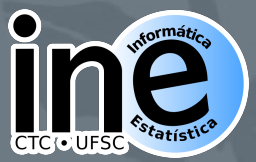
Estruturas de Dados

Árvores AVL

Departamento de Informática e de Estatística
Prof. Jean Everson Martina
Prof. Aldo von Wangenheim

2016.2



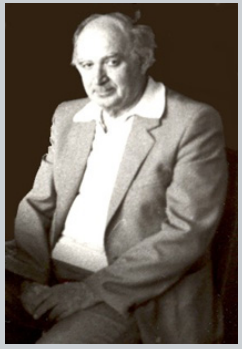
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Histórico

Árvore AVL

Inventada em por Georgy Maximovich Adelson-Velskii e Yevgeniy Mikhailovich Landis) e publicada em: "An algorithm for the organization of information. Trans. of Akademiya Nauk SSSR. Doklady, 1962, v. 146, no. 2, pp. 263-266 "

Georgy Maximovich Adelson-Velskii (Samara, Rússia, 1922)



Yevgeniy Mikhailovich Landis (Kharkov, Ucrânia, 1921)

Características

- Manter uma árvore binária de busca balanceada sob a presença de constantes inserções e deleções é **ineficiente**;
- Para contornar esse problema foi criada a árvore **AVL (Adelson-Velskii e Landis)**;
- A árvore AVL é uma árvore binária com uma **condição de balanço**, porém não completamente balanceada;
- Árvores AVL permitem inserção / deleção e **rebalanceamento** aceitavelmente rápidos.

Características

- Critério de balanceamento:
  - Dado um nodo qualquer, uma árvore está **AVL-balanceada** se as alturas das duas subárvores deste nodo diferem de, no máximo, 1;
- Para rebalancear uma árvore após uma inserção, são utilizadas **rotações** de subárvores:
  - Rotações simples em muitos casos;
  - Rotações duplas em alguns.

Características

- Estrutura de um nodo na árvore AVL

```
Class nodoAVL {
 info     : tipo_info;
 esq      : *nodoAVL;
 dir      : *nodoAVL;
 alt      :  inteiro;
};
```

- O campo **alt** deve ser atualizado recursivamente quando um nodo for inserido ou deletado.

Características

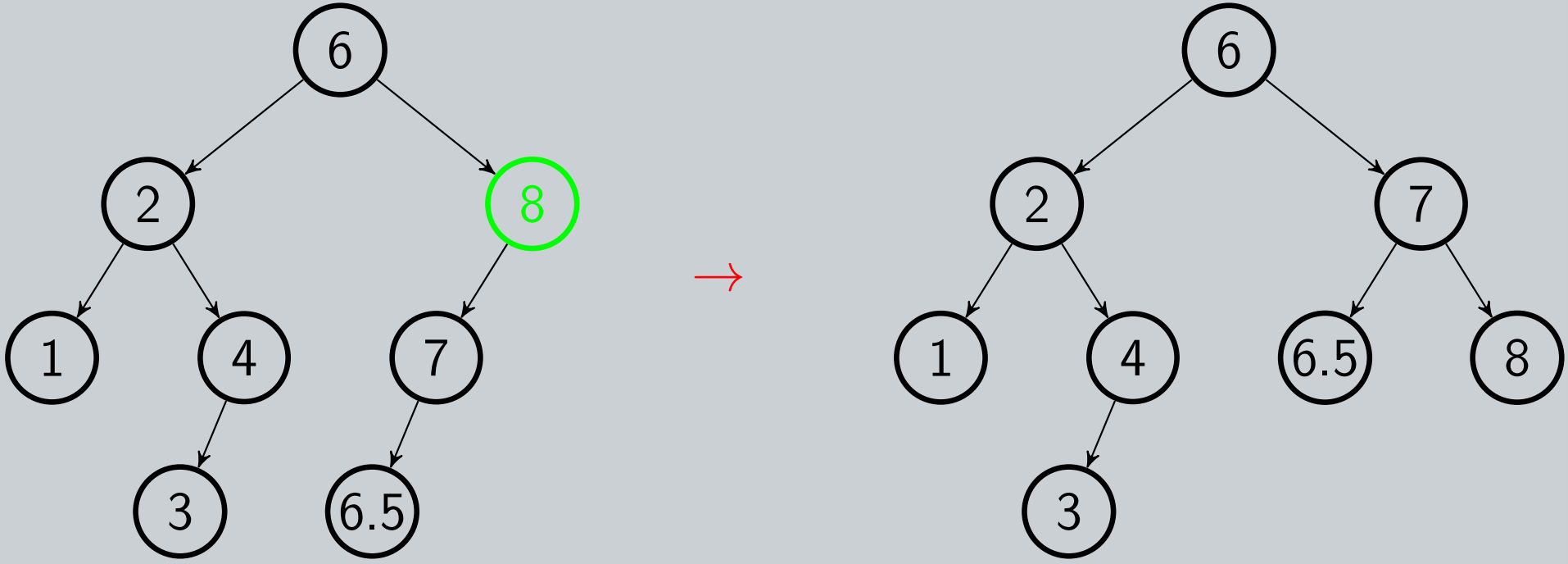
- Para o retorno da altura de uma subárvore necessitamos de um método especial;
- Um nodo pode não ter um ou ambos os filhos;
- Lembre-se que a pesquisa para garantir a condição-AVL é realizada perguntando-se a altura das duas subárvores.

```
inteiro altura( subárvore *nodoAVL)
início
 se (subárvore for NULO)
  retorne -1; /* A altura de uma subárvore
                 inexistente é definida como -1 */
 senão
  retorne subárvore->alt;
 fim se
fim
```

Inclusão com rotação

Exemplo de rebalanceamento:

- O nodo com chave 6.5 desequilibrou a árvore no nodo 8. Com a rotação da subárvore em torno do nodo 7, rebalanceamos.



