TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

TS. BÙI XUÂN DIỆU

Bài Giảng

GIẢI TÍCH II

(lưu hành nội bộ)

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN, TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT, LÝ THUYẾT TRƯỜNG

Tóm tắt lý thuyết, các ví dụ, bài tập và lời giải

Hà Nội- 2017

(bản cập nhật Ngày 28 tháng 8 năm 2017)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng gửi về địa chỉ "dieu.buixuan@hust.edu.vn"

Hà Nội, Ngày 28 tháng 8 năm 2017.

MỤC LỤC

Mục lục 1

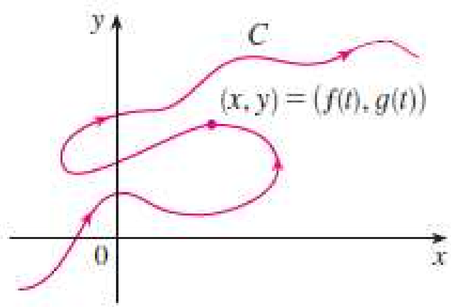
CHƯƠNG 1

CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

§1. CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

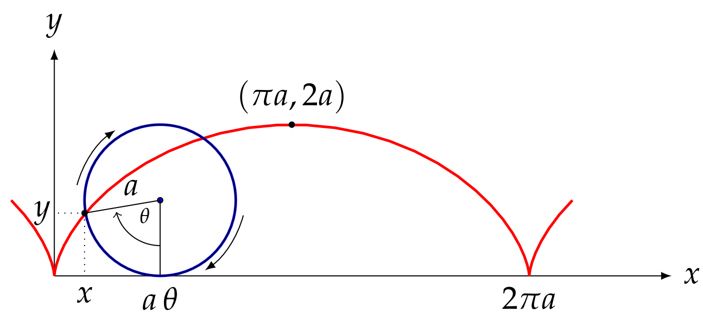
1.1 Đường cong trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.

Ở chương trình học phổ thông, chúng ta đã làm quen với khái niệm đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$, chẳng hạn như đường parabol $y = x^2$, đường cong bậc ba $y = x^3$. Tuy nhiên, không phải lúc nào cũng "may mắn" biểu diễn một đường cong được dưới dạng $y = f(x)$, vì có thể với một giá trị $x = x_0$, ứng với nó có hai hoặc nhiều hơn giá trị y tương ứng. Chẳng hạn như, tưởng tượng rằng có một hạt chuyển động dọc theo đường cong C như hình vẽ dưới đây. Đường cong C này không thể biểu diễn được dưới dạng $y = f(x)$.



Tuy nhiên, các tọa độ x và y của hạt này là một hàm số phụ thuộc thời gian t. Chính vì vậy sẽ là thuận lợi nếu ta biểu diễn đường cong C dưới dạng $x = f(t), y = g(t)$. Đây chính là phương trình đường cong cho dưới dạng tham số đã được giới thiệu ở học phần Giải tích I.

Ví dụ 1.1 (Đường Cycloid). *Giả sử có một bánh xe hình tròn và cố định một điểm P trên bánh xe đó. Cho bánh xe đó lăn không trượt trên một đường thẳng. Quỹ tích điểm P đó được gọi là đường Cycloid. Hãy viết phương trình tham số của đường cong này.*

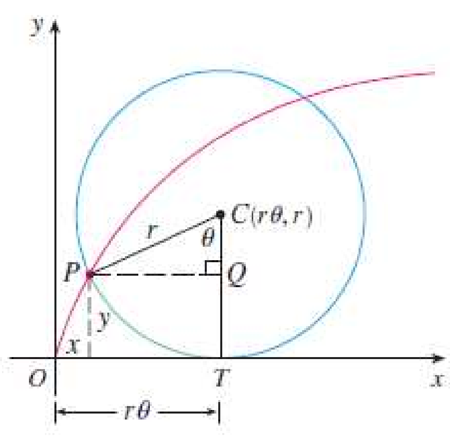


[Lời giải] Giả sử bánh xe có bán kính r và điểm xuất phát của P là gốc tọa độ, đồng thời cho bánh xe lăn không trượt trên trục Ox. Gọi θ là góc quay của bánh xe ($\theta = 0$ nếu P ở gốc tọa độ). Khi đó, vì bánh xe lăn không trượt, nên

