Capítulo 2

Espacios vectoriales

2.1. Espacios vectoriales. Bases

2.1.1. Definición y ejemplos

En lo que sigue, consideraremos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Este cuerpo será, normalmente, el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el de los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea V un conjunto no vacío. Diremos que V es un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ (o $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si:

1. En V hay definida una operación interna, que denotaremos por $+$, de forma que $(V, +)$ es un *grupo abeliano*, es decir, se verifican las siguientes propiedades:

    a) Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$.

    b) Conmutativa: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.

    c) Existencia de elemento neutro: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in V$.

    d) Existencia de elemento opuesto: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

2. En V hay definida una operación externa de $\mathbb{K}$ en V, que denotaremos por yuxtaposición, verificando las siguientes propiedades:

    a) $a(u + v) = au + av$ para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo $u, v \in V$.

    b) $(a + b)u = au + bu$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in V$.

    c) $a(bu) = (ab)u$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in V$.

    d) $1u = u$ para todo $u \in V$, donde 1 es la unidad multiplicativa de $\mathbb{K}$.

A los elementos de V se les denominan *vectores* y, a los elementos de $\mathbb{K}$, *escalares*. La operación externa recibe el nombre de *producto por escalares*.

Ejemplo 2.1.2. Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

1. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones de suma de matrices y producto por escalares usuales.

2. El cuerpo $\mathbb{K}$ puede considerarse un espacio vectorial sobre sí mismo, utilizando como producto por escalares el producto usual en el cuerpo. Más generalmente, si consideramos el producto cartesiano de $\mathbb{K}$ consigo mismo n veces, con $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{K}\, \forall\, i = 1, 2, ..., n\}$$

podemos dotarlo de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones suma y producto por escalares definidas por

$$\begin{array}{ll} (+): & (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n). \\ (\,\cdot\,): & k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n). \end{array}$$

3. El conjunto de los polinomios en una indeterminada con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, que denotaremos por $\mathbb{K}[x]$ o $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}[x]$, constituye un espacio vectorial con la suma usual de polinomios y el producto de un polinomio por una constante. También, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n sobre $\mathbb{K}$, que denotaremos por $\mathbb{K}_n[x]$ o $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}(x)_n$, es un espacio vectorial con las mismas operaciones.

4. El conjunto de todas las funciones reales definidas en un cierto intervalo I de la recta real es también un espacio vectorial real, donde la suma de dos funciones f y g es la definida de forma usual, es decir, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in I$, y el producto por escalares es el producto usual de un número por una función real, $(af)(x) = a(f(x))$ para todo $x \in I$.

5. Existe un espacio vectorial con un único vector, que ha de ser el vector neutro para la suma (y, por lo tanto, lo llamaremos 0). La suma y el producto por escalares viene dado, como es coherente, por $0 + 0 = 0$ y $k0 = 0$ para todo $k \in \mathbb{K}$. Este espacio vectorial recibe el nombre de *espacio vectorial cero* o *espacio trivial* y se denota por $\{0\}$ o simplemente por 0.

Propiedades de la suma y el producto por escalares:

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$ se verifica:

1. $0u = 0$.
2. $a0 = 0$.
3. *Si* $au = 0$, *entonces* $a = 0$ *o* $u = 0$.
4. $-(au) = (-a)u = a(-u)$.
5. $a(u - v) = au - av$.
6. $(a - b)u = au - bu$.
7. *Si* $au = bu$ *y* $u \neq 0$, *entonces* $a = b$.
8. *Si* $au = av$ *y* $a \neq 0$, *entonces* $u = v$.

2.1.2. Dependencia e independencia lineal

Definición 2.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Llamaremos combinación lineal de estos vectores a cualquier vector de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$, con $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Ejemplo 2.1.4. Si en $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores $u = (1, 2, 0, 0)$ y $v = (0, 0, 1, 0)$, entonces el vector $(2, 4, 3, 0)$ es combinación lineal de u y v, ya que $(2, 4, 3, 0) = 2u+3v$. Sin embargo, el vector $(0, 0, 0, 1)$ no es combinación lineal de u y v.

Definición 2.1.5. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Se dice que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un *conjunto linealmente dependiente* o bien que los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son *linealmente dependientes* si el vector cero se puede poner como combinación lineal de ellos, con no todos los escalares nulos, es decir, si existen $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0.$$

Definición 2.1.6. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Se dice que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un *conjunto linealmente independiente* o bien que los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ *son linealmente independientes* si no son linealmente dependientes, es decir, si existen $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0,$$

entonces $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Ejemplo 2.1.7. Estudiemos si el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ es linealmente dependiente o independiente. Para ello, planteamos el sistema

$$a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) + d(1, 2, 1) = (0, 0, 0),$$

es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c + \ \ d & = & 0 \\ b + c + 2d & = & 0 \\ a \qquad + c + \ \ d & = & 0 \end{array} \right. ,$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que, las columnas de la matriz A, coinciden justamente con los vectores del conjunto.

Como el sistema es homogéneo, y el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 3 < 4 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas luego, por el teorema de Rouché-Frobenius, estamos ante un sistema compatible indeterminado.

Por lo tanto, el conjunto $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ es linealmente dependiente.