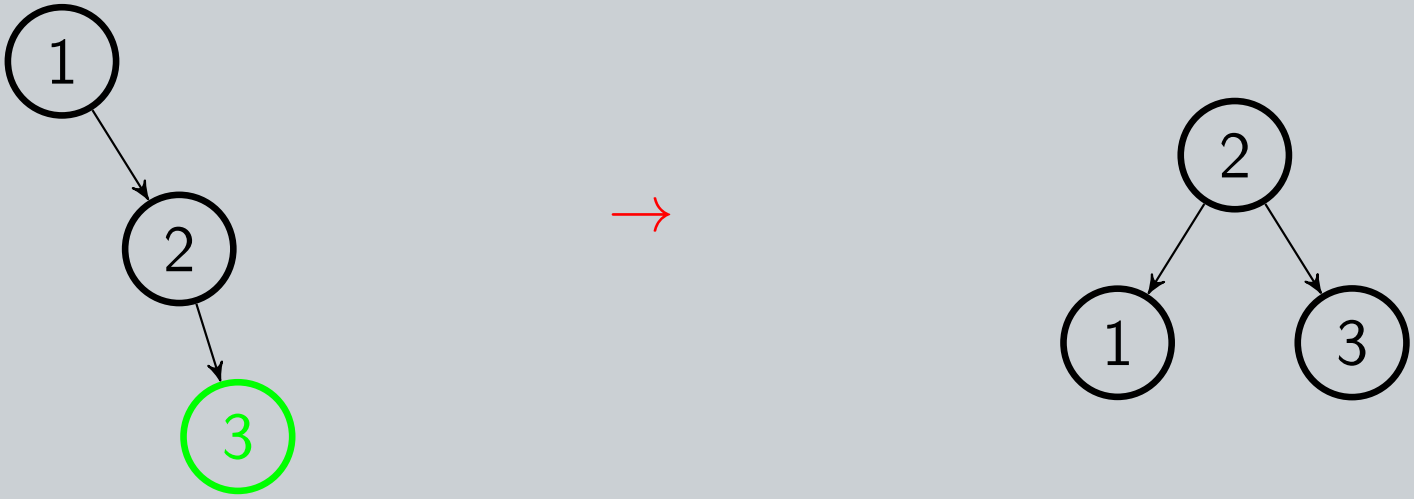
Inclusão com rotação

Algoritmo básico:

- Partimos do nodo inserido e subimos a árvore;
- Atualizamos a informação do balanceamento em cada nodo (na árvore AVL, cada nodo conhece a sua altura);
- Se chegamos à raiz sem encontrar nada errado, terminamos;
- Saso encontremos um nodo desbalanceado **(|altesq - altdir| $<$ 2 ferida)**, realizamos a rotação no primeiro nodo desbalanceado encontrado;
- No exemplo anterior, isto significa que, depois da inserção de 6.5, o nodo 8 ficou desbalanceado.

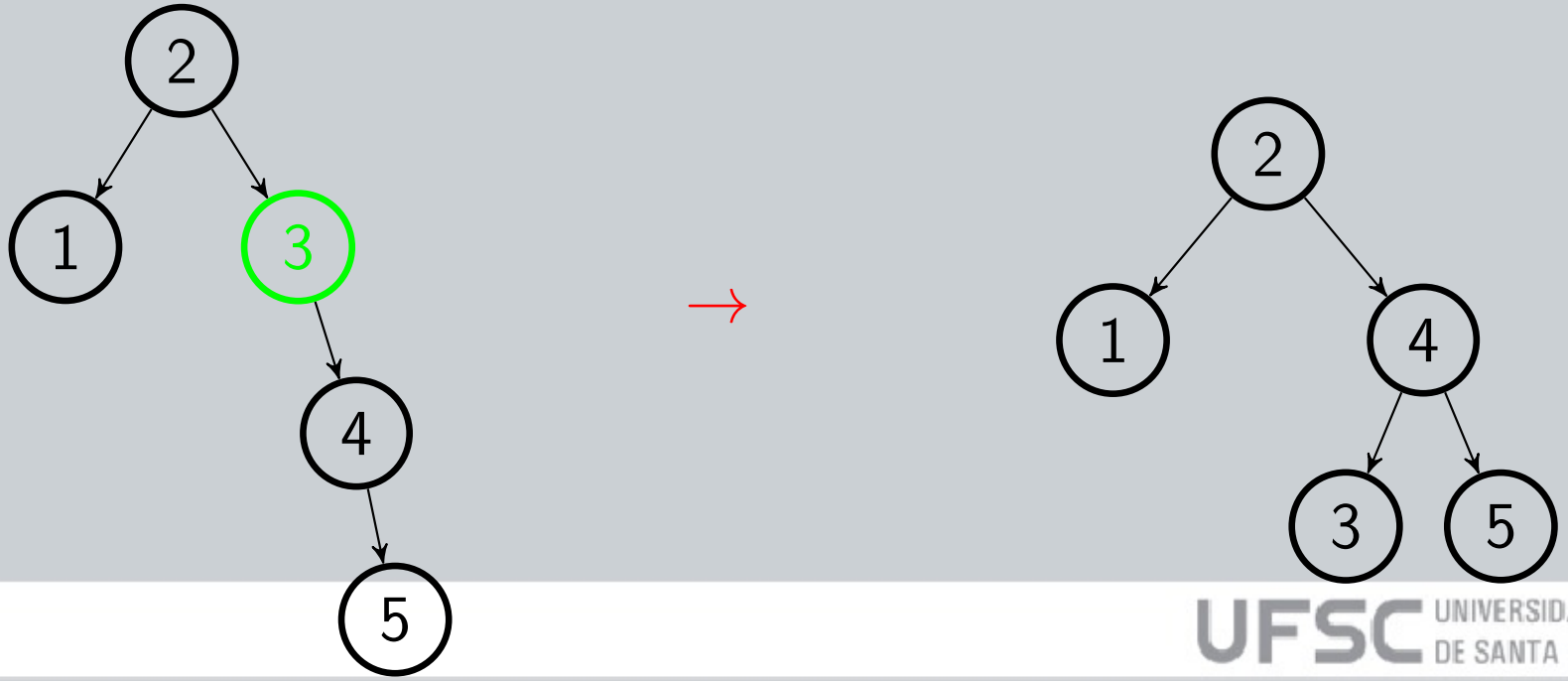
Exemplo: Adicionando de 1 a 7

- O primeiro problema ocorre quando inserimos o 3;
- A condição-AVL foi violada;
- Executamos uma rotação simples entre a raiz (cuja condição-AVL está violada) e seu filho da direita.



