Capítulo 9

Sucesiones de números

En este capítulo introduciremos el concepto de límite de sucesiones reales.

9.1. Definiciones y ejemplos

Definición 9.1.1. Una *sucesión de números reales* es una lista infinita de números ordenados, $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \subseteq \mathbb{R}$. En este caso, a la sucesión $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ la denotaremos por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 9.1.2. Nótese que una sucesión no es más que una función $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, ..., $a(n) = a_n$, ..., de manera que el orden importa. Así, es claro que podemos hablar del límite de una sucesión, o de sucesiones convergentes o divergentes, teniendo así las propiedades usuales de aritmética de límites. Además, tendremos sucesiónes crecientes ($a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), decrecientes ($a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$), estrictamente crecientes y estrictamente decrecientes.

Ejemplo 9.1.3.

1. Consideremos la sucesión $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$. Al término general de esta sucesión se le denota por a_n. Así, tenemos que $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Claramente esta sucesión es estrictamente decreciente, ya que $n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. **Progresión aritmética:** una progresión aritmética es una sucesión de la forma $a_n = a_1 + (n-1)d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde a_1 es el primer término de la sucesión y $d \in \mathbb{R}$ es la diferencia de la progresión.

3. **Progresión geométrica:** una progresión geométrica es una sucesión de la forma $a_n = ar^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $a, r \in \mathbb{R}$. Al valor r se le denomina razón de la progresión.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{3n^2} = \frac{1}{3}$.

9.2. Algunos resultados sobre convergencia de sucesiones

Teorema 9.2.1. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces se verifica:*

1. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.*

2. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Ejemplo 9.2.2. Nótese que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ está acotada inferiormente por 0, ya que $0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente entonces, por el teorema anterior, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De hecho, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 9.2.3. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Ejemplo 9.2.4. El recíproco no es cierto. Basta considerar $a_n = (-1)^n$. Así, es claro que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, sin embargo, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

Teorema 9.2.5. (Criterio de Stolz). *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones y supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

1. *$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente monótona creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.*
2. *$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente monótona decreciente con $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l,$$

con $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Ejemplo 9.2.6.

1. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n}$.

   Consideremos $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ y $b_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Como b_n es estrictamente creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ entonces, por el criterio de Stolz,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + ... + n - (1 + 2 + 3 + ... + (n-1))}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1} = \infty,$$

   con lo que

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n} = \infty.$$

2. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+...+n\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

   Consideremos $a_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + ... + n\sqrt[n]{n}$ y $b_n = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Como b_n es estrictamente creciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ entonces, por el criterio de Stolz,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + ... + n\sqrt[n]{n} - (1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + ... + (n-1)\sqrt[n-1]{n-1})}{n^2 - (n-1)^2} =$$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{n}}{n^2 - (n^2 - 2n + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{n}}{2n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

   con lo que

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + ... + n\sqrt[n]{n}}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Corolario 9.2.7. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, *con* $l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. *Entonces se verifica:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = l$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = l$, *si* $a_n > 0$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$.

Corolario 9.2.8. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l$, *con* $l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ejemplo 9.2.9. Consideremos la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Para ello, consideremos la sucesión $b_n = n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Teorema 9.2.10. (Fórmula de Stirling). *Para* $n\to\infty$, *se tiene que* $n!$ *puede aproximarse por* $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. *En términos formales,* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$.

Ejemplo 9.2.11. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$.

Aplicando la fórmula de Stirling, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\sqrt{n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-n}\sqrt{2\pi}} = \infty.$$

Los siguientes resultados son casos análogos a los estudiados para funciones.

Proposición 9.2.12. (Criterio del sandwich). *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tres sucesiones tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. *Si* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Ejemplo 9.2.13. Sea $a_n = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{n}\right)$.

Como

$$0 \leq \left|\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ entonces, por el criterio del sandwich, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{n}\right)\right| = 0$ y, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

Corolario 9.2.14. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada. Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Ejemplo 9.2.15. Consideremos la sucesión $a_n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$.

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 9.2.16. *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *y existe* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n - 1)$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

Ejemplo 9.2.17. Por el teorema anterior, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{1}{n}} = e,$$

ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = 1$.

Ejercicios

1. Calcula los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, con $a > 0$	12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2!+3!+\ldots+n!}{n!}$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!e^n)^2}{n^{2n+1}}$	13) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n}}$	14) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(\frac{2n-1}{n}\right)$	15) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-7n+3}{(n-1)^2}$
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n}$	16) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$
6) $\lim\limits_{n\to\infty} (2\log(3n) - \log(n^2+1))$	17) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{n}}$
7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{(2n)!}}$	18) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$
8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}$	19) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n}$
9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$	20) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n)}$	21) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cos(n)}{n^2+1}$
11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$	22) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{arctg}(3n)}{n}$

2. Demostrar que la sucesión
$$a_n = \frac{e^n + (-e)^n}{e^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
no tiene límite, mientras que la sucesión
$$b_n = \frac{e^n + (-e)^n}{\pi^n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$
si que lo tiene. Obtener el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.