Sin embargo, como teníamos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ a \quad +c & = & 0 \end{array} \right. ,$$

será compatible determinado, cuya única solución es $a = b = c = 0$, por ser un sistema homogéneo, es decir, el conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 2.1.8. Consideremos en el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ los vectores (polinomios) $p(x) = x^2 + x + 1$, $q(x) = 2x + 1$ y $r(x) = x^2 + 1$ y consideremos una combinación lineal de ellos igualada a cero

$$ap(x) + bq(x) + cr(x) = 0,$$

es decir,

$$a(x^2 + x + 1) + b(2x + 1) + c(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + ax + a + 2bx + b + cx^2 + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a+c)x^2 + (a+2b)x + (a+b+c) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a \qquad +c & = & 0 \\ a+2b \qquad & = & 0 \\ a+ \quad b+c & = & 0 \end{array} \right. ,$$

cuya matriz ampliada es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces el sistema es compatible determinado con solución única $a = b = c = 0$ y, por lo tanto, los vectores $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son linealmente independientes.

Nótese que, en ambos ejemplos, el estudio de la dependencia o independencia lineal se ha podido reducir a la discusión de un sistema lineal homogéneo o, equivalentemente, al cálculo del rango de una matriz.

Proposición 2.1.9. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+r} \in V$.*

1. *Si $0 \in \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, entonces los vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente dependientes.*

2. *$\{v_1\}$ es linealmente independiente si, y solo si, $v_1 \neq 0$.*

3. *Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+r}\}$ es linealmente dependiente.*

4. *Si* $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+r}\}$ *es linealmente independiente, entonces* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es linealmente independiente.*

5. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es linealmente dependiente si, y solo si, uno de los vectores es combinación lineal del resto.*

Observación 2.1.10. El punto 5 de la proposición anterior afirma que si los vectores son linealmente dependientes, existe uno de ellos que es combinación lineal del resto, no que cualquiera de ellos se pueda expresar como combinación lineal del resto.

Ejemplo 2.1.11. En $\mathbb{R}^2$ los vectores $(1,1)$, $(1,0)$ y $(2,2)$ son linealmente dependientes, ya que

$$2(1,1) + 0(1,0) + (-1)(2,2) = 0,$$

sin embargo el vector $(1,0)$ no se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.

Observación 2.1.12. Las definiciones de dependencia e independencia lineal se pueden extender a conjuntos infinitos de vectores. Si S es un conjunto arbitrario de vectores de V, diremos que S es linealmente dependiente si existe un subconjunto finito de vectores linealmente dependientes de S. Cuando todo subconjunto finito de S sea linealmente independiente, diremos que S es linealmente independiente.

2.1.3. Sistemas generadores de un espacio vectorial

Definición 2.1.13. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea S un subconjunto de V. Se dice que S es un *sistema generador* de V si todo vector de V es combinación lineal de los vectores de S (para el caso en el que S es infinito, se consideran combinaciones lineales de un número finito de vectores de S).

Observación 2.1.14. Un sistema generador, como bien dice la palabra, es un conjunto el cual genera al sistema vectorial entero. Esto lo denotaremos por $\langle S \rangle = V$, $\mathcal{L}(S) = V$ o incluso $\mathcal{S}pan_{\mathbb{K}}(S) = V$.

Ejemplo 2.1.15. En $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(1,0),(1,-1)\}$ es un sistema generador. Para ello, veamos que, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(1,1) + b(1,0) + c(1,-1) = (x,y).$$

Este problema es equivalente a estudiar si el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c & = & x \\ a \quad\;\; - c & = & y \end{array} \right. ,$$

con incógnitas a, b y c tiene solución para cualquier columna de términos independientes.

Efectivamente, como el rango de la matriz de coeficentes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

y el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que 2, por ser la matriz ampliada A^* de orden 2×4, entonces el sistema es compatible indeterminado.

Lema 2.1.16. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un sistema generador de V y v_i, para algún $i = 1, 2, ..., n$, es combinación lineal de los restantes vectores, entonces el conjunto que se obtiene eliminando v_i, $\{v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n\}$, es también un sistema generador de V.*

Ejemplo 2.1.17. En el ejemplo anterior, vimos que $\{(1,1), (1,0), (1,-1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$. Como el primer vector, $(1,1)$ es combinación lineal de los otros dos,

$$(1,1) = 2(1,0) + (-1)(1,-1),$$

entonces podemos eliminar al vector $(1,1)$ del conjunto y seguiríamos teniendo un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, es decir, el conjunto $\{(1,0), (1,-1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 2.1.18. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_m \in V$. Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente y $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ es un sistema generador de V, entonces $n \leq m$.*

2.1.4. Bases de un espacio vectorial

Definición 2.1.19. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea B un subconjunto de V. Diremos que B es una base de V si B es linealmente independiente y $\mathcal{L}(B) = V$.

Teorema 2.1.20. (Teorema de la base). *Si un espacio vectorial V tiene una base formada por un número finito de vectores n, entonces todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de vectores, n.*

Definición 2.1.21. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea B una base de V. Diremos que V es un espacio vectorial de *dimensión finita* o *finito-dimensional* si B tiene un número finito de vectores. En caso contrario, diremos que V tiene *dimensión infinita* o *infinito-dimensional.* Llamaremos *dimensión* de V, y lo denotaremos por $\dim(V)$, al número de vectores de B.

Observación 2.1.22. Dado un espacio vectorial V, $\dim(V)$ es el mayor número posible de vectores linealmente independientes en V y, al mismo tiempo, el menor número posible de vectores en un sistema generador de V.

Ejemplo 2.1.23. En el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ el conjunto formado por los n vectores

$$(1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,1)$$

es una base que recibe el nombre de *base canónica* de $\mathbb{K}^n$. Luego $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Ejemplo 2.1.24. En el espacio vectorial $\mathbb{K}_n[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n, el conjunto

$$\{1, x, x^2, ..., x^n\}$$

es una base de $\mathbb{K}_n[x]$ que recibe el nombre de *base estándar* de $\mathbb{K}_n[x]$. En efecto, cada polinomio de grado menor o igual que n es de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

es decir, combinación lineal de los vectores $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$. Por otra parte, un polinomio de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ es igual a cero si, y solo si, todos sus coeficientes son cero, con lo que nuestro conjunto es linealmente independiente. Luego $\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$.

Ejemplo 2.1.25. En el espacio vectorial $\mathbb{K}[x]$ de todos los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en $\mathbb{K}$, tenemos que el conjunto

$$\{1, x, x^2, ..., x^n, x^{n+1}, ...\}$$

es una base de $\mathbb{K}[x]$ que recibe el nombre de *base estándar* de $\mathbb{K}[x]$. En efecto, todo polinomio es combinación lineal finita de elementos de $\{1, x, x^2, ..., x^n, x^{n+1}, ...\}$ y, un polinomio será cero, solamente cuando todos sus coeficientes sean cero, lo que nos da la independencia lineal, con lo cual $\mathbb{K}[x]$ tiene dimensión infinita, es decir, $\dim(\mathbb{K}[x]) = \infty$.

Ejemplo 2.1.26. Si en el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ se considera, para cada $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, la matriz A_{ij} que tiene un 1 en la posición ij y cero en el resto, entonces el conjunto

$$\{A_{ij} : i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n\}$$

es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ que recibe el nombre de *base estándar* de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Por lo tanto, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$.

Ejemplo 2.1.27. El espacio vectorial trivial tiene dimensión 0 ya que, aunque tiene un sistema de generadores formado por un número finito de vectores, $\{0\}$, este conjunto no es linealmente independiente.

Teorema 2.1.28. *En un espacio vectorial no trivial de dimensión finita, de cada sistema de generadores finito se puede extraer una base.*

Este teorema nos ofrece un primer método para hallar una base de un espacio vectorial V. A partir de un sistema de generadores vamos eliminando uno a uno los vectores que sean combinaciones lineales del resto.

Teorema 2.1.29. (de ampliación de la base). *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea $\{v_1, v_2, ..., v_s\}$, con $s < n$, un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Entonces existen vectores $\{v_{s+1}, v_{s+2}, ..., v_n\}$ de V tales que $\{v_1, v_2, ..., v_s, v_{s+1}, v_{s+2}, ..., v_n\}$ es una base de V.*

Ahora tenemos un segundo método para hallar una base de un espacio vectorial V. A partir de un conjunto de vectores linealmente independientes vamos añadiendo nuevos vectores de manera que se siga manteniendo la independencia lineal.

Corolario 2.1.30. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de n vectores de V. Entonces son equivalentes:*

1. *S es linealmente independiente.*

2. *S es sistema generador de V.*

3. *S es una base de V.*

2.1.5. Coordenadas de un vector respecto a una base

A continuación desarrollaremos una herramienta que nos permitirá trabajar en cualquier espacio vectorial de dimensión finita n como si estuviéramos en $\mathbb{K}^n$.

Proposición 2.1.31. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Sea $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base de V. Entonces todo vector $v \in V$ se puede expresar* ***de manera única*** *como combinación lineal de B, es decir, existen $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ únicos tales que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$.*

Observación 2.1.32. Bajo las circunstancias de la proposición anterior, diremos que $(a_1, a_2, ..., a_n)$ son las *coordenadas de v en las base B*, y lo representaremos por $v = (a_1, a_2, ..., a_n)_B$.

Ejemplo 2.1.33. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base canónica $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. El vector $v = (2,3,1)$ tiene coordenadas respecto de la base canónica $v = (2,3,1)_B$, mientras que de la base $B' = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, sus coordenadas son $v = (2,1,-2)_{B'}$ ya que

$$(2,3,1) = 2(1,1,1) + 1(0,1,1) + (-2)(0,0,1).$$

Ejemplo 2.1.34. Consideremos la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes en $\mathbb{R}$. Las coordenadas de un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ respecto de la base estándar será $p(x) = (c, b, a)_B$.

Ejemplo 2.1.35. Consideremos la base estándar

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

del espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Así, cualquier vector (matriz)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

tiene coordenadas (a, b, c, d, e, f) respecto de la base B.

Coordenadas y operaciones con vectores:

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y sea B una base de V. Sean $u, v \in V$ con coordenadas $u = (u_1, u_2, ..., u_n)_B$ y $v = (v_1, v_2, ..., v_n)_B$ respecto de B. Entonces:

1. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)_B$.
2. $ku = (ku_1, ku_2, ..., ku_n)_B$ *para todo* $k \in \mathbb{K}$.

2.1.6. Coordenadas y dependencia lineal

Proposición 2.1.36. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea B una base de V. Un conjunto de r vectores $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ en V es linealmente independiente si, y solo si, la matriz cuyas filas (o columnas) son sus coordenadas respecto de B, $((u_1)_B \,|\, (u_2)_B \,|\, ... \,|\, (u_n)_B)$, tiene rango r.*

Ejemplo 2.1.37. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los vectores $u_1 = (1,1,2,2)$, $u_2 = (0,1,1,1)$ y $u_3 = (2,0,2,2)$. Tomando la base canónica, la matriz cuyas filas son las coordenadas de estos vectores es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

que tiene forma normal de Hermite por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz A tiene rango 2 y, por tanto, los vectores u_1, u_2 y u_3 son linealmente dependientes.

Ejemplo 2.1.38. Consideremos en $\mathbb{R}_2[x]$ los polinomios $p(x) = 3x^2+2x+1$, $q(x) = 4x^2+3x+2$ y $r(x) = 6x^2+4x+3$. Las coordenadas de estos vectores respecto de la base estándar $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ son $p(x) = (1,2,3)_B$, $q(x) = (2,3,4)_B$ y $r(x) = (3,4,6)_B$. La matriz cuyas columnas son estas coordenadas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $\det(A) = 18+24+24-(27+16+24) = 66-67 = -1 \neq 0$, con lo que A tiene rango 3 y, por tanto, $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son linealmente independientes.

2.1.7. Cambio de base

Supongamos ahora que en un espacio vectorial V de dimensión n tenemos dos bases distintas

$$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ y } B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$$

y queremos establecer la relación entre las coordenadas de un mismo vector en las dos bases.

Sea $v \in V$. Llamaremos $(v_1, v_2, ..., v_n)$ a las coordenadas de v respecto de la base B y $(v'_1, v'_2, ..., v'_n)$ a las coordenadas de v respecto de la base B'. La relación que exista entre las coordenadas dependerá de la relación que exista entre ambas bases, por lo que debemos relacionar una base con la otra. Para ello, pongamos cada vector de la base B' como combinación lineal de la base B, es decir, buscamos las coordenadas de cada vector de la base de B' respecto de la base B:

$$\begin{array}{ccc} e'_1 & = & a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n \\ e'_2 & = & a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e'_n & = & a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{array}$$

Ahora bien, como $v = v'_1e'_1 + v'_2e'_2 + ... + v'_ne'_n$ entonces, por lo anterior, tenemos que

$$v = v'_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+...+a_{n1}e_n)+v'_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+...+a_{n2}e_n)+...+v'_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+...+a_{nn}e_n) =$$

$$(a_{11}v'_1 + a_{12}v'_2 + ... + a_{1n}v'_n)e_1 + (a_{21}v'_1 + a_{22}v'_2 + ... + a_{2n}v'_n)e_2 + ... + (a_{n1}v'_1 + a_{n2}v'_2 + ... + a_{nn}v'_n)e_n.$$

Por otra parte, como $v = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n$, entonces

$$v_1e_1 + ... + v_ne_n = (a_{11}v'_1 + a_{12}v'_2 + ... + a_{1n}v'_n)e_1 + ... + (a_{n1}v'_1 + a_{n2}v'_2 + ... + a_{nn}v'_n)e_n,$$

con lo que obtenemos dos expresiones de v en la misma base y, por tanto, los escalares que acompañan a los vectores de la base deben de ser lo mismo, es decir, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ccc} v_1 & = & a_{11}v'_1 + a_{12}v'_2 + ... + a_{1n}v'_n \\ v_2 & = & a_{21}v'_1 + a_{22}v'_2 + ... + a_{2n}v'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_n & = & a_{n1}v'_1 + a_{n2}v'_2 + ... + a_{nn}v'_n \end{array}\right. .$$

A este sistema de ecuaciones se les denomina *ecuaciones del cambio de base de B' a B*. De forma matricial tendríamos que $X = PX'$, donde X y X' son las matrices columna formadas por las coordenadas del vector v en las bases B y B' respectivamente, y P es la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los vectores de B' en función de B,

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A la matriz P se le denomina *matriz de cambio de base de B' a B* y es una matriz regular, ya que sus columnas son las coordenadas de n vectores linealmente independientes y, por tanto, su rango es n. Luego, la matriz P tiene inversa. Esta matriz inversa, P^{-1}, coincide con la matriz de cambio de base de B a B' ya que, como $X = PX'$, entonces $X' = P^{-1}X$.

En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.39. (de cambio de base). *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y sean B y B' dos bases de V. La ecuación matricial del cambio de base de B' a B es*

$$X = PX',$$

que permite calcular las coordenadas de un vector respecto de la base B si se conocen las coordenadas respecto de la base B'. P es la matriz de cambio de base de B' a B, es decir, la matriz regular cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' respecto de B. El cambio de base en sentido contrario, de B a B', viene dado por

$$X' = P^{-1}X.$$

Ejemplo 2.1.40. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el conjunto $B' = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Expresando cada vector de esta base en la base canónica, $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, tenemos

$$\begin{array}{ccc} (1,1,0) & = & (1,1,0)_B \\ (0,1,1) & = & (0,1,1)_B \\ (0,1,0) & = & (0,1,0)_B \end{array}$$

con lo que la matriz de cambio de base de B' a B es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si $v = (1, 0, -2)_{B'}$, entonces

$$v_B = Pv_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $v = (1, -1, 0)_B$.

Ejemplo 2.1.41. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, los polinomios $\{(x-1)^2, 2(x-1), 2\}$ forman una base de $\mathbb{R}_2[x]$ a la que llamaremos B'. Debemos expresar cada uno de estos polinomios en función de la base estándar, $B = \{1, x, x^2\}$, para obtener la matriz de cambio de base de B' a B:

$$\begin{array}{ccc} (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 & = & (1, -2, 1)_B \\ 2(x-1) = 2x - 2 & = & (-2, 2, 0)_B \\ 2 & = & (2, 0, 0)_B \end{array}$$

con lo que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El cambio de base de B a B' vendrá dado por la matriz P^{-1},

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, para calcular las coordenadas respecto de B' del polinomio $p(x) = 1 + 2x - 2x^2 = (1, 2, -2)_B$:

$$p(x)_{B'} = P^{-1} p(x)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con lo que $p(x) = \left(-2, -1, \frac{1}{2}\right)_{B'}$.

Ejemplo 2.1.42. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los conjuntos $B = \{(1, 0, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ y $B' = \{(2, 0, 1), (1, 1, 1), (0, -1, 0)\}$. Nótese que ambos conjuntos forman una base, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0.$$

Expresando cada vector de la base B' en función de la base B tenemos

$$\begin{array}{ccc} (2, 0, 1) & = & (2, 0, -1)_B \\ (1, 1, 1) & = & (1, -1, 1)_B \\ (0, -1, 0) & = & (0, 1, -1)_B \end{array}.$$

Para ello, se han resuelto los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(2,0,1) = a(1,0,1) + b(0,-1,1) + c(0,0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ -b & = & 0 \\ a+b+c & = & 1 \end{array} \right. ,$$

$$(1,1,1) = a(1,0,1) + b(0,-1,1) + c(0,0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ -b & = & 1 \\ a+b+c & = & 1 \end{array} \right. ,$$

$$(0,-1,0) = a(1,0,1) + b(0,-1,1) + c(0,0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ -b & = & -1 \\ a+b+c & = & 0 \end{array} \right. .$$

Con lo que la matriz de cambio de base de B' a B es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, si $v = (-1,3,1)_{B'}$, entonces

$$v_B = Pv_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

es decir, $v = (1,-2,3)_B$.

2.2. Subespacios vectoriales

2.2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.2.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea U un subconjunto no vacío de V. Decimos que U es un *subespacio vectorial de* V, y lo denotamos por $U \leq V$, si se verifican las siguientes condiciones:

1. U es cerrado para la suma: $u + v \in U$ para todo $u, v \in U$.

2. U es cerrado para el producto por escalares: $au \in U$ para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo $u \in U$.

Observación 2.2.2. Si U es un subespacio vectorial de V, entonces U es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.2.3. Todo espacio vectorial distinto del trivial, $\{0\}$, tiene al menos dos subespacios vectoriales, el propio V y el $\{0\}$.

Ejemplo 2.2.4. En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ podemos describir diversos subespacios:

- Las matrices triangulares superiores.
- Las matrices triangulares inferiores.
- Las matrices diagonales.

- Las matrices simétricas ($A^t = A$).
- Las matrices antisimétricas ($A^t = -A$).

Ejemplo 2.2.5. Los polinomios de grado menor o igual que un cierto número natural n, $\mathbb{K}_n[x]$, forman un subespacio vectorial de los polinomios en una indeterminada sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[x]$.

Lema 2.2.6. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea U un subconjunto no vacío de V. Entonces U es un subespacio vectorial de V si, y sólo si, $au + bv \in U$ para todo $u, v \in U$ y para todo $a, b \in \mathbb{K}$.*

2.2.2. Subespacio generado por un conjunto de vectores

Definición 2.2.7. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea S un subconjunto de vectores de V. Definimos el *subespacio vectorial generado por* S como el conjunto formado por todas las posibles combinaciones lineales de vectores de S, es decir,

$$\mathcal{L}(S) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, v_i \in S \,\forall\, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Observación 2.2.8. Al igual que en espacios vectoriales, para subespacios vectoriales en lugar de $\mathcal{L}(S)$, también podemos escribir $\mathcal{S}pan_{\mathbb{K}}(S)$ o $\langle S \rangle$.

Ejemplo 2.2.9. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 0, 1)$, entonces

$$\mathcal{L}(\{u, v\}) = \{au + bv : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, a, b) : a, b \in \mathbb{R}^3\}.$$

Proposición 2.2.10. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de vectores de V. Entonces $\mathcal{L}(S)$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S.*

Observación 2.2.11. Claramente, S es un sistema de generadores de $\mathcal{L}(S)$ con lo que, si nos quedamos solamente con los vectores linealmente independientes de S, podemos obtener una base de $\mathcal{L}(S)$ y, por tanto, tendría sentido hablar de la dimensión de un subespacio vectorial. Con lo que, dado un subespacio vectorial $U \leq V$, se tiene que $\dim(U) \leq \dim(V)$. Además, $\dim(U) = \dim(V)$ si, y solo si, $U = V$.

Ejemplo 2.2.12. Consideremos el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \mathcal{L}(\{(1, 3, 4, 1), (2, 6, 8, 2), (2, 5, 7, 2)\}).$$

Los tres vectores dados forman un sistema de generadores de U, pero no son una base de U, ya que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. De hecho, se tiene que el segundo vector es dos veces el primero. Así, podemos elegir al conjunto

$$\{(1, 3, 4, 1), (2, 5, 7, 2)\}$$

como base de U.

También podemos pasar de un sistema de generadores a otro diferente utilizando un método similar al de las operaciones elementales.

Lema 2.2.13. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea U un subespacio vectorial de V. Si $S = \{u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_j, ..., u_n\}$ es un sistema de generadores de U, entonces también son sistemas generadores de U los siguientes conjuntos:*

1. *El conjunto que se obtiene de S intercambiando la posición de dos vectores, $\{u_1, u_2, ..., u_j, ..., u_i, ..., u_n\}$.*
2. *El conjunto que se obtiene de S multiplicando uno de los vectores por un escalar $k \in \mathbb{K}$ distinto de cero, $\{u_1, u_2, ..., ku_i, ..., u_n\}$.*
3. *El conjunto que se obtiene de S sumando a uno de sus vectores otro multiplicado por un escalar $k \in \mathbb{K}$, $\{u_1, u_2, ..., u_i + ku_j, ..., u_j, ..., u_n\}$.*

2.2.3. Espacio de filas y espacio de columnas de una matriz

Definición 2.2.14. Dada una matriz de orden $m \times n$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, las filas de A pueden ser vistas como un conjuntos de m vectores de $\mathbb{K}^n$ (o las coordenadas respecto de una cierta base de m vectores de un espacio vectorial de dimensión n). Llamaremos *espacio de filas de A* al subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por las filas de A, y lo denotaremos por $\mathcal{F}(A)$. Análogamente, el *espacio de columnas de A*, que denotaremos por $\mathcal{C}(A)$, es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por las columnas de A.

Observación 2.2.15. Aplicando el lema anterior, es evidente que si dos matrices A y B son equivalentes por filas (columnas), entonces $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ ($\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$).

Corolario 2.2.16. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de V. Sea $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2, ..., u_k\})$ un subespacio vectorial de V y consideremos la matriz A de orden $k \times n$ cuyas filas son las coordenadas, respecto de B, de los vectores $u_1, u_2, ..., u_k$. Entonces:*

1. *$dim(U) = rg(A)$.*
2. *Las filas no nulas de la forma normal de Hermite por filas de A son las coordenadas de los vectores de una base de U.*

Observación 2.2.17. El resultado anterior es válido si cambiamos filas por columnas.

Ejemplo 2.2.18. Consideremos de nuevo el subespacio U de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \mathcal{L}(\{(1, 3, 4, 1), (2, 6, 8, 2), (2, 5, 7, 2)\}).$$

Como antes, escribamos la matriz cuyas filas son las coordenadas, respecto de la base canónica, de los vectores del sistema generador de U y calculemos su forma normal de Hermite por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, una base de U es $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$.

La ventaja de este método es que obtenemos una base lo más simple posible, lo que facilitará cálculos posteriores.

2.2.4. Ecuaciones cartesianas y paramétricas de un subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita n y sea B una base de V. Sea $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2, ..., u_r\})$, donde $r \leq n$ y los vectores $u_1, u_2, ..., u_r$ son linealmente independientes. En estas condiciones tenemos que, dado $v \in V$, v será un vector de U si v es combinación lineal de $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_r u_r$.

Si tomamos coordenadas respecto de la base B, tenemos entonces que

$$\begin{array}{ccc} v & = & (x_1, x_2, ..., x_n)_B \\ u_1 & = & (u_{11}, u_{12}, ..., u_{1n})_B \\ u_2 & = & (u_{21}, u_{22}, ..., u_{2n})_B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_r & = & (u_{r1}, u_{r2}, ..., u_{rn})_B \end{array}.$$

Así, la igualdad $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_r u_r$, puede expresarse como

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{21} + ... + \lambda_r u_{r1} \\ x_2 & = & \lambda_1 u_{12} + \lambda_2 u_{22} + ... + \lambda_r u_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & = & \lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{r2} + ... + \lambda_r u_{rn} \end{array} \right. .$$

A esta expresión se le denomina *ecuaciones paramétricas de U* (respecto de la base B).

Veamos ahora otro modo de presentar al subespacio U. Consideremos $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2, ..., u_r\})$, con $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ una base de U. Al igual que en caso anterior, consideramos las coordenadas de $u_1, u_2, ..., u_r$ respecto de B,

$$\begin{array}{ccc} u_1 & = & (u_{11}, u_{12}, ..., u_{1n})_B \\ u_2 & = & (u_{21}, u_{22}, ..., u_{2n})_B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_r & = & (u_{r1}, u_{r2}, ..., u_{rn})_B \end{array}.$$

Entonces, por el corolario anterior, tenemos que

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rn} \end{pmatrix} = r.$$

Por lo tanto, si un vector $v = (x_1, x_2, ..., x_n)_B \in U$, entonces

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rn} \end{pmatrix} = r,$$

ya que v es combinación lineal de $u_1, u_2, ..., u_r$.

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, tenemos entonces que todos los menores de orden $r + 1$ de la matriz anterior deben ser 0. Al conjunto de todos estos menores de orden $r + 1$ igualados a 0 se le denominan *ecuaciones cartesianas de U* (repecto de la base B).

Ejemplo 2.2.19. Consideremos en $\mathbb{R}^5$ con la base canónica, el subespacio vectorial U generado por

$$\{(1,2,3,4,5),(6,7,8,9,0)\}.$$

Vamos a hallar la dimensión de U, una base de U y sus ecuaciones paramétricas y cartesianas.

Para hallar una base de U, consideramos la matriz cuyas filas son los vectores generadores de U, y calculamos su forma normal de Hermite por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, una base de U podría ser tanto $\{(1,2,3,4,5),(6,7,8,9,0)\}$, como el conjunto

$$\{(1,0,-1,-2,-7),(0,1,2,3,6)\}.$$

Elegiremos esta última por comodidad en los cálculos. Además, esto nos indica que $\dim(U) = 2$.

Hallemos ahora las ecuaciones paramétricas de U. Para cualquier vector $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_B$, se tendrá que $v \in U$ si, y solo si, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tales que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & \mu \\ x_3 & = & -\lambda + 2\mu \\ x_4 & = & -2\lambda + 3\mu \\ x_5 & = & -7\lambda + 6\mu \end{array} \right. .$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de U.

Para hallar las ecuaciones cartesianas de U, consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como dicha matriz ha de tener rango 2, entonces todos los menores de orden 3 deben ser cero. Como se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

es suficiente con considerar los menores

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

de lo que obtenemos las ecuaciones cartesianas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \quad + x_4 & = & 0 \\ 7x_1 - 6x_2 \qquad + x_5 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Proposición 2.2.20. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea U un subespacio vectorial de V con dimensión $r \leq n$. Entonces se verifica la relación*

$$\textit{número de ecuaciones cartesianas de } U = n - r.$$

Ejemplo 2.2.21. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el subespacio U generado por los vectores $(1, -1, 0)$ y $(1, 1, 0)$. Como estos dos vectores son linealmente independientes, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

entonces $\dim(U) = 2$.

Por la expresión anterior, tenemos entonces que el número de ecuaciones cartesianas de U es $3 - 2 = 1$. Una sola ecuación. Así, tenemos que

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

es la única ecuación cartesiana de U, es decir,

$$2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0.$$

Ejemplo 2.2.22. Consideremos (otra vez) el subespacio U de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \mathcal{L}(\{(1, 3, 4, 1), (2, 6, 8, 2), (2, 5, 7, 2)\}).$$

Vimos anteriormente que una base de U era $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$, con lo que $\dim(U) = 2$. Por lo tanto, el subespacio vectorial U tendrá $4 - 2 = 2$ ecuaciones cartesianas.

Si consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

esta matriz debe tener rango 2, siempre que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, con lo que todos los menores de orden 3 han de ser ceros. Evidentemente, solo podemos formar 2 menores de orden 3, lo que nos dará las dos ecuaciones cartesianas de U

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, las ecuaciones cartesianas de U son

$$U \equiv \left\{\begin{array}{rcl} -x_1 + -x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 \qquad + x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

2.2.5. Suma e intersección de subespacios

2.2.5.1. Intersección de subespacios

Definición 2.2.23. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Se define el subespacio vectorial U *intersección* W, y se denota por $U \cap W$, como el mayor subespacio vectorial contenido en U y en W, es decir, $U \cap W \subseteq U$ y $U \cap W \subseteq W$.

Observación 2.2.24. $U \cap W$ es el espacio vectorial que queda cuando se cortan U y W, es decir, es lo que que hay en común en ambos subespacios. En general, si tenemos una familia de subespacios $U_1, U_2, ..., U_n$, $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ es un subespacio vectorial de V.

En la práctica, para calcular la intersección de dos subespacios vectoriales, la mejor manera es hacerlo mediante las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios. Así, bastará con reunir todas las ecuaciones cartesianas de U y W juntas para obtener las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$. Hay que tener en cuenta que, al reunir todas estas ecuaciones cartesianas, pueden haber ecuaciones que sean combinación lineal de otras. Estas ecuaciones habrá que eliminarlas.

Ejemplo 2.2.25. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

y

$$W = \mathcal{L}\{(1,1,1), (1,1,0), (-1,-1,1)\}.$$

Como ya tenemos las ecuaciones cartesianas de U ($U \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0$) para calcular $U \cap W$ necesitaremos hallar las ecuaciones cartesianas de W. En primer lugar, a partir del sistema de generadores de W, hallamos una base de W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego una base de W es $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$, con lo que $\dim(W) = 2$ y, por tanto, W tendrá una sola ecuación cartesiana. Dicha ecuación es

$$W \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow W \equiv x_1 - x_2 = 0.$$

Luego las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ son

$$U \cap W \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

y, como ninguna ecuación puede eliminarse mediante transformaciones elementales, tenemos que la dimensión de $U \cap W$ es 1, ya que

$$\text{número de ecuaciones cartesianas de } U \cap W = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U \cap W) \Leftrightarrow$$

$$2 = 3 - \dim(U \cap W) \Leftrightarrow \dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1.$$

2.2.5.2. Suma de subespacios

La unión de dos subespacios vectoriales U y W de un espacio vectorial V no es necesariamente un subespacio de V. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.26. En $\mathbb{R}^2$, consideramos los subespacios $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ (que representa a todos los vectores del eje horizontal) y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ (lo mismo para el eje vertical). En este caso, $(1, 0) \in U$ y $(0, 1) \in W$, con lo que $(1, 0), (0, 1) \in U \cup W$. Pero $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin U \cup W$, con lo que $U \cup W$ no es un subespacio vectorial.

Definición 2.2.27. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Se define el subespacio vectorial *suma de U con W*, y se denota por $U + W$, como el menor subespacio vectorial que contiene a U y a W, es decir, $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$.

Observación 2.2.28. Se tiene que $U + W = \mathcal{L}(U \cup W)$. La definición de suma de subespacios puede generalizarse a más de dos subespacios, es decir, si tenemos una familia de subespacios $U_1, U_2, ..., U_n$, $U_1 + U_2 + ... + U_n$ es un subespacio vectorial de V.

Para calcular $U + W$ reunimos las bases de ambos subespacios, es decir, si $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$, con $r \leq \dim(V)$, es una base de U, y $\{w_1, w_2, ..., w_s\}$, con $s \leq \dim(V)$, es una base de W, entonces

$$\{u_1, u_2, ..., u_r, w_1, w_2, ..., w_s\}$$

es un **sistema generador** de $U + W$, pero no tiene por qué ser una base (puede haber vectores que sean combinaciones lineales del resto).

Ejemplo 2.2.29. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

y

$$W = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\}).$$

Para calcular $U + W$, necesitamos una base de U, ya que una base de W es $\{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Como U tiene una sola ecuación cartesiana, entonces la dimensión de U es 2. Para hallar una base de U podemos, por ejemplo, dar valores a las variables de la ecuación cartesiana de U. Por ejemplo:

- Si $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$, entonces $x_1 = -1$, con lo que obtenemos un primer vector $u_1 = (-1, 0, 1)$.
- Ahora al revés, si $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$, entonces obtenemos otro vector, $u_2 = (-1, 1, 0)$.
    - Nótese que u_1 y u_2 son linealmente independientes, con lo que obtendríamos una base de U. Si esto no ocurriera, habría que buscar otro vector u_3 distinto de u_2 y linealmente independiente de u_1.

Otra manera de hallar una base de U sería pasar de las ecuaciones cartesianas a las paramétricas:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -\lambda - \mu \\ x_2 & = & \lambda \\ x_3 & = & \mu \end{array} \right. ,$$

con lo que una base de U es $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

Una vez tenemos una base de U y otra de W, tenemos entonces que

$$\{(1,1,1),(0,0,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

es un sistema generador de $U+W$. Hallemos a partir de este sistema generador una base para $U+W$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que llegamos a que una base para $U+W$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y, por tanto, $U+W=\mathbb{R}^3$.

2.2.5.3. Resumen del cálculo de $U\cap W$ y $U+W$

Dados dos subespacios U y W de un espacio vectorial V:

1. Reuniendo las ecuaciones cartesianas de U y W se obtienen las ecuaciones cartesianas de $U\cap W$ (posiblemente algunas puedan ser eliminadas mediante transformaciones elementales).
2. Reuniendo las bases de U y de W se obtiene un sistema generador de $U+W$ (posiblemente algunos vectores deban ser eliminados para obtener una base).

Proposición 2.2.30. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita y sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Entonces se verifica la siguiente igualdad*

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U\cap W).$$

Ejemplo 2.2.31. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios

$$U = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3=0\}$$

y

$$W = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,0),(-1,-1,1)\}.$$

Anteriormente habíamos calculado que

$$U\cap W \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 0 \\ x_1-x_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

con lo que $\dim(U\cap W)=1$.

Así, se tiene entonces que

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W) = 2+2-1 = 3,$$

con lo que necesariamente $U+W=\mathbb{R}^3$.

Ejercicios

1. Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales. Para aquellos que lo sean, halla una base.

   a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda)\}$.

   b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$.

   c) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 2t - \lambda, z = t + \lambda\}$.

   d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\}$.

   e) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$.

2. Calcula la dimensión del subespacio U generado por los vectores $(1, a, 1)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 0, a)$ según los valores de a. Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas de U para los valores de a para los que la dimensión de U es igual a 2.

3. Prueba que los vectores $(2, 5, 3)$, $(0, -1, -1)$ engendran el mismo subespacio que los vectores $(4, 9, 5)$, $(2, 7, 5)$. Expresa tres bases distintas de este subespacio.

4. Escribir cada uno de los siguientes polinomios como combinación lineal de $x + 1$, $x^2 + x$ y $x^2 + 2$.

   a) $x^2 + 3x + 2$.

   b) $2x^2 - 3x + 1$.

   c) $x^2 + 1$.

   d) x.

5. Comprobar que el conjunto $\{(1, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$ forma una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $(2, 5, 10)$ en dicha base.

6. Si los números 1, 3 y 5 son las coordenadas de un vector v en la base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, halla las coordenadas del vector v en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

7. En $\mathbb{R}^3$, hallar las coordenadas del vector $v = (x, y, z)$ en la base

   $$B' = \{(1, 2, 0), (-3, -7, 1), (0, 2, -1)\}.$$

   ¿Cuál es la matriz de cambio de la base B' a la canónica?

8. Comprobar que $B = \{(1, 2, 1), (1, 1, 0), (3, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 3, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 0)\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ y calcular las ecuaciones matriciales de los siguientes cambios de bases:

   a) De la base B a la base canónica B_c.

   b) De la base B' a B_c.

   c) De la base B a B'.

   d) De la base B' a B.

9. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$,$B = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, -2)\}$ y $B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 0, 1)\}$.

a) Hallar la expresión analítica del cambio de base de B a B', de B' a B y de B' a la base canónica.

b) Si a $v = (1,1,1)$ respecto de B, ¿cuáles son sus coordenadas respecto de B'?

c) Si $u = (-1,0,-1)_{B'}$, escribir la expresión de u respecto a la base B.

10. Dados los subespacios vectoriales U y V de $\mathbb{R}^3$

$$U \equiv x - 2y + z = 0 \text{ y } V \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\mu \\ y & = & \mu \\ z & = & 3\lambda \end{array} \right. .$$

Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas, una base y la dimensión de los subespacios U, V, $U \cap V$ y $U + V$.

11. Dados los subespacios vectoriales U y V de $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathcal{L}(\{(1,0,1,1),(1,-1,-1,0),(0,1,2,1)\}),$$

$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}.$$

Calcula las ecuaciones paramétricas y cartesianas, una base y la dimensión de los subespacios U, V, $U \cap V$ y $U + V$.

12. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $U = \langle (1,1,1,1),(1,-1,1,-1) \rangle$ y $W = \langle (1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5) \rangle$.

a) Hallar la dimensión y las ecuaciones cartesianas del subespacio $U + W$.

b) Hallar la dimensión y las ecuaciones paramétricas del subespacio $U \cap W$.

13. En un espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, sea la base canónica $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$. Se considera el subespacio U de ecuación cartesiana en $x = y - z$.

a) Obtener una base de U.

b) Si W es el subespacio engendrado por el sistema $\{e_1 + e_2 - e_3, e_1 + e_2\}$, hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio W.

c) Hallar una base de cada uno de los subespacios vectoriales $U \cap W$ y $U + W$.