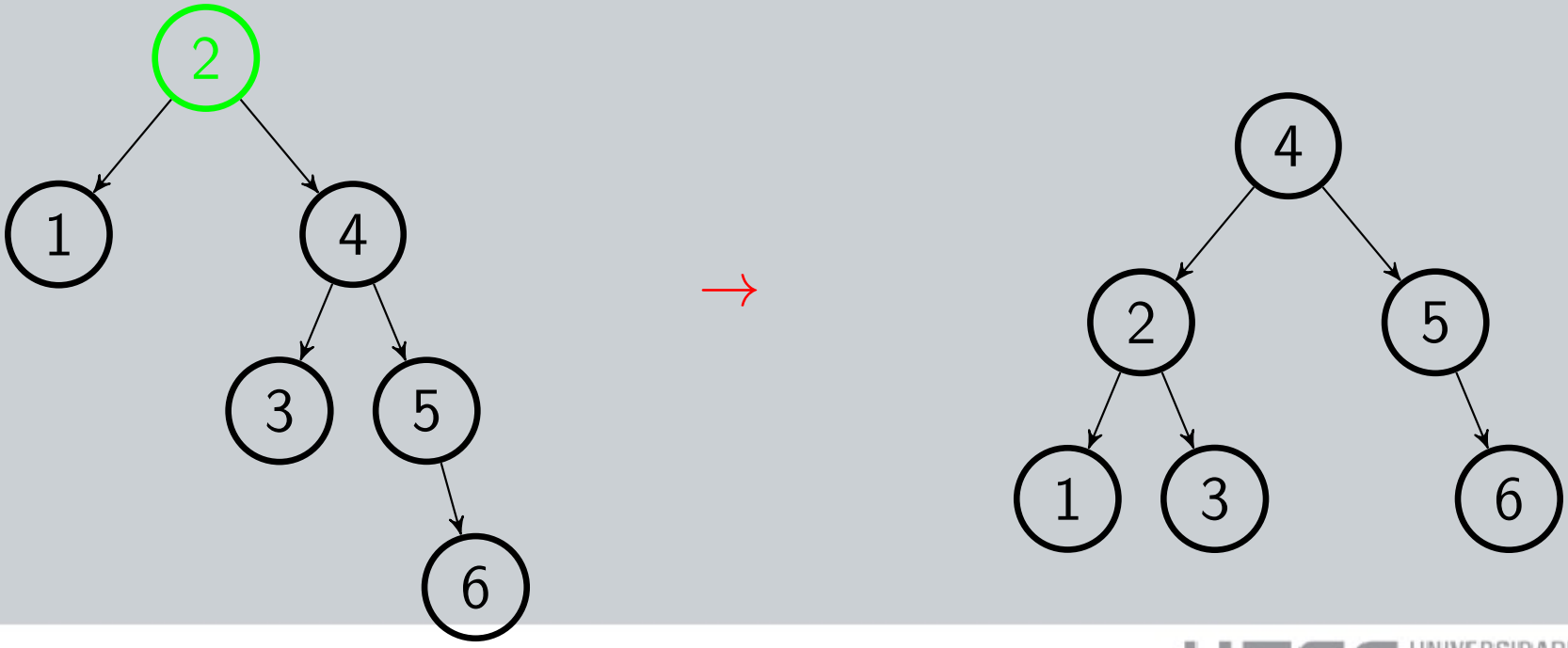
Exemplo: Adicionando de 1 a 7

- Inserimos o elemento 4 sem problemas;
- Inserimos o elemento 5: violação em 3;
- Mesmo processo da rotação anterior será seguido;
- Importantíssimo: observe-se que 2 precisa ser notificado que seu filho agora é o nodo com chave 4.



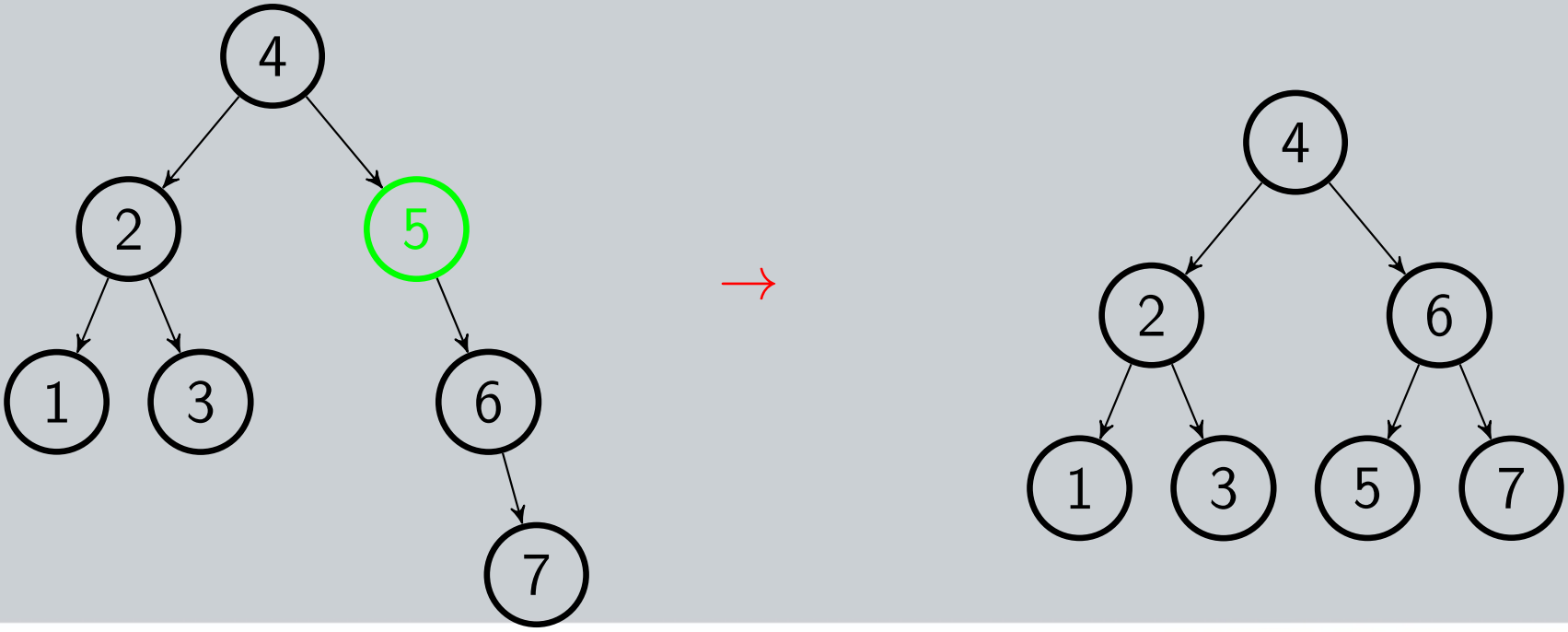
Exemplo: Adicionando de 1 a 7

- A inclusão do elemento 6 desequilibra a raiz:
  - subárvore direita tem altura 0;
  - subárvore esquerda tem altura 2;
- Rotacionamos na raiz entre 2 e 4.



Exemplo: Adicionando de 1 a 7

- A inclusão de um nodo com chave 7 causa uma rotação como já havíamos visto antes:
  - O 5 fica desequilibrado;
  - Rotacionamos em 6.



Inclusão com rotação simples à esquerda

```
nodoAVL *simp_roda_esq(k2 *nodoAVL)
variáveis locais
 k1 : *nodoAVL;
início
 k1 <- k2->esq;
 k2->esq <- k1->dir;
 k1->dir <- k2;
  /* atualize alturas */
 k2->alt <-max(altura(k2->esq),altura(k2->dir))+ 1;
 k1->alt <-max(altura(k1->esq),k2->alt) + 1;
 retorne k1; /* nova raiz da subárvore */
fim
```

Inclusão com rotação simples à direita

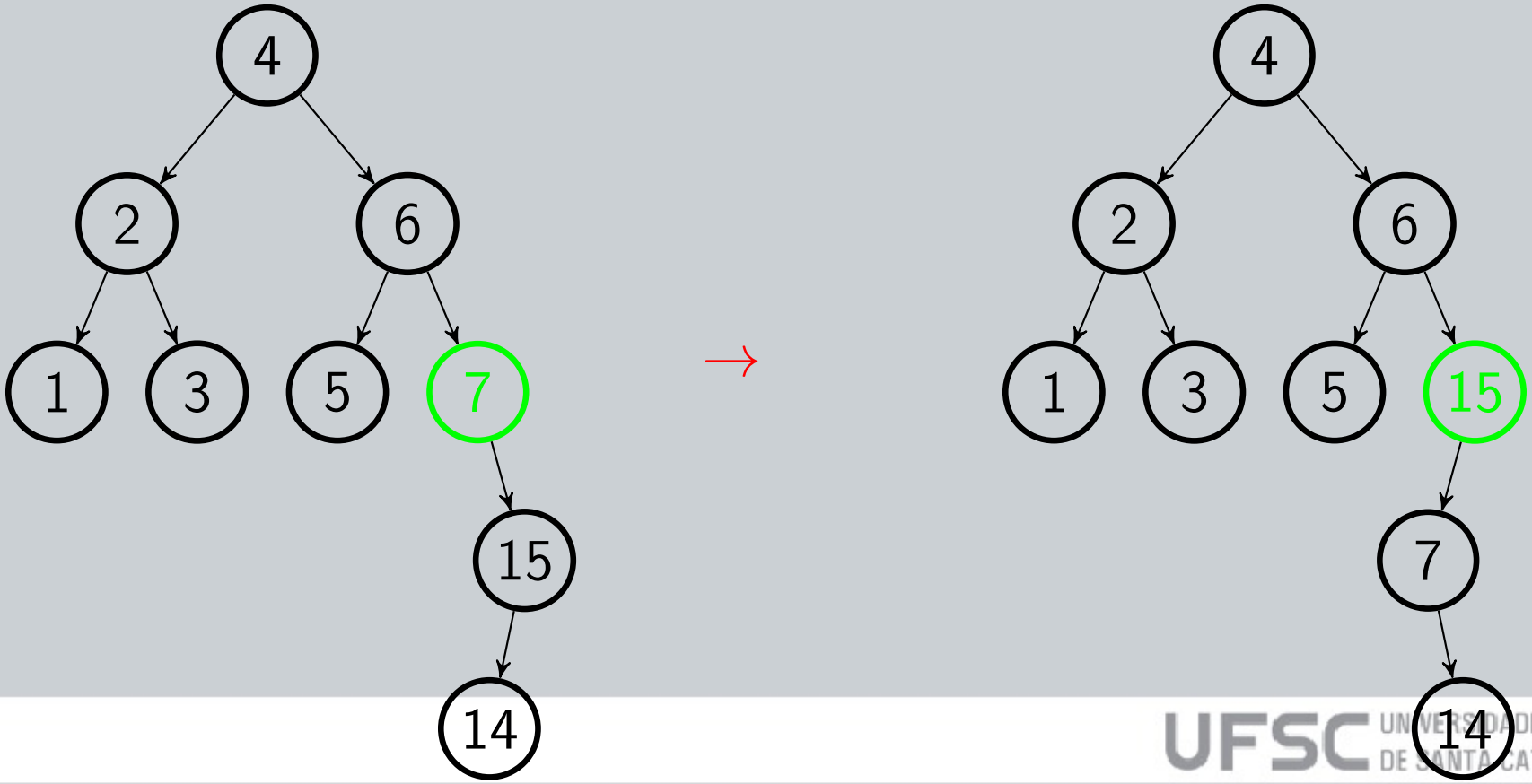
```
nodoAVL *simp_roda_dir(k2 *nodoAVL)
variáveis locais
 k1 : *nodoAVL;
início
 k1 <- k2->dir;
 k2->dir <- k1->esq;
 k1->esq <- k2;
  /* atualize alturas */
 k2->alt <-max(altura(k2->dir),altura(k2->esq))+ 1;
 k1->alt <-max(altura(k1->dir),k2->alt) + 1;
 retorne k1; /* nova raiz da subárvore */
fim
```

Inclusão com rotação dupla

- O algoritmo descrito até agora tem um problema:
  - Existem casos onde ele não basta para consertar a árvore após uma inclusão ou exclusão;
- Exemplo: inserimos as chaves 8 a 15, em ordem inversa, na árvore anterior:
  - A inserção de 15 não provoca problemas, nem desbalanceia a árvore;
  - A inserção de 14, por sua vez, faz o rebalanceamento falhar.

