Capítulo 2

Generalidades sobre funciones

Este capítulo está dedicado al estudio de los conceptos básicos sobre funciones reales de variable real. Se presentan las funciones elementales, sus gráficas y las operaciones fundamentales con ellas.

2.1. Conceptos básicos sobre funciones reales de variable real

Comenzaremos este capítulo introduciendo los conceptos básicos sobre funciones reales de variable real.

Definición 2.1.1. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Una *función (o función real de variable real)*, $f : A \longrightarrow B$, es una regla que hace corresponder un y solo un número real, que denotaremos por $f(x) \in B$, a cada elemento $x \in A$. Al conjunto A de le denomina *dominio* y, al conjunto B, *codominio*.

Observación 2.1.2. Lo más usual es que las funciones se expresen mediante fórmulas como, por ejemplo, $f(x) = 3x + 5$. Esta fórmula significa que la función f le asocia a cada número su triple más cinco unidades. Pero una función no tiene por qué expresarse necesariamente mediante una fórmula como, por ejemplo, la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right. .$$

También es usual escribir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, aunque f no esté definida en todo $\mathbb{R}$, es decir, aunque el dominio de f no sea todo $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define el *dominio de* f, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$, como el subconjunto de $\mathbb{R}$ para los que está definida (tiene sentido) la función f.

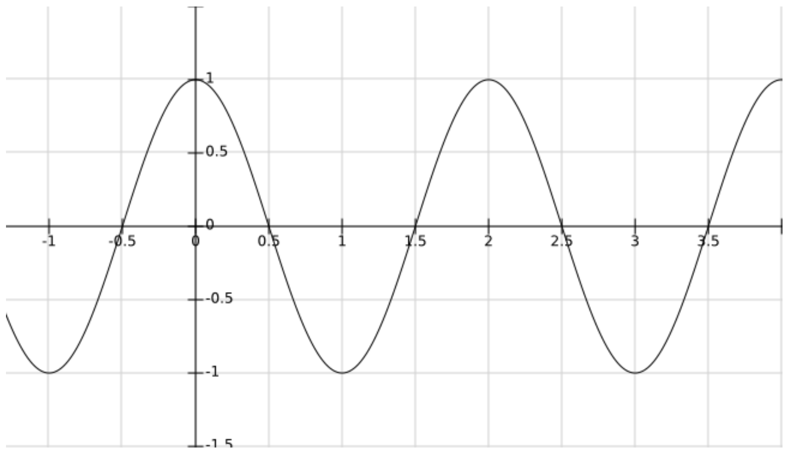
Observación 2.1.4. Como hemos advertido, lo correcto es que, cuando expresamos $f : A \longrightarrow B$, A sea el dominio de f, pero esto rara vez ocurre en los textos. Teniendo esto en cuenta, escribiremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o simplemente f, teniendo en cuenta que f no tiene por qué estar definida en todo $\mathbb{R}$.

Definición 2.1.5. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Se define la *imagen de* f, y se denota por $\mathrm{Im}(f)$, como el conjunto $\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\} \subseteq B$.

Definición 2.1.6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define la *gráfica de* f, y se denota por $\mathrm{Gr}(f)$, como el conjunto $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$

Definición 2.1.7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función f es *periódica de periodo* $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Observación 2.1.8. Es claro que, si f es una función periódica con periodo T, entonces f es periódica con periodo nT, con $n \in \mathbb{Z}$. Así, diremos que T *es el periodo mínimo de* f si $T > 0$ y no existe ningún otro periodo K de f tal que $0 < K < T$.



Función periódica de periodo mínimo 2

Definición 2.1.9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

- f es *inyectiva* si cuando $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$ o, equivalentemente, si para todo $x \neq y$, se verifica que $f(x) \neq f(y)$.
- f es *sobreyectiva* si, para todo $y \in B$, existe $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$ o, equivalentemente, si $\mathrm{Im}(f) = B$.
- f es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

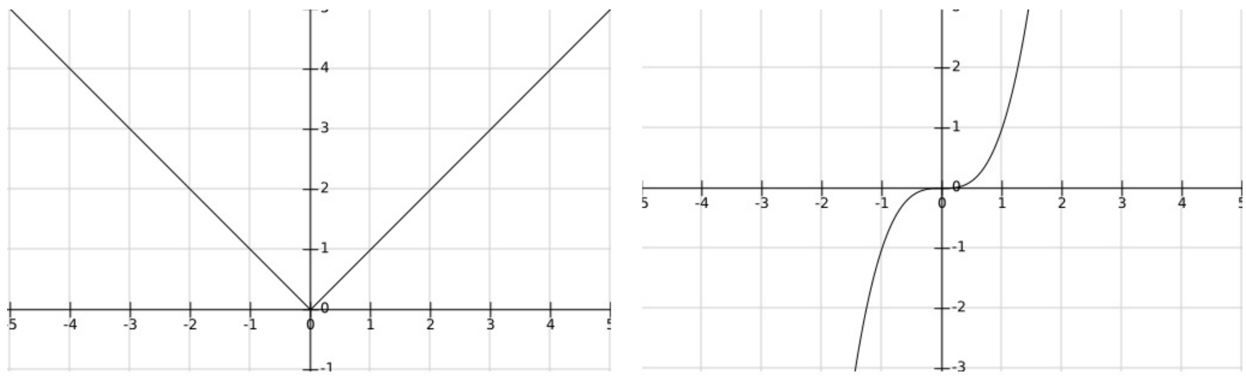
Observación 2.1.10. La gráfica de una función inyectiva solo corta una vez a cada recta horizontal.

Definición 2.1.11. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

- f es *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.
- f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Observación 2.1.12. La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje Y, mientras que la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen.

Típico ejemplo de funciones pares son las potencias pares de x, es decir, x^{2n}, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mientras que, los ejemplos clásicos de funciones impares son las potencias impares, x^{2n+1}, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Otro ejemplo importante de función par es el valor absoluto de x (gráfica abajo a la izquierda).



Funciones par (izquierda) e impar (derecha)

Proposición 2.1.13. (Operaciones elementales con funciones). *Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : A \longrightarrow B$ y $h : B \longrightarrow C$ dos funciones tales que $Dom(f) = Dom(g) = A$. Entonces las siguientes funciones están bien definidas:*

1. *Suma: $f + g : A \longrightarrow B$ definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in A$.*
2. *Diferencia: $f - g : A \longrightarrow B$ definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ para todo $x \in A$.*
3. *Producto: $fg : A \longrightarrow B$ definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in A$.*
4. *División: $\frac{f}{g} : A \longrightarrow B$ definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in A$ tales que $g(x) \neq 0$. De hecho, $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$.*
5. *Composición: $h \circ f : A \longrightarrow C$ definida por $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ para todo $x \in A$, siempre que $Im(f) \subseteq Dom(h)$. Además, $Dom(h \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(h)\}$.*

Observación 2.1.14. Por lo general, la composición de funciones no es conmutativa, es decir, en general, $g \circ f \neq f \circ g$.

Definición 2.1.15. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Se define la *función inversa de f* (si existe), y se denota por f^{-1}, como la (única) función $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$, donde $\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$ es la identidad en A, es decir, $\mathrm{Id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$, y $\mathrm{Id}_B : B \longrightarrow B$ es la identidad en B, es decir, $\mathrm{Id}_B(x) = x$ para todo $x \in B$.

Observación 2.1.16. La gráfica de f^{-1} es la curva simétrica de la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. Además, si f es inyectiva, se verifica que $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$.

2.2. Funciones elementales

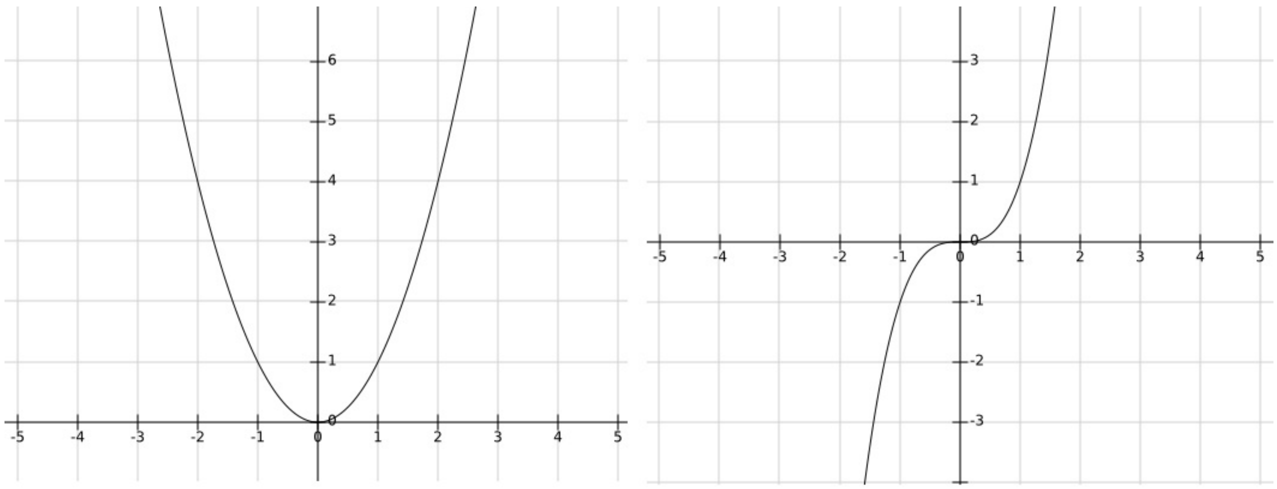
En este apartado repasaremos las funciones elementales y algunas de sus propiedades.

2.2.1. Funciones potencias, polinómicas, racionales y radicales

Definición 2.2.1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una *función potencia* si f está definida por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observación 2.2.2. Si f es una función potencia, entonces se tiene que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y

$$\mathrm{Im}(f) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, & \text{si } n \text{ es par y } n > 0, \\ \{1\}, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$



Gráficas de x al cuadrado y x al cubo

Definición 2.2.3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una *función polinómica* si f viene dada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$.

Observación 2.2.4. En estas circunstancias, se dice que el *grado de* f es n, y se denota por $\deg(f) = n$. Además, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y, si $\deg(f)$ es impar, entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Definición 2.2.5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una *función racional* si f es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas.

Observación 2.2.6. Por el punto 4 de la proposición 2.1.13, se tiene $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

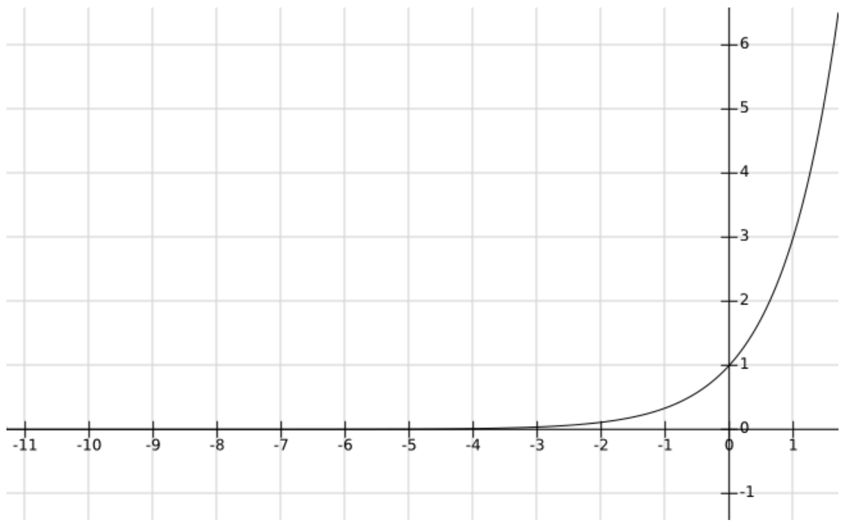
Definición 2.2.7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una *función radical* si f está definida por $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.2.8. En este caso, se tiene $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, si n es impar, y $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$, si n es par.

2.2.2. Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición 2.2.9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es una *función exponencial* si f está definida por $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Observación 2.2.10. Se tiene que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Im}(f) = (0, \infty)$, si $a \neq 1$, $\mathrm{Im}(f) = \{1\}$, si $a = 1$. Además, si $a \neq 1$, se verifica que f es biyectiva.



Proposición 2.2.11. (Propiedades de la función exponencial). *Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. Entonces se verifica:*

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^x a^y = a^{x+y}$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

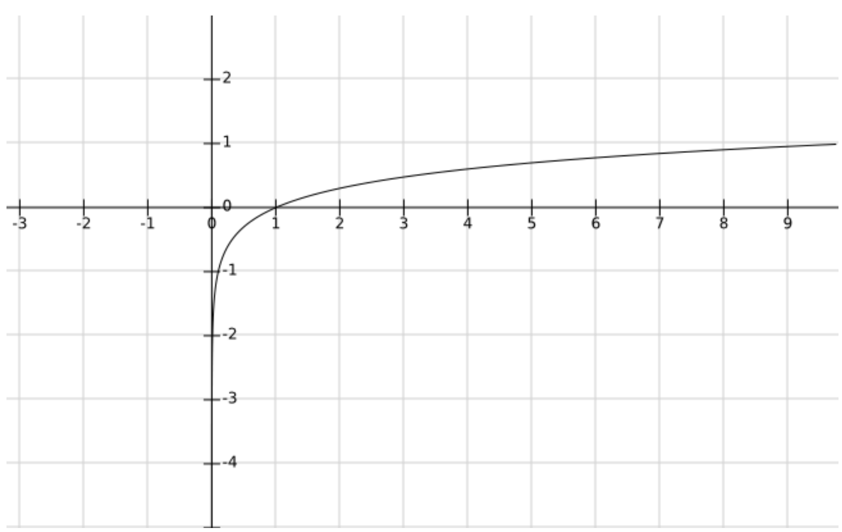
Definición 2.2.12. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $a \in (0, \infty)$, con $a \neq 1$. Decimos que f es una *función logarítmica de base* a si f viene dada por $f(x) = \log_a(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Observación 2.2.13. La función $\log_a(x)$ es la función inversa de la exponencial, a^x, es decir,

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Por lo tanto, se tiene que la función logaritmo es biyectiva, con $\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$ y $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Al logaritmo en base e, $\log_e(x)$, se le denomina logaritmo neperiano, y se denota por $\ln(x)$ o $\log(x)$.

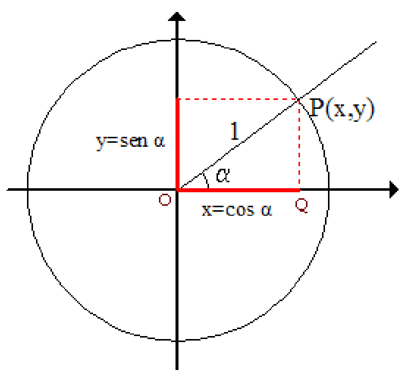


Proposición 2.2.14. (Propiedades de la función logaritmo). *Sea $a \in (0, \infty)$, con $a \neq 1$. Entonces se verifica:*

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^+$.
4. $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^+$.
5. $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^+$.
6. Cambio de base: $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$, *para todo* $x, b \in \mathbb{R}^+$, *con* $b \neq 1$.

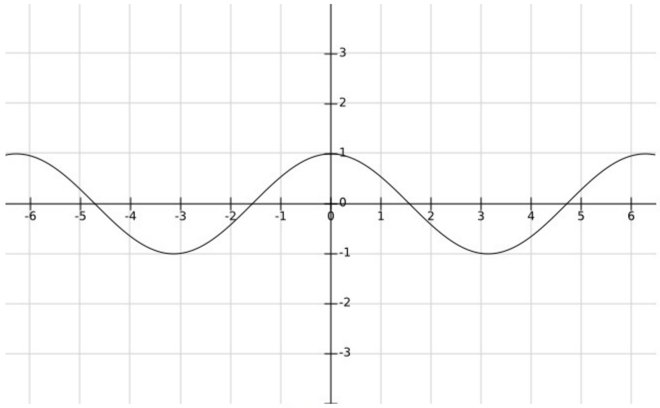
2.3. Funciones trigonométricas

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, la circunferencia unidad. Sea P un punto de S^1 tal que el segmento OP forma un ángulo de α radianes con el eje de abcisas (eje X). Como P es un punto del plano real, entonces P tiene dos coordenadas, una con el eje de abcisas y otra con el eje de ordenadas. A la abcisa del punto P se le denomina coseno de α, y se denota por $\cos(\alpha)$, y, a la ordenada, seno de α, que denotaremos por $\operatorname{sen}(\alpha)$.

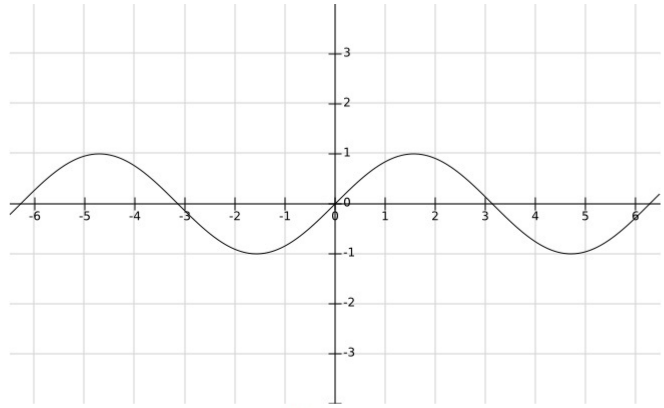


Definición 2.3.1. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea S^1 la circunferencia unidad. Sea P un punto de S^1 tal que el segmento OP forma un ángulo de x radianes con el eje de abcisas (eje X).

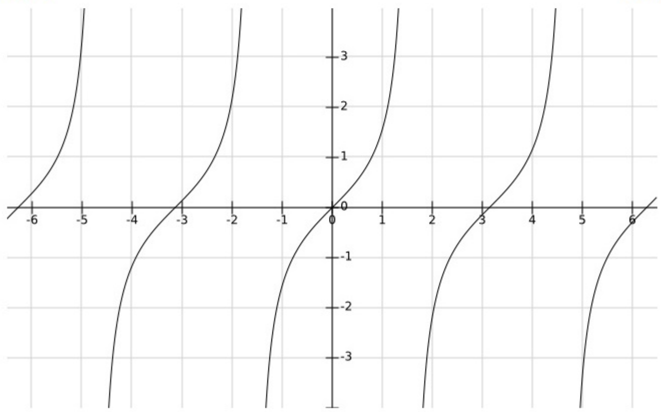
- Se define la función *coseno* como la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Se define la función *seno* como la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Se define la función *tangente* como la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ para todo $x \in \operatorname{Dom}(h)$.



Función coseno



Función seno



Función tangente

Observación 2.3.2. Con la notación de la definición anterior, se tiene que:

- La función f es periódica con periodo 2π, tiene como dominio todo $\mathbb{R}$ y, como imagen, al intervalo $[-1,1]$. Si restringimos su dominio al intervalo $[0,\pi]$, se tiene entonces que f es inyectiva y, por tanto, definimos su inversa como la función *arcocoseno* $f^{-1}:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$ dada por $f^{-1}(x)=\arccos(x)$ para todo $x\in[-1,1]$.

- La función g es periódica con periodo 2π, tiene como dominio todo $\mathbb{R}$ y, como imagen, al intervalo $[-1,1]$. Si restringimos su dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, se tiene entonces que g es inyectiva y, por tanto, definimos su inversa como la función *arcoseno* $g^{-1}:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dada por $g^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}(x)$ para todo $x\in[-1,1]$.

- La función h es periódica con periodo π, $\operatorname{Dom}(h)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ y su imagen es todo $\mathbb{R}$. Al restringir su dominio al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, se obtiene que h es inyectiva, con lo que podemos definir su inversa como la función *arcotangente* $h^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ dada por $h^{-1}(x)=\operatorname{arctg}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

- Se define la función *secante* como la función $\overline{f}(x)=\frac{1}{\cos(x)}$, cuyo dominio es $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ y su imagen $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

- Se define la función *cosecante* como la función $\overline{g}(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, con $\operatorname{Dom}(\overline{g})=\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ y $\operatorname{Im}(\overline{g})=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

- Se define la función *cotangente* como la función $\overline{h}(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$, cuyo dominio es $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ y su imagen es todo $\mathbb{R}$.

Algunas relaciones trigonométricas. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$. *Entonces se verifica:*

1. $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$.
2. $\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.
4. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.
5. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.
6. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.
7. $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$.
8. $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$.
9. $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
10. $\cos(x) + \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
11. $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Ejercicios

1. Halla el dominio y la imagen de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

2. Halla el dominio de $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)}$. ¿Pertenece el 0 a la imagen de f? Indica dónde es positiva y dónde es negativa.

3. Halla el dominio de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$. ¿Pertenece el 0 a la imagen de f? Indica dónde es positiva y dónde es negativa.

4. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$.

   b) $g(x) = \frac{x+3}{x^3-2x^2+2x-4}$.

   c) $h(x) = \sqrt{x^2-2}$.

   d) $i(x) = \sqrt[3]{x^3-x}$.

   e) $j(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+5x}}$.

   f) $k(x) = \left|\frac{3x^2+5}{x-2}\right|$.

   g) $l(x) = \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x^2}}$.

   h) $m(x) = \sqrt{\frac{|x^3+1|}{x^4-1}}$.

5. Encuentra el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1}, & \text{si } x < 0, \\ \log\left(\frac{x-2}{x+1}\right), & \text{si } 0 \leq x \leq 5, \\ x^1 - 4, & \text{si } x > 6 \end{cases} .$$

6. Estudia el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = e^{x^2}$.

   b) $g(x) = -3 + e^x + e^{-x}$.

   c) $h(x) = \log(x^2-4)$.

   d) $i(x) = \log(x+5) - \log(1-x)$.

7. Halla el dominio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y estudia su simetría.

8. Halla el dominio de $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$ y estudia su simetría.

9. Estudia el dominio y simetrías de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \cos^2(x)$.

   b) $g(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \cos(x))$.

   c) $h(x) = \operatorname{tg}(x) - \cos^3(x)$.

   d) $i(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)+1}$.

e) $j(x) = \text{arcsen}(2x^2)$.
f) $k(x) = \arccos(2x+1)$.
g) $l(x) = 1 + \text{arctg}(x^2+1)$.
h) $m(x) = \sqrt{2\text{arcsen}(x-3)}$.

10. Se definen las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica como las funciones

$$f(x) = \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ g(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ y } h(x) = \text{th}(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)},$$

respectivamente. Demostrar que $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \text{Dom}(h) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \text{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(h) = (-1,1)$ y que, además, se verifica que

$$\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1.$$

11. Estudia el dominio, la imagen y la simetría de $f(x) = \text{sen}^2(x)$. ¿Es periódica? En caso afirmativo, halle su periodo mínimo.

12. Estudia el dominio, la imagen y la simetría de $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$. Si es periódica, halla su periodo mínimo.

13. Halle el dominio y la paridad de $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

14. Estudia el dominio, la imagen y la periodicidad de $f(x) = e^{\text{sen}(3x)}$.

15. Demostrar que si f es una función periódica de periodo k, entonces $f(ax)$, con $a \neq 0$, es periódica con periodo $\frac{k}{a}$.

16. Prueba que si f es una función periódica de periodo k, entonces f es periódica con periodo nk, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

17. Prueba que si f es una función periódica de periodo k y g es cualquier función, entonces $g \circ f$ es periódica de periodo k.

18. Estudia el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{arcsen}^2(x+2)$.
b) $g(x) = \sqrt{\arccos(x-1)}$.
c) $h(x) = \text{arctg}(x^2+1)$.

19. Consideremos las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = e^x$. Calcula la expresión de las siguientes funciones:

a) $(f \circ g \circ h)(x)$.
b) $(g \circ f \circ g)(x)$.
c) $(h \circ f \circ g)(x)$.
d) $(h \circ g \circ f)(x)$.

20. Para las siguientes funciones, estudia su dominio, comprueba si son inyectivas y, en caso afirmativo, halla su inversa:

    a) $f(x) = 2x + 1$.

    b) $g(x) = \frac{1}{x}$.

    c) $h(x) = \log(3x^2 + 1)$.

    d) $i(x) = 5 + 3e^{-2x}$.

21. Prueba que si f es una función par y g es una función cualquiera, entonces $g \circ f$ es una función par.

22. Prueba que si f y g son funciones impares, entonces $g \circ f$ es impar.

23. Prueba que si f es impar e inyectiva, entonces f^{-1} es impar.