Capítulo 4

Continuidad de funciones

En este capítulo se estudia la continuidad de funciones. Intuitivamente, una función continua es una función que tiene una gráfica "sin interrupciones", es decir, en cada punto de su dominio tiene límite y este límite es exactamente igual a su valor de la función en ese punto.

4.1. Continuidad de funciones reales de variable real

Definición 4.1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *continua en* a si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in A$, con $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Observación 4.1.2. Si $a \in A$ es un punto de acumulación de A, esta definición es equivalente a decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Sin embargo, si a es un punto aislado de A, es decir, a no es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a, sin importar la expresión de f.

Ejemplo 4.1.3.

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$
Como 0 es un punto de acumulación de $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces f es continua en 0, ya que
   - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$.
   - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.
   - $f(0) = 0$.

   Luego $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y, por tanto, f es continua en 0.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < -1 \\ 3, & \text{si } x = 0 \\ x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$
Como 0 es un punto aislado de $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$, entonces f es continua en 0.

Proposición 4.1.4. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en un punto $a \in A$. Entonces se verifica:*

1. *$rf + sg$ es continua en a, para todo $r, s \in \mathbb{R}$.*
2. *$f{\cdot}g$ es continua en a.*
3. *$\frac{f}{g}$ es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$.*

Teorema 4.1.5. *Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$, con $f(A) \subseteq B$, y g es continua en $f(a)$. Entonces $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en a.*

Definición 4.1.6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *continua en A* si f es continua en cada punto de A.

Ejemplo 4.1.7.

1. Las funciones constantes, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
2. Las funciones polinómicas, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
3. Las funciones exponenciales, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, son continuas en todo $\mathbb{R}$.
4. Las funciones logarítmicas, $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \log_a(x)$ para todo $x \in (0, \infty)$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, son continuas en $(0, \infty)$.
5. Las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$.
6. La función
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2, & \text{si } x \in [2,3] \cup \{4\} \end{cases}$$
es continua en su dominio.
7. La función $g : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0,2] \\ x^2, & \text{si } x \in (2,4] \end{cases},$$
no es continua en $x = 2$, ya que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, por ser
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2 \neq 4 = \lim_{x \to 2^+} x^2 = \lim_{x \to 2^+} f(x).$$
8. La función $f(x) = x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es continua en su dominio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
9. La función
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$
es continua en $\mathbb{R}$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$.

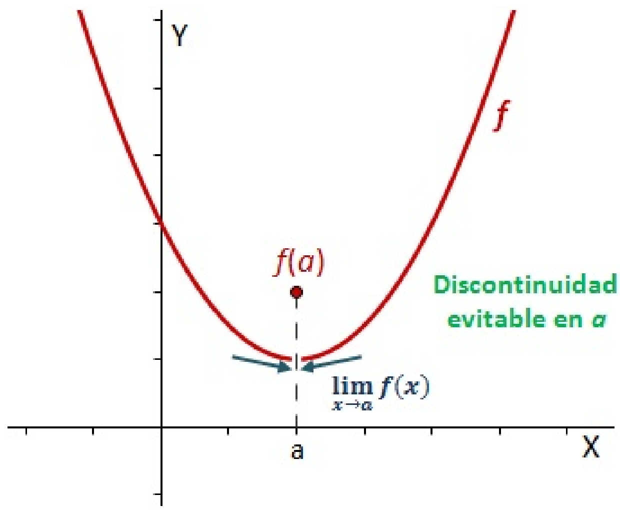
10. La función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$ es continua en $[-1, 1]$.

11. La función valor absoluto de x es continua en $\mathbb{R}$.

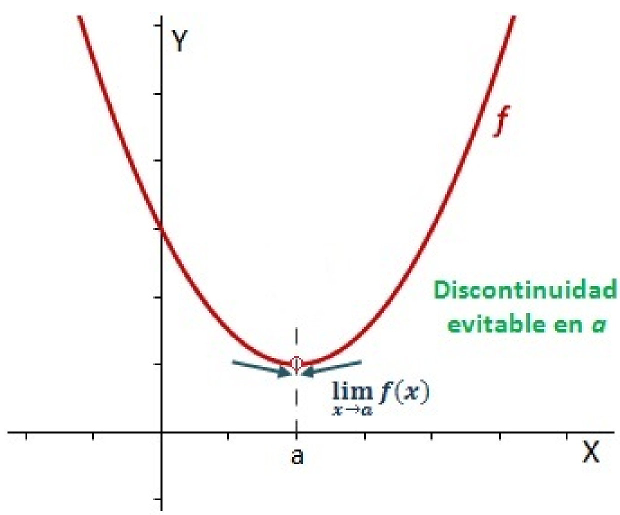
Tipos de discontinuidades:

1. **Discontinuidad evitable en un punto a.** Pueden ocurrir dos casos:

   - Que existan $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $f(a)$, pero $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.



   - Que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, pero no exista $f(a)$.



Ejemplo 4.1.8. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$, cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Veamos que f tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

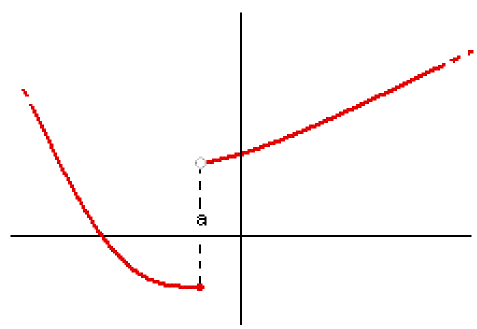
En primer lugar, es evidente que no existe $f(2)$, ya que $2 \notin \mathrm{Dom}(f)$. Además, como $\lim_{x\to 2} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right]$ entonces, factorizando,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3.$$

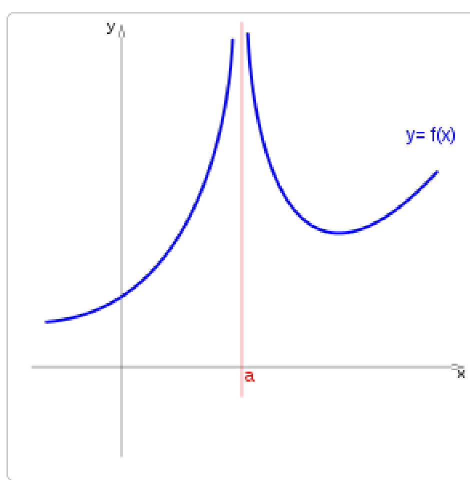
Luego f tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

2. **Discontinuidad de primera especie en un punto a.** También distinguiremos dos casos:

   - Discontinuidad de salto finito: si existen $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (son números reales), pero $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.



   - Discontinuidad de salto infinito: si alguno de los límites laterales valen infinito.



Ejemplo 4.1.9.

a) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ (parte entera de x), presenta una discontinuidad de salto finito para todo $x \in \mathbb{Z}$.

b) La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$, ya que

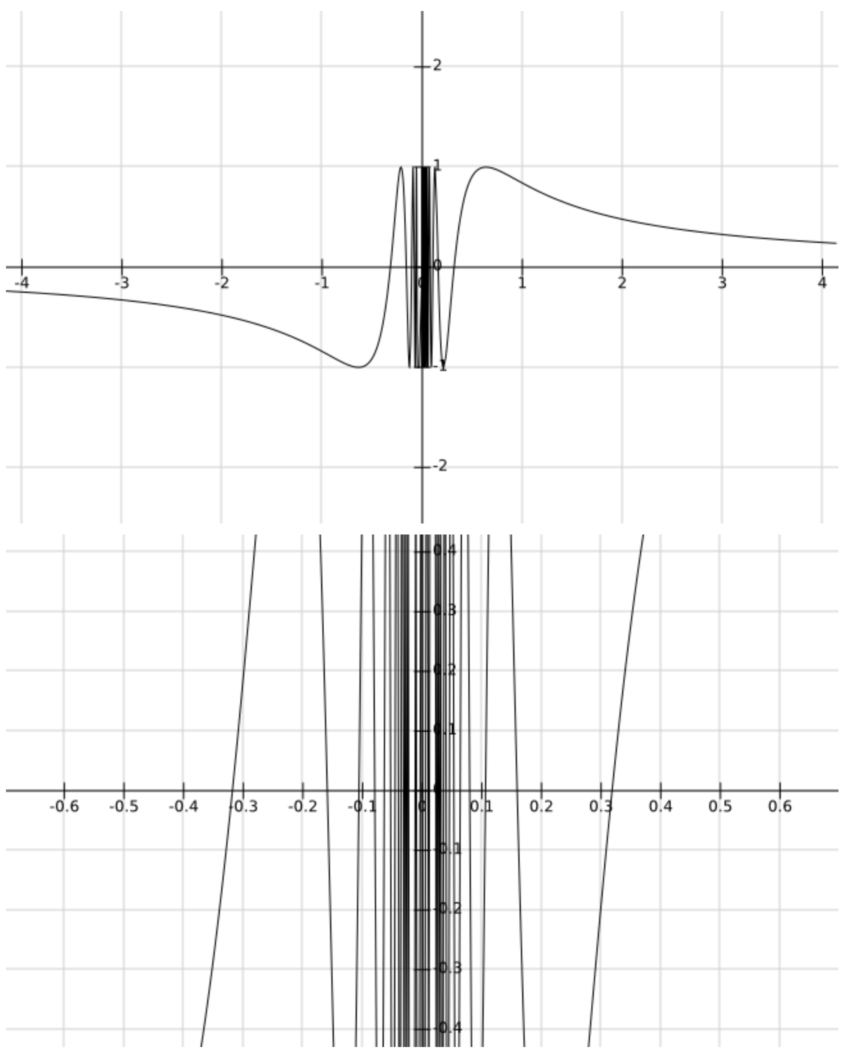
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} 2x^2 + 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

c) La función $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$, presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

3. **Discontinuidad de segunda especie en un punto a.** Si no existe alguno de los límites laterales en a, entonces la discontinuidad es de segunda especie.