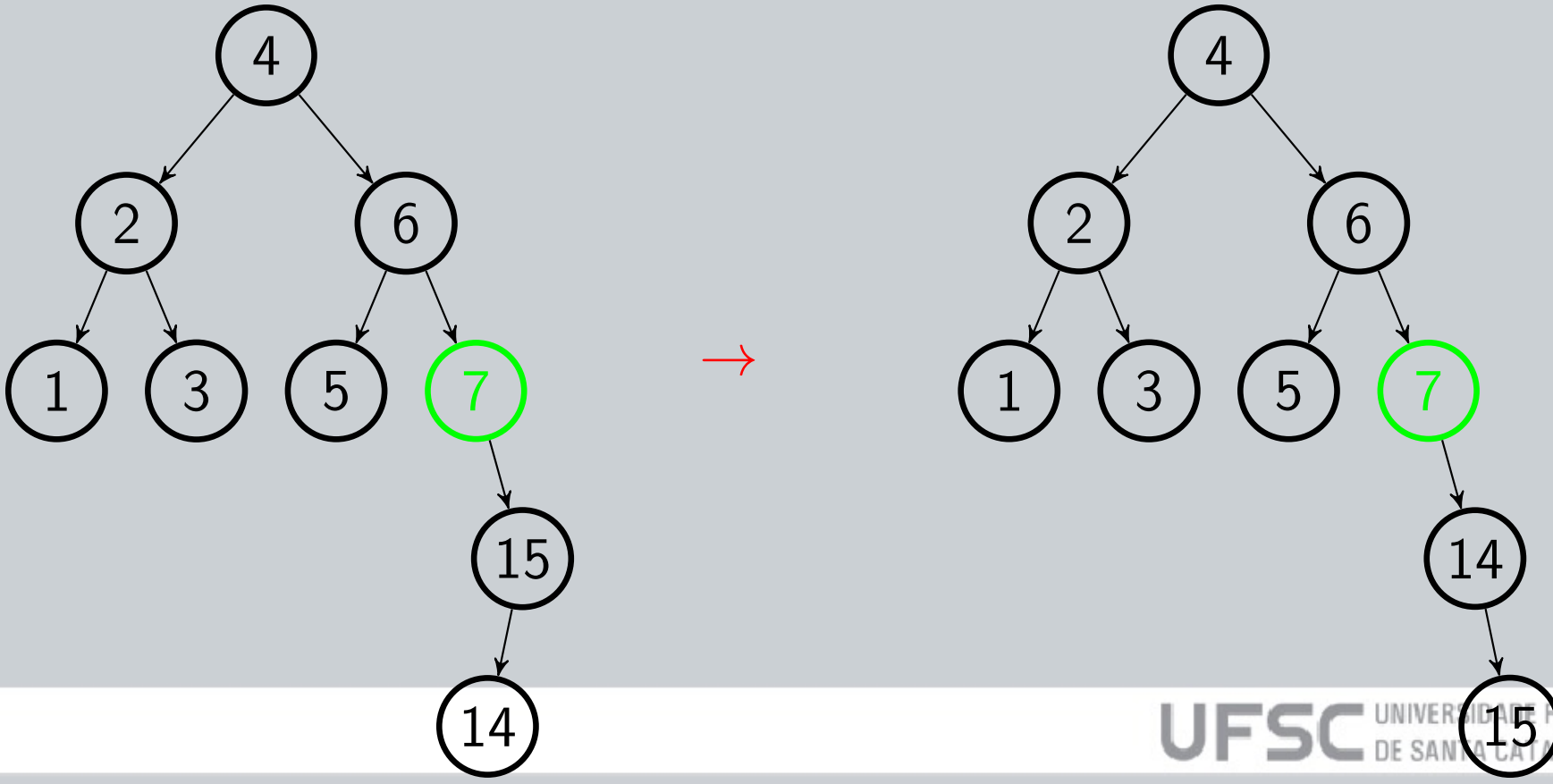
Rotação Simples Não é Suficiente

- O problema que surge aqui é que tanto 7 como 14 são candidatos à subárvore esquerda de 15.
- Neste caso, necessitamos de uma dupla rotação.



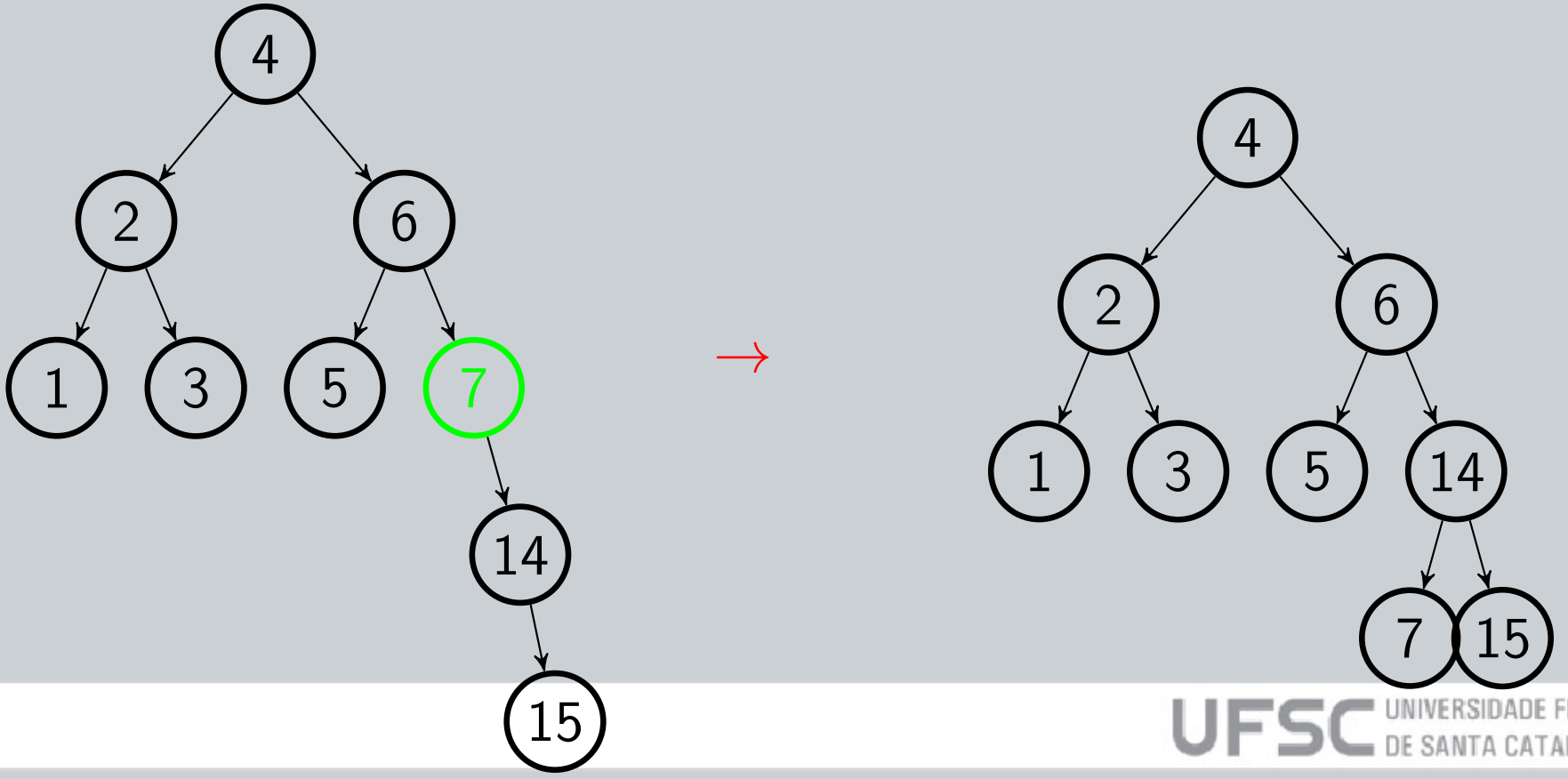
Inclusão com Rotação Dupla

- No exemplo, a rotação direita-esquerda envolve o 7, o 15 e o 14;
- Primeiro rotacionamos 14-15 à direita, depois 7-14 à esquerda.



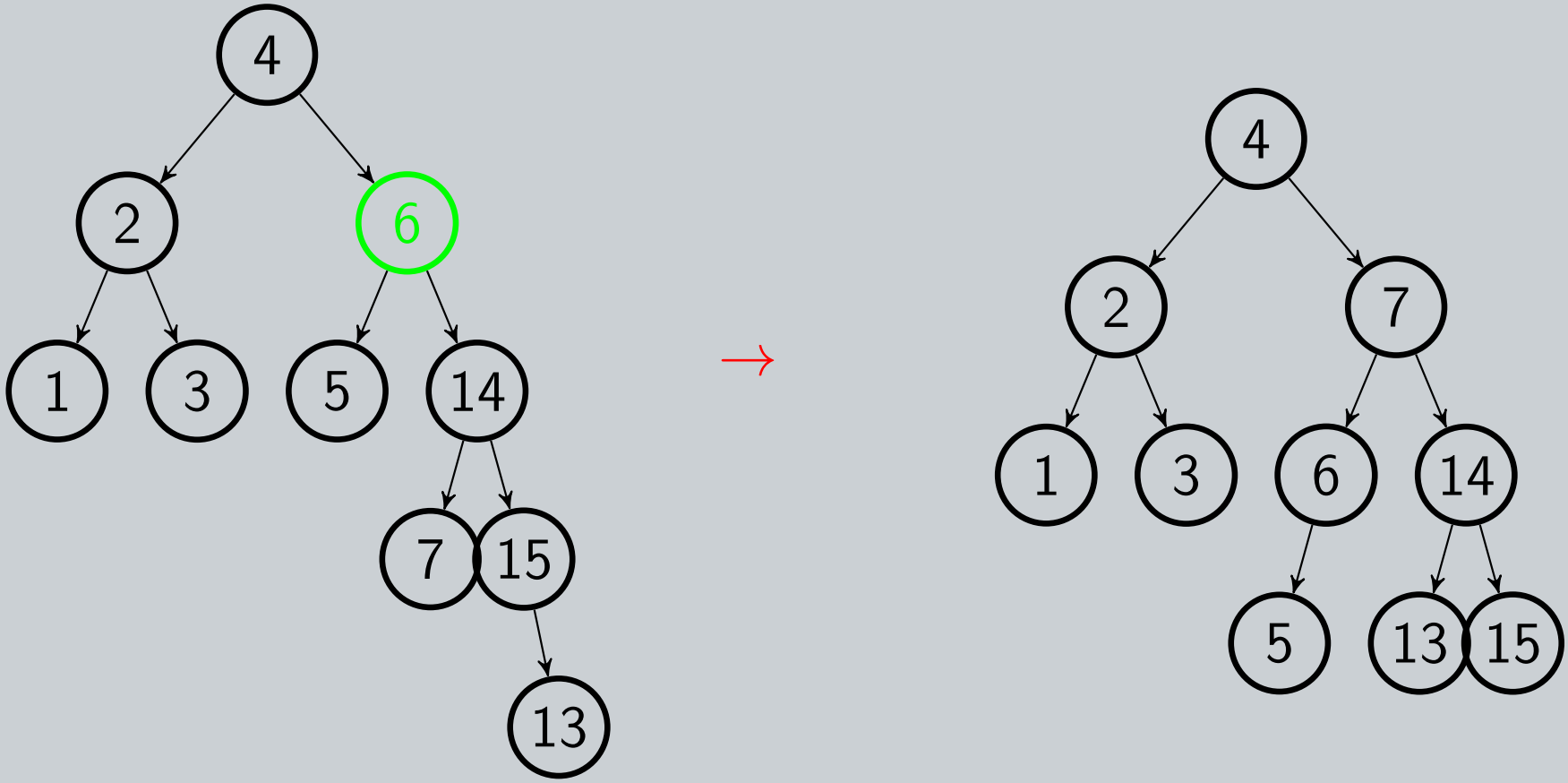
Inclusão com Rotação Dupla

- No exemplo, a rotação direita-esquerda envolve o 7, o 15 e o 14;
- Primeiro rotacionamos 14-15 à direita, depois 7-14 à esquerda.



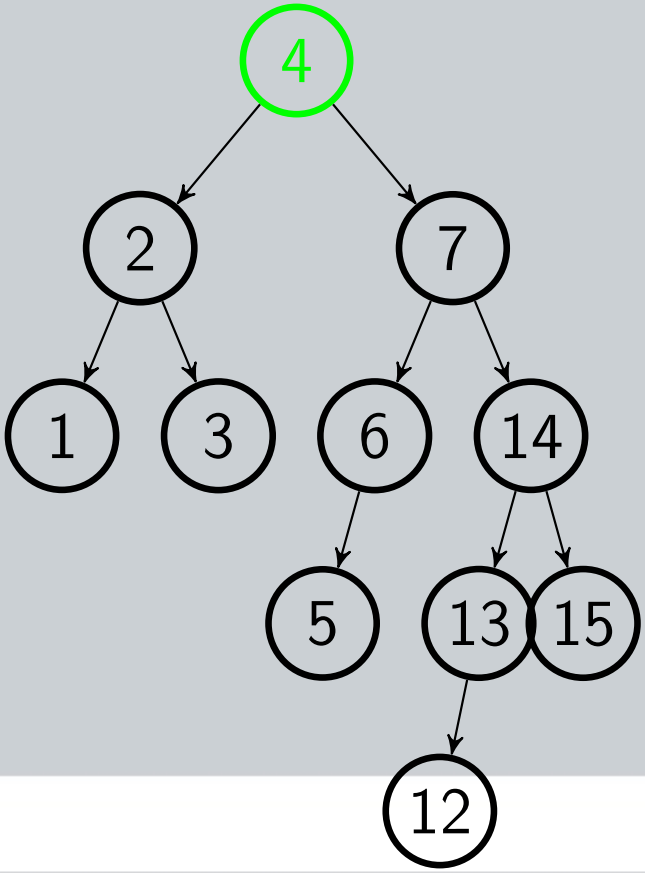
Inclusão do Elemento 13

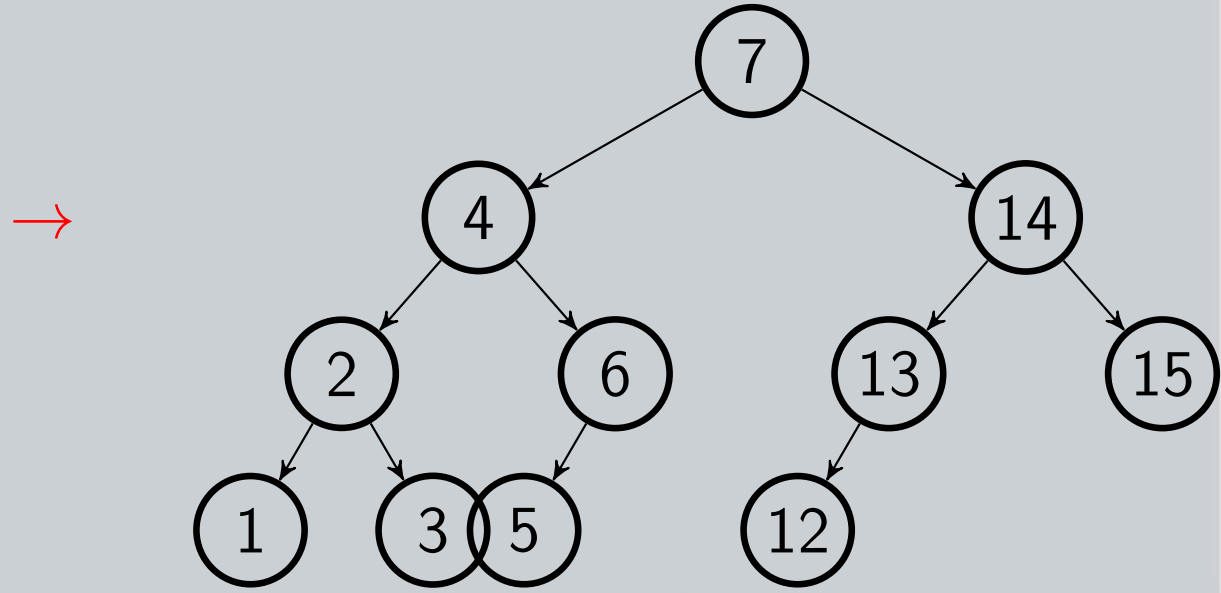
- Novamente uma dupla rotação direita-esquerda.



Inclusão do Elemento 12

- A inclusão do elemento 12 provoca um desequilíbrio na raiz;
- Mas agora é simples.





Rotação Dupla à Esquerda

- Função chamada somente se k3 possuir um filho à esquerda e se o filho à esquerda de k3 possuir um filho à direita. Ela realiza a rotação e atualiza as alturas das subárvores rotacionadas.

```
nodoAVL *dup_roda_esq(k3 : *nodoAVL)
início
 /* Rotacione entre k1 e k2 */
 k3->esq <- simp_roda_dir( k3-> esq );
 /* Rotacione entre k3 e k2 */
 retorne ( simp_roda_esq( k3 );
fim
```

- Da mesma forma que com a rotação simples, a rotação dupla à direita é a operação simétrica da rotação à esquerda e é facilmente implementada.

Inserção em Árvore AVL

```
nodoAVL *inserçãoAVL(T* info, *nodoAVL arv, *nodoAVL pai)
variáveis
 arv_rodada : *nodoAVL;
início
 se (arv é NULO) então /* Folha: aloca novo nodo */
  arv <- aloca novo nodo;
  se (arv é NULO) então retorne ERRO;
  arv->info <- info; arv->alt <- 0;
  arv->esq <- NULO; arv->dir <- NULO;
 senão
  se (info < arv->info) então
   arv->esq <- inserçãoAVL(info, arv->esq, arv);
   se ((altura(arv->esq) - altura(arv->dir) > 1)
    se (info < arv->esq->info) então
     arv_rodada<-simp_roda_esq(arv);
    senão arv_rodada <- dup_roda_esq(arv);
    fim se
    se (pai->esq = arv) então pai->esq <- arv_rodada;
    senão pai->dir <- arv_rodada;
    fim se
   senão
    arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) + 1;
   fim se
  senão // (continua)
```

Inserção em Árvore AVL

```
nodoAVL *inserçãoAVL(T* info, *nodoAVL arv, *nodoAVL pai)
variáveis
 arv_rodada : *nodoAVL;
início
 se (arv é NULO) então /* Folha: aloca novo nodo */
  arv <- aloca novo nodo;
  se (arv é NULO) então retorne ERRO;
  arv->info <- info; arv->alt <- 0;
  arv->esq <- NULO; arv->dir <- NULO;
 senão
  se (info < arv->info) então
   arv->esq <- inserçãoAVL(info, arv->esq, arv);
    se ((altura(arv->esq) - altura(arv->dir) > 1)
     se (info < arv->esq->info) então
      arv_rodada<-simp_roda_esq(arv);
     senão arv_rodada <- dup_roda_esq(arv);
     fim se
     se (pai->esq = arv) então pai->esq <- arv_rodada;
     senão pai->dir <- arv_rodada;
     fim se
    senão
     arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) + 1;
    fim se
  senão // (continua)
```

Inserção em Árvore AVL

```
nodoAVL *inserçãoAVL(T* info, *nodoAVL arv, *nodoAVL pai)
variáveis
 arv_rodada : *nodoAVL;
início
 se (arv é NULO) então /* Folha: aloca novo nodo */
  arv <- aloca novo nodo;
  se (arv é NULO) então retorne ERRO;
  arv->info <- info; arv->alt <- 0;
  arv->esq <- NULO; arv->dir <- NULO;
 senão
  se (info < arv->info) então
   arv->esq <- inserçãoAVL(info, arv->esq, arv);
    se ((altura(arv->esq) - altura(arv->dir) > 1) //Rotaciona?
    se (info < arv->esq->info) então
     arv_rodada<-simp_roda_esq(arv);
    senão arv_rodada <- dup_roda_esq(arv);
    fim se
    se (pai->esq = arv) então pai->esq <- arv_rodada;
    senão pai->dir <- arv_rodada;
    fim se
   senão
    arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) + 1;
   fim se
  senão // (continua)
```

Inserção em Árvore AVL

```
nodoAVL *inserçãoAVL(T* info, *nodoAVL arv, *nodoAVL pai)
variáveis
 arv_rodada : *nodoAVL;
início
 se (arv é NULO) então /* Folha: aloca novo nodo */
  arv <- aloca novo nodo;
  se (arv é NULO) então retorne ERRO;
  arv->info <- info; arv->alt <- 0;
  arv->esq <- NULO; arv->dir <- NULO;
 senão
  se (info < arv->info) então
   arv->esq <- inserçãoAVL(info, arv->esq, arv);
   se ((altura(arv->esq) - altura(arv->dir) > 1)
     se (info < arv->esq->info) então  //Qual Rotacão?
      arv_rodada<-simp_roda_esq(arv);
     senão arv_rodada <- dup_roda_esq(arv);
     fim se
    se (pai->esq = arv) então pai->esq <- arv_rodada;
    senão pai->dir <- arv_rodada;
    fim se
   senão
    arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) + 1;
   fim se
  senão // (continua)
```

Inserção em Árvore AVL

```
nodoAVL *inserçãoAVL(T* info, *nodoAVL arv, *nodoAVL pai)
variáveis
 arv_rodada : *nodoAVL;
início
 se (arv é NULO) então /* Folha: aloca novo nodo */
  arv <- aloca novo nodo;
  se (arv é NULO) então retorne ERRO;
  arv->info <- info; arv->alt <- 0;
  arv->esq <- NULO; arv->dir <- NULO;
 senão
  se (info < arv->info) então
   arv->esq <- inserçãoAVL(info, arv->esq, arv);
   se ((altura(arv->esq) - altura(arv->dir) > 1)
    se (info < arv->esq->info) então
     arv_rodada<-simp_roda_esq(arv);
    senão arv_rodada <- dup_roda_esq(arv);
    fim se // Acerta o Pai
     se (pai->esq = arv) então pai->esq <- arv_rodada;
     senão pai->dir <- arv_rodada;
     fim se
   senão
    arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) + 1;
   fim se
  senão // (continua)
```

Inserção em Árvore AVL

```
nodoAVL *inserçãoAVL(T* info, *nodoAVL arv, *nodoAVL pai)
variáveis
 arv_rodada : *nodoAVL;
início
 se (arv é NULO) então /* Folha: aloca novo nodo */
  arv <- aloca novo nodo;
  se (arv é NULO) então retorne ERRO;
  arv->info <- info; arv->alt <- 0;
  arv->esq <- NULO; arv->dir <- NULO;
 senão
  se (info < arv->info) então
   arv->esq <- inserçãoAVL(info, arv->esq, arv);
   se ((altura(arv->esq) - altura(arv->dir) > 1)
    se (info < arv->esq->info) então
     arv_rodada<-simp_roda_esq(arv);
    senão arv_rodada <- dup_roda_esq(arv);
    fim se
    se (pai->esq = arv) então pai->esq <- arv\_rodada;
    senão pai->dir <- arv\_rodada;
    fim se
   senão // Ajusta a Altura.
     arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) + 1;
   fim se
  senão // (continua)
```

Inserção em Árvore AVL

```
      senão //(continuado de cima)
       se (info > arv->info) então
        /* caso simétrico para árvore direita */
        arv->dir <- inserçãoAVL(info, arv->dir, arv);
        se ((altura(arv->dir) - altura(arv->esq) > 1)
         se (info < arv->dir->info) então
          arv_rodada <- simp_roda_dir(arv);
         senão
          arv_rodada <- dup_roda_dir(arv);
         fim se
         se (pai->dir = arv) então pai->dir <- arv_rodada;
         senão pai->esq <- arv_rodada;
         fim se
        senão
         arv->alt <- max( altura(arv->esq), altura(arv->dir)) +
                1;
        fim se
       senão
     retorne ERRO: "chave já está na árvore"
    fim se
   fim se
  fim se
 retorne arv;
fim
```

Deleção em Árvore AVL

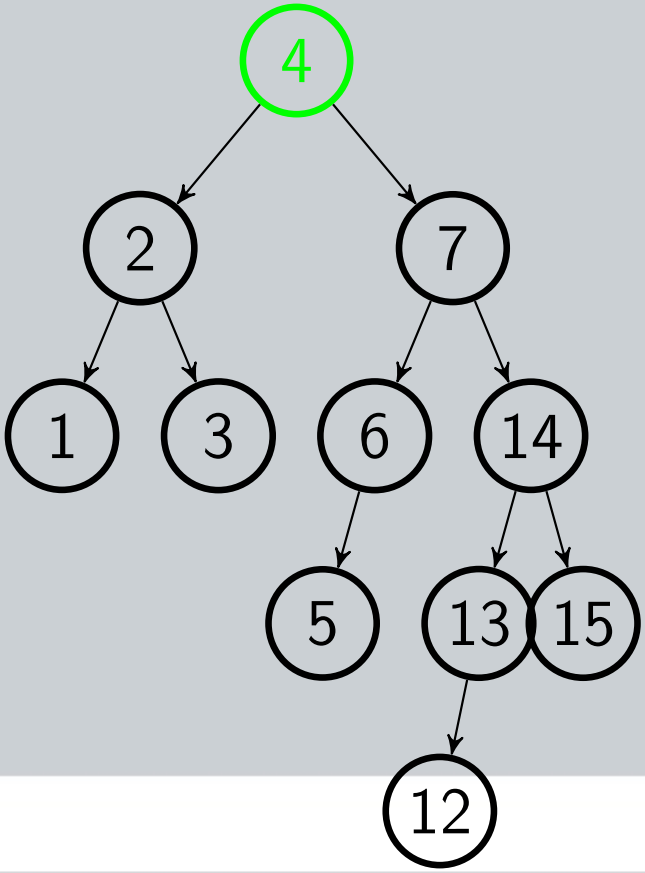
- Busque a chave a deletar na árvore;
- Delete utilizando o algoritmo **recursivo** de Deleção da Árvore Binária de Busca (DABB) visto em aula;
- Modifique DABB para:
  - Logo após retorno da chamada recursiva **atualizar & verificar** alturas das subárvores filhas;
  - Aplicar "regra do zique-zague"se necessário.

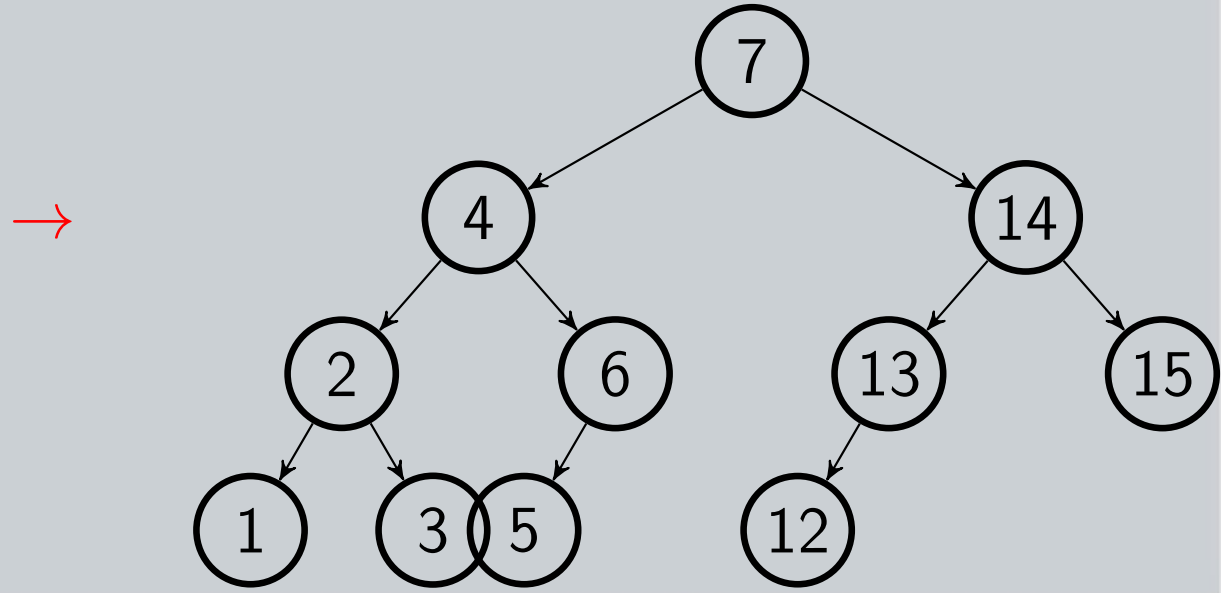
Deleção em Árvore AVL

- "regra do zigue-zague":
  - Olhar subárvore que desequilibrou e seus filhos;
- Desequilíbrio é à esquerda:
  - Sub-subárvore esquerda é a mais funda?
  - Esquerda-esquerda: rotação simples à esquerda;
  - Sub-subárvore direita é a mais funda?
  - Esquerda-direita: rotação dupla à esquerda;
- Desequilíbrio é à direita:
  - Sub-subárvore direita é a mais funda?
  - Direita-direita: rotação simples à direita
  - Sub-subárvore esquerda é a mais funda?
  - Direita-esquerda: rotação dupla à direita

Inclusão do Elemento 12

- A inclusão do elemento 12 provoca um desequilíbrio na raiz;
- Mas agora é simples.





Trabalho

- Implemente uma classe Lista todas as operações vistas;
- Implemente a lista usando Templates;
- Use as melhores práticas de orientação a objetos;
- Documente todas as classes, métodos e atributos;
- Aplique os testes unitários disponíveis no moodle da disciplina para validar sua estrutura de dados;
- Entregue até a data definida no moodle.

Perguntas????

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA