# Estruturas de Dados

## Árvores

Departamento de Computação
Prof. Martín Vigil
Adaptado de prof. Jean Martina e Aldo Wangenheim

2020.1

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

# Introdução a Árvores

# Introdução

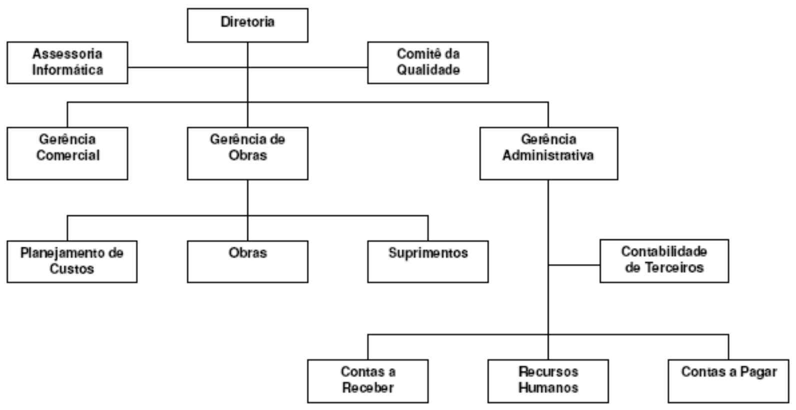
## Árvores

são estruturas de dados que se caracterizam por uma organização hierárquica entre seus elementos. Essa organização permite a definição de algoritmos relativamente simples, recursivos e de eficiência bastante razoável.

# Introdução

- No cotidiano, diversas informações são organizadas de forma hierárquica;
- Como exemplo, podem ser citados:
  - O organograma de uma empresa;
  - A divisão de um livro em capítulos, seções, tópicos;
  - A árvore genealógica de uma pessoa.

# Introdução

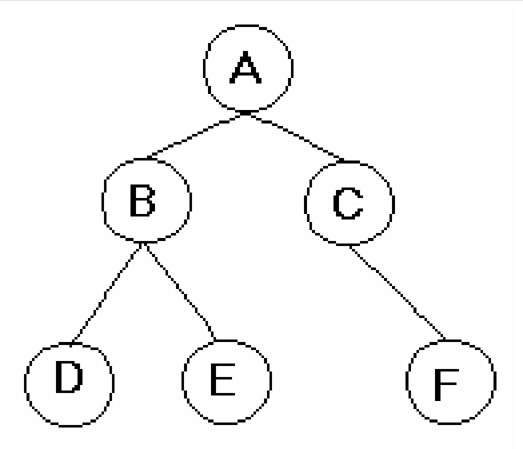

Diretoria
Assessoria Informática
Comitê da Qualidade
Gerência Comercial
Gerência de Obras
Gerência Administrativa
Planejamento de Custos
Obras
Suprimentos
Contabilidade de Terceiros
Contas a Receber
Recursos Humanos
Contas a Pagar

# Introdução

- De um modo mais formal, podemos dizer que uma árvore é um conjunto finito de um ou mais nodos, nós ou vértices, tais que:
  - Existe um nodo denominado raiz da árvore;
  - os demais nodos formam $n >= 0$ conjuntos disjuntos $c_1, c_2, ..., c_n$, sendo que cada um desses conjuntos também é uma árvore (denominada subárvore).

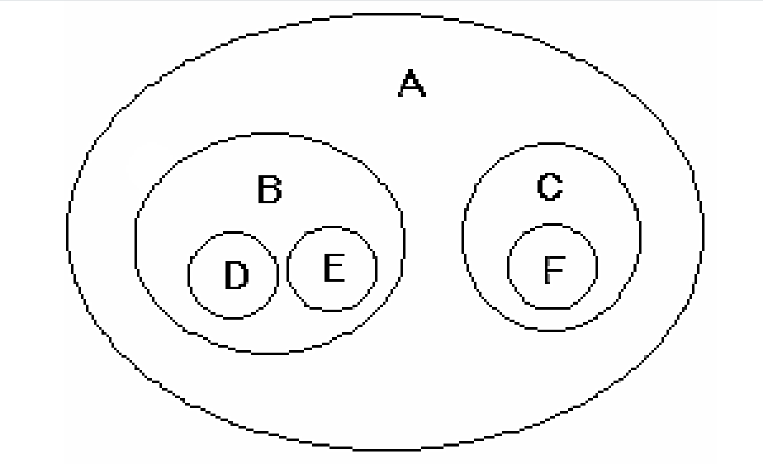
# Representações

- Representação hierárquica



# Representações

- Representação por conjuntos (diagrama de inclusão)



# Representações

- Representação por expressão parentetizada (parênteses aninhados)
  - Cada conjunto de parênteses correspondentes contém um nodo e seus filhos. Se um nodo não tem filhos, ele é seguido por um par de parênteses sem conteúdo.

( A ( B ( D ( ) E ( ) ) ) ( C ( F ( ) ) ) )

# Representações

- Representação por expressão não parentetizada
  - Cada nodo é seguido por um número que indica sua quantidade de filhos, e em seguida por cada um de seus filhos, representados do mesmo modo.

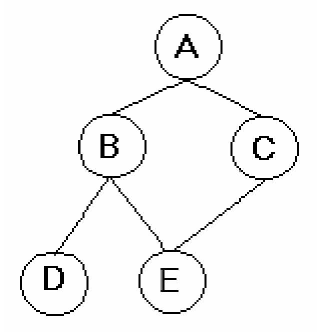
**A 2 B 2 D 0 E 0 C 1 F 0**

# Representações

- As representações hierárquica e por conjuntos facilitam visualizar árvores;
- As representações por expressões parametrizadas ou não facilitam a persistência dos nodos das árvores (em arquivos, por exemplo), possibilitando assim a sua reconstituição.

# Representações

- Como, por definição, os subconjuntos $c_1, c_2, ..., c_n$ são disjuntos, cada nodo pode ter apenas um pai. A representação a seguir, por exemplo, não corresponde a uma árvore.



# Definições

- A linha que liga dois nodos da árvore denomina-se aresta;
- Existe um caminho entre dois nodos A e B da árvore, se a partir do nodo A é possível chegar ao nodo B percorrendo as arestas que ligam os nodos entre A e B;
- Existe sempre um caminho entre a raiz e qualquer nodo da árvore.

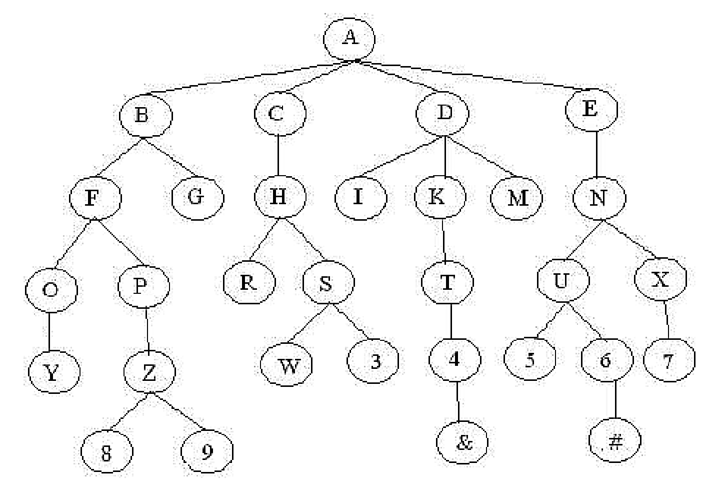
# Definições

- Se houver um caminho entre A e B, começando em A diz-se que A é um nodo ancestral de B e B é um nodo descendente de A
- Se este caminho contiver uma única aresta, diz-se que A é o nodo pai de B e que B é um nodo filho de A;
- Dois nodos que são filhos do mesmo pai são denominados nodos irmãos;
- Qualquer nodo, exceto a raiz, tem um único nodo pai.

# Definições

- Se um nodo não possui nodos descendentes, ele é chamado de folha ou nodo terminal da árvore;
- **Grau de um nodo**: é o número de nodos filhos do mesmo. Um nodo folha tem grau zero;
- **Nível de um nodo**: a raiz tem nível 0. Seus descendentes diretos têm nível 1, e assim por diante;
- **Grau da árvore**: é igual ao grau do nodo de maior grau da árvore;
- **Nível da árvore**: é igual ao nível do nodo de maior nível da árvore.

# Exercício



# Exercício

- Qual é a raiz da árvore?
- Quais são os nodos terminais?
- Qual o grau da árvore?
- Qual o nível da árvore?
- Quais são os nodos descendentes do nodo D?
- Quais são os nodos ancestrais do nodo #?
- Os nodos 4 e 5 são nodos irmãos?
- Há caminho entre os nodos C e S?
- Qual o nível do nodo 5?
- Qual o grau do nodo A?

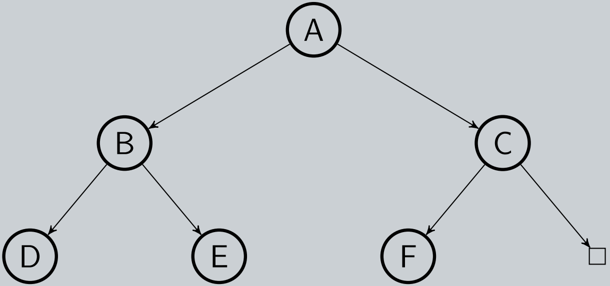
# Árvores Binárias

# Árvores Binárias

- A inclusão de limitações estruturais define tipos específicos de árvores;
- Até agora, as árvores vistas possuíam nenhuma limitação quanto ao grau máximo de cada nodo;
- Uma árvore binária é uma árvore cujo grau máximo de cada nodo é 2. Essa limitação define uma nomenclatura específica:
  - As filhos de um nodo são classificados de acordo com sua posição relativa à raiz;
  - Assim, distinguem-se o filho da esquerda e o filho da direita e, consequentemente, a subárvore da esquerda e a subárvore da direita.

# Árvores Binárias

- Exemplo de árvore binária;



# Modelagem: Nodo de uma árvore binária

- Necessitamos:
  - Um ponteiro para o filho localizado à esquerda;
  - Um ponteiro para o filho localizado à direita;
  - Um ponteiro **genérico** o dado que vamos armazenar.
- Pseudo-código:

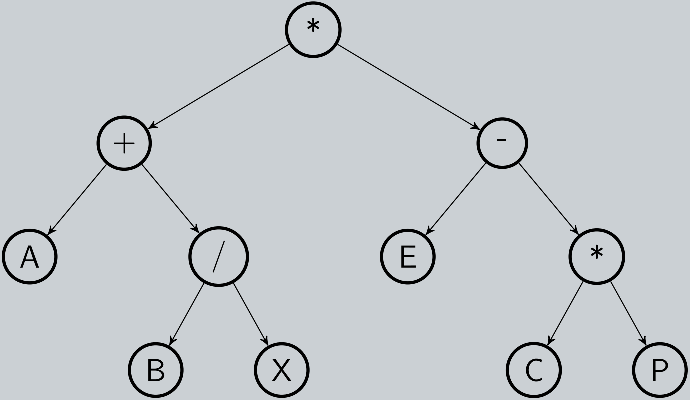
```
estrutura Nodo {
 Nodo *_filhoEsquerda;
 Nodo *_filhoDireita;
 T    *_dado;
};
```

# Percursos em Árvores Binárias

- O percurso em árvores binárias corresponde ao caminhamento executado em listas:
  - Partimos de um nodo inicial (raiz) e visitamos todos os demais nodos em uma ordem previamente especificada;
- Como exemplo, considere uma árvore binária utilizada para representar uma expressão (com as seguintes restrições):
  - Cada operador representa uma bifurcação;
  - Seus dois operandos correspondentes são representados por suas subárvores.

# Percursos em Árvores Binárias

Expressão: $(A + (B\ /\ X))$ * (E - (C * P))



# Percursos em Árvores Binárias

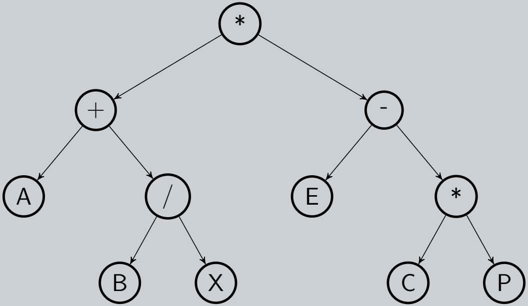
- Existem três ordens para se percorrer uma árvore binária que são consequência natural da estrutura da árvore, considerando filho à esquerda (e), filho à direita (d) e raiz (r):
  - Preordem(r,e,d) – *Preorder*;
  - Emordem(e,r,d) – *Inorder*;
  - Pósordem(e,d,r) – *Postorder*.

# Percursos em Árvores Binárias

- Essas ordens são definidas recursivamente (definição natural para uma árvore) e em função da raiz(r), da subárvore esquerda(e) e da subárvore direita(d):
  - Preordem(r,e,d): visite a raiz ANTES das subárvores;
  - Emordem(e,r,d): visite primeiro a subárvore ESQUERDA, depois a RAIZ e depois a subárvore DIREITA;
  - Pósordem(e,d,r): visite a raiz DEPOIS das subárvores;
- As subárvores são SEMPRE visitadas da esquerda para a direita.

# Percursos em Árvores Binárias

- Se percorrermos a árvore anterior usando as ordens definidas, teremos as seguintes seqüências:
  - Preordem (notação prefixada) : * + A / B X - E * C P
  - Emordem (notação infixada) : A + B / X * E - C * P
  - Pósordem (notação posfixada) : A B X / + * E C P - *



# Percurso em Preordem

```
void Preordem(Nodo *raiz, ListaEncadeada* lista)
 início
  se raiz != NULO então
   adicionaNoFim(lista, raiz->_dado);
   Preordem(raiz->_filhoEsquerda, lista);
   Preordem(raiz->_filhoDireita, lista);
  fim se
 fim
```

# Percurso em Emordem

```
Lista* EmOrdem(Nodo *raiz, ListaEncadeada* lista)
 início
  se raiz != NULO então
   EmOrdem(raiz->_filhoEsquerda, lista);
   adicionaNoFim(lista, raiz->_dado);
   EmOrdem(raiz->_filhoDireita, lista);
  fim se
 fim
```

# Percurso em Posordem

```
Lista PosOrdem(Nodo *raiz, ListaEncadeada* lista)
 início
  se raiz != NULO então
   PosOrdem(raiz->_filhoEsquerda, lista);
   PosOrdem(raiz->_filhoDireita, lista);
   adicionaNoFim(lista, raiz->_dado);
  fim se
 fim
```

# Árvores Binárias de Busca

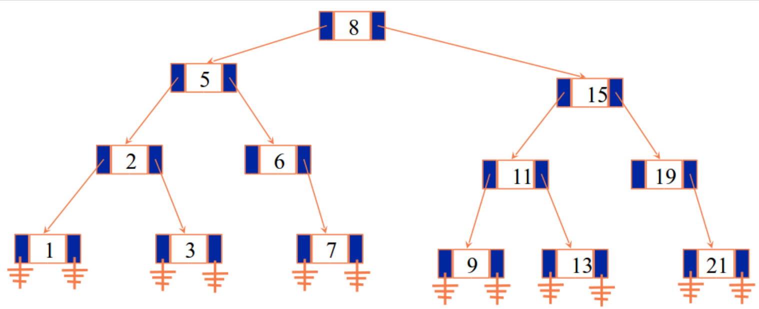
# Árvores Binárias de Busca

- Árvores (binárias) são muito utilizadas para se representar um grande conjunto de dados onde se deseja encontrar um elemento de acordo com a sua chave.
- Definição - Árvore Binária de Busca (Niklaus Wirth):
  - "Uma árvore que se encontra organizada de tal forma que, para cada nodo $t_i$, todas as chaves (_dado) da subárvore à esquerda de $t_i$ são menores que $t_i$ e à direita são maiores (ou iguais) que $t_i$";
- Termo em Inglês: Search Tree.

# Características de Árvores Binárias de Busca

- Em uma árvore binária de busca é possível encontrar-se qualquer chave existente descendo-se pela árvore:
  - Sempre à esquerda toda vez que a chave procurada for menor do que a chave do nodo visitado;
  - Sempre à direita toda vez que for maior ou igual;
- A escolha da direção de busca só depende da chave que se procura e da chave que o nodo atual possui.

# Exemplo de árvore binária de busca

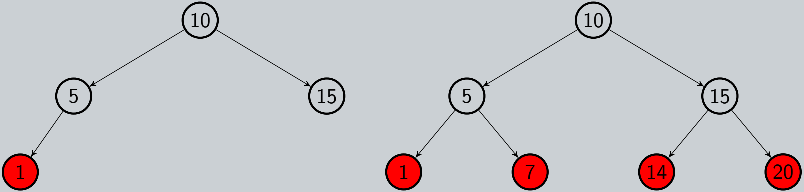


# Algoritmo de Busca

```
Nodo* busca (T dado, Nodo* raiz)
 início
  enquanto(raiz != NULO E raiz->_dado != dado) faça
   // Esquerda ou direita.
   se (raiz->_dado < dado) então
    raiz <- raiz->_filhoDireita
   senão
    raiz <- raiz->_filhoEsquerda;
   fim se
  fim enquanto
  retorne raiz;
 fim
```

# Custo do Algoritmo da Busca

- Se árvore tem altura $h \geq 0$ e o dado procurado está em uma das folhas mais distantes da raiz, então o custo é $O(h)$
- Um árvore balanceada com $n > 1$ nodos tem altura $\lfloor \log_2 n \rfloor$

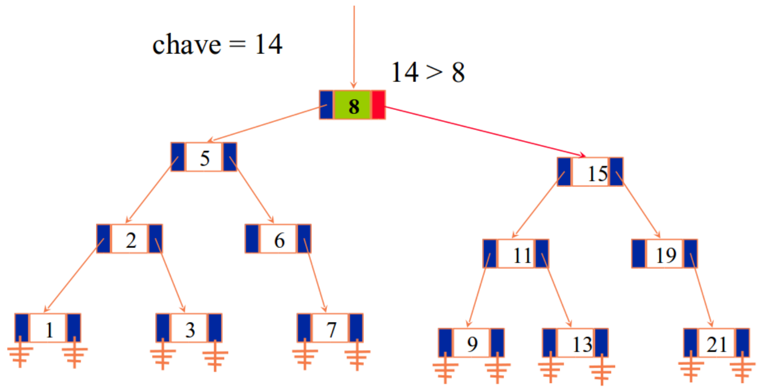


# Inserção de novas chaves na árvore binária de busca

- Similar ao algoritmo de busca
- Percorrer a árvore até encontrar nodo que possui um filho nulo onde a chave pode ser inserida respeitando as regras de comparação.

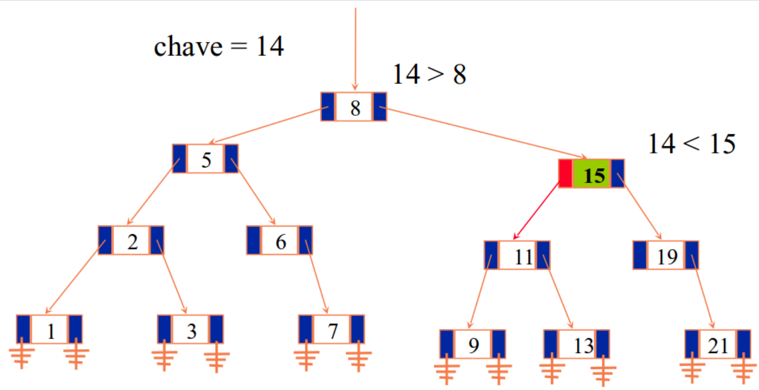
# Exemplo de inserção

Inserção de um elemento com chave $= 14$



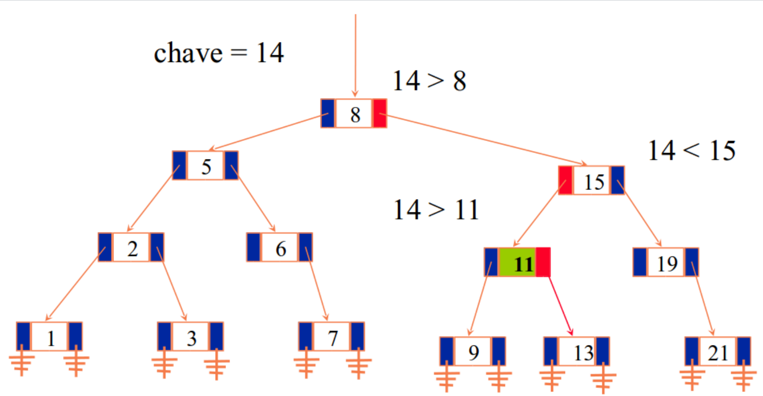
# Exemplo

Inserção de um elemento com chave $= 14$



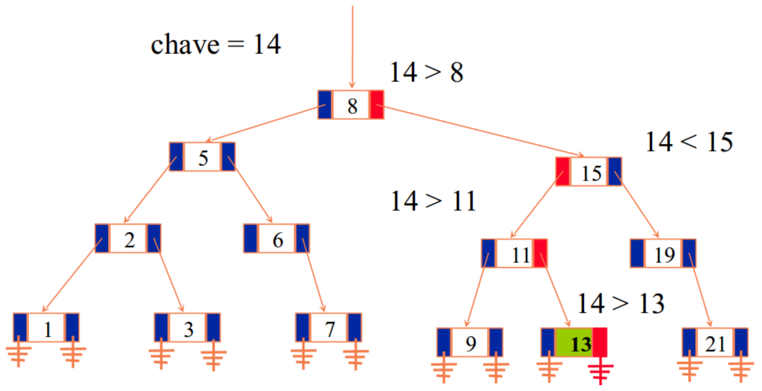
# Exemplo

Inserção de um elemento com chave = 14



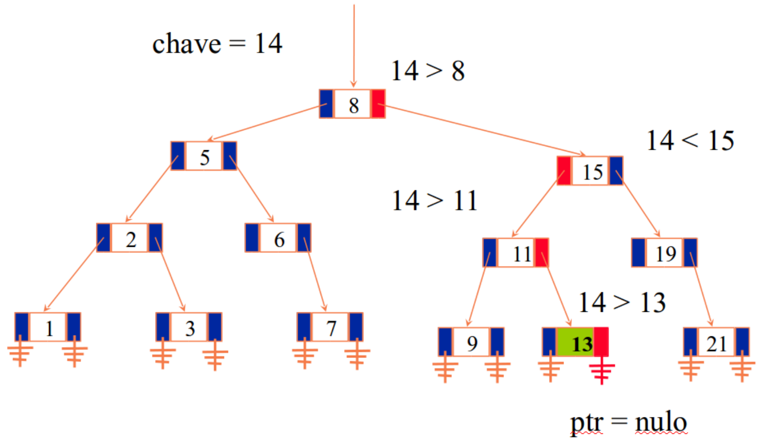
# Exemplo

Inserção de um elemento com chave $= 14$



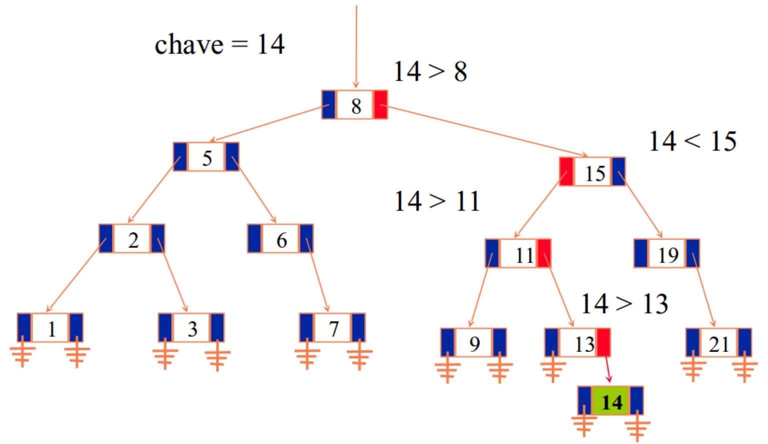
# Exemplo

Inserção de um elemento com chave $= 14$



# Exemplo

Inserção de um elemento com chave $= 14$

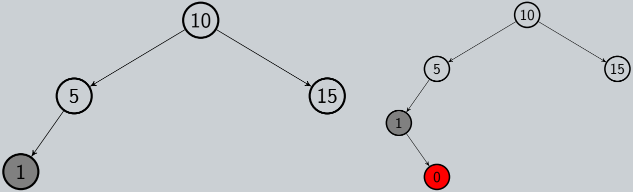


# Algoritmo de Inserção

```
void inserir(Nodo* raiz, T* dado)
 início
  se (dado < raiz->_dado) então
  // Inserção à esquerda.
   se (raiz->_filhoEsquerda = NULO) então
    Nodo* oNovo <- aloque(Nodo); oNovo->_dado <- dado;
    oNovo->_filhoEsquerda <- NULO; oNovo->_filhoDireita <- NULO;
    raiz->_filhoEsquerda <- oNovo;
   senão
    inserir(raiz->_filhoEsquerda, dado);
   fim se
   senão
    // Inserção à direita.
   se (raiz->_filhoDireita = NULO) então
    Nodo* oNovo <- aloque(Nodo); oNovo->_dado <- dado;
    oNovo->_filhoEsquerda <- NULO; oNovo->_filhoDireita <- NULO;
    raiz->_filhoDireita <- oNovo;
   senão
    inserir(raiz->_filhoDireita, dado);
   fim se
  fim se
 fim
```

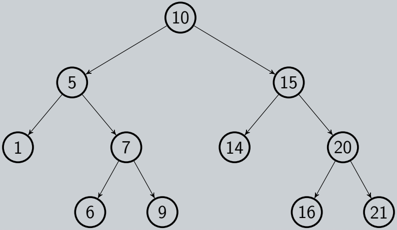
# Custo do Algoritmo de Inserção

- Se árvore tem altura $h \geq 0$ e as inserções podem ocorrer nas folhas mais distantes da raiz, então o custo é $O(h)$
- Um árvore balanceada com $n > 1$ nodos tem altura $\lfloor \log_2 n \rfloor$



# Algoritmo de Deleção

- Substitui-se o nodo a ser removido por outro existente na árvore
- Precisa-se evitar que a característica organizacional da árvore seja quebrada:
  - A subárvore da direita de um nodo não deve possuir chaves menores do que o pai do nodo eliminado;
  - A subárvore da esquerda de um nodo não deve possuir chaves maiores do que o pai do nodo eliminado.

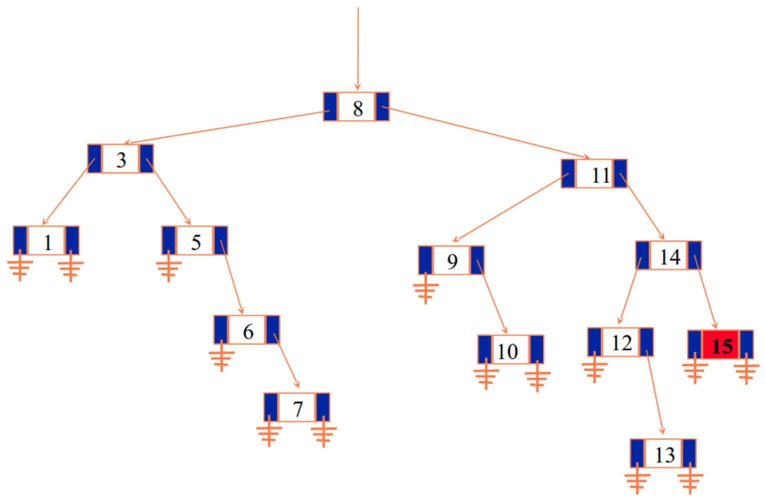


# Algoritmo de deleção

- Se o nodo a ser removido é folha, simplesmente remova-o.
- Lembre-se de atualizar o pai do nodo removido.

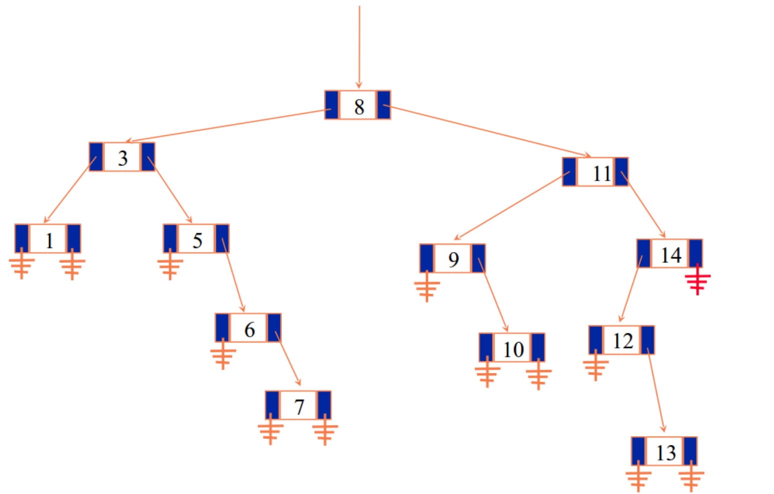
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 15



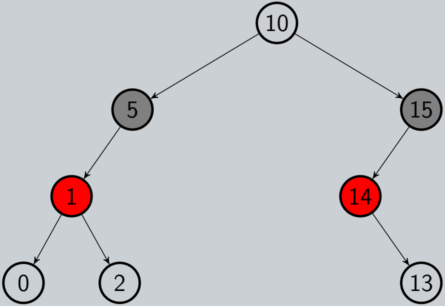
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 15



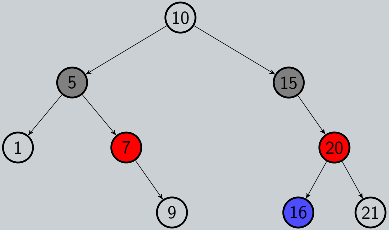
# Deleção em uma Árvore de Busca Binária

- Se o nodo a ser excluído tem **somente** filho à esquerda, então substitua o nodo pelo seu filho.



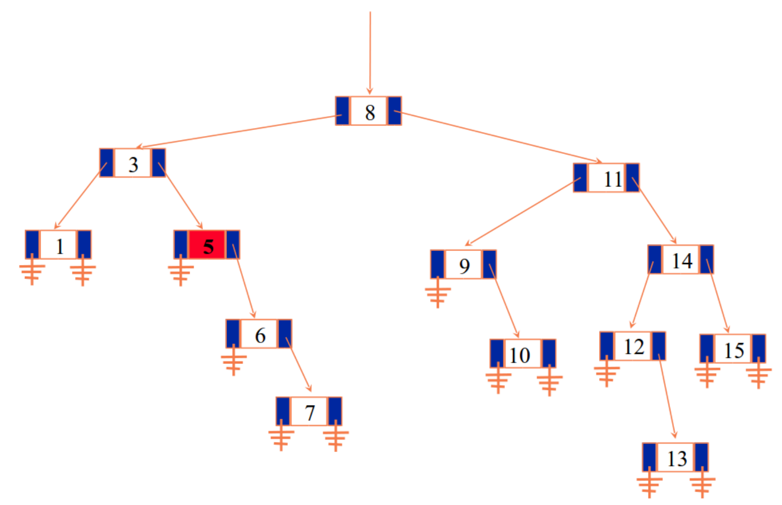
# Deleção em uma Árvore de Busca Binária

- Se o nodo a ser removido possui subárvore à direita:
  - A estratégia geral (Mark Allen Weiss) é sempre substituir a **chave retirada** pela *menor* chave da subárvore direita.
  - Se o filho à direita não possui subárvore esquerda, é ele quem ocupa o seu lugar;
  - Se possuir uma subárvore esquerda, a raiz desta será movida para cima e assim por diante;



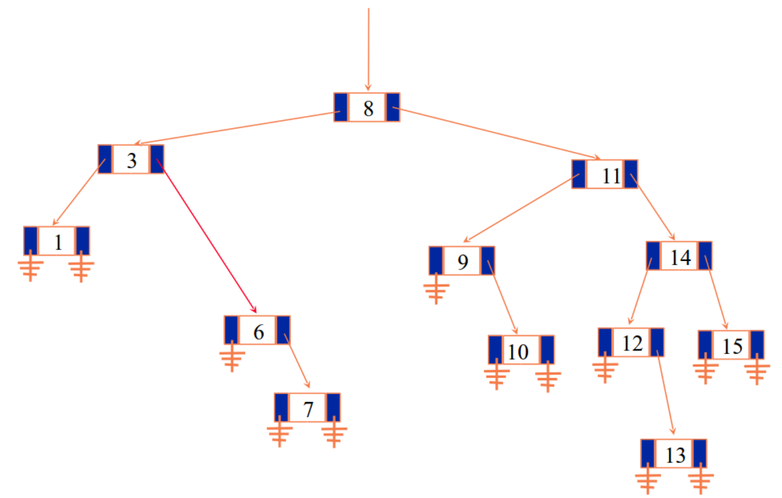
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 5



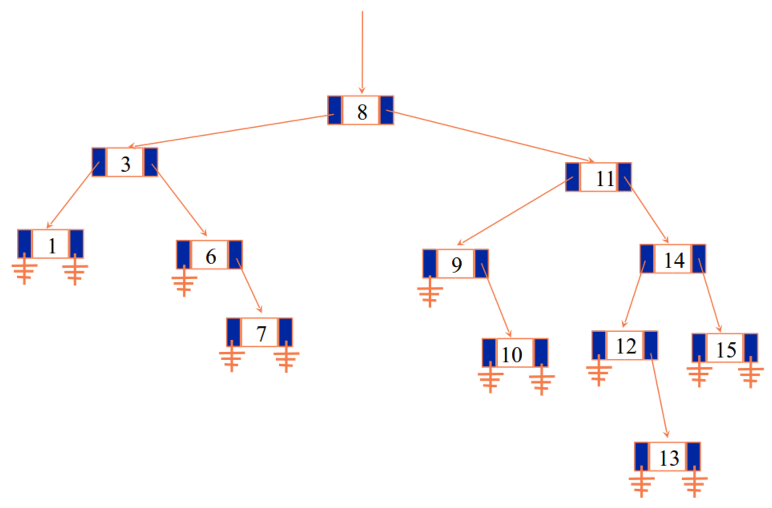
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 5



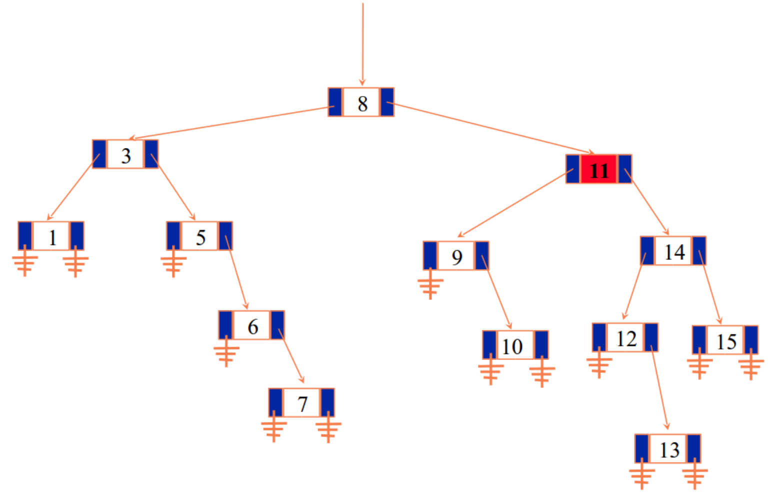
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 5



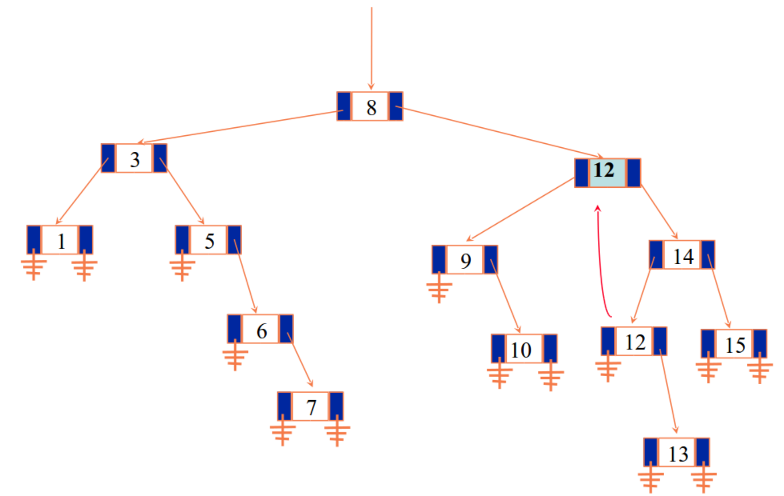
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 11



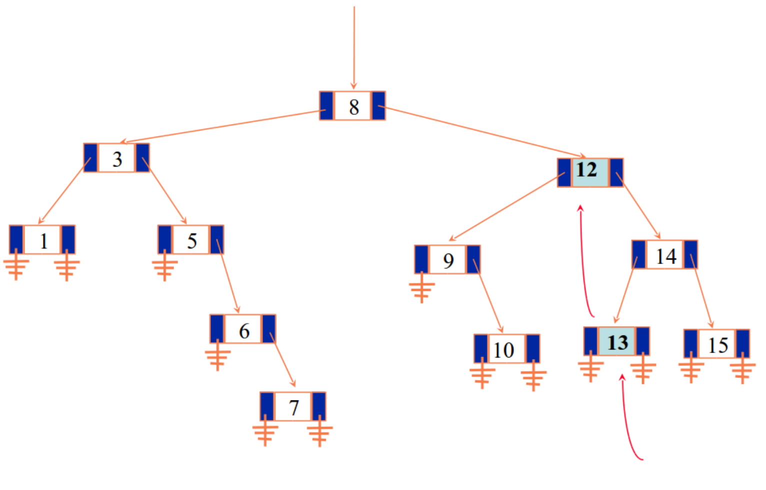
# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 5



# Exemplo

Deleção do nodo com chave = 5

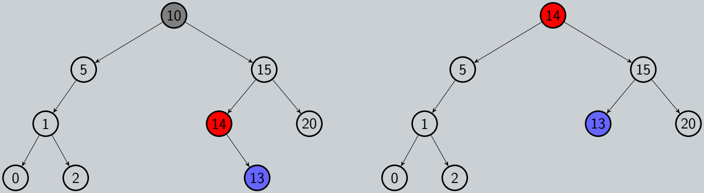


# Algoritmo de Deleção

1. Localize o nodo que tem o dado a ser removido
2. Se o nodo for folha:
    2.1 Desaloque o nodo
    2.2 Atualize seu pai anulando ponteiro para nodo desalocado
3. Caso contrário:
    3.1 Localize o substituto
    3.2 Substituir nodo pelo substituto segundo uma estratégia:
        3.2.1 Atualizar ponteiros (solução iterativa); ou
        3.2.2 Atualizar dados (solução recursiva)
4. Retorne dado do nodo excluído

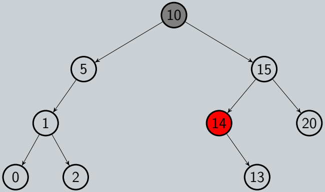
# Algoritmo de Deleção Atualizando Ponteiros

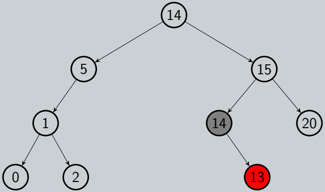
1. Se nodo a excluir não é raiz, seu pai deverá apontar para nodo substituto
2. Filho do substituto pode virar filho do avô
3. O substituto herdará os filhos do nodo a excluir (cuidado se nodo a excluir é pai do substituto)
4. Desaloque nodo a ser excluído (cuidado se o nodo for raiz para não perder referência à raiz da árvore)



# Algoritmo de Deleção Atualizando Dados

1. Atualize dado do nodo a ser excluído com dado do substituto
2. Remover substítuto via chamada recursiva
3. Recursão termina quando substituto for uma folha



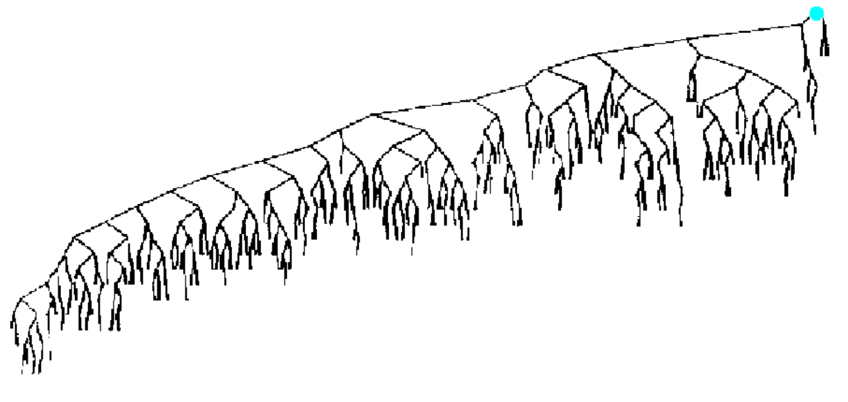
# Custo do Algoritmo de Deleção

- Se árvore tem altura $h \geq 0$ e o nodo substituto está em uma das folhas mais distantes da raiz, então o custo é $O(h) = O(\lfloor \log_2 n \rfloor) = O(\log_2 n)$
- Os custos **assintóticos** das estratégia vistas são $O(\log_2 n)$, mas a estratégia com recursão possui constante maior $c > 0$ e portanto custo $c \log_2 n$ maior.

# Problemas com Árvores de Busca Binária

- Desbalanceamento:
  - Quando inserimos utilizando a inserção simples, dependendo da distribuição de dados, pode haver desbalanceamento;
  - Árvores deterioradas perdem a característica de eficiência de busca.

# Problemas com Árvores de Busca Binária



# Perguntas????

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA