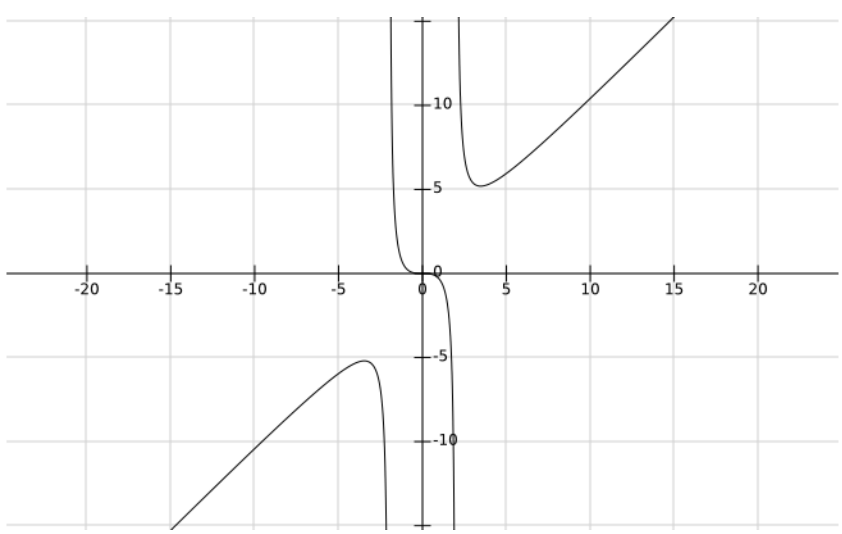
   Por lo tanto,

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\Leftrightarrow 0\Leftrightarrow 8x(x^2+12)=0\Leftrightarrow x=0.$$

   Ahora, estudiamos el signo de f'' en cada intervalo:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo de f''	$-$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

   Por lo tanto, f es convexa en $(-2,0)\cup(2,\infty)$ y cóncava en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$. Además, f tiene un punto de inflexión en $x=0$, $(0,0)$. Nótese que $x=-2$ y $x=2$ no son puntos de inflexión, ya que $\pm 2\notin \mathrm{Dom}(f)$.



Ejercicios

1. Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x^2 - 1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x + \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$.

2. Estudiar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

   a) $f : [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x$ para todo $x \in [-2, 1]$.

   b) $g : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$ para todo $x \in [-2, 2]$.

   c) $h : [-2, 2] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x + \frac{2}{x}$ para todo $x \in [-2, 2]$.

3. Estudiar la monotonía y la curvatura de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$, para todo $x \in \mathbb{R}$, hallando sus extremos y puntos de inflexión en el caso de que los tuviera.

4. Hallar los valores reales a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x + 3} + b\sqrt{x - 1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenga un punto de inflexión en el punto $(2, 8)$.

5. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica con tapa de un litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

6. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

7. Representar gráficamente las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$.

   b) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$.

   c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

   d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

8. Representar gráficamente las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{si } x < -1 \\ 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

   b) $g(x) = \begin{cases} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.