不定方程与同余方程组

前置芝士

exgcd求解不定方程 ax+by=gcd(a,b) /线性同余方程 ax≡b(mod m) 的解

exgcd求解不定方程 ax+by=gcd(a,b)

设

$$ax_1 + by_1 = gcd(a,b)$$

$$bx_2 + (a\%b)y_2 = gcd(b,a\%b)$$

由欧几里得定理可得

$$gcd(a,b) = gcd(b,a\%b)$$

于是

$$ax_1 + by_1 = bx_2 + (a\%b)y_2$$

$$ax_1 + by_1 = bx_2 + (a - \lfloor a/b \rfloor * b)y_2$$

整理

$$ax_1 + by_1 = ay_2 + b(x_2 - \lfloor a/b \rfloor * y_2)$$

于是

$$x_1 = y_2$$

$$y_1 = x_2 - \lfloor a/b \rfloor * y_2$$

ax+by=gcd(a,b)即可通过最初的x,y求解

于是我们可以通过递归求解

```
int exgcd(int a,int b,int &x,int &y)//扩展欧几里得
{
    if(b==0)
    {
        //从x=1,y=0开始向上
        x=1;y=0;
        //ax+by=gcd(a,b)->ax=0->x=1,y=0
        return a;
    }
    //先求解gcd(a,b)
    int d=exgcd(b,a%b,x,y),t=x;
    x=y;y=t-a/b*y;
    return d;
}
```

exgcd求解线性同余方程 ax≡b(mod m) 的解

$$ax \equiv b(mod\ m)$$

可写成

$$ax + mk = b$$

于是我们先求解不定方程

$$ax + mk = gcd(a, m)$$

若gcd(a,m)!=1则无解，否则得到解

$$x = x_0$$

$$k = k_0$$

于是我们得到原方程的解为

$$x_1 = x_0 * b/gcd(a, m)$$

$$k_1 = k_0 * b/gcd(a, m)$$

方程的任意解(对任意整数t成立)为

$$x = x_1 + mt$$

$$k = k_1 - at$$

求最小的正整数解

$$x = (x_1 \; mod \; t + t) \; mod \; t$$

其中

$$t = m/gcd(a, m)$$

要用exgcd求解逆元的话，需要保证gcd(a,m)=1
代入exgcd(a,m,x,y)中,对x值域变换即可
其实就是

$$ax \equiv 1(mod \; m)$$

可写成

$$ax + mk = gcd(a, m) = 1$$

罢了

中国剩余定理
求解同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1(mod \; m_1) \\ x \equiv a_2(mod \; m_2) \\ ... \\ x \equiv a_k(mod \; m_k) \end{cases}$$

其中

$$m_1, m_2, ..., m_k\text{两两互质}$$

过程:
求

$$M = m_1 * m_2 * ... * m_k$$

对每个m_i求

$$M_i = M / m_i$$

$$M_i^{-1} \equiv 1 (mod\ m_i)$$

$$c_i = M_i^{-1} * M_i$$

于是

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i * c_i (mod\ M)$$

很显然的证明，对任意一个方程组：

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i * c_i (mod\ m_i)$$

$$x \equiv a_i * M_i * M_i^{-1} (mod\ m_i)$$

$$x \equiv a_i (mod\ m_i) * (M_i * M_i^{-1} (mod\ m_i))$$

按定义

$$x \equiv a_i (mod\ m_i)$$

代码：

```cpp
int CRT()
{
    int mul=accumulate(m.begin(),m.end(),1LL,
    [](int a,int b){return a*b;}),ans=0;
    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        int M=mul/m[i],b,y;
        exgcd(M,m[i],b,y);//求M的逆元
        ans=(ans+nums[i]*M%mul*b%mul+mul)%mul;
    }
    return (ans%mul+mul)%mul;
}
```

扩展中国剩余定理

求解同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1(mod\ m_1) \\ x \equiv a_2(mod\ m_2) \\ \ldots \\ x \equiv a_k(mod\ m_k) \end{cases}$$

其中

$$m_1, m_2, \ldots, m_k\text{不两两互质}$$

过程:

考虑合并两个同余方程

$$\begin{cases} x \equiv a_1(mod\ m_1) \\ x \equiv a_2(mod\ m_2) \end{cases}$$

可写成不定方程

$$\begin{cases} x = a_1 + k_1 * m_1 \\ x = a_2 + k_2 * m_2 \end{cases}$$

消去x

$$a_1 + k_1 * m_1 = a_2 + k_2 * m_2$$

于是我们得到了一个不定方程

$$k_1 * m_1 + -k_2 * m_2 = a_2 - a_1$$

可通过exgcd求解

$$K_1 * m_1 + -K_2 * m_2 = gcd(m_1, m_2)$$

于是

$$k_1 = \frac{a_2 - a_1}{gcd(m_1, m_2)} * K_1$$
$$k_2 = \frac{a_1 - a_2}{gcd(m_1, m_2)} * K_2$$

得到x的一个解

$$x_0 = a_1 + k_1 * m_1 = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{gcd(m_1, m_2)} * K_1 * m_1$$

窝们很显然可以构造x的通解

$$x = x_0 + t * lcm(m_1, m_2)$$

于是进行形式转化

$$x \equiv x_0 (mod\ lcm(m_1, m_2))$$

于是我们得到了两个同余方程的合并

```
int _exCRT()
{
    int M=m[0],ans=nums[0];
    //M：合并后的模数，ans:合并后的余数
    for(int i=1;i<n;i++)
    {
        //当前方程：
        //x≡nums[i] (mod \ m[i])
        //x≡ans (mod \ M)
        //不定方程 ax+by=gcd(a,b)
        int a=M,b=m[i];
        int c=((nums[i]-ans)%b+b)%b;
        int x,y;
        int gcd=exgcd(a,b,x,y);
        int bg=b/gcd;
        if(c%gcd!=0) return -1;//判断有无解
        x=(x%bg+bg)%bg;//对x值域变换变成正数
        x=(x*c/gcd%bg+bg)%bg;//对x值域变换
        ans+=x*M;
        M*=bg;//更新M=lcm(M,m[i])=m[i]*M/gcd(M,m[i])
        ans=(ans%M+M)%M;
    }
    return (ans%M+M)%M;
}
```

筛法

欧拉函数的定义

$1 \sim n$ 中与 n 互质的数的个数称为欧拉函数，记为 $\varphi(n)$
例：$\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=1,\ \varphi(3)=2,\ \varphi(4)=2,\ \varphi(5)=4$

欧拉函数的性质

1. 若 p 是质数，则 $\varphi(p)=p-1$
2. 若 p 是质数，则 $\varphi(p^k)=(p-1)p^{k-1}$

3. **积性函数**：若 $\gcd(m,n)=1$，则 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$

欧拉函数的计算公式

由唯一分解定理 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) &= \prod_{i=1}^{s}\varphi(p_i^{\alpha_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) \\
&= \prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}\right)\times\left(\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right) \\
&= n\times\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{p_i} \\
&= n\times\frac{p_1-1}{p_1}\times\frac{p_2-1}{p_2}\times\cdots\times\frac{p_s-1}{p_s}
\end{aligned}
$$

> 欧拉函数仅由 n 和质因子决定，与次数无关。
> **例**：$\varphi(12)=12\times\frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}=4$

筛法求欧拉函数

> 若 i 是质数，$\varphi[i]=i-1$。

在线性筛中，每个合数 m 都是被最小的质因子筛掉的。
设 p_j 是 m 的最小质因子，则 m 通过 $m=p_j\times i$ 筛掉。

分两种情况计算：

1. **若 i 能被 p_j 整除**（即 $i\equiv 0 \pmod{p_j}$），则 i 包含了 m 的所有质因子：

$$
\begin{aligned}
\varphi(m) &= m \times \prod_{k=1}^{s} \frac{p_k - 1}{p_k} \\
&= p_j \times i \times \prod_{k=1}^{s} \frac{p_k - 1}{p_k} \\
&= p_j \times \varphi(i)
\end{aligned}
$$

例：$\varphi(12) = \varphi(2 \times 6) = 2 \times \varphi(6)$

2. **若 i 不能被 p_j 整除**（即 $\gcd(i, p_j) = 1$），则 i 和 p_j 互质：

$$
\begin{aligned}
\varphi(m) &= \varphi(p_j \times i) \\
&= \varphi(p_j) \times \varphi(i) \\
&= (p_j - 1) \times \varphi(i)
\end{aligned}
$$

例：$\varphi(75) = \varphi(3 \times 25) = (3 - 1) \times \varphi(25)$

```
vector<int> euler()
{
    vector<int> phi(n+1);
    phi[1]=1;
    vector<int> primes;
    vector<bool>v(n+1,0);
    for(int i=2;i<=n;i++)
    {
        if(!v[i])primes.push_back(i),phi[i]=i-1;
        for(int j=0;j<primes.size()&&primes[j]*i<=n;j++)
        {
            int m=primes[j]*i;
            v[m]=1;
            if(i%primes[j]==0)
            {
                phi[m]=phi[i]*primes[j];
                break;
            }
            else phi[m]=phi[i]*(primes[j]-1);
        }
    }
}
```

筛法求约数个数

问题

给定整数 n $(n \leq 10^6)$，输出 $1 \sim n$ 中每个数的约数个数。

约数个数定理

若正整数 n 有质因数分解 $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$，则约数个数为：

$$d(n) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$$

证明

- 对每个质因子 $p_i^{\alpha_i}$，其约数可取 $p_i^0, p_i^1, \cdots, p_i^{\alpha_i}$ 共 $(\alpha_i + 1)$ 种选择
- 根据乘法原理，总约数个数为各质因子选择数的乘积：

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_s + 1)$$

筛法求约数个数

记a[i]为i的最小质因子的次数，d[i]为i的约数个数。
若 i 是质数，

$$a[i] = 1, \quad d[i] = 2$$

在线性筛中，每个合数 m 都是被最小的质因子筛掉的。
设 p_j 是 m 的最小质因子，则 m 通过 $m = p_j \times i$ 筛掉。

(1) 若 i 能被 p_j 整除，则 p_j 一定是 i 的最小质因子。

$$a[m] = a[i] + 1;$$

$$d[i] = (a[i] + 1) \times \cdots, \quad d[m] = (a[m] + 1) \times \cdots$$

于是

$$d[m] = d[i] \times \frac{a[m] + 1}{a[i] + 1}$$

(2) 若 i 不能被 p_j 整除，则 i 不包含质因子 p_j。

$$a[m] = 1, \quad d[m] = d[i] \times (1 + 1)$$

```
//O(n)求1-n的约数个数
vector<int> d()
{
    vector<int> a(n+1),d(n+1);
    vector<int> primes;
    vector<bool>v(n+1,0);
    for(int i=2;i<=n;i++)
    {
        if(!v[i])
        {
            primes.push_back(i);
            a[i]=1,d[i]=2;
        }
        for(int j=0;j<primes.size()&&primes[j]*i<=n;j++)
        {
            int m=primes[j]*i;
            v[m]=1;
            if(i%primes[j]==0)
            {
                a[m]=a[i]+1;
                d[m]=d[i]/(a[i]+1)*(a[m]+1);
                break;
            }
            else
            {
                a[m]=1;
                d[m]=d[i]*2;
            }
        }
    }
}
```

约数和定理

若 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$，则 $f(n)=\prod_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{\alpha_i}p_i^j$

证明：

$p_i^{\alpha_i}$ 的约数有 $p_i^0,p_i^1,\cdots,p_i^{\alpha_i}$ 共 (α_i+1) 个，其约数和为 $\sum_{j=0}^{\alpha_i}p_i^j$。

根据乘法原理，

$$f(n)=\prod_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{\alpha_i}p_i^j$$

例：

$$12=2^2\times 3^1,$$

$$f(12)=(1+2+4)\times(1+3)=7\times 4=28$$

筛法求约数和

记g[i]为i的最小质因子的幂和 1 + p^1 +p^2 + ... + p^k，f[i]为i的约数和。
若 i 是质数，

$$g[i]=f[i]=i+1$$

在线性筛中，每个合数 m 都是被最小的质因子筛掉的。设 p_j 是 m 的最小质因子，则 m 通过 $m=i\times p_j$ 筛掉。

(1) 若 i 能被 p_j 整除，则 p_j 一定也是 i 的最小质因子

$$g[i]=p_j^0+p_j^1+\cdots+p_j^{\alpha_j},\quad g[m]=p_j^0+p_j^1+\cdots+p_j^{\alpha_j+1}$$

$$f[i]=g[i]\times\cdots,\quad f[m]=g[m]\times\cdots$$

于是

$$f[m]=f[i]\times\frac{g[m]}{g[i]}$$

(2) 若 i 不能被 p_j 整除，则 i 不包含质因子 p_j。

$$g[m] = 1 + p_j$$

$$f[m] = g[m] \times f[i]$$

```
//O(n)求1-n的约数和
vector<int> sumd()
{
    vector<int> g(n+1),f(n+1);
    vector<int> primes;
    vector<bool>v(n+1,0);
    g[1]=f[1]=1;
    for(int i=2;i<=n;i++)
    {
        if(!v[i])
        {
            primes.push_back(i);
            f[i]=g[i]=i+1;
        }
        for(int j=0;j<primes.size()&&primes[j]*i<=n;j++)
        {
            int m=primes[j]*i;
            v[m]=1;
            if(i%primes[j]==0)
            {
                g[m]=g[i]*primes[j]+1;
                f[m]=f[i]*g[m]/g[i];
                break;
            }
            else
            {
                g[m]=primes[j]+1;
                f[m]=f[i]*g[m];
            }
        }
    }
}
```

唯一分解定理

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

莫比乌斯函数定义

莫比乌斯函数记作 $\mu(n)$，它是一个经典的数论函数，定义如下：

- $\mu(1) = 1$
- 如果 n 含有平方因子（即存在某个质数 p，使得 $p^2 \mid n$），则 $\mu(n) = 0$
- 如果 n 是 k 个**互不相同的质数**的乘积（即 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$），则：

$$\mu(n) = (-1)^k$$

筛法求莫比乌斯函数

若 i 是质数，$\mu[i] = -1$。
在线性筛中，每个合数 m 都是被最小的质因子筛掉的。
设 p_j 是 m 的最小质因子，则 m 通过 $m = i \times p_j$ 筛掉。

(1) 若 i 能被 p_j 整除，则 i 也包含质因子 p_j。

$$\mu[m] = 0$$

(2) 若 i 不能被 p_j 整除，则 m 比 i 多一个不同的质因子 p_j

- 若 $\mu[i] = -1$, 则 $\mu[m] = 1$
- 若 $\mu[i] = 1$, 则 $\mu[m] = -1$
- 若 $\mu[i] = 0$, 则 $\mu[m] = 0$
  综上，$\mu[m] = -\mu[i]$。

线性逆元

O(n)求阶乘和阶乘逆元

📃 推导目标

给定质数 p，我们希望在线性时间内计算 1 到 n 的所有数在模 p 意义下的乘法逆元，即：

$$\text{求}\ \forall 1 \le i \le n, \quad \text{使得}\ r_i \cdot i \equiv 1 \pmod p\ \text{的}\ r_i$$

💠 推导公式

我们设 $r_i = i^{-1} \bmod p$，有：

- $r_1 = 1$
- 对于 $i > 1$，我们可以利用如下递推式求出 r_i：

$$r_i = (p - \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor) \cdot r_{p \bmod i} \bmod p$$

✏ 证明过程

考虑：

$$p = i \cdot \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor + (p \bmod i) \Rightarrow p \bmod i = p - i \cdot \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor$$

两边模p:

$$i \cdot \left(\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor \right) \equiv -(p \bmod i) \pmod p \Rightarrow i \cdot \left(\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor \right) \cdot (p \bmod i)^{-1} \equiv -1 \pmod p$$

两边都乘上 -1：

$$i \cdot \left(- \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor \right) \cdot (p \bmod i)^{-1} \equiv 1 \pmod p$$

于是我们得出：

$$\boxed{\operatorname{inv}[i] \equiv -\left(\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor\right) \cdot \operatorname{inv}[p \bmod i] \pmod p}$$

再化简成**无负数形式**：

$$\boxed{\operatorname{inv}[i] = (p - p/i) \cdot \operatorname{inv}[p\%i] \bmod p}$$

这就是我们要用的递推式！

◈ C++ 实现示例

```cpp
void preC()
{
    inv[1]=1;
    for(int i=2;i<=n;i++)
    {
        inv[i]=(mod-mod/i)*inv[mod%i]%mod;
    }
    fac[0]=invfac[0]=1;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        fac[i]=fac[i-1]*i%mod;
        invfac[i]=invfac[i-1]*inv[i]%mod;
    }
}
```

◈ 时间复杂度

- 时间：$\mathcal{O}(n)$
- 空间：$\mathcal{O}(n)$
- 要求 p 是质数（否则不存在乘法逆元）

和式变换

和式变换规则与技术

基本变换规则

1. **分配律**

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k$$

2. **结合律**

$$\sum_{k\in K}(a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k$$

3. **交换律**

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}$$

   其中 $p(k)$ 是指标集的任意排列
   示例：
   $a_1 + a_2 + a_3 + a_6 = a_6 + a_3 + a_2 + a_1$

高级变换技术

1. 替换条件式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d\mid \gcd(i,j)} d = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{\min(n,m)} [d|i][d|j]d$$

2. 替换指标变量

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=k]=\sum_{i'=1}^{\lfloor n/k\rfloor}\sum_{j'=1}^{\lfloor m/k\rfloor}[\gcd(i',j')=1]$$

其中 $i'=i/k, j'=j/k$

3. 交换求和次序

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A(i)B(j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}A(i)B(j)$$

4. 分离变量

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A(i)B(j)=\left(\sum_{i=1}^{n}A(i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m}B(j)\right)$$

技巧

1. 区间整除条件式的封闭形式

$$\sum_{i=1}^{n}[k|i]=\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$$

扩展

$$\lfloor\frac{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}{m}\rfloor=\lfloor\frac{n}{km}\rfloor$$

> 人话：在1到n的整数中，能被k整除的数的个数是 $\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$

2. $[gcd(i,j)=1]$的进一步变换

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=1]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d\mid\gcd(i,j)}\mu(d)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)[d|i][d|j]$$

> 人话：变换枚举顺序，d能整除i和j，则d能整除gcd(i,j)

3. 有序对和无序对求和的互相转换

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A(i,j)=2*\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}A(i,j)-\sum_{i=1}^{n}A(i,i)$$

当且仅当 $A(i,j)=A(j,i)$ 时成立

> 人话：将有序对转换为无序对，注意枚举顺序

4. 通过$gcd(i,j)=1$构造条件式$[gcd(i,j)=1]$

令

$$d=\gcd(i,j),i=i'd,j=j'd$$

注意，当且仅当

$$\gcd(i',j')=1$$

时，此变换成立，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\gcd(i,j))$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \sum_{i'd=1}^{n} \sum_{j'd=1}^{m} f(d)[\gcd(i',j')=1]$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \sum_{i'=1}^{\lfloor n/d \rfloor} \sum_{j'=1}^{\lfloor m/d \rfloor} f(d)[\gcd(i',j')=1]$$

变量换名

$$= \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \sum_{i=1}^{\lfloor n/d \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor m/d \rfloor} f(d)[\gcd(i,j)=1]$$

> 人话：没有人话

生成函数

序列 a 的普通生成函数（ordinary generating function，OGF）定义为形式幂级数（其实就是一个多项式()）：

$$F(x) = \sum_{n} a_n x^n$$

a 既可以是有穷序列，也可以是无穷序列。常见的例子（假设 a 以 0 为起点）：

1. 序列 $a = \langle 1, 2, 3 \rangle$ 的普通生成函数是 $1 + 2x + 3x^2$。
2. 序列 $a = \langle 1, 1, 1, \cdots \rangle$ 的普通生成函数是 $\sum_{n \ge 0} x^n$。
3. 序列 $a = \langle 1, 2, 4, 8, 16, \cdots \rangle$ 的生成函数是 $\sum_{n \ge 0} 2^n x^n$。
4. 序列 $a = \langle 1, 3, 5, 7, 9, \cdots \rangle$ 的生成函数是 $\sum_{n \ge 0} (2n+1) x^n$。

换句话说，如果序列 a 有通项公式，那么它的普通生成函数的系数就是通项公式。

基本运算

考虑两个序列 a, b 的普通生成函数，分别为 $F(x), G(x)$。那么有

$$F(x) \pm G(x) = \sum_n (a_n \pm b_n) x^n$$

因此 $F(x) \pm G(x)$ 是序列 $\langle a_n \pm b_n \rangle$ 的普通生成函数。

考虑乘法运算，也就是卷积：

$$F(x)G(x) = \sum_n x^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

因此 $F(x)G(x)$ 是序列 $\langle \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \rangle$ 的普通生成函数。

封闭形式

在运用生成函数的过程中，我们不会一直使用形式幂级数的形式，而会适时地转化为封闭形式以更好地化简。

例如 $\langle 1, 1, 1, \cdots \rangle$ 的普通生成函数 $F(x) = \sum_{n \ge 0} x^n$，我们可以发现

$$F(x)x + 1 = F(x)$$

那么解这个方程得到

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

这就是 $\sum_{n \ge 0} x^n$ 的封闭形式。

考虑等比数列 $\langle 1, p, p^2, p^3, p^4, \cdots \rangle$ 的生成函数 $F(x) = \sum_{n \ge 0} p^n x^n$，有

$$F(x)px + 1 = F(x)$$
$$F(x) = \frac{1}{1-px}$$

等比数列的封闭形式与展开形式是常用的变换手段。

应用

接下来给出一些例题，来介绍生成函数在 OI 中的具体应用。

普通生成函数可以用来解决多重集合组合数问题。

问题：有 n 种物品，每种物品有 a_i 个，问取 m 个物品的组合数?

多重集合组合数

设从每种物品中取 b_i 个，$0 \le b_i \le a_i$，
$m = \sum_{i=1}^{n} b_i$，对于一组选定的 b_i 进行组合的方案数为 **1**。
例如，取 3 个 A，1 个 B 的方案就是 {AAAB}；取 2 个 A、2 个 B 的方案就是 {AABB}。
那么，所有满足
$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = m$ 的方案之和，即答案。

构造普通生成函数

第 1 种物品的生成函数为 $(1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{a_1})$，
第 n 种物品的生成函数为 $(1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{a_n})$。

即

$$(1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{a_1})(1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{a_2}) \cdots (1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{a_n})$$

求 x^m 的系数。

> **注意：** 指数即物品个数，系数即组合数。

例如：

有三种物品，分别有 3、2、1 个，问取 4 个物品的组合数?
枚举的话，有 {AAAB, AAAC, AABB, AABC, ABBC}，5 个方案。

构造

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x)$$

逐步展开：

$$\begin{aligned}
&= (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x) \\
&= (1+x+x^2+x^3+x^2+x^3+x^4+x^3+x^4+x^5)(1+x) \\
&= (1+2x+3x^2+3x^3+3x^4+2x^5+x^6)(1+x) \\
&= 1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6
\end{aligned}$$

x^4 的系数为 5，即答案。

HDU - 1085 Holding Bin-Laden Captive!

面值为 1, 2, 5 的硬币分别有 a_1, a_2, a_3 枚，
问用这些硬币**不能**组成的最小面值是多少？

思路

构造生成函数：

$$(1+x^1+x^2+\cdots+x^{a_1})\times(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2a_2})\times(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{5a_3})$$

从小到大遍历系数，**为 0 的那一项**就是答案。

例如：

1 分有 1 枚，2 分有 1 枚，5 分有 1 枚：

$$\begin{aligned}
&(1+x^1)(1+x^2)(1+x^5) \\
&= (1+x^2+x^1+x^3)(1+x^5) \\
&= (1+x^1+x^2+x^3)(1+x^5) \\
&= (1+x^5+x^1+x^6+x^2+x^7+x^3+x^8) \\
&= 1+x^1+x^2+x^3+x^5+x^6+x^7+x^8
\end{aligned}$$

最小不能组成的面值是 4。

食物

```
在许多不同种类的食物中选出 $n$ 个，每种食物的限制如下：

1.  承德汉堡：偶数个
2.  可乐：0 个或 1 个
3.  鸡腿：0 个，1 个或 2 个
4.  蜜桃多：奇数个
5.  鸡块：4 的倍数个
6.  包子：0 个，1 个，2 个或 3 个
7.  土豆片炒肉：不超过一个。
8.  面包：3 的倍数个

每种食物都是以「个」为单位，只要总数加起来是 n 就算一种方案。对于给出的 n 你需要计算出方案数
```

这是一道经典的生成函数题。对于一种食物，我们可以设 a_n 表示这种食物选 n 个的方案数，并求出它的生成函数。而两种食物一共选 n 个的方案数的生成函数，就是它们生成函数的卷积。多种食物选 n 个的方案数的生成函数也是它们生成函数的卷积。

在理解了方案数可以用卷积表示以后，我们就可以构造生成函数（标号对应题目中食物的标号）：

1. $\displaystyle\sum_{n\ge 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$。
2. $1+x$。
3. $\displaystyle 1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$。
4. $\displaystyle\sum_{n\ge 0} x^{2n+1} = \sum_{n\ge 0} x^n - \sum_{n\ge 0} x^{2n} = \frac{x}{1-x^2}$。
5. $\displaystyle\sum_{n\ge 0} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$。
6. $\displaystyle 1+x+x^2+x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$。
7. $1+x$。
8. $\displaystyle\sum_{n\ge 0} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$。

那么全部乘起来，得到答案的生成函数：

$$F(x)=\frac{(1+x)(1-x^3)x(1-x^4)(1+x)}{(1-x^2)(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x)(1-x^3)}=\frac{x}{(1-x)^4}$$

广义二项式定理

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i-1}^{i}x^i$$

然后将它转化为展开形式（使用广义二项式定理）：

$$\begin{aligned}F(x)&=x\sum_{i=0}^{\infty}\left(C_{4+i-1}^{i}\right)x^i\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(C_{4+i-1}^{i}\right)x^{i+1}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{k+2}^{k-1}\right)x^k\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{k+2}^{3}\right)x^k\end{aligned}$$

因此答案为

$$C_{n+2}^{3}$$

指数生成函数

指数生成函数：

$$F(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}$$

序列 $<1,1,1,\cdots>$ 的指数生成函数是

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

序列 $< 1, p, p^2, \cdots >$ 的指数生成函数是

$$1 + p\frac{x}{1!} + p^2\frac{x^2}{2!} + p^3\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} p^n \frac{x^n}{n!} = e^{px}$$

基本运算

加减运算

$$F(x) \pm G(x) = \sum_{i\geq 0} a_i \frac{x^i}{i!} \pm \sum_{j\geq 0} b_j \frac{x^j}{j!} = \sum_{n\geq 0} (a_n \pm b_n) \frac{x^n}{n!}$$

因此 $F(x) \pm G(x)$ 是序列 $< a_n \pm b_n >$ 的指数生成函数。

乘法运算（卷积）

$$F(x)G(x) = \sum_{i\geq 0} a_i \frac{x^i}{i!} \sum_{j\geq 0} b_j \frac{x^j}{j!} = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \frac{1}{i!(n-i)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a_i b_{n-i} =$$

因此 $F(x)G(x)$ 是序列 $< \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i b_{n-i} >$ 的指数生成函数。

封闭形式

我们同样考虑指数生成函数的封闭形式。

序列 $\langle 1, 1, 1, \cdots \rangle$ 的指数生成函数是:

$$\hat{F}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

因为你将 e^x 在 $x = 0$ 处泰勒展开就得到了它的无穷级数形式。

类似地，等比数列 $\langle 1, p, p^2, \cdots \rangle$ 的指数生成函数是:

$$\hat{F}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{p^n x^n}{n!} = \mathrm{e}^{px}$$

指数生成函数可以用来解决多重集排列数问题。

HDU - 1521 排列组合
题意：有 n 种物品，每种物品有 a_i 个，问取 m 个物品的排列数?

多重集排列数
设从每种物品中取 b_i 个，$0 \le b_i \le a_i$，$m = \sum_{i=1}^{n} b_i$，对于一组选定的 b_i 进行排列的方案数为 $\frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_n!}$。若 m 个物品互不相同，其排列数为 $m!$，分母就是对每种相同物品的排列数去重。
例如，取3个A、1个B的排列数为 $\frac{4!}{3!1!} = \frac{24}{6} = 4$，即 {AAAA, AABA, ABAA, BAAA}。

取2个A、2个B的排列数为 $\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$，即 {AABB, ABAB, ABBA, BAAB. BABA, BBAA}。
那么，所有满足 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = m$ 的排列数之和，即答案。

构造指数生成函数
第1种物品的生成函数为 $(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{a_1}}{a_1!})$，第n种物品的生成函数为 $(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{a_n}}{a_n!})$。
即 $(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{a_1}}{a_1!})(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{a_2}}{a_2!})\cdots(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{a_n}}{a_n!})$，求 $\frac{x^m}{m!}$ 的系数。

做乘法，$\frac{x^{b_1}}{b_1!} \times \frac{x^{b_2}}{b_2!} \times \cdots \times \frac{x^{b_n}}{b_n!} = \frac{x^{b_1+b_2+\cdots+b_n}}{b_1!b_2!\cdots b_n!} = \frac{x^m}{b_1!b_2!\cdots b_n!} = \frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_n!} \cdot \frac{x^m}{m!}$。
做卷积，所有满足 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = m$ 的项的系数之和，再乘以 $m!$，即答案。

一点小结论（前已述及）

(1) 序列 a 的普通生成函数：$F(x) = \sum a_n x^n$

(2) 序列 a 的指数生成函数：$F(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!}$

泰勒展开式

普通生成函数：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

指数生成函数：

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

有穷序列的生成函数

$$1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$$

广义二项式定理

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i-1}^{i}x^i$$

证明：

二项式定理：

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i$$

(1) 扩展域：

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{\infty}C_n^i x^i,\quad \text{当 } i>n \text{ 时 } C_n^i=0$$

(2) 扩展指数为负数：

$$C_{-n}^{i}=(-n)(-n-1)\cdots(-n-i+1)$$

$$=(-1)^i\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}=(-1)^i C_{n+i-1}^{i}$$

$$(1+x)^{-n}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{-n}^{i}x^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i C_{n+i-1}^{i}x^i$$

(3) 括号内的加号变减号：

$$(1-x)^{-n}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iC_{n+i-1}^i(-x)^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i-1}^ix^i$$

证毕。

莫反

狄利克雷生成函数

数列 $\langle a_1,a_2,a_3,\cdots\rangle$ 的狄利克雷生成函数定义为：

$$F(x)=\frac{a_1}{1^x}+\frac{a_2}{2^x}+\frac{a_3}{3^x}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

乘法运算（Dirichlet 卷积）

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{i^x}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{j^x}&=\left(\frac{a_1}{1^x}+\frac{a_2}{2^x}+\frac{a_3}{3^x}+\frac{a_4}{4^x}+\cdots\right)\left(\frac{b_1}{1^x}+\frac{b_2}{2^x}+\frac{b_3}{3^x}+\frac{b_4}{4^x}+\cdots\right)\\&=\frac{a_1b_1}{1^x}+\frac{a_1b_2}{2^x}+\frac{a_2b_1}{3^x}+\frac{a_1b_3}{4^x}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\sum_{d|n}a_db_{\frac{n}{d}}\end{aligned}$$

系数计算规则

$\frac{1}{n^x}$ 项的系数等于所有满足 $d|n$（d 整除 n）的项 $a_db_{n/d}$ 之和：

- 4^x **的系数**：$a_1b_4 + a_2b_2 + a_4b_1$
  (枚举 4 的约数 $d = 1, 2, 4$)
- 6^x **的系数**：$a_1b_6 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_6b_1$
  (枚举 6 的约数 $d = 1, 2, 3, 6$)

一点和式的小结论

欧拉函数

1. 定义

欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示小于等于 n 且与 n 互质的正整数个数：

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{n} [\gcd(i, n) = 1]$$

欧拉函数值表

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

2. 性质

欧拉函数求和定理

对于任意正整数 n，其所有因子的欧拉函数值之和等于 n：

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

验证示例

$$
\begin{gathered}
\varphi(1)=1\\
\varphi(1)+\varphi(2)=1+1=2\\
\varphi(1)+\varphi(3)=1+2=3\\
\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(4)=1+1+2=4\\
\varphi(1)+\varphi(5)=1+4=5\\
\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6)=1+1+2+2=6
\end{gathered}
$$

证明思路

考虑以 n 为分母的真分数 $[0,1)$ 区间:

$$\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$$

将这些分数化简为最简形式后，根据分母分组，可证明结论。

示例演示（$n=12$）

所有真分数

$$\frac{0}{12},\frac{1}{12},\frac{2}{12},\frac{3}{12},\frac{4}{12},\frac{5}{12},\frac{6}{12},\frac{7}{12},\frac{8}{12},\frac{9}{12},\frac{10}{12},\frac{11}{12}$$

化简后分组

分母 d	最简分数	个数 $\varphi(d)$
1	$\frac{0}{1}$	$\varphi(1)=1$
2	$\frac{1}{2}$	$\varphi(2)=1$
3	$\frac{1}{3},\frac{2}{3}$	$\varphi(3)=2$

分母 d	最简分数	个数 $\varphi(d)$
4	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	$\varphi(4) = 2$
6	$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	$\varphi(6) = 2$
12	$\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$	$\varphi(12) = 4$

验证等式

$$\sum_{d|12} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$$

注意到窝们的证明思路天然满足定义

一般性证明

1. 考虑所有分母为 n 的真分数：

$$\frac{k}{n} \quad (0 \le k < n)$$

   共有 n 个分数。
2. 将每个分数化简为最简形式 $\frac{a}{d}$，其中 $d \mid n$ 且 $\gcd(a, d) = 1$。
3. 对 n 的每个约数 d 分组：
   - 分母为 d 的分数个数 = $\varphi(d)$
   - 因为分子 a 需满足 $1 \le a \le d$ 且 $\gcd(a, d) = 1$
4. 总和为：

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

   即得证。

莫比乌斯函数

1. 定义

莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 定义如下：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{若 } n = 1 \\ (-1)^s & \text{若 } n = p_1 p_2 \cdots p_s\text{（无平方因子的整数）} \\ 0 & \text{若 } n \text{ 包含平方因子} \end{cases}$$

莫比乌斯函数值表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0

---

2. 核心性质

$$\sum_{d|n} \mu(d) = [n = 1] = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

验证示例

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad \mu(1) = 1 \\ n = 2: &\quad \mu(1) + \mu(2) = 1 + (-1) = 0 \\ n = 3: &\quad \mu(1) + \mu(3) = 1 + (-1) = 0 \\ n = 4: &\quad \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) = 1 + (-1) + 0 = 0 \\ n = 6: &\quad \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6) = 1 + (-1) + (-1) + 1 = 0 \end{aligned}$$

---

3. 证明（$n > 1$ 时和为 0）

证明思路

设 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$，定义 n' 为 n 的平方自由部分：

$$n' = p_1 p_2 \cdots p_s$$

则：

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n'} \mu(d)$$

组合证明

考虑 n 的质因子集合 S，其大小为 s：

- $\mu(d) \neq 0$ 的 d 对应 S 的子集
- d 的质因子个数为 k 时，$\mu(d) = (-1)^k$
- 由二项式定理

$$\sum_{d|n'} \mu(d) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} = (1 + (-1))^s = 0$$

示例说明（$n = 6$）

$6 = 2^1 \times 3^1$，$S = \{2, 3\}$：

$$\begin{aligned}
\mu(1) &= (-1)^0 = 1 && \text{(取 0 个质因子)} \\
\mu(2) &= (-1)^1 = -1 && \text{(取质因子 2)} \\
\mu(3) &= (-1)^1 = -1 && \text{(取质因子 3)} \\
\mu(6) &= (-1)^2 = 1 && \text{(取质因子 2,3)}
\end{aligned}$$

和为 $1 + (-1) + (-1) + 1 = 0$。

狄利克雷卷积

定义

设 $f(n), g(n)$ 是两个积性函数，其狄利克雷卷积定义为：

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$$

> 注意跟狄利克雷生成函数形式上的相似性
> 读作：f 卷 g

示例

$$(f * g)(4) = f(1)g(4) + f(2)g(2) + f(4)g(1)$$

运算规律

1. **交换律**：$f * g = g * f$
2. **结合律**：$(f * g) * h = f * (g * h)$
3. **分配律**：$(f + g) * h = f * h + g * h$

常用函数

函数名称	符号表示	定义
元函数	$\epsilon(n)$	$[n = 1] = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$
常数函数	$1(n)$	1
恒等函数	$id(n)$	n

函数名称	符号表示	定义
欧拉函数	$\varphi(n)$	<n且与n互质的数的个数
莫比乌斯函数	$\mu(n)$	$\begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^k & n=p_1p_2...p_k \\ 0 & n\text{含平方因子} \end{cases}$

> 注意符号的读法 μ 读作“缪”，φ 读作“phi”，ϵ 读作“一穆西隆”

常用卷积关系

简记形式

1. $\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1] \quad \Leftrightarrow \quad \mu*1=\epsilon$
2. $\sum_{d|n}\varphi(d)=n \quad \Leftrightarrow \quad \varphi*1=id$
3. $\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\varphi(n) \quad \Leftrightarrow \quad \mu*id=\varphi$
4. $f*\epsilon=f$
5. $f*1\neq f$

> 注意莫比乌斯函数是常数函数的逆元

证明

1. $\mu*1=\epsilon$

$$(\mu*1)(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\cdot 1\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]=\epsilon(n)$$

2. $\varphi*1=id$

$$(\varphi * 1)(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) \cdot 1\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n = id(n)$$

3. $\mu * id = \varphi$

$$(\mu * id)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot id\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \varphi(n)$$

$$\mu * id = \mu * \varphi * 1 = (\varphi * 1 * \mu) = \epsilon * \mu = \varphi$$

4. $f * \epsilon = f$

$$(f * \epsilon)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot \epsilon\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \cdot \left[\frac{n}{d} = 1\right] = f(n)$$

5. $f * 1 \neq f$

$$(f * 1)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot 1\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \neq f(n)$$

莫比乌斯反演

其实就是一下几个式子(条件式变成和式)

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = [n = 1] = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

把n换成$gcd(a, b)$

$$\sum_{d|gcd(a,b)} \mu(d) = [gcd(a, b) = 1] \begin{cases} 1 & gcd(a, b) = 1 \\ 0 & gcd(a, b) > 1 \end{cases}$$

莫比乌斯变换

基本公式

设 $f(n)$, $g(n)$ 均为积性函数，则：

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \iff g(n)=\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

即

$$f=g*1 \iff g=\mu*f$$

- $f(n)$ 称为 $g(n)$ 的莫比乌斯变换
- $g(n)$ 称为 $f(n)$ 的莫比乌斯逆变换

> 注意对于一些函数 f(n)，如果很难直接求出它的值，而容易求出其倍数和或约数和 g(n)，那么可以通过莫比乌斯反演简化运算，求得
> f(n) 的值。

证明方法一（卷积形式）

正向推导

$$\begin{aligned} f &= g*1 \\ \mu*f &= \mu*(g*1) \\ &= g*(\mu*1) \\ &= g*\epsilon \\ &= g \end{aligned}$$

逆向推导

$$
\begin{aligned}
g &= \mu * f \\
g * 1 &= (\mu * f) * 1 \\
&= f * (\mu * 1) \\
&= f * \epsilon \\
&= f
\end{aligned}
$$

证明方法二（双重求和）

$$
\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} g(k) \\
&= \sum_{d|n} \sum_{k|\frac{n}{d}} \mu(d) g(k) \\
&= \sum_{k|n} \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d) g(k) \\
&= \sum_{k|n} g(k) \left(\sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d)\right) \\
&= \sum_{k|n} g(k) \cdot \epsilon\left(\frac{n}{k}\right) \\
&= g(n)
\end{aligned}
$$

排列组合

圆排列

n 个不同元素围成一圈的**圆排列数**，记作 Q_n^n。

考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开，会变成 n 个不同的线排列：

$$
Q_n^n \times n = A_n^n
$$

则

$$Q_n^n = \frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

例如，3 个不同元素的圆排列数为 $(3-1)! = 2$ 种：

从 n 个不同元素中选 m 个围成一圈的**圆排列数**，记作 Q_n^m：

$$Q_n^m = C_n^m \cdot Q_m^m = \frac{n!}{m \cdot (n-m)!}$$

> 其实就是全排列固定了一个数

错位排列

错位排列是没有任何元素出现在其有序位置的排列。对于 $1 \sim n$ 的排列 P，如果满足 $P_i \neq i$，则称 P 是 n 的错位排列。

错位排列数

- $D_1 = 0$
- $D_2 = 1$（即 $\{2,1\}$）
- $D_3 = 2$（即 $\{2,3,1\},\{3,1,2\}$）
- $D_4 = 9$（即 $\{2,1,4,3\},\{2,3,4,1\},\{2,4,1,3\},\{3,1,4,2\},\{3,4,1,2\},\{3,4,2,1\},\{4,1,2,3\},\{$ ）

递推关系 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

边界条件：

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
D_n	0	1	2	9	44	265	1854	14833

信封问题

n 封不同的信（编号 $1, 2, \ldots, n$）放入 n 个编号对应的信封中，要求每个信封的编号与信的编号都不相同。有多少种放置方法?

递推关系分析

考虑第 n 封信的放置:

1. **情况1**：前 $n-1$ 封信已全错排
    - 第 n 封信只需与前面任一封信交换位置
    - 方法数：$(n-1) \cdot D_{n-1}$
2. **情况2**：前 $n-1$ 封信恰好有 1 封位置正确
    - 第 n 封信必须与位置正确的信交换
    - 方法数：$(n-1) \cdot D_{n-2}$

> 其他情况无法通过一次交换变成全错排

第一类斯特林数（斯特林轮换数）

将 n 个不同元素划分为 m 个非空圆排列的方案数，
记作 $S(n, m)$ 或:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

递推关系

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$$

组合解释（圆桌问题）

n 个人坐 m 张圆桌的方案数，考虑第 n 个人的两种坐法：

1. **单独坐一桌**
    - 前 $n-1$ 人坐满剩余的 $m-1$ 张桌
    - 方案数：$\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$
2. **与其他人同坐**
    - 前 $n-1$ 人先坐满 m 张桌
    - 第 n 人可坐到任意 $n-1$ 个人的左侧
    - 方案数：$(n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$

第二类斯特林数（斯特林子集数）

将 n 个不同元素划分为 m 个非空子集的方案数，
记作 $S(n, m)$ 或：

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$$

递推关系

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$$

组合解释（房间分配问题）

n 个人进入 m 个房间的方案数（每个房间非空），考虑第 n 个人的两种选择：

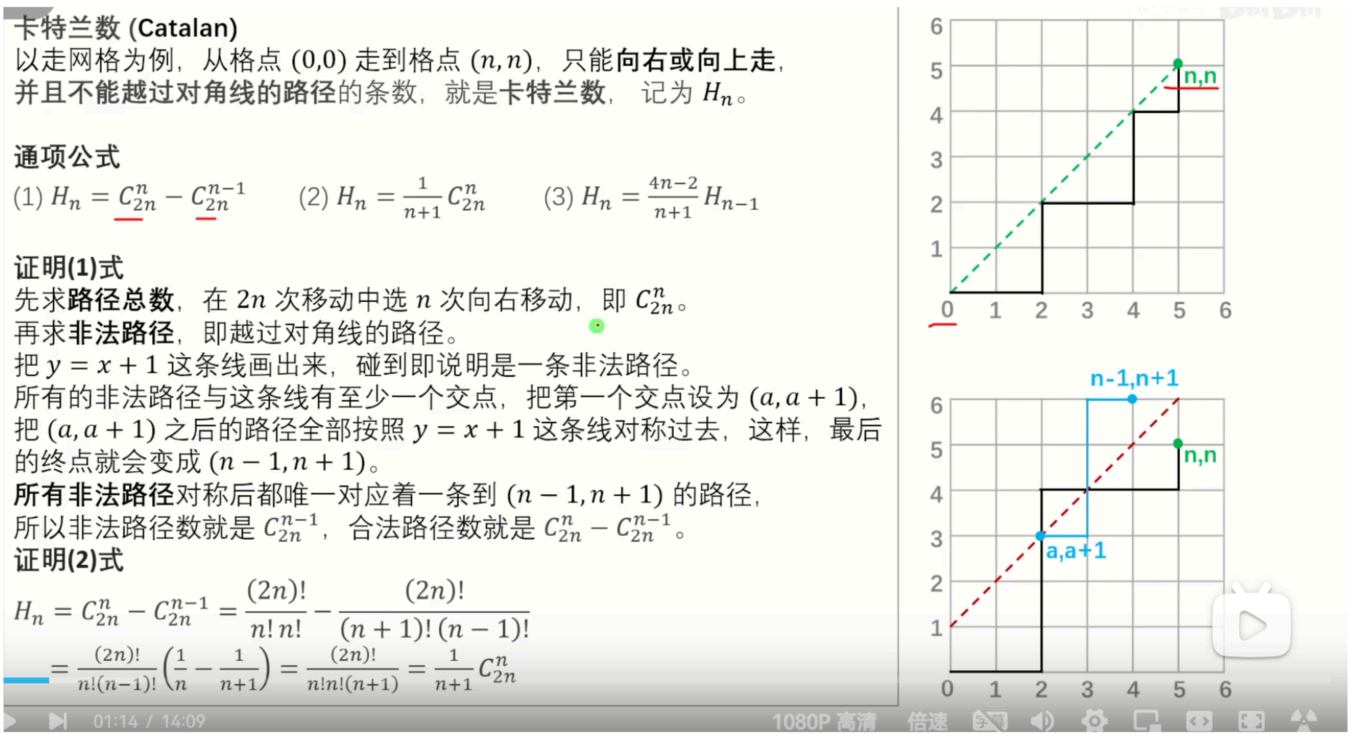
1. **单独进入新房间**
    - 前 $n-1$ 人进入剩余的 $m-1$ 个房间
    - 方案数：$\begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix}$
2. **进入已有人的房间**

- 前 $n-1$ 人先进入所有 m 个房间
- 第 n 人可选择进入任意一个已有人的房间
- 方案数：$m\cdot\left\{\begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix}\right\}$

Catalan数 通项公式

(1) $H_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$
(2) $H_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$
(3) $H_n = \frac{4n-2}{n+1}H_{n-1}$

证明



Catalan 数列

H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8
1	1	2	5	14	42	132	429	1430

Catalan 特征

从 (0,0) 到 (n,n)，不越过对角线，即任何时候，向上走的步数不能超过向右走的步数。
一种操作数不能超过另外一种操作数，或者两种操作不能有交集，这些操作的合法方案数，通常是卡特兰数。

Catalan 应用

1. 一个有 n 个 0 和 n 个 1 组成的字串，且所有的前缀字串皆满足 1 的个数不超过 0 的个数。这样的字串个数有多少?
2. 包含 n 组括号的合法运算式的个数有多少?
3. 一个栈的进栈序列为 1,2,3,⋯, n，有多少个不同的出栈序列?
   合法性：任何时刻不能空栈出栈 ⇒ 任意前缀")"不多于"("；最后入栈、出栈各n次，栈空。
4. n 个结点可构造多少个不同的二叉树?
5. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得的 n 条弦不相交的方法数?
6. 通过连结顶点而将 $n+2$ 边的凸多边形分成 n 个三角形的方法数?

说明

这些都是卡特兰数，因为它们都与**合法括号序列 / Dyck 路径**存在天然的双射，或者都满足同一个**卡特兰递推**

$$C_0 = 1, \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\, C_{n-1-i}\ (n \ge 1),$$

并且初值一致，所以计数相同。分别说——

---

3) 单栈出栈序列的个数 = C_n

把栈的操作写成长度 $2n$ 的串：

- 入栈记"("，出栈记")"。
  合法性：任何时刻不能空栈出栈 ⇒ 任意前缀")"不多于"("；最后入栈、出栈各 n

次。
这正是**合法括号序列**的定义，因此个数为 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

（同说法：栈可生成的排列=231-避免排列，其数目为卡特兰数。）

---

4) n 个结点的二叉树个数 = C_n

设 T_n 为有 n 个结点（有序、无标号）的二叉树数。以根为界：左子树 i 个结点、右子树 $n-1-i$ 个结点，二者独立：

$$T_n=\sum_{i=0}^{n-1}T_i\,T_{n-1-i},\quad T_0=1.$$

这恰是卡特兰递推，因此 $T_n=C_n$。
（等价双射：对二叉树做先序/中序边走访，“向下”记“(”，“返回”记“)”，得到 Dyck 串，反之亦然。）

---

5) 圆上 $2n$ 点配对且弦不相交的配法数 = C_n

固定点 1，它必须与某个点 $2k$ 相连（顺时针计）。这一条弦把圆分成两侧：

- 一侧有 $2k-2$ 个点，可不交配对数 C_{k-1}；
- 另一侧有 $2n-2k$ 个点，可不交配对数 C_{n-k}。
  枚举 $k=1..n$ 得

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}C_{n-k}=\sum_{i=0}^{n-1}C_iC_{n-1-i}.$$

  同初值 $M_0=1$，故 $M_n=C_n$。

---

6) 将凸 $(n+2)$-边形三角剖分的方法数 = C_n

固定顶点 1，选一条对角线 $(1,j)$（$j=3..n+2$）。它把多边形分成：

- 一个 $(j-1)$-边形（可三角剖分数 C_{j-3}）；
- 一个 $(n+3-j)$-边形（可三角剖分数 $C_{n-(j-2)}$）。
  求和得同一递推：

$$T_n=\sum_{j=3}^{n+2} C_{j-3}C_{n-(j-2)}=\sum_{i=0}^{n-1} C_iC_{n-1-i}, \quad T_0=1,$$

故 $T_n=C_n$。

递推来源

从合法括号序列（Dyck 路径）推导

考虑长度 $2n$ 的合法括号序列：

- 第一个符号必然是“(”。
- 找到与之匹配的 “)” 位置。假设它在第 $2k+2$ 个位置（即括号包住了 k 对括号）。

于是序列可以分成三部分：

$$(\underbrace{S}_{2k\text{ 长度的合法串}})\underbrace{T}_{2(n-k-1)\text{ 长度的合法串}}$$

- 内部 S 是一个合法串，长度 $2k$，个数 C_k；
- 外部 T 也是一个合法串，长度 $2(n-k-1)$，个数 C_{n-1-k}。

所以

$$C_n=\sum_{k=0}^{n-1} C_k\cdot C_{n-1-k}.$$

这就是递推的来源。

勒让德公式

勒让德公式是什么

勒让德公式用来算**质数 p 在阶乘 $n!$ 的质因子分解中的指数**。
公式是:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

其中 $v_p(n!)$ 表示 p 在 $n!$ 里出现的次数（指数）。

为什么成立

考虑 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$。

- 每隔 p 个数里有一个能被 p 整除，所以至少有 $\lfloor n/p \rfloor$ 个因子 p;
- 每隔 p^2 个数里有一个能被 p^2 整除，它会额外贡献一个 p，所以再加 $\lfloor n/p^2 \rfloor$;
- 每隔 p^3 个数里有一个能被 p^3 整除，它会再额外贡献一个 p……
  如此类推，直到 $p^k > n$ 为止。

所以总和就是上面的式子。

一个例子

算 $v_2(10!)$:

$$\lfloor 10/2 \rfloor + \lfloor 10/4 \rfloor + \lfloor 10/8 \rfloor = 5 + 2 + 1 = 8.$$

验证：
$10! = 3628800 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$

在这题里的作用

我们要计算：

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

其中涉及到阶乘：
$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$。

为了在**任意模数** p 下算出结果（尤其是 p 不是质数时），不能用逆元，要直接做**质因子分解**。于是对每个质数 q，用勒让德公式求它在 $(2n)!$、$n!$ 中的指数差，得到 q 在组合数中的幂次。

再减去 $n+1$ 的质因子指数，就是卡特兰数的质因子分解。最后用快速幂拼起来，就得到答案 $\bmod p$。

排列组合进阶

组合意义天地灭 代数推导保平安

> 主要记录一些好玩的小玩意
> 特别感谢cbdsopa的博客-OI中基本的组合数学公式/oi_wiki组合数学

比较深刻的是
如果两个计数过程本质相同，那么答案相同，即使过程不同

插板法

插板法是用于求一类给相同元素分组的方案数的一种技巧，也可以用于求一类线性不定方程的解的组数。

正整数和的数目

问题一：现有 n 个 **完全相同** 的元素，要求将其分为 k 组，保证每组至少有一个元素，一共有多少种分法?

考虑拿 $k-1$ 块板子插入到 n 个元素两两形成的 $n-1$ 个空里面。

因为元素是完全相同的，所以答案就是 $\binom{n-1}{k-1}$。

本质是求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的正整数解的组数。

非负整数和的数目

问题二：现有 n 个 **完全相同** 的元素，要求将其分为 k 组，每组可以为空，一共有多少种分法?

我们考虑创造条件转化成有限制的问题一，先借 k 个元素过来，在这 $n+k$ 个元素形成的 $n+k-1$ 个空里面插板，答案为

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$$

组合意义：

开头我们借来了 k 个元素，用于保证每组至少有一个元素，插完板之后再把这 k 个借来的元素从 k 组里面拿走。因为元素是相同的，所以转化过的情况和转化前的情况可以一一对应，答案也就是相等的。

由此可以推导出插板法的公式：$\binom{n+k-1}{n}$。

本质是求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的非负整数解的组数（即要求 $x_i\geq 0$）。

不同下界整数和的数目

问题三：现有 n 个 **完全相同** 的元素，要求将其分为 k 组，对于第 i 组，至少要分到 $a_i,\sum a_i\leq n$ 个元素

本质是求 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的解的数目，其中 $x_i\geq a_i$。

类比无限制的情况，我们借 $\sum a_i$ 个元素过来，保证第 i 组至少能分到 a_i 个。也就是令

$$x_i' = x_i - a_i$$

得到新方程：

$$\begin{aligned}(x_1'+a_1)+(x_2'+a_2)+\cdots+(x_k'+a_k)&=n\\ x_1'+x_2'+\cdots+x_k'&=n-a_1-a_2-\cdots-a_k\\ x_1'+x_2'+\cdots+x_k'&=n-\sum a_i\end{aligned}$$

其中

$$x_i' \geq 0$$

然后问题三就转化成了问题二，直接用插板法公式得到答案为

$$\binom{n-\sum a_i+k-1}{n-\sum a_i}$$

不相邻的排列

$1 \sim n$ 这 n 个自然数中选 k 个，这 k 个数中任何两个数都不相邻的组合有 $\binom{n-k+1}{k}$ 种。

组合意义：

假设我们已经完成了选择。那么这 n 个数就被分成了两类：

- 被选中的数
- 没被选中的数

我们考虑把$n-k$没被选中的数分别排成一列,产生了 $n-k+1$ 个空,然后在这 $n-k+1$ 个空里面插入 k 个板子 ,答案就是 $\binom{n-k+1}{k}$ 种。

构造双射：

问题等价于 我们需要从 $1,2,...,n$ 中选出 k 个数，设这就 k 个数从小到大排序后为 $a_1,a_2,...,a_k$。 满足：

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le n$$

且

$$a_{i+1} - a_i \ge 2 \quad (1 \le i < k)$$

考虑构造

$$b_i = a_i - (i-1)$$

原式变为

$$b_i < b_{i+1}$$

b_i 上界

$$b_k = a_k - (k-1) \le n - (k-1) = n - k + 1$$

经过变换后，原问题等价于:
从整数集合 $\{1, 2, \ldots, n-k+1\}$ 中选出 k 个互不相同的整数 $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$
这个问题是简单的，请读者自己算

组合恒等式

1. 对称式

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

组合意义: 你 n 中拿 m 个等价于有 $n-m$ 个不拿。

2. 二项式定理/多项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

组合意义：
我们把 $(x+y)^n$ 看作是有 n 个 $(x+y)$ 相乘，那么得到一个 x^ay^{n-a} 相当于是从 n 个 $(x+y)$ 中选出 a 个 $(x+y)$ 中的 x 相乘，那么结果的多项式中就有一项是 $\binom{n}{a}x^ay^{n-a}$ 。所有的这种项都满足这种情况，那么公式可得。

其实不一定要求必须是两元的，多元的也是同理。
然后我们可以得到**多项式定理**：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$$

证明：
同二项式定理证明，对于 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 这一项的系数为 $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}{n_m}$
。
展开发现可以抵消一些东西，于是上面的系数就等于：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}=\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}$$

其实这个式子就是多重集排列数

3. 帕斯卡定理

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

我们知道 $(x+y)^n$ 得到的多项式是系数满足杨辉三角的，我们知道了二项式定理的话，这个东西就是杨辉三角的递推式。

组合意义：
考虑已经选了$n-1$个数，现在要选第n个数，那么第n个数选了的话，就相当于从$n-1$个数中选$k-1$个数，第n个数没选的话，就相当于从$n-1$个数中选k个数。

4. 特殊的二项式定理/第一类二项式反演

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \tag{1}$$

实际上是 $(1+1)^n$，当然也可以从组合意义上证明，当然这是不必要的。

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=[n=0] \tag{2}$$

实际上是 $(1-1)^n$，我称之为第一类二项式反演。

5. 递推式 1

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

按定义来就没了，简单提一下。

代数推导：

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n}{k}\\&=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

这个式子比较深刻
比如，要求解这个经典求和：

$$S=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$$

直接算很难，因为系数里有个 k。利用 $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$，我们可以把 k “吸”进组合数里，把常数 n “吐”出来：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \quad (令\ j=k-1) \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \\
&= n\cdot 2^{n-1}
\end{aligned}$$

> 这个式子正是7.变下项求和式中的第一个式子。

6. 积式

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

定义展开左边上下分子分母同乘 $(n-k)!$ 即可证明。

代数推导:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r}\binom{r}{k} &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{r!}{k!(r-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}
\end{aligned}$$

7. 变下项求和式

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}=n2^{n-1} \tag{1}$$

代数推导:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}
$$

从二项式定理的求导也可以推出

利用二项式定理：

$$
(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k
$$

两边对 x 求导：

$$
n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}
$$

令 $x=1$，代入得：

$$
n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} (1)^{k-1}
$$

$$
n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \tag{2}
$$

证明和上面差不多，就不证了。

8. 变上项求和式

$$
\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}
$$

组合意义：
指定 $n+1$ 个数的集合 $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\}$。
先考虑右边的组合意义，即从 $n+1$ 个数中选出 $k+1$ 个。
左边的组合意义：相当于是总共 $n+1$ 种不累加的情况的加法原理。

第一种：指定必须选择 a_1，然后从剩余的 n 个数中选择 k 个，方案数 $\binom{n}{k}$。

第二种：指定必须不选择 a_1 而选择 a_2 ，然后从剩余的 $n-1$ 个数中选择 k 个，方案数 $\binom{n-1}{k}$
。

第三种：指定必须不选择 a_1,a_2 而选择 a_3 ，然后从剩余的 $n-2$ 个数中选择 k 个，方案数 $\binom{n-2}{k}$。

$$\vdots$$

第 $n+1$ 种：指定必须不选择 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 而选择 a_{n+1} ，然后从剩余的 0 个数中选择 k 个，方案数 $\binom{0}{k}$。

总体的组合意义 $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}$ 等价于从 $n+1$ 个数中选出 $k+1$ 个，那么等式左右两边组合意义相同，等式成立。

8.1 变上项求和式 (扩展)

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i+m}{m}=\binom{n+m+1}{m+1} \tag{2}$$

另外的一种常用的形式是上下项共变的。
证明和上面的式子是类似的。
但是我们采取代数推导：

$$S=\underbrace{\binom{m+1}{m+1}}_{\text{原}\binom{m}{m}}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n+m}{m}$$

$$S=\underbrace{\binom{m+2}{m+1}+\binom{m+2}{m}}_{\text{合并这两项}}+\cdots+\binom{n+m}{m} \tag{3.pascal}$$

一直合并 Q.E.D.

9. 积和式 (范德蒙德卷积)

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r},\quad r\le\min\{n,m\} \tag{1}$$

组合意义：
指定集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ 和 $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$。
右边问题等价于从 A,B 两个集合中选出 r 个的方案数。
左边问题等价于：
对于 $k\in[0,r]$，先在 A 中先取出 k 个，然后在 B 中选出 $r-k$ 个的总方案数。
即 A,B 中总共选出 r 个的方案数。
所以左右两个问题组合意义等价，等式成立。

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n} \tag{2}$$

这是 **9.积和式** 的一种特殊情况，代入 $m=n$ 即可。

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{k}{a}\binom{r-k}{b}=\binom{r+1}{a+b+1} \tag{3}$$

几何意义：
指定集合 $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}\}$。
右边问题等价于从 S 中选出 $a+b+1$ 个数。
左边问题等价于：
第 i 种，指定选出 a_i ，然后再在 $[1,i-1]$ 和 $[i+1,r]$ 中分别选出 a 个和 b 个。
于是这几种合并起来就等价于 $\binom{r+1}{a+b+1}$ 。
因此左右两边组合意义等价，等式成立。

为啥不重复？
我们考虑 S 是升序的 a_i ，即为第 $a+1$ 小，我们钦定 i 的时候保证了独立性

10. 第二类二项式反演

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g(i) \iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$$

代数推导：

已知：$g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$

则：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g(i) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}f(j)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{i}{j}f(j)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}f(j)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f(j)\sum_{i=j}^{n}(-1)^i\binom{n-j}{i-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f(j)\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{i+j}\binom{n-j}{i}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i(-1)^{2j}\binom{n-j}{i}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\binom{n-j}{i}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)[n-j=0]\\
&= f(n)
\end{aligned}$$

积式->变换求和顺序->第一类二项式反演

然后我们还可以得到一个扩展：

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i) \iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$$

证明：
令 $G(n)=(-1)^n g(n)$，有：
若 $f(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}G(i)$ 成立，有 $G(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$。
即

$$G(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$$
$$\therefore g(n)(-1)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$$

当 n 为偶数，则 $n-i$ 与 i 奇偶性相同，有 $g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$
当 n 为奇数，则 $n-i$ 与 i 奇偶性相反，同样有 $g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$
由此有 $g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$

11.浅对角线求和

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i}{i}=F_{n+1}$$

组合意义：爬楼梯 (Climbing Stairs)问题：
假设你要爬一个 n 级台阶的楼梯。你每次只能走 1阶 或 2阶。问有多少种不同的爬法?
角度 A：动态规划（对应右边 F_{n+1}）设 $f(n)$ 为爬 n 级台阶的方法数。
最后一步可能是迈了 1 阶（前一步在 $n-1$），或者是迈了 2 阶（前一步在 $n-2$）。
递推公式：$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$。初始值：$f(0)=1$ (不动也是一种), $f(1)=1$。
这是标准的斐波那契数列定义。
所以总方案数对应 F_{n+1}。
角度 B：枚举“迈2阶”的次数（对应左边 $\sum$）我们换一种数法：按“一共迈了几次 2 阶”来分类。
假设我们在整个过程中，一共迈了 i 次 2阶。消耗台阶数：这 i 次 2 阶共消耗了 $2i$ 级台阶。剩余台阶数：剩下的 $n-2i$ 级台阶，必须全部由 1阶 走完（共 $n-2i$ 次 1 阶）。
总步数：

$$\text{总步数}=(2\text{阶的次数})+(1\text{阶的次数})=i+(n-2i)=n-i$$

排列组合：我们要在这 $n-i$ 步中，选出哪 i 步是走“2阶”的。这相当于从 $n-i$ 个位置中选 i 个位置。方案数为：$\binom{n-i}{i}$。结论既然所有的方案就是枚举 i 从 0 到最大可能值（$\lfloor n/2\rfloor$），把这些情况加起来，就是总的爬楼梯方案数。

$$\sum_i \binom{n-i}{i} = \text{爬n阶楼梯的总方案数} = F_{n+1}$$

多重集的组合数 1

设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于整数 $r(r < n_i, \forall i \in [1, k])$，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数就是 **多重集的组合数**。这个问题等价于 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ 的非负整数解的数目，可以用插板法解决，答案为

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

多重集的组合数 2

考虑这个问题：设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k,\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于正整数 r，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数。

这样就限制了每种元素的取的个数。同样的，我们可以把这个问题转化为带限制的线性方程求解：

$$\forall i \in [1, k],\ x_i \le n_i,\ \sum_{i=1}^{k} x_i = r$$

于是很自然地想到了容斥原理。容斥的模型如下：

1. 全集：$\sum_{i=1}^{k} x_i = r$ 的非负整数解。
2. 属性：$x_i \le n_i$。

于是设满足属性 i 的集合是 S_i，$\overline{S_i}$ 表示不满足属性 i 的集合，即满足 $x_i \ge n_i + 1$ 的集合（转化为上面插板法的问题三）。

怎么转化的?
e.g.
我们强制分配 $n_i + 1$ 个 a_i，剩下的 $r - (n_i + 1)$ 个 a_i 可以任意取，所以方案数为

$\binom{r-(n_i+1)+k-1}{k-1}$

那么答案即为

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i}\right|$$

根据容斥原理，有：

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i}\right| &= \sum_i \left|\overline{S_i}\right| - \sum_{i,j} \left|\overline{S_i} \cap \overline{S_j}\right| + \sum_{i,j,k} \left|\overline{S_i} \cap \overline{S_j} \cap \overline{S_k}\right| - \cdots \\ &\quad + (-1)^{k-1} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \overline{S_i}\right| \\ &= \sum_i \binom{k+r-n_i-2}{k-1} - \sum_{i,j} \binom{k+r-n_i-n_j-3}{k-1} + \sum_{i,j,k} \binom{k+r-n_i-n_j-n_k}{k-1} \\ &\quad + (-1)^{k-1} \binom{k+r-\sum_{i=1}^{k} n_i - k - 1}{k-1}\end{aligned}$$

拿全集 $|U| = \dbinom{k+r-1}{k-1}$ 减去上式，得到多重集的组合数

$$Ans = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \sum_A \binom{k+r-1-\sum_A n_{A_i} - p}{k-1}$$

其中 A 是充当枚举子集的作用，满足 $|A| = p$，$A_i < A_{i+1}$。

炫酷反演魔术

> 从广义莫比乌斯反演的角度思考各类反演魔术

此笔记主要总结之前的二项式反演/莫比乌斯反演
然后补充斯特林反演/mix-max容斥/容斥的相关技术

一切的基石：广义莫比乌斯反演

我们在数论中熟悉的 $\sum_{d|n} \mu(d) = [n=1]$ 其实只是冰山一角。所有的反演公式本质上都是在一个特定的偏序集(DAG)上求解线性方程组。

1.1 定义

设 P 是一个局部有限的偏序集。

Zeta 函数 (前缀和) $\zeta(x,y)$:
表示 x 是否小于等于 y。

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \le y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

> $\zeta(x,y) = 1$ 等价于DAG上存在从 x 到 y 的路径。

我们现在知道

$$g(y) = \sum_{x \le y} \zeta(x,y) f(x)$$

我们现在要求解

$$f(y) = \sum_{x \le y} \mu(x,y) g(x)$$

于是我们有这个式子

Möbius 函数 (差分系数) $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z) & x < y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

或者说

$$\sum_{y \preceq z \preceq x} \mu(z,x) = [x=y] = \delta(x,y)$$

> 你想求 x 到 y 的莫比乌斯函数值?

> 你就把从 x 出发，到 y 之前所有中间节点 z 的 $\mu(x,z)$ 加起来，取个负号，就是 $\mu(x,y)$ 。

怎么推导呢?

定义两个双变量函数 A, B 的**狄利克雷卷积**（Dirichlet Convolution）为:

$$(A * B)(x,y) = \sum_{x \le z \le y} A(x,z)B(z,y)$$

这本质上就是**矩阵乘法**。如果你把 $A(x,z)$ 看作矩阵 A 的第 x 行第 z 列元素，把 $B(z,y)$ 看作矩阵 B 的第 z 行第 y 列元素，上述公式就是 $(AB)_{xy}$。

推导单位元 δ

我们想要求解 $f(y)$，这需要逆运算。在做逆运算之前，必须先知道在这个乘法规则下，什么东西相当于数字 1（保持原值不变）。

设单位元函数为 $\delta(x,y)$。
对于任意函数 A，必须满足 $A * \delta = A$。
即:

$$\sum_{x \le z \le y} A(x,z)\delta(z,y) = A(x,y)$$

观察这个等式:

1. **当 $x = y$ 时**:
   式子变为 $A(x,x)\delta(x,x) = A(x,x)$。
   为了对任意 A 成立，必须有 $\delta(x,x) = 1$。
2. **当 $x < y$ 时**:
   式子展开为 $A(x,x)\delta(x,y) + \cdots + A(x,y)\delta(y,y) = A(x,y)$。
   我们在上一步已经确定了 $\delta(y,y) = 1$，所以式子最后那一项 $A(x,y)\delta(y,y)$ 已经等于等号右边的 $A(x,y)$ 了。
   这意味着，前面所有的项加起来必须等于 0:

   $$A(x,x)\delta(x,y) + A(x,x')\delta(x',y) + \cdots = 0$$

   为了让它对任意 A 都恒成立（无论 A 取什么值），必须要求所有系数 $\delta(z,y) =$

0（其中 $z < y$）。

结论 1：要在这种卷积下保持不变，必须使用函数：

$$\delta(x,y) = [x=y] = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

形式化已知条件

已知条件是 $g(y) = \sum_{x \le y} f(x)$。
引入常函数 $\zeta(x,y) = 1$（当 $x \le y$ 时）。
原式可以写成卷积形式（视 f, g 为向量，A, B 为矩阵）：

$$g(y) = \sum_{x \le y} f(x)\zeta(x,y)$$

在代数层面上，这等价于：

$$g = f * \zeta$$

推导 μ

我们的目标是求 f。
既然 $g = f * \zeta$，我们在两边同乘一个 ζ 的逆元（记作 μ）：

$$g * \mu = (f * \zeta) * \mu$$

利用结合律：

$$g * \mu = f * (\zeta * \mu)$$

为了消掉 ζ，我们要求 μ 满足：

$$\zeta * \mu = \delta$$

这样就有：

$$g * \mu = f * \delta = f$$

即 $f(y) = \sum_{x \le y} g(x)\mu(x, y)$。

现在的问题核心变成了：**如何找到这个 μ，使得 $\zeta * \mu = \delta$?**

根据 $\zeta * \mu = \delta$ 的定义，展开卷积公式：

$$\sum_{x \le z \le y} \zeta(x, z)\mu(z, y) = \delta(x, y)$$

因为对于 $x \le z$，$\zeta(x, z)$ 恒等于 1，所以式子简化为：

$$\sum_{x \le z \le y} \mu(z, y) = \delta(x, y)$$

这也是 μ 定义里是 $\mu(x, z)$ 还是 $\mu(z, y)$ 的区别。由于左逆元等于右逆元（因为我们定义的卷积的形式），我们通常习惯计算 $\mu * \zeta = \delta$，即：

$$\sum_{x \le z \le y} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \delta(x, y)$$

简化后（因为 $\zeta(z, y) = 1$）：

$$\sum_{x \le z \le y} \mu(x, z) = \delta(x, y)$$

我们对区间 $[x, y]$ 的大小进行分类讨论：

1. **当 $x = y$ 时（区间长度为1）：**

   $$\mu(x, x) = \delta(x, x)$$

   $\mu(x, x) = 1$
2. **当 $x < y$ 时（区间长度大于1）：**

   $$\sum_{x \le z \le y} \mu(x, z) = \delta(x, y)$$

因为 $x \neq y$，所以 $\delta(x, y) = 0$。

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$$

我们将末项（$z = y$ 的项）分离出来：

$$\left(\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \right) + \mu(x, y) = 0$$

移项得到 $\mu(x, y)$ 的递推式：

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$$

$Q.E.D$

1.2 从矩阵视角看待这个反演

所有的反演公式，都可以抽象为两个数列（或函数） f 和 g 之间的线性关系：

$$g(y) = \sum_{x \preceq y} \zeta(x, y) f(x)$$

这写成矩阵形式就是：

$$\mathbf{g} = \mathbf{Z} \times \mathbf{f}$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是一个变换矩阵。
所谓的“反演”，就是求逆矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{Z}^{-1}$：

$$\mathbf{f} = \mathbf{Z}^{-1} \times \mathbf{g} = \mathbf{M} \times \mathbf{g}$$

对应的形式就是

$$f(x)=\sum_{y\preceq x}\mu(y,x)g(y)$$

1.3. 通用反演定理

于是我们得到了这个很好看的式子

若有两个定义在偏序集 P 上的函数 f,g 满足“和”的关系：

$$g(x)=\sum_{y\leq x}\zeta(y,x)f(y)$$

则可以通过 μ 函数反解出 f：

$$f(x)=\sum_{y\leq x}\mu(y,x)g(y)$$

1.4. 这暗示我们啥东西?

我们通过定义一个矩阵乘法状物的卷积，把所有在偏序集上的反演公式都统一了起来。

其中 $\zeta*\mu=\delta$ 是一个核心方程，μ 是 ζ 的逆元。

容斥原理与子集/超集反演

2.1 容斥原理及其补集形式

有一个集合的集合 $A=\{S_i\}$，那么：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}S_i\right|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{\{a_k\},a_k<a_{k+1}}\left|\bigcap_{j=1}^{i}S_{a_j}\right|$$

> 这是显然的，要证也可以通过二项式定理证明

容斥原理的补集形式

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}S_i\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}\overline{S_i}\right|$$

> 其实画个venn图就能看出来

2.2 子集/超集反演

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T) \iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

$$f(S)=\sum_{S\subseteq T}g(T) \iff g(S)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$$

证明：

引理 μ 具有积性，具体来说，若偏序集 $P=P_1\times P_2$，则 $\mu_P((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\mu_{P_1}(x_1,y_1)\cdot\mu_{P_2}(x_2,y_2)$。

证：μ 函数的唯一定义特征是：
对于任意区间 $[Start, End]$，所有子元素的 μ 值之和必须等于1 （当 $Start=End$ 时）
值之和必须等于 0 （当 $Start<End$ 时）
只要能证明 $\mu_P(x)\cdot\mu_Q(y)$ 满足这个特征，那它就是 $\mu_{P\times Q}$。

设 $S=(x_1,y_1)$ 是起点，$E=(x_2,y_2)$ 是终点。我们需要计算区间 $[S,E]$ 里所有元素的“分量 μ 乘积”之和：

$$\mathrm{Sum}=\sum_{S\le(u,v)\le E}\mu_P(x_1,u)\cdot\mu_Q(y_1,v)$$

因为积偏序集中，u 和 v 的选取是独立的（$x_1\le u\le x_2$ 且 $y_1\le v\le y_2$），我们可以把双重求和拆成两个括号相乘：

$$\mathrm{Sum}=\left(\sum_{x_1\le u\le x_2}\mu_P(x_1,u)\right)\times\left(\sum_{y_1\le v\le y_2}\mu_Q(y_1,v)\right)$$

根据 μ 的定义，括号里的求和结果只能是 1 或 0：
左括号 $=\delta(x_1,x_2)$ （只有 $x_1=x_2$ 时是 1，否则是 0）
右括号 $=\delta(y_1,y_2)$ （只有 $y_1=y_2$ 时是 1，否则是 0）

情况 A：起点 = 终点即 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$。此时 $\mathrm{Sum}=1\times1=1$。 $\implies$ 满足定义！
情况 B：起点 < 终点这意味着 x 和 y 中至少有一个不等（例如 $x_1<x_2$）。那么对应的那个括号求和就是 0。

$$\mathrm{Sum}=0\times(\dots)=0\quad\text{或}\quad(\dots)\times0=0$$

$\implies$ 满足定义！

$Q.E.D$

布尔格（所有子集构成的格）同构于 k 个 链（Chain） $L_2 = \{0, 1\}$ 的直积。
即：$\mathcal{P}(\{1, \dots, k\}) \cong L_2 \times L_2 \times \cdots \times L_2$。（每个元素选或不选对应 0 或 1）。
Möbius 函数具有积性：若偏序集 $P = P_1 \times P_2$，则 $\mu_P((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mu_{P_1}(x_1, y_1) \cdot \mu_{P_2}(x_2, y_2)$。
对于单个链
$0 \le 1$：$\mu(0, 0) = 1$
$\mu(0, 1) = -1$ （因为 $\mu(0, 0) + \mu(0, 1) = 0$）
对于集合 $A \subseteq B$，设 $|B| - |A| = k$。这相当于在 k 个维度上从 0 变到了 1，而在其他维度上保持不变。因此：

$$\mu(A, B) = \underbrace{(-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1)}_{k \text{ 次}} = (-1)^k$$

> 超集反演同理，证明留作作业

二项式反演 (Binomial Inversion)

二项式反演是集合包含偏序集（即布尔格）上的反演在计数问题中的投影。它处理的是“恰好满足 k 个性质”与“至少满足 k 个性质”之间的转换。

3.1 形式一（对称形式）

这是最对称的一种形式，常用于证明其他等式。

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} g(i) \iff g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(i)$$

3.2 形式二（常用形式/多退少补）

通常 $f(i)$ 表示“钦定选 i 个满足性质，其余随意的方案数”，$g(i)$ 表示“恰好 i 个满足性质的方案数”。

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} g(i) \iff g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i)$$

1. 恰好 → 至多型

设 g(m) 代表 **恰好** 满足条件 (= m) 的方案数（即答案）
设 f(m) 代表 **至多** 满足条件 (≤ m) 的方案数

先求出 f(m)，再反演求 g(m)

$$f(m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}g(i) \quad \Rightarrow \quad g(m)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}f(i)$$

2. 恰好 → 至少型

设 g(m) 代表 **恰好** 满足条件 (= m) 的方案数（即答案）
设 f(m) 代表 **至少** 满足条件 (≥ m) 的方案数

先求出 f(m)，再反演求 g(m)

$$f(m)=\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}g(i) \quad \Rightarrow \quad g(m)=\sum_{i=m}^{n}(-1)^{i-m}\binom{i}{m}f(i)$$

我们证明一下形式二：

直接套用子集反演公式：

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i) \iff f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T)$$

$$g(S)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$$

我们只关心大小，所以把大小为i的集合合并

$$g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$$

莫比乌斯反演

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d) \iff g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$$

证明：

我们取偏序集为 **正整数整除格** $D = (\mathbb{Z}^+, |)$。
关系定义为：$a \le b \iff a \mid b$。

此时，我们需要证明：**关联代数 $I(D)$ 可以退化为狄利克雷代数。**

核心引理：区间的结构同构

命题：对于任意 $d \mid n$，偏序区间 $[d, n]$ 与区间 $[1, n/d]$ 是**序同构**的。

> **序同构**：两个偏序集 A 和 B 是序同构的，当且仅当存在双射 $\phi : A \to B$，使得 ϕ 和 ϕ^{-1} 都保持偏序关系。

> 其实就是两个偏序集的dag相同

证明：

1. 定义映射 $\phi : [d, n] \to [1, n/d]$，法则为 $\phi(z) = z/d$。
2. **双射性**：
    - 若 $z \in [d, n]$，则 $d \mid z \mid n$，故 $1 \mid (z/d) \mid (n/d)$，即 $\phi(z) \in [1, n/d]$。显然这是可逆的。
3. **保序性**：
    - 对于任意 $a, b \in [d, n]$，我们需要证明 $a \mid b \iff \phi(a) \mid \phi(b)$。
    - 根据整除定义：$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}, b = ak$。
    - 等式两边同除以 d：$b/d = (a/d)k \iff \phi(b) = \phi(a)k$。
    - 这等价于 $\phi(a) \mid \phi(b)$。

结论：区间 $[d, n]$ 的偏序结构完全等同于 $[1, n/d]$。

由于 $\mu(x, y)$ 的值仅由区间 $[x, y]$ 的**拓扑结构**决定（由 μ 的递归定义可证，同构的偏序集具有相同的 μ 值）。

由核心引理可知，区间 $[d, n]$ 的结构仅依赖于商 n/d。
因此，我们可以定义**约化函数**。

对于关联代数中的任意函数 $h(x, y)$，若其满足 $h(x, y) = h(kx, ky)$（即具有平移不变性），我们可以定义对应的一元算术函数 $\tilde{h}$：

$$\tilde{h}(k) \equiv h(1, k)$$

从而有:

$$h(d,n) = \tilde{h}\left(\frac{n}{d}\right)$$

检查 ζ 和 μ 是否符合此条件:

1. **Zeta**: $\zeta(d,n) = 1 \iff d \mid n$。
   $\zeta(1, n/d) = 1 \iff 1 \mid (n/d)$。
   显然恒成立，故 $\zeta(d,n) = \tilde{\zeta}(n/d) = 1$。
   这里 $\tilde{\zeta}$ 就是数论中的常数函数 $\mathbf{1}(n) = 1$。
2. **Mu**: 由于 μ 是 ζ 的逆元，且 ζ 具有平移不变性，由代数性质可知 μ 也必然继承此性质（同构区间的逆元结构也相同）。
   定义数论莫比乌斯函数 $\mu_{NT}(k) = \mu(1,k)$。
   则 $\mu(d,n) = \mu_{NT}(n/d)$。

现在我们将广义反演公式代入整除格环境。

广义形式:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(d,n)$$

(注：这里 $d \leq n$ 即 $d \mid n$)

代入降维后的 μ:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu_{NT}\left(\frac{n}{d}\right)$$

为了验证这个 μ_{NT} 确实是我们熟知的那个函数，我们检查它的一元卷积性质。
在广义代数中：$\mu * \zeta = \delta$。
对应的一元卷积（狄利克雷卷积）为:

$$(\tilde{\mu} * \tilde{\zeta})(n) = \sum_{d|n} \tilde{\mu}(d)\tilde{\zeta}\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu_{NT}(d) \cdot 1$$

而在广义代数中，$\delta(x,y)$ 降维后对应单位函数 $\epsilon(n) = [n = 1]$。

> 为啥？此时$d=n$,$n/d=1$

因此：

$$\sum_{d|n}\mu_{NT}(d)=[n=1]$$

这正是数论中莫比乌斯函数的**定义式**。

最终结论

通过**整除格区间** $[d,n]\cong[1,n/d]$ **的序同构**，我们将定义在 $I(D)$ 上的广义莫比乌斯反演：

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)\mu(d,n)$$

严格推导为数论形式：

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)\mu_{NT}\left(\frac{n}{d}\right)$$

证毕。

以下是常用式子

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n>1\end{cases}$$

把n换成$gcd(a,b)$

$$\sum_{d|gcd(a,b)}\mu(d)=[gcd(a,b)=1]\begin{cases}1 & gcd(a,b)=1\\ 0 & gcd(a,b)>1\end{cases}$$

初等证明前已述及

Min-Max 容斥

Min-Max 容斥用于将“全集中最大值（最后出现）的问题”转化为“子集中最小值（最先出现）的问题”。在概率期望中，$\min$ 通常比 $\max$ 好算得多。

公式

对于全序集合 S 和其上的值 $\{x_i\}$:

$$\max_{i\in S}{}_k x_i = \sum_{T\subseteq S, T\neq\emptyset} (-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\min_{j\in T} x_j$$

$$\min_{i\in S}{}_k x_i = \sum_{T\subseteq S, T\neq\emptyset} (-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\max_{j\in T} x_j$$

其实 **min_max 容斥** 在期望意义下也满足:

$$E(\max_{i\in S}{}_k x_i) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}E(\min_{j\in T} x_j)$$

$$E(\min_{i\in S}{}_k x_i) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}E(\max_{j\in T} x_j)$$

由期望线性性可知。

> 期望的线性性告诉我们：和的期望等于期望的和。
> 即 $E[\sum c_i \cdot V_i] = \sum c_i \cdot E[V_i]$，无论这些随机变量 V_i 之间是否独立。
>
> $$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\sum_{T\subseteq S} a(|T|)\cdot Z_T\right] \\ &= \sum_{T\subseteq S} a(|T|)\cdot E[Z_T] \quad (\text{常数提出，求和拆开}) \end{aligned}$$

特殊情况 ($k=1$, 最大值):

$$\max(S) = \sum_{T\subseteq S, T\neq\emptyset}(-1)^{|T|-1}\min(T)$$

初等证明

我们需要构造一个关于集合大小的系数函数 $a(|T|)$，使得等式成立：

$$\text{第 } k \text{ 大值} = \sum_{T \subseteq S} a(|T|) \min(T)$$

1.分析元素的贡献
考虑 S 中第 r 大的那个元素，记为 $x_{(r)}$。
在右边的求和式 $\sum a(|T|) \min(T)$ 中，$x_{(r)}$ 何时会被计入?
只有当 $x_{(r)}$ 是集合 T 的最小值时，$\min(T)$ 才会取到 $x_{(r)}$。

如果 $x_{(r)}$ 是 T 的最小值，那么 T 中的其他元素必须都比 $x_{(r)}$ 大。
在 S 中，比 $x_{(r)}$ 大的元素一共有 $r-1$ 个。
假设我们构造的集合 T 大小为 m。除去 $x_{(r)}$ 本身，我们需要从那 $r-1$ 个比它大的数中选出 $m-1$ 个。
方案数为 $\binom{r-1}{m-1}$。

所以，第 r 大的数 $x_{(r)}$ 在右边的总贡献系数是：

$$C(r) = \sum_{m} \binom{r-1}{m-1} a(m)$$

(这里枚举的是集合大小 m)

2.建立目标方程
我们希望左边计算出来的结果恰好是第 k 大的值。
这意味着：

当 $r=k$ 时（即它是第 k 大），总系数 $C(r)=1$。

当 $r \neq k$ 时，总系数 $C(r)=0$。

令 $N=r-1$ (表示比当前数大的数的个数)，目标方程为：

$$\sum_{m} \binom{N}{m-1} a(m) = [N = k-1]$$

令 $j=m-1$，则 $a(m)=a(j+1)$。方程化为：

$$\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}a(j+1)=[N=k-1]$$

3.使用二项式反演求解系数

观察上式，形如 $F(N)=\sum\binom{N}{j}G(j)$。

其中 $F(N)=[N=k-1]$ 是已知结果，$G(j)=a(j+1)$ 是待求系数。

根据二项式反演形式二：

$$G(N)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^{N-j}\binom{N}{j}F(j)$$

代入 $F(j)=[j=k-1]$：

$$a(N+1)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^{N-j}\binom{N}{j}[j=k-1]$$

由于求和式中只有 $j=k-1$ 这一项非零（前提是 $N\geq k-1$），直接提取该项：

$$a(N+1)=(-1)^{N-(k-1)}\binom{N}{k-1}$$

4.还原变量

代入上式：

$$\begin{aligned}a(|T|)&=(-1)^{(|T|-1)-(k-1)}\binom{|T|-1}{k-1}\\&=(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\end{aligned}$$

> max和min在全序上是对称的,所以第二个式子就不证了

> 从广义莫反证明min-max容斥是有点难度的，留作读者证明

斯特林反演

斯特林反演揭示了普通幂与下降幂/上升幂之间的基底变换关系。

第二类斯特林数 (子集数) $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$：将 n 个不同元素放入 k 个无区别盒子（非空）的方案数。

第一类斯特林数 (轮换数) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$：将 n 个不同元素排成 k 个轮换（非空）的方案数。

斯特林反演

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} g(i) \iff g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} f(i)$$

前置知识

上升幂和下降幂

上升幂 $x^{\overline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$
下降幂 $x^{\underline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!} = \prod_{i=0}^{n-1} (x-i) = n! \binom{x}{n}$

上升幂转普通幂

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i \tag{A1}$$

证明:
考虑归纳证明:
$n=0$ 时，等式两边皆为 1，等式成立
$n=1$ 时，等式左边等于 x ，等式右边等于 x ，等式成立。

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{n+1}} &= (x+n)x^{\overline{n}} \\
&= (x+n)\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i \\
&= x\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i + n\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} x^i + n\sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \right) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} x^i
\end{aligned}
$$

下降幂转普通幂

$$
x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \tag{A2}
$$

证明:

同样考虑归纳证明:

$n=0$ 时，等式两边皆为 1 ，等式成立

$n=1$ 时，等式两边皆为 x ，等式成立

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n)x^{\underline{n}} \\
&= (x-n)\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= x\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i - n\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^{i+1} - n\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} (-1)^{n-i+1} x^i - n\sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} (-1)^{n-i+1} x^i + n\sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i+1} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \right) (-1)^{n-i+1} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} (-1)^{(n+1)-i} x^i
\end{aligned}
$$

普通幂转为下降幂

$$
x^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^{\underline{i}} \tag{A3}
$$

证明：考虑组合意义

假设我们有：n 个不同的球（标号 $1, 2, \ldots, n$）x 个不同的盒子（标号 $1, 2, \ldots, x$）

我们要计算：把这 n 个球任意放入这 x 个盒子中，允许盒子为空，一共有多少种方案?

左边 对于每一个球，我们都可以从 x 个盒子中任选一个放入。所以总方案数为 x^n。

右边 假设最后放完球后，恰好有 i 个盒子 里有球（即非空盒子数为 i）

1.选出这 i 个盒子我们在 x 个不同的盒子中，选出 i 个将被使用的盒子。方案数为组合数：$\binom{x}{i}$

2.把 n 个球分给这 i 个盒子（暂时不区分盒子的顺序）

这相当于把 n 个不同的元素，划分成 i 个非空的集合（堆）。

这正是第二类斯特林数 $\begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$ 的定义!

3.把这 i 堆球放入刚才选好的 i 个盒子里因为盒子是不同的，我们需要决定哪一堆球放进哪一个盒子。这相当于 i 个元素的全排列。方案数为：$i!$

方案总数为：

$$\binom{x}{i} \times \left\{ {n \atop i} \right\} \times i! = \left\{ {n \atop i} \right\} x^{\underline{i}}$$

普通幂转上升幂

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}} \tag{A4}$$

我们会发现一个关于负数的重要性质：

$$(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}$$

推导引理：

$$\begin{aligned}
(-x)^{\underline{n}} &= (-x)(-x-1)(-x-2)\dots(-x-n+1) \\
&= [(-1)(x)] \cdot [(-1)(x+1)] \cdot [(-1)(x+2)] \dots [(-1)(x+n-1)] \\
&= (-1)^n \cdot \underbrace{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}_{x^{\overline{n}}} \\
&= (-1)^n x^{\overline{n}}
\end{aligned}$$

我们已知普通幂转下降幂的公式：

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} x^{\underline{i}}$$

在这个恒等式中，将 x 替换为 $-x$：

$$(-x)^n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} (-x)^{\underline{i}}$$

左边展开为 $(-1)^n x^n$，右边利用引理代换：

$$(-1)^n x^n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} \left[(-1)^i x^{\overline{i}} \right]$$

两边同时除以 $(-1)^n$（或者乘以 $(-1)^n$）：

$$
\begin{aligned}
x^n &= \frac{1}{(-1)^n}\sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}(-1)^i x^{\overline{i}}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}\frac{(-1)^i}{(-1)^n}x^{\overline{i}}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}(-1)^{i-n}x^{\overline{i}}
\end{aligned}
$$

由于 $(-1)^{i-n}=(-1)^{n-i}$（指数差偶数倍不影响符号），整理得:

$$
x^n = \sum_{i=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}(-1)^{n-i}x^{\overline{i}}
$$

反转公式

$$
\sum_{i=m}^{n}(-1)^{n-i}\begin{Bmatrix}n\\i\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}i\\m\end{bmatrix}=[m=n] \tag{1}
$$

$$
\sum_{i=m}^{n}(-1)^{m-i}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}i\\m\end{Bmatrix}=[m=n] \tag{2}
$$

反转公式（1）证明(利用下降幂转普通幂/普通幂转下降幂):

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n}} &= \sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}(-1)^{n-i}x^i\\
&= \sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\begin{Bmatrix}i\\j\end{Bmatrix}x^{\underline{j}}\\
&= \sum_{i=0}^{n}x^{\underline{i}}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{n-j}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}j\\i\end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

当 $i=n$ 时，等式右边为 $x^{\underline{n}}$，等式成立

当 $i<n$ 时，等式右边为 要为0，等式成立

反转公式（2）证明：

$$
\begin{aligned}
x^n &= \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^{\underline{i}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^i (-x)^{\overline{i}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} (-x)^j \\
&= \sum_{i=0}^{n} x^i \sum_{j=i}^{n} (-1)^{i-j} \begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

同理

斯特林反演

$$
f(n) = \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} g(i) \iff g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} f(i)
$$

上式中一二类斯特林数可以互换位置。

证明：

已知： $g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} f(i)$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=0} [i=n] f(i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} (-1)^{j-i} f(i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} f(j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} g(i)
\end{aligned}
$$

另一个视角

斯特林反演本质上是“集合分划格”（Partition Lattice）上的广义莫比乌斯反演。

就像：

- **二项式反演** 对应 **子集格（布尔格）** 上的莫比乌斯反演。
- **数论莫比乌斯反演** 对应 **整除格** 上的莫比乌斯反演。
- **斯特林反演** 对应 **集合分划格** 上的莫比乌斯反演。

1. 什么是集合分划格 Π_n?

我们定义一个偏序集（Poset） $P = \Pi_n$。

- **元素**：集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的所有**分划**。
  - 例如 $n = 3$，$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ 就是一个分划。
- **偏序关系** $\leq$：
  - 对于两个分划 σ 和 τ，如果 σ 中的每一个块（block）都完全包含在 τ 的某一个块中，我们称 $\sigma \leq \tau$（σ 比 τ 更“细”，或者 τ 比 σ 更“粗”）。
  - **最小元** $\hat{0}$：$\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$（全部分开，最细）。
  - **最大元** $\hat{1}$：$\{\{1, 2, \ldots, n\}\}$（全部在一起，最粗）。

2. 这个格上的 Zeta 和 Möbius 函数

在 Π_n 上定义广义莫比乌斯反演的两个核心函数：

Zeta 函数 $\zeta(\sigma, \tau)$
定义为：若 $\sigma \leq \tau$，则为 1，否则为 0。
它对应着**求和**操作，也就是我们熟悉的“第二类斯特林数”方向。

Möbius 函数 $\mu(\sigma, \tau)$
它是 ζ 的逆。在集合分划格中，μ 的取值非常特殊：
对于区间 $[\hat{0}, \hat{1}]$（即从全分散到全聚合），有著名的定理：

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

> 咋证?
> 我们要证的目标是 $M_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$，其中 M_n 简记为 n 个元素分划格最顶端的 $\mu(\hat{0}, \hat{1})$。

利用 $\sum \mu = 0$ 构造递推

1. 莫比乌斯函数的定义

对于任意 $n > 1$，分划格 Π_n 中所有元素的 μ 值之和必须为 0：

$$\sum_{\sigma \in \Pi_n} \mu(\hat{0}, \sigma) = 0$$

换句话说：

$$M_n = -\sum_{\sigma \neq \hat{1}} \mu(\hat{0}, \sigma)$$

(最顶上的那一项，等于底下所有项之和的相反数)

2. 巧妙的分组

我们根据 **“元素 n 所在的块的大小”** 来对所有的分划 σ 进行归类。

设元素 n 所在的块为 B，设 $|B| = i$。

i 的取值范围是 1 到 n。

选出这个块 B 的方案数是 $\binom{n-1}{i-1}$（因为 n 必须在里面，从剩下 $n-1$ 个里选 $i-1$ 个陪它）。

3. 结构的乘积

对于一个固定的块 B（大小为 i），剩下的 $n-i$ 个元素组成了某种分划 τ。

因为块之间互不干扰，μ 值具有乘积性质：

$$\mu(\hat{0}, \sigma) = \underbrace{M_i}_{\text{块}B\text{的贡献}} \times \underbrace{\mu(\text{剩余部分的}\tau)}_{\text{剩下的贡献}}$$

4. 所有的项求和

把刚才的 $\sum \mu = 0$ 按照 i 展开：

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} M_i \times \underbrace{\left(\sum_{\tau \in \Pi_{n-i}} \mu(\hat{0}, \tau) \right)}_{\text{剩余部分的所有情况之和}}$$

5. 奇迹发生了

> 请盯着最后那个括号里的部分：$\sum_{\tau\in\Pi_{n-i}}\mu(\hat{0},\tau)$。
> 这是一个大小为 $n-i$ 的全部分划格的 μ 之和。
> 根据莫比乌斯函数的定义，只要 $n-i>1$，这个和就是 **0**！
> 这个和不为 0 的只有两种情况：
> $n-i=1$：只剩 1 个元素，和为 $M_1=1$。
> $n-i=0$：没有剩余元素（即 $i=n$），定义为 1。
> **6. 最后的递推**
> 因为只有 $n-i=0$ 和 $n-i=1$ 有值，长长的求和式瞬间只剩下两项：
> **当 $i=n$ 时**（全在一起）：
> 系数是 $\binom{n-1}{n-1}M_n\times 1=M_n$
> **当 $i=n-1$ 时**（剩一个孤立点）：
> 系数是 $\binom{n-1}{n-2}M_{n-1}\times M_1=(n-1)M_{n-1}$
> 方程变成了：
>
> $$M_n+(n-1)M_{n-1}=0$$
>
> $$\Rightarrow M_n=-(n-1)M_{n-1}$$
>
> **7. 求解**
> $M_1=1$
> $M_2=-1\cdot M_1=-1$
> $M_3=-2\cdot M_2=2$
> ...
> $M_n=(-1)^{n-1}(n-1)!$

更一般地，对于任意 $\sigma\le\tau$，$\mu(\sigma,\tau)$ 的值只与它们之间的结构差异有关，其数值形式就是**带符号的第一类斯特林数**的乘积形式。

3. 如何连接到斯特林反演?

我们通常看到的斯特林反演公式是关于 n 和 k 的，而不是关于具体分划 σ 的。这是因为斯特林反演是集合分划格反演的 **“约化”（Reduced）形式**。

第一步：从组合意义看 x^n (Zeta 变换)

考虑映射 $f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,x\}$。总共有 x^n 种映射。

我们可以根据这个映射的 **核（Kernel）** 来分类。核是一个分划 σ，也就是把映射到同一个值的元素归为一个块。

如果我们设 $N(\sigma)$ 是“恰好以 σ 为核”的映射数量（即 σ 的每个块映射到不同的值）。
那么总数 x^n 就是对所有可能的核 σ 求和（这就是 Zeta 变换的体现）：

$$x^n = \sum_{\sigma \in \Pi_n} N(\sigma)$$

注意到，如果分划 σ 有 k 个块（记为 $|\sigma| = k$），那么 $N(\sigma) = x^{\underline{k}}$（从 x 个值选 k 个排列）。
而这也正好对应了有多少个分划具有 k 个块——这正是**第二类斯特林数** $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$。

所以上面的式子变成了我们熟悉的：

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

(这对应 ζ 变换，也就是 $g = \zeta * f$)

> 听不懂？见A3.普通幂转下降幂的组合意义

第二步：反演 (Möbius 变换)

根据广义莫比乌斯反演原理，如果我们想求 $x^{\underline{n}}$（即强行要求核为 $\hat{0}$ 且全部映射到不同值的方案数），我们需要用 μ 函数倒推回去。

在“约化”的代数视角下，Π_n 的 Möbius 函数系数对应正是 **第一类斯特林数**。

具体来说，由于 $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$，这其实是第一类斯特林数 $s(n, 1)$。
推广到从 n 个元素的块反演回 k 个元素的块，系数正是：

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

> 咋推广？
> 对于 n 个元素的**全部分划格** Π_n，从最底（全散）到最顶（全聚）的莫比乌斯函数是：
>
> $$\mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

那如果不是到最顶 $\hat{1}$，而是到一个中间状态 σ 呢?
假设分划 σ 将 n 个元素分成了 k 个块，块的大小分别为 $b_1, b_2, \dots, b_k$（显然 $\sum b_i = n$）。
关键性质：
区间 $[\hat{0}, \sigma]$ 在结构上等价于 k **个独立的小分划格的直积**。

$$[\hat{0}, \sigma] \cong \Pi_{b_1} \times \Pi_{b_2} \times \cdots \times \Pi_{b_k}$$

因为莫比乌斯函数在直积上具有**积性**（Multiplicative），所以：

$$\mu(\hat{0}, \sigma) = \prod_{i=1}^{k} \mu_{\Pi_{b_i}}(\hat{0}, \hat{1})$$

代入基础结论：

$$\begin{aligned}
\mu(\hat{0}, \sigma) &= \prod_{i=1}^{k} \left[(-1)^{b_i-1}(b_i-1)!\right] \\
&= (-1)^{\sum(b_i-1)} \prod_{i=1}^{k}(b_i-1)! \\
&= (-1)^{n-k} \prod_{i=1}^{k}(b_i-1)!
\end{aligned}$$

这是一个非常重要的中间结论：**任意分划 σ 的莫比乌斯函数值，取决于它的块大小的阶乘积。**
我们在做斯特林反演时，不是针对某一个特定的 σ，而是把**所有块数（Rank）为 k 的分划**归为一类。
所谓的“反演系数” $s(n,k)$，本质上就是把所有“这就只有 k 个块”的分划的 μ 值加起来：

$$s(n,k) = \sum_{\substack{\sigma \in \Pi_n \\ |\sigma| = k}} \mu(\hat{0}, \sigma)$$

> 代入刚才推导的公式：
>
> $$s(n,k)=\sum_{\substack{\sigma\in\Pi_n\\|\sigma|=k}}\left((-1)^{n-k}\prod_{i=1}^{k}(b_i-1)!\right)$$
>
> 提公因式 $(-1)^{n-k}$：
>
> $$s(n,k)=(-1)^{n-k}\underbrace{\sum_{\substack{\sigma\in\Pi_n\\|\sigma|=k}}\left(\prod_{i=1}^{k}(b_i-1)!\right)}_{\text{这是什么？}}$$
>
> **让我们看看这个求和部分的组合意义：**
> **外部求和**：枚举所有把 n 个元素分成 k 个块的方案（分划 σ）。
> **内部乘积** $\prod(b_i-1)!$：对于每一个块（大小为 b_i），$(b_i-1)!$ 正好是**圆排列**（Circle Permutation）的方案数。
> **合起来的意思是：**
> 先选定一种分块方式，然后把每个块里的元素排成一个圆环（Cycle）。
> 把所有分块方式对应的圆环方案加起来，这不就是：
> **“把 n 个元素排成 k 个圆环（轮换）的总方案数”吗？**
> 这正是**无符号第一类斯特林数** $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ 的定义！
> 所以：
>
> $$s(n,k)=(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$
>
> 这就是为什么斯特林反演的系数里藏着圆排列的阶乘，也是它“推广”的内在逻辑。

所以反演公式为：

$$x^{\underline{n}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k$$

(这对应 $f = \mu * g$)

总结

反演名称	**基础偏序集 (Poset)**	**偏序关系 $\leq$**	$\zeta(x, y)$ **(正向覆盖系数)**	$\mu(x, y)$ **(反演容斥系数)**	**卷积单** $\delta(x, y$
通用定义	**任意局部有限偏序集** P	$x \leq y$	1 若 $x \leq y$ 0 若不满足	ζ^{-1} (递归定义)	$[x = y$
子集反演 (SOS DP)	**布尔格** B_n (Power Set)	$S \subseteq T$	1	$(-1)^{\|T\|-\|S\|}$	$[S = T$
超集反演 (高维后缀和)	**布尔格** B_n (Dual)	$S \supseteq T$	1	$(-1)^{\|S\|-\|T\|}$	$[S = T$
二项式反演 (PIE)	**布尔格** (投影到大小)	大小 k 归类	$\binom{n}{k}$	$(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$	$[n = k$
数论莫比乌斯	**整除格** D_n	$a \mid b$	1	$\mu(b/a)$	$[a = b$
斯特林反演	**分划格** Π_n	加细 (Refinement)	$\left\{ {n \atop k} \right\}$	$(-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]$	$[n = k$