Capítulo 8

Integración de funciones

8.1. Integral de Riemann

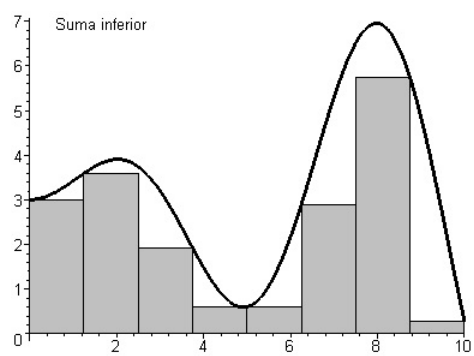
Definición 8.1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y consideremos el intervalo $[a, b]$. Se define una *partición del intervalo* $[a, b]$ como un conjunto finito P de puntos de $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$ lo denotamos por $\mathcal{P}([a, b])$.

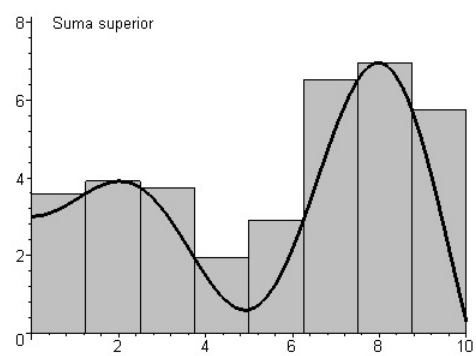
Ejemplo 8.1.2. Consideremos el intervalo $[0, 1]$. En este caso, se tiene que $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ es una partición del intervalo $[0, 1]$.

Definición 8.1.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Definimos:

- La *suma inferior de Riemann de f asociada a P*, y lo denotamos por $\underline{\mathcal{S}}(f, P)$, como el número $\underline{\mathcal{S}}(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, donde $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

- La *suma superior de Riemann de f asociada a P*, y lo denotamos por $\overline{\mathcal{S}}(f, P)$, como el número $\overline{\mathcal{S}}(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.





Observación 8.1.4. En estas condiciones, se verifica siempre que $\underline{\mathcal{S}}(f, P) \leq \overline{\mathcal{S}}(f, P)$.

Definición 8.1.5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y consideremos el intervalo $[a, b]$. Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a, b]$. Se dice que Q es un *refinamiento de P* si $P \subseteq Q$.

Observación 8.1.6. Si Q es un refinamiento de P, entonces $\underline{\mathcal{S}}(f, P) \leq \underline{\mathcal{S}}(f, Q) \leq \overline{\mathcal{S}}(f, Q) \leq \overline{\mathcal{S}}(f, P)$.

Definición 8.1.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- La *integral inferior de Riemann de f en* $[a, b]$, y lo denotamos por

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \left\{ \underline{\mathcal{S}}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \right\}.$$

- La *integral superior de Riemann de f en* $[a, b]$, y lo denotamos por

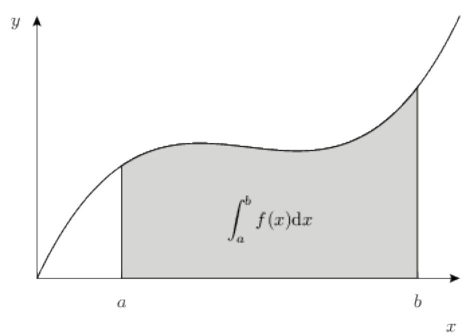
$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf} \left\{ \overline{\mathcal{S}}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \right\}.$$

Definición 8.1.8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es *integrable-Riemann en* $[a, b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso, al número $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ se le denomina *integral de f en* $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\, dx$.

Observación 8.1.9.

1. Claramente $\int_a^a f = 0$ y $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f$ es el área de la región del plano limitado por el eje X, la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Ejemplo 8.1.10.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, donde $c \in \mathbb{R}$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Entonces

$$\underline{\mathcal{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a).$$

$$\overline{\mathcal{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a),$$

ya que $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c$ y $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c$.

Luego $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ y, por tanto, f es integrable en $[a, b]$. Además,

$$\int_a^b f(x)\, dx = c(b - a).$$

2. Consideremos ahora $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[0,1]$. En este caso

$$\underline{\mathcal{S}}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

ya que $m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$. Sin embargo,

$$\overline{\mathcal{S}}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1,$$

ya que $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$.

Luego f no es integrable en $[0,1]$.

8.2. Propiedades de la integral

Teorema 8.2.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces se verifica:*

1. *Si f es monótona, entonces f es integrable en $[a,b]$.*
2. *Si f es continua, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Ejemplo 8.2.2. Consideremos la función $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ para todo $x \in [-2,2]$. Como f es continua en $[-2,2]$, entonces f es integrable en $[-2,2]$.

Proposición 8.2.3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a,b]$. Entonces se verifica:*

1. *$|f|$ es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

2. *$f+g$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.*
3. *αf es integrable en $[a,b]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$.*
4. *$f \cdot g$ es integrable en $[a,b]$.*
5. *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. En particular, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.*
6. **Propiedad de aditividad:** *Para todo $c \in [a,b]$ se verifica que f es integrable en $[a,b]$ si, y solo si f es integrable en $[a,c]$ y f es integrable en $[c,b]$. Además,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Ejemplo 8.2.4.