Ejemplo 4.1.10. La función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, para todo $x \neq 0$, presenta una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$.



4.2. Funciones continuas en un intervalo

En esta sección, nos centraremos en las funciones continuas en un intervalo de la recta real, llegando a enunciar los teoremas de Bolzano y Weierstrass.

4.2.1. Continuidad y monotonía. Función inversa

Definición 4.2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

- Diremos que f es *monótona creciente* si, para todo $x, y \in A$, con $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$.
- Diremos que f es *monótona decreciente* si, para todo $x, y \in A$, con $x < y$, se tiene que $f(x) \geq f(y)$.
- Diremos que f es *estrictamente creciente* si, para todo $x, y \in A$, con $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.
- Diremos que f es *estrictamente decreciente* si, para todo $x, y \in A$, con $x < y$, se tiene que $f(x) > f(y)$.
- Diremos que f es *monótona* si es monótona creciente o monótona decreciente.
- Diremos que f es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Ejemplo 4.2.2. Estudiar la monotonía de $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Sean $x, y \in (0, \infty)$ tales que $x < y$, entonces $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, es decir, $f(x) > f(y)$, con lo que f es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$.

Teorema 4.2.3. (Teorema de la función inversa). *Sea I un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces se verifica:*

1. *f es inyectiva si, y solo si, f es estrictamente monótona.*
2. *Si f es estrictamente creciente (decreciente), entonces la función $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ es continua y estrictamente creciente (decreciente).*

Ejemplo 4.2.4.

1. Sabiendo que $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente para todo $x \in \mathbb{R}$, estudiar la monotonía de $g(x) = \log(x)$, para todo $x > 0$.

   Como $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ es continua y estrictamente creciente entonces, por el teorema de la función inversa, tenemos que $g = f^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = g(x) = \log(x)$ para todo $x > 0$, es continua y estrictamente creciente.

2. Evidentemente, existen funciones que no son continuas, pero que si tienen inversa. Consideremos por ejemplo la función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Claramente f no es continua en $x = 0$. Sin embargo, $f^{-1} = f$ ya que, si $x \neq 0$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

y, si $x = 0$, entonces

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(0) = 0.$$

3. Veamos ahora un ejemplo de una función continua y estrictamente monótona cuya inversa no es continua. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1) \\ x - 1, & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}.$$

No es difícil ver que f es continua y estrictamente creciente en su dominio, $[0, 1) \cup [2, 3]$, y su imagen es el intervalo $[0, 2]$.

Se comprueba fácilmente que su inversa viene dada por

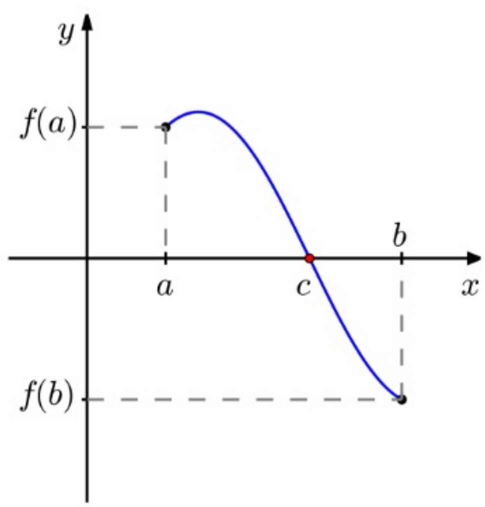
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1) \\ x + 1, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases},$$

y que f^{-1} no es continua en $x = 1$.

Este hecho no contradice el teorema de la función inversa, ya que $\mathrm{Dom}(f) = [0, 1) \cup [2, 3]$ no es un intervalo.

4.2.2. Teoremas de Bolzano y Weierstrass

Teorema 4.2.5. (Teorema de Bolzano). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definida en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, tal que $f(a)f(b) < 0$ (es decir, el signo de $f(a)$ es contrario al signo de $f(b)$). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*



Corolario 4.2.6. (Propiedades de los valores intermedios). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea z un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.*

Ejemplo 4.2.7.

1. Comprobar que la ecuación $x^2 - 2 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$.

   Consideremos la función $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in [1, 2]$.

   Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[1, 2]$ y verifica que $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 2 > 0$ entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, c es solución de la ecuación $x^2 - 2$, con $c \in (1, 2) \subseteq [1, 2]$.

2. Comprobar que $x^2 = x\text{sen}(x) + \cos(x)$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi]$.

   Consideremos la función $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x\text{sen}(x) - \cos(x)$ para todo $x \in [0, \pi]$.

   Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0, \pi]$, con $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$ entonces, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, c es solución de la ecuación $x^2 = x\text{sen}(x) + \cos(x)$, con $c \in (0, \pi) \subseteq [0, \pi]$.

3. Consideremos ahora $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \log(x) + 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

   Nótese que $f(0) = -2 < 0$ y $f(3) = \log(3) + 1 > 0$. Sin embargo, no existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$. Este hecho no contradice el teorema de Bolzano, ya que f no es continua en $[0, 3]$ por ser

   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x - 2) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} (\log(x) + 1) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Definición 4.2.8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in A$.

- Diremos que a es un *máximo absoluto de f en A* si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in A$.
- Diremos que a es un *mínimo absoluto de f en A* si $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema 4.2.9. (Teorema de Weierstrass). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Entonces se verifica:*

1. *f es acotada en $[a, b]$.*
2. *Existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$, es decir, f tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[a, b]$.*

Corolario 4.2.10. (Conservación de intervalos). *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo. Además, si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado, entonces $f(I)$ es un intervalo cerrado y acotado, $f(I) = [m, M]$, donde $m = \text{mín}\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a, b]\}$.*

Ejemplo 4.2.11.

1. Consideremos la función $f(x) = x^3$ para todo $x \in [1, 5]$. Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[1, 5]$ entonces, por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que f está acotada en el intervalo $[1, 5]$.

2. La función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ es continua en el intervalo $(3, 6]$, pero f no alcanza el máximo en dicho intervalo. Sin embargo, esto no contradice el teorema de Weierstrass, ya que el intervalo $(3, 6]$ no es cerrado.

Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

   (b) $f(x) = \log(x\text{sen}(x))$

   (c) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}}$

   (d) $f(x) = \text{arcsen}(x^2)$

   (e) $\sqrt{(x-5)\log(2-x)}$

   (f) $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

   (g) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)$

   (h) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+3x-2}{x^2+1}\right)$

   (i) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+2}\right)$

   (j) $f(x) = \sqrt{\text{sen}(x)}$

   (k) $f(x) = [x]$

   (l) $f(x) = x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, & \text{si } x < 1 \\ -1, & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x}{|x-1|}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ \cos(\pi\,|2 - x^2|) + 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)|x-3|}{x^3-4x^2+3x}e^{1-x}, & \text{si } x \neq 0, 1, 3 \\ 0, & \text{si } x = 0, 1, 3 \end{cases}$

3. Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{ax+b}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ -5b, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\text{sen}(x) + b, & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos(x), & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} e^{g(x)}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} + b, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, donde g es una función continua tal que $g(0) = a$

4. Determinar el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 - 2ax + 1}.$$

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, con $0 \in A$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in A$. Demostrar que f es una función continua en 0.

6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, con $0 \in A$, y sea $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $g(0) = 0$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in A$. Demostrar que f es continua en 0.

7. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

   a) Demostrar que $|f|$ es continua en A. ¿Es cierto el recíproco?

   b) Demostrar que si existe una constante real $C > 0$ tal que $f(x) \geq C$ para todo $x \in A$, entonces $\frac{1}{f}$ es una función continua y acotada.

8. Dar un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto I tal que:

   a) no alcance su máximo en I.

   b) no esté acotada en I.

9. Probar que la ecuación $x^{50} + \frac{133}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)} = 70$ tiene al menos una solución real.

10. Comprobar que la ecuación $x^2 = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ tiene al menos una solución en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

11. La función $f(x) = \tan(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula dentro de dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

12. Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - \cos(\pi x)$, demostrar que existe $x \in (0, 2)$ tal que $f(x) = 3$ y obtener dicho valor.

13. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen solución:

    a) $|\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(x) + 3$.

    b) $\operatorname{sen}(x) = x - 1$.

    c) $e^x + 1 = 0$.

    d) $\log(x) = \frac{1}{x}$, con $x > 0$.

14. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Demostrar que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

15. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. Probar que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución en $[a, b]$.

16. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y sea $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente.

    a) ¿Cuántas soluciones tiene, a lo sumo, la ecuación $f(x) = g(x)$?

    b) Dar un ejemplo de dos funciones f y g, bajo las anteriores condiciones, siendo $I = (0, \infty)$, de modo que la ecuación $f(x) = g(x)$ no tenga solución.

17. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, con $x \in (0, \pi)$.

    b) $f(x) = \sqrt{x}$, con $x > 0$.

    c) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$, con $x > 0$.