1. Sea $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x-3|$ para todo $x \in [0,5]$. Por definición de valor absoluto, se tiene que
$$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 2x-3, & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \leq 5 \end{cases}.$$
Por 6, tenemos que
$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2x)\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^5 (2x-3)\,dx.$$
Ahora bien, aplicando 2 y 3,
$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3-2x)\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^5 (2x-3)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} 3\,dx - 2\int_0^{\frac{3}{2}} x\,dx + 2\int_{\frac{3}{2}}^5 x\,dx - \int_{\frac{3}{2}}^5 3\,dx =$$
$$3 \cdot \frac{3}{2} - 2\int_0^{\frac{3}{2}} x\,dx + 2\int_{\frac{3}{2}}^5 x\,dx - 3\left(5 - \frac{3}{2}\right) =$$
$$2\left(\int_{\frac{3}{2}}^5 x\,dx - \int_0^{\frac{3}{2}} x\,dx\right) - 6.$$

2. Consideremos ahora $f : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [1,4]$. Como f es monónota creciente con $1 \leq f(x) \leq 2$ para todo $x \in [1,4]$ entonces, por 5,
$$3 = \int_1^4 dx \leq \int_1^4 \sqrt{x}\,dx \leq \int_1^4 2\,dx = 6.$$

Proposición 8.2.5. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f([a,b]) \subseteq [c,d]$, y sea $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $g \circ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$.*

Ejemplo 8.2.6. Consideremos $f : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(\sqrt{x})$ para todo $x \in [1,4]$.

Nótese que $f = h \circ g$, donde $g : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [1,4]$, y $h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $h(x) = \log(x)$ para todo $x \in [1,2]$.

Claramente h es continua en $[1,2]$. Por otra parte, como g es continua en $[1,4]$, entonces g integrable en $[1,4]$. Además, $\mathrm{Im}(g) = [1,2] = \mathrm{Dom}(h)$. Luego, por el teorema anterior, f es integrable en $[1,4]$.

8.3. Teoremas fundamentales

Teorema 8.3.1. (Teorema del Valor Medio Integral). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$, con $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Corolario 8.3.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Definición 8.3.3. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sean $f, F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Diremos que F es *una primitiva de* f si F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Observación 8.3.4. Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$, es también una primitiva de f. Es decir, si f tiene una primitiva, entonces tiene infinitas.

Teorema 8.3.5. (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Consideremos la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Sea $c \in [a, b]$ tal que f es continua en c. Entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Observación 8.3.6.

1. Nótese que, si $c = a$ o $c = b$, la noción de derivabilidad de F en c se entiende como un límite lateral.

2. Tenemos entonces que, si f es integrable, entonces f tiene primitiva.

Ejemplo 8.3.7. Consideremos la función $F(x) = \int_0^x e^{-t\log(t^2+1)}\,dt$ para todo $x \in [0, 2]$. Veamos que F es continua en $[0, 2]$.

Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x\log(x^2+1)}$ para todo $x \in [0, 2]$.

Como f es continua en $[0, 2]$, entonces f es integrable en $[0, 2]$. Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que la función $F : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_0^x e^{-t\log(t^2+1)}\,dt$ para todo $x \in [0, 2]$, es derivable en $[0, 2]$, con $F'(x) = f(x) = e^{-x\log(x^2+1)}$ para todo $x \in [0, 2]$.

Por último, como F es derivable en $[0, 2]$, entonces F es continua en $[0, 2]$.

Corolario 8.3.8. (Regla de Barrow). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 8.3.9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ para todo $x \in [a, b]$, con $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, es decir, f es un polinomio de grado n.

Como f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Además, es fácil ver que la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ para todo $x \in [a, b]$ es una primitiva de f.

Luego, por la Regla de Barrow,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = a_0(b-a) + \frac{a_1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{a_2}{3}(b^3 - a^3) + ... + \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Corolario 8.3.10. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sean g y h dos funciones derivables en x_0 tales que $g(x_0), h(x_0) \in [a, b]$. Entonces la función*

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$$

es derivable en x_0 y su derivada es

$$F'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0) - f(h(x_0))h'(x_0).$$

Ejemplo 8.3.11. Sea

$$F(x) = \int_{-x^2}^{\log(x^2+1)} t^2 \cos(3t-1)\, dt.$$

Como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2\cos(3x - 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$ y las funciones $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = \log(x^2 + 1)$ y $h(x) = -x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, son derivables en $\mathbb{R}$ entonces, por el corolario anterior, F es derivable y

$$F'(x) = \left(\log(x^2+1)\right)^2 \cos\left(3\log(x^2+1) - 1\right) \frac{2x}{x^2+1} - x^4\cos(-3x^2 - 1)(-2x) =$$

$$\left(\log(x^2+1)\right)^2 \cos\left(3\log(x^2+1) - 1\right) \frac{2x}{x^2+1} + 2x^5\cos(3x^2+1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

8.4. Cálculo de primitivas

8.4.1. Primitivas inmediatas

Son las que se obtienen directamente a partir de las derivadas de las funciones elementales. A continuación damos una lista de este tipo de primitivas, sin preocuparnos demasiado de especificar el intervalo (sólo lo haremos en algunos casos).

- $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \log(x)$ en $(0, \infty)$. En este caso también podemos decir que $\int \frac{1}{x}\, dx = \log(-x)$ en $(-\infty, 0)$. Por ello, normalmente se escribe $\int \frac{1}{x}\, dx = \log(|x|)$, entendiendo que $\log(|x|)$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ en $(0, \infty)$ y en $(-\infty, 0)$.

- $\int e^x\,dx = e^x$.
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log(a)}$, para todo $a > 0$, con $a \neq 1$.
- $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$.
- $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$.
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2(x))\,dx = \operatorname{tg}(x)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x)$.
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x)$ en $(-1,1)$.
- $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)$ en $(-1,1)$.

Observación 8.4.1. Evidentemente, por la *observación 8.3.4*, todas las primitivas dadas anteriormente no son únicas. Si a cualquiera de esas primitivas le sumamos una constante $c \in \mathbb{R}$, el resultado será también una primitiva de la función dada.

Observación 8.4.2. Aunque tengamos que $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x)$ en $(-1,1)$, y que $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)$ en $(-1,1)$, esto no implica que $\operatorname{arcsen}(x) = -\arccos(x)$ para todo $x \in (-1,1)$. Sin embargo, sí es cierto que $\operatorname{arcsen}(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$ para todo $x \in (-1,1)$.

Ejemplo 8.4.3.

1. Calcular $\int \left(7x^2 + 5\operatorname{sen}(x) + \sqrt[5]{x^3}\right)\,dx$.

$$\int \left(7x^2 + 5\operatorname{sen}(x) + \sqrt[5]{x^3}\right)\,dx = 7\int x^2\,dx + 5\int \operatorname{sen}(x)\,dx + \int x^{\frac{3}{5}}\,dx =$$

$$7\frac{x^3}{3} - 5\cos(x) + \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{7x^3}{3} - 5\cos(x) + \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8}.$$

2. Hallar $\int \frac{2x^2-3}{1+x^2}\,dx$.

$$\int \frac{2x^2-3}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2(x^2+1)-5}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2}\,dx - \int \frac{5}{1+x^2}\,dx =$$

$$\int 2\,dx - 5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2x - 5\operatorname{arctg}(x).$$

8.4.2. Integración por partes

Teorema 8.4.4. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sean $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables con derivada continua en I. Entonces*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Ejemplo 8.4.5.

1. Calcular $\int xe^x\,dx$.

   Sean $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $u(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $v(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Claramente, u y v son derivables en $\mathbb{R}$ y sus derivadas son continuas en $\mathbb{R}$, ya que $u'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $v'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, por el teorema anterior

   $$\int xe^x\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1).$$

   En la práctica, no será necesario verificar las hipótesis del teorema con rigor, procediendo de la siguiente manera:

   $$\int xe^x\,dx \overset{(*)}{=} xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1),$$

   $$(*)\left\{\begin{array}{ccc} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array}\right\}.$$

2. Calcular $\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$.

   $$\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx \overset{(*)}{=} e^x\operatorname{sen}(x) - \int e^x\cos(x)\,dx \overset{(**)}{=} e^x\operatorname{sen}(x) - \left(e^x\cos(x) + \int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx\right) =$$

   $$e^x\operatorname{sen}(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx = e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) - \int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx,$$

   $$(*)\left\{\begin{array}{ccc} u(x) = \operatorname{sen}(x) & \Rightarrow & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array}\right\}, \qquad (**)\left\{\begin{array}{ccc} u(x) = \cos(x) & \Rightarrow & u'(x) = -\operatorname{sen}(x) \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array}\right\}.$$

   Como hemos vuelto a obtener la integral inicial, $\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx$, despejamos esta integral como si de una ecuación se tratase, es decir,

   $$\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx = e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) - \int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow 2\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx = e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)),$$

   con lo que

   $$\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))}{2}.$$

3. Hallar $\int \log(x)\,dx$.

   En este caso, parece que no tenemos un producto del tipo $u(x)v'(x)$, ya que bajo el signo integral solo aparece una función. Sin embargo, tomando

   $$(*)\left\{\begin{array}{ccc} u(x) = \log(x) & \Rightarrow & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow & v(x) = x \end{array}\right\}$$

   tenemos que

   $$\int \log(x)\,dx \overset{(*)}{=} x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log(x) - \int 1\,dx = x\log(x) - x = x(\log(x) - 1).$$

Corolario 8.4.6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables con derivada continua en $[a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Ejemplo 8.4.7. Halla $\int_{-1}^1 xe^x\,dx$.

$$\int_{-1}^1 xe^x\,dx \overset{(*)}{=} (xe^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x\,dx = 1{\cdot}e^1 - (-1){\cdot}e^{-1} - (e^x]_{-1}^1 =$$

$$e + \frac{1}{e} - \left(e^1 - e^{-1}\right) = e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} = \frac{2}{e},$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array} \right\}.$$

Evidentemente, no es necesario hallar $\int_{-1}^1 xe^x\,dx$ de esta manera. También podemos hacerlo aplicando la regla de Barrows.

Por el punto 1 del ejemplo anterior, sabemos que

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1).$$

Luego, aplicando la regla de Barrows,

$$\int_{-1}^1 xe^x\,dx = (e^x(x-1)]_{-1}^1 = e^1(1-1) - e^{-1}(-1-1) = \frac{2}{e}.$$

8.4.3. Integración por cambio de variable

El siguiente teorema ayuda a resolver integrales de la forma

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx.$$

Teorema 8.4.8. *Sean I y J dos intervalos de $\mathbb{R}$ y sean $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que u es derivable, con derivada continua en I, y tal que $u(I) \subseteq J$, y f es continua en J. Si $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en J, entonces $F \circ u$ es una primitiva de $(f \circ u){\cdot}u'$ en I.*

La forma de proceder en este tipo de integrales es la siguiente:

1. El problema es $\int f(u(x))u'(x)\,dx$.
2. Sustituimos $u(x)$ por t y $u'(x)\,dx$ por dt.
3. Tras la sustitución, el problema se ha transformado en $\int f(t)\,dt$.
4. Se resuelve $\int f(t)\,dt$.

5. Si $F(t)$ es solución de la integral $\int f(t)\,dt$, el teorema anterior afirma que, deshaciendo el cambio, $F(u(x))$ es solución de la integral inicial, $\int f(u(x))u'(x)\,dx$.

En la práctica lo escribiremos

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int f(t)\,dt = F(t) = F(u(x)),$$

$$(*)\left\{\ t = u(x) \quad \Rightarrow \quad dt = u'(x)\,dx\ \right\}.$$

Observación 8.4.9. La expresión $u'(x)\,dx = dt$ no es una igualdad, tan solo es una notación que significa que cambiamos $u'(x)\,dx$ por dt.

Ejemplo 8.4.10.

1. Calcular $\int e^x \mathrm{sen}\,(e^x)\;dx$.

$$\int e^x \mathrm{sen}\,(e^x)\;dx \overset{(*)}{=} \int \mathrm{sen}(t)\,dt = -\cos(t) = -\cos\left(e^x\right),$$

$$(*)\left\{\ t = e^x \quad \Rightarrow \quad dt = e^x\,dx\ \right\}.$$

2. Hallar $\int xe^{-x^2}\,dx$.

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)e^{-x^2}\,dx \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-x^2},$$

$$(*)\left\{\ t = -x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -2x\,dx\ \right\}.$$

3. Calcula $\int \mathrm{tg}(x)\,dx$.

$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx \overset{(*)}{=} -\int \frac{1}{t}\,dt = -\log\left(|t|\right) = -\log\left(|\cos(x)|\right),$$

$$(*)\left\{\ t = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad dt = -\mathrm{sen}(x)\,dx\ \right\}.$$

Corolario 8.4.11. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y sean $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que u es derivable, con derivada continua en $[a, b]$, con $u([a, b]) \subseteq [c, d]$, y f es continua en $[c, d]$. Entonces*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt.$$

Ejemplo 8.4.12. Calcula $\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$.

Por el corolario anterior,

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 (-2x)e^{-x^2}\,dx \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\int_0^{-4} e^t\,dt = -\frac{1}{2}\left(e^t\right]_0^{-4} = -\frac{1}{2}\left(e^{-4} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^4} - 1\right),$$

$$(*)\left\{\ t = -x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -2x\,dx\ \right\}.$$

Como antes, no es necesario usar este corolario para calcular $\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$, también podemos hallar una primitiva de xe^{-x^2} y aplicar la regla de Barrows. Por el punto 2 del ejemplo anterior, sabemos que

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2},$$

con lo que

$$\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}e^{-4} - \left(-\frac{1}{2}e^{0}\right) = -\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^4} - 1\right).$$

Veamos ahora que ocurre para integrales de la forma

$$\int f(u(x))\,dx,$$

donde se observa que falta el factor $u'(x)$. Para calcular este tipo de primitivas, actuaremos de la siguiente manera:

1. El problema es $\int f(u(x))\,dx$.
2. Sustituimos $u(x)$ por t y despejamos x, es decir, $x = u^{-1}(t)$ (siempre que tenga sentido). Así, podremos sustituir dx por $(u^{-1})'(t)\,dt$.
3. Tras la sustitución, el problema se transforma en $\int f(t)(u^{-1})'(t)\,dt$.
4. Se resuelve $\int f(t)(u^{-1})'(t)\,dt$.
5. Si $F(t)$ es solución de $\int f(t)(u^{-1})'(t)\,dt$, entonces $F(u(x))$ es solución de $\int f(u(x))\,dx$.

En la práctica, lo escribiremos como

$$\int f(u(x))\,dx \overset{(*)}{=} \int f(t)(u^{-1})'(t)\,dt = F(t) = F(u(x)),$$

$$(*)\left\{\ t = u(x) \quad \Rightarrow x = u^{-1}(t) \Rightarrow \quad dx = (u^{-1})'(t)\,dt\ \right\}.$$

Observación 8.4.13. La expresión $dx = (u^{-1})'(t)\,dt$ no es una igualdad, tan solo es una notación que significa que cambiamos dx por $(u^{-1})'(t)\,dt$.

Ejemplo 8.4.14.

1. Halla $\int \mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)\,dx$.

$$\int \mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)\,dx \overset{(*)}{=} \int \mathrm{sen}(t)2t\,dt = 2\int t\mathrm{sen}(t)\,dt \overset{(**)}{=} 2\left(-t\cos(t) + \int \cos(t)\,dt\right) =$$

$$-2t\cos(t) + 2\mathrm{sen}(t) = -2\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) + 2\mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right),$$

$$(*)\left\{\ t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt\ \right\},$$

$$(**)\left\{\begin{array}{ccc} u(x) = t & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{sen}(t) & \Rightarrow & v(x) = -\cos(t) \end{array}\right\}.$$

2. Calcula $\int x\sqrt{x-7}\,dx$.

$$\int x\sqrt{x-7}\,dx \overset{(*)}{=} \int (t+7)\sqrt{t}\,dt = \int t\sqrt{t}\,dt + 7\int \sqrt{t}\,dt = \int t{\cdot}t^{\frac{1}{2}}\,dt + 7\int t^{\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$\int t^{\frac{3}{2}}\,dt + 7\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 7\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{t^5}}{5} + \frac{14\sqrt{t^3}}{3} = \frac{2\sqrt{(x-7)^5}}{5} + \frac{14\sqrt{(x-7)^3}}{3},$$

$$(*)\left\{\ t = x-7 \ \Rightarrow x = t+7 \Rightarrow \ dx = dt\ \right\}.$$

8.4.4. Primitivas de funciones trigonométricas

En esta sección estudiaremos algunas técnicas que pueden ser útiles para calcular primitivas de funciones definidas a partir de funciones trigonométricas.

1. Una primera opción es probar si algunos de los cambios $t = \operatorname{sen}(x)$, o bien $t = \cos(x)$, nos soluciona el problema.

Ejemplo 8.4.15.

1. Halla $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)\,dx$.

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)\,dx = \int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)\,dx = -\int -\operatorname{sen}(x)(1-\cos^2(x))\cos^4(x)\,dx \overset{(*)}{=}$$

$$-\int (1-t^2)t^4\,dt = -\int \left(t^4 - t^6\right)\,dt = -\left(\int t^4\,dt - \int t^6\,dt\right) = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} = -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^7(x)}{7},$$

$$(*)\left\{\ t = \cos(x) \ \Rightarrow \ dt = -\operatorname{sen}(x)\,dx\ \right\}.$$

2. Calcular $\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\,dx$.

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\,dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\cos(x)\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\cos(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt =$$

$$\int \frac{1}{t^4}\,dt - \int \frac{t^2}{t^4}\,dt = \int t^{-4}\,dt - \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{3t^3} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3(x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(x)},$$

$$(*)\left\{\ t = \operatorname{sen}(x) \ \Rightarrow \ dt = \cos(x)\,dx\ \right\}.$$

2. Si las sustituciones anteriores no solucionan el problema (por ejemplo, cuando las funciones seno y coseno aparecen ambas con exponente par), se puede probar con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x)$.

Ejemplo 8.4.16.

1. Calcula $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\cdot\frac{1}{\cos^4(x)}\,dx.$$

Ahora bien, como $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1+\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}^2(x)}$ y $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$, entonces

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\cdot\frac{1}{\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}^2(x)}\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)^2\,dx =$$

$$\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)^2}{\operatorname{tg}^2(x)}\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}\,dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^2}\,dt =$$

$$\int \frac{t^4}{t^2}\,dt + \int \frac{2t^2}{t^2}\,dt + \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^2\,dt + \int 2\,dt + \int t^{-2}\,dt = \frac{t^3}{3} + 2t + \frac{t^{-1}}{-1} =$$

$$\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} = \frac{\operatorname{tg}^3(x)}{3} + 2\operatorname{tg}(x) - \frac{1}{\operatorname{tg}(x)},$$

$$(*)\left\{\ t = \operatorname{tg}(x) \quad\Rightarrow\quad dt = (1+\operatorname{tg}^2(x))\,dx\ \right\}.$$

2. Calcular $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}^2(x)}\,dx \overset{(*)}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}.$$

$$(*)\left\{\ t = \operatorname{tg}(x) \quad\Rightarrow\quad dt = (1+\operatorname{tg}^2(x))\,dx\ \right\}.$$

3. Si ninguno de los cambios anteriores funcionan, se puede probar con $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. En ese caso, tenemos lo siguiente:

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg}(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Con este cambio, y aplicando identidades trigonométricas, tenemos que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ y } \operatorname{tg}(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Ejemplo 8.4.17. Vamos a calcular

$$\int \frac{1}{7+3\operatorname{sen}(x)+7\cos(x)}\,dx \overset{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{7+3\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$\int \frac{2}{7(1+t^2)+6t+7(1-t^2)}\,dt = \int \frac{2}{6t+14}\,dt = \int \frac{1}{3t+7}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3t+7}\,dt \overset{(*)}{=}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{3}\log\left(|y|\right) = \frac{1}{3}\log\left(|3t+7|\right) = \frac{1}{3}\log\left(\left|3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+7\right|\right),$$

$$(*)\left\{\ y = 3t+7 \quad\Rightarrow\quad dy = 3\,dt\ \right\}.$$

8.4.5. Primitivas de funciones racionales

Se trata de calcular la primitiva de una función racional,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

donde P y Q son dos polinomios reales de manera que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ no puede simplificarse.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, realizamos la división de polinomios para hallar el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$, obteniendo así que $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

El problema reside entonces en el cálculo de

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx,$$

cuyo numerador tiene grado menor que el denominador. Para resolverlo, es necesario realizar lo que se conoce como la descomposición en fracciones simples.

Ejemplo 8.4.18. Calcular $\int \frac{x^2-x}{x+3}\,dx$.

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, podemos entonces realizar la división de polinomios, obteniendo como cociente $C(x) = x - 4$ y, como resto, el polinomio $R(x) = 12$. Luego

$$\int \frac{x^2-x}{x+3}\,dx = \int (x-4)\,dx + \int \frac{12}{x+3}\,dx = \int x\,dx - \int 4\,dx + 12\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 12\log|x+3|.$$

Definición 8.4.19. Sean $A, M, N, a, b, c \in \mathbb{R}$ y sean $n, k \in \mathbb{N}$. Llamaremos *fracción simple* a toda expresión de la forma $\frac{A}{(x-a)^n}$, o bien $\frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^k}$, donde x^2+bx+c es irreducible en $\mathbb{R}$.

Teorema 8.4.20. *Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios reales tales que $gr(P(x)) < gr(Q(x))$. Entonces la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer como suma de fracciones simples cuyos denominadores son los factores irreducibles del polinomio $Q(x)$.*

Así, para descomponer una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples, primero habrá que descomponer el denominador $Q(x)$ en factores irreducibles y después hallar los coeficientes que aparecen en los numeradores de las fracciones simples.

Los coeficientes que aparecen en el numerador de las fracciones simples se hallan normalmente por el denominado método de los coeficientes indeterminados, que estudiaremos en los ejemplos.

Haremos este estudio en cuatro casos, dependiendo del tipo de raíces del denominador.

1. Solo raíces reales simples:

Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ las raíces reales simples de $Q(x)$. En este caso, la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n},$$

donde $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = A_1 \int \frac{1}{x-a_1}\,dx + A_2 \int \frac{1}{x-a_2}\,dx + ... + A_n \int \frac{1}{x-a_n}\,dx =$$

$$A_1 \log\left(|x-a_1|\right) + A_2 \log\left(|x-a_2|\right) + ... + A_n \log\left(|x-a_n|\right),$$

donde los coeficientes $A_1, A_2, ..., A_n$ se determinan, de manera única, identificando polinomios como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.4.21. Calcular la siguiente integral

$$\int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx.$$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, descomponemos en fracciones simples. Para ello, comenzamos descomponiendo el denominador, $Q(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Igualando numeradores obtenemos que $x = A(x-2) + B(x+1)$. Para hallar los valores de A y B utilizaremos cualquiera de los siguientes métodos:

1. Operando $x = A(x-2) + B(x+1)$ obtenemos

   $$x = Ax - 2A + Bx + B = (A+B)x + (B-2A).$$

   Identificando entonces los coeficientes de los polinomios de primer grado, x con $(A+B)x + (B-2A)$, obtenemos el sistema

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} A+B & = & 1 \\ B-2A & = & 0 \end{array} \right.,$$

   con lo que obtenemos que $A = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{2}{3}$.

2. Como la igualdad de polinomios $x = A(x-2) + B(x+1)$ es válida para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos asignar a x dos valores distintos. Como $x = -1$ y $x = 2$ anulan uno de los sumandos de la igualdad anterior, al sustituir obtenemos lo siguiente:

   - Para $x = -1$, obtenemos que $-1 = -3A$, con lo que $A = \frac{1}{3}$.
   - Para $x = 2$, obtenemos $2 = 3B$, con lo que $B = \frac{2}{3}$.

Una vez ya hemos determinado los coeficientes de los numeradores, tenemos entonces que

$$\int \frac{x}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{x-2}\,dx =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{1}{3}\log\left(|x+1|\right) + \frac{2}{3}\log\left(|x-2|\right).$$

2. Con raíces reales múltiples:

Sea $a \in \mathbb{R}$ una raíz múltiple de orden $n \in \mathbb{N}$. En ese caso, tenemos que $Q(x) = (x-a)^n$, con lo que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

y, de este modo, integrando la primera fracción simple obtendremos un logaritmo y de las demás obtendremos potencias de $x-a$:

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k}\,dx = A_k \int (x-a)^{-k}\,dx = A_k \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1},$$

para todo $k = 2, 3, ..., n$.

Ejemplo 8.4.22. Calcular $\int \frac{x^2+3}{x^3+3x^2-4}\,dx$.

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, descomponemos en fracciones simples. Para ello, comenzamos descomponiendo el denominador, $Q(x) = x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2$. Por lo tanto

$$\frac{x^2+3}{x^3+3x^2-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2},$$

con lo que $x^2+3 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$. Asignemos distintos valores a x para determinar los coeficientes A, B y C:

- Para $x = 1$ obtenemos que $4 = 9A$, con lo que $A = \frac{4}{9}$.
- Si $x = -2$, entonces $7 = -3C$ y, por tanto, $C = -\frac{7}{3}$.
- Para $x = 0$, tenemos $3 = 4A - 2B - C = \frac{16}{9} - 2B + \frac{7}{3}$, con lo que

  $$2B = \frac{16}{9} + \frac{7}{3} - 3 = \frac{16}{9} + \frac{21}{9} - \frac{27}{9} = \frac{10}{9}$$

  y, por tanto, $B = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

Luego

$$\int \frac{x^2+3}{x^3+3x^2-4}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{7}{3}\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$\frac{4}{9}\log\left(|x-1|\right) + \frac{5}{9}\log\left(|x+2|\right) - \frac{7}{3}\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1} = \frac{4}{9}\log\left(|x-1|\right) + \frac{5}{9}\log\left(|x+2|\right) + \frac{7}{3(x+2)}.$$

3. Con raíces complejas simples:

Como $Q(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, si tiene una raíz compleja $a+ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces su conjugado, $a - ib$, es también raíz de $Q(x)$. A esta pareja de raíces le asignamos una fracción del tipo

$$\frac{Mx+N}{(x-(a+ib))(x-(a-ib))} = \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2},$$

con lo que, de este modo, no aparecerán en ningún momento números complejos a la hora de integrar. Cada una de estas integrales se transformarán en dos: una de tipo logaritmo y otra de tipo arcotangente:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{Mx-Ma+Ma+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{Mx-Ma}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int \frac{Ma+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx =$$

$$M\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\,dx + (Ma+N)\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx =$$

$$\frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \frac{Ma+N}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}\,dx =$$

$$\frac{M}{2}\log\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{Ma+N}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Clarifiquemos este desarrollo teórico mediante un ejemplo.

Ejemplo 8.4.23. Hallar $\int \frac{2x+1}{x^3-1}\,dx$.

Las raíces de denominador son 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, es decir, una raíz real simple y una pareja de raíces complejas conjugadas. Luego la descomposición en fracciones simples queda de la forma

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

donde x^2+x+1 es irreducible en $\mathbb{R}$.

Operando obtenemos lo siguiente:

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

con lo que

$$2x+1 = A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1).$$

Desarrollando $A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)$ y agrupando obtenemos

$$2x+1 = (A+M)x^2+(A-M+N)x+(A-N).$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se tiene que $A=1$, $M=-1$ y $N=0$. Por lo tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \log\left(|x-1|\right) - \int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx.$$

Vamos a calcular entonces $\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$.

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\left|x^2+x+1\right|\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx.$$

Por último,

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^3-1}\,dx = \log\left(|x-1|\right) - \frac{1}{2}\log\left(\left|x^2+x+1\right|\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

4. Con raíces complejas múltiples:

Si las raíces $a \pm ib$ son múltiples, con multiplicidad $n \in \mathbb{N}$, entonces descomponemos de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{M_2x+N_2}{\left((x-a)^2+b^2\right)^2} + \ldots + \frac{M_nx+N_n}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}.$$

Para hallar una primitiva del tipo

$$\frac{Mx+N}{((x-a)^2+b^2)^k},$$

con $k \in \mathbb{N}$, existen varios métodos. Nosotros estudiaremos el método de Hermite (o de Hermite-Ostrogradski).

El método de Hermite también puede aplicarse en el caso en el que el denominador tiene raíces reales múltiples.

Proposición 8.4.24. (Método de Hermite). *Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales tales que* $\mathrm{gr}(P(x)) < \mathrm{gr}(Q(x))$. *Supongamos que*

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x-(p_1 \pm iq_1))^{\beta_1}\cdots(x-(p_k \pm iq_k))^{\beta_k}.$$

Entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{f(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{g(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

donde $Q_2(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)\cdots\left((x-p_k)^2+q_k^2\right)$ *(es decir, $Q_2(x)$ contiene los factores de las raices reales y pares complejas conjugadas elevados a 1), $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$ (es decir, $Q_1(x)$ contiene los restantes factores de $Q(x)$) y $f(x)$, $g(x)$ son polinomios indeterminados de grado uno menos que sus denominadores, cuyos coeficientes se hallan derivando la expresión.*

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 8.4.25. Calcular

$$\int \frac{x^2-2}{x^7+2x^5+x^3}\,dx.$$

Por una parte, factorizando el denominador,

$$x^7+2x^5+x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^4+2x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2+1)^2 = 0,$$

con lo que $x = 0$, con multiplicidad 3, y $x = \pm i$, con multiplicidad 2.

Luego $Q_2(x) = x((x+0)^2+1^2) = x(x^2+1)$ y, por tanto,

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^3(x^2+1)^2}{x(x^2+1)} = x^2(x^2+1),$$

con lo que $f(x)$ es un polinomio de grado 3 (por ser $\mathrm{gr}(Q_1(x)) = 4$), $f(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$, y $g(x)$ es un polinomio de grado 2 (ya que $\mathrm{gr}(Q_2(x)) = 3$), $g(x) = Ex^2+Fx+G$.

Así, descomponiendo por Hermite,

$$\int \frac{x^2-2}{x^7+2x^5+x^3}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Derivando la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{x^2-2}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{x^2(x^2+1)(3Ax^2+2Bx+C)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^3+2x)}{x^4(x^2+1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x(x^2+1)} =$$

$$\frac{(x^3+x)(3Ax^2+2Bx+C)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^2+2)}{x^3(x^2+1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x(x^2+1)},$$

reduciendo a común denominador e igualando los numeradores obtenemos

$$x^2-2 = (x^3+x)(3Ax^2+2Bx+C)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^2+2)+(Ex^2+Fx+G)x^2(x^2+1) =$$

$$3Ax^5+2Bx^4+Cx^3+3Ax^3+2Bx^2+Cx-4Ax^5-4Bx^4-4Cx^3-4Dx^2-$$

$$-2Ax^3 - 2Bx^2 - 2Cx - 2D + Ex^6 + Fx^5 + Gx^4 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 =$$
$$Ex^6 + (F - A)x^5 + (G + E - 2B)x^4 + (A - 3C + F)x^3 + (G - 4D)x^2 + (-C)x + (-2D),$$

con lo que obtenemos el sistema

$$\begin{cases} E & = & 0 \\ F - A & = & 0 \\ G + E - 2B & = & 0 \\ A - 3C + F & = & 0 \\ G - 4D & = & 1 \\ -C & = & 0 \\ -2D & = & -2 \end{cases}$$

y, por tanto, tenemos que

$$\begin{cases} A & = & 0 \\ B & = & \frac{5}{2} \\ C & = & 0 \\ D & = & 1 \\ E & = & 0 \\ F & = & 0 \\ G & = & 5 \end{cases}.$$

Luego

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^7 + 2x^5 + x^3}\, dx = \frac{\frac{5}{2}x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} + \int \frac{5}{x(x^2 + 1)}\, dx =$$
$$\frac{5x^2 + 2}{2x^2(x^2 + 1)} + 5\int \frac{1}{x(x^2 + 1)}\, dx.$$

Por último,

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A'}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{(A' + M)x^2 + Nx + A'}{x(x^2 + 1)},$$

con lo que $A' = 1$, $M = -1$ y$N = 0$, con lo que

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = \log(|x|) - \frac{1}{2}\log\left(x^2 + 1\right)$$

y, por tanto,

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^7 + 2x^5 + x^3}\, dx = \frac{5x^2 + 2}{2x^2(x^2 + 1)} + 5\log(|x|) - \frac{5}{2}\log\left(x^2 + 1\right).$$

Ejercicios

1. Usar las propiedades de la integral para demostrar que
$$\left|\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{x+1}\,dx\right| \leq \log(2), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2. Sea $f : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [1,2] \\ 2, & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}.$$
   a) Hallar el valor real λ que verifica que $\int_1^3 f(x)\,dx = 2\lambda$.
   b) ¿Existe $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = \lambda$?
   c) ¿Contradice esto el Teorema del Valor Medio para integrales?

3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:
   a) $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$
   b) $G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}\,dt$
   c) $H(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$
   d) $I(x) = \int_3^{\operatorname{sen}^3(x)+e^{-x^2}} (2-5t)\,dt$

4. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{t}\right)\,dt}{x^3}.$$

5. Estudiar la curvatura de la función
$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

6. El área comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas f y g y las rectas $x = a$ y $x = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es igual a
$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$
   a) Obtener dicha área cuando $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.
   b) Obtener dicha área entre la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ y su recta tangente en el punto $x = 0$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a, b \neq 0$. Calcular
$$\int \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2(x) + b^2\cos^2(x)}\,dx.$$

8. Calcular las siguientes primitivas:

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}\,dx$	12) $\int (x^2+3x)2^x\,dx$	23) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$
2) $\int \frac{\mathrm{arctg}^2(x)}{1+x^2}\,dx$	13) $\int \mathrm{sen}(x)e^{2x}\,dx$	24) $\int \frac{-4}{x^3+2x^2+3x+6}\,dx$
3) $\int \mathrm{sen}(3x)\cos(3x)\,dx$	14) $\int \mathrm{tg}^2(x)\,dx$	25) $\int \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\,dx$
4) $\int \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}\,dx$	15) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$	26) $\int \frac{1}{\mathrm{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)}\,dx$
5) $\int \sqrt{1-x}\,dx$	16) $\int \frac{\log^3(x)}{x^2}\,dx$	27) $\int \frac{\mathrm{sen}^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$
6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	17) $\int x\mathrm{tg}^2(x)\,dx$	28) $\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$
7) $\int \frac{3^x}{1+3^x}\,dx$	18) $\int \frac{x^4+4x^3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx$	29) $\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)\cos(x)}\,dx$
8) $\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx$	19) $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$	30) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$
9) $\int x\log(x)\,dx$	20) $\int \frac{x^4-3x+1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$	31) $\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$
10) $\int x^2\cos(x)\,dx$	21) $\int \frac{2x}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$	32) $\int (x^2+1)\log(x)\,dx$
11) $\int \frac{xe^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	22) $\int \frac{4x-12}{x^4-1}\,dx$	33) $\int (x-2)e^{-x}\,dx$

9. Aplica el método de Hermite-Ostrogradski para calcular

$$\int \frac{1-3x}{(x^2+6x+10)^2}\,dx.$$