$$OT = \text{độ dài cung } PT = r\theta.$$

Do đó,

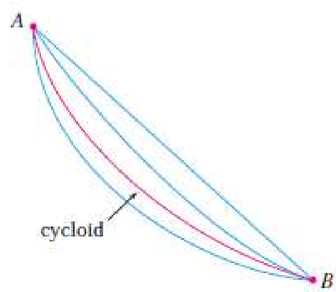
$$\begin{cases} x = |OT| - |PQ| = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \\ y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta). \end{cases}$$



Một số điều thú vị về đường Cycloid.

- Một trong những người đầu tiên nghiên cứu đường cong Cycloid là Galileo. Ông đề xuất rằng các cây cầu nên được xây theo đường cong Cycloid và cũng là người đi tìm diện tích của miền nằm phía dưới một cung Cycloid.

- Đường cong Cycloid này về sau xuất hiện trong bài toán "Brachistochrone" sau. Cho hai điểm A và B sao cho điểm A cao hơn điểm B. Hãy tìm đường cong nối A với B sao cho khi ta thả một viên bi từ A, viên bi chạy theo đường cong đó (dưới tác dụng của lực hấp dẫn) từ A đến B với thời gian ngắn nhất. Nhà toán học người Thụy Sĩ, John Bernoulli đã chỉ ra rằng, trong số tất cả các đường cong nối A với B thì viên bi sẽ mất ít thời gian nhất để lăn từ A đến B nếu nó đi theo đường Cycloid.



- Nhà vật lý người Hà Lan, Huyghens, cũng đã chỉ ra rằng đường cong Cycloid là lời giải cho bài toán "Tautochrone" sau. Cho dù đặt viên bi ở đâu trên cung Cycloid ngược thì nó cũng mất một khoảng thời gian như nhau để lăn về đáy. Điều này được ứng dụng khi ông phát minh ra đồng hồ quả lắc. Ông đề xuất rằng quả lắc nên được lắc theo cung Cycloid, bởi vì khi đó con lắc sẽ mất một khoảng thời gian như nhau để hoàn thành một chu kì dao động, cho dù là nó lắc theo một cung dài hay là ngắn.

1. Điểm chính quy.

   - Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình $f(x,y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(M), f'_y(M)$ không đồng thời bằng 0.

   - Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$

     Điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0)$ không đồng thời bằng 0.

- Một điểm không phải là điểm chính quy được gọi là điểm kì dị.

2. Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong.

- Chúng ta biết rằng hệ số góc k của tiếp tuyến của đường cong C tại điểm M chính là $y'_x(M)$. Do đó, nếu đường cong cho bởi phương trình $f(x,y) = 0$ thì nó xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ và đạo hàm của nó tính theo công thức

$$k = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Vậy

- Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$\begin{aligned}(d):\ y - y_0 &= -\frac{f'_x(M)}{f'_y(M)}(x - x_0)\\ \Leftrightarrow f'_x(M).(x - x_0) &+ f'_y(M).(y - y_0) = 0.\end{aligned} \tag{1.1}$$

- Phương trình pháp tuyến tại M là

$$(d'):\ \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)}.$$

Chú ý: Trường hợp đặc biệt, đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm $M(x_0, y_0)$ chính quy là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Đây là công thức mà học sinh đã biết trong chương trình phổ thông.

- Nếu đường cong (C) cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ thì

$$k = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Do đó,

- Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ chính quy:

$$(d):\ y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0) \Leftrightarrow \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Nói cách khác, véc tơ tiếp tuyến của đường cong C tại điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ là $\vec{n} = (x'(t_0), y'(t_0))$.

- Phương trình pháp tuyến tại M:

$$(d'):\ x'(t_0).(x - x(t_0)) + y'(t_0).(y - y(t_0)) = 0.$$

1.2 Độ cong của đường cong.

1. Định nghĩa.

2. Các công thức tính độ cong của đường cong tại một điểm.

   - Nếu đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì:

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

   - Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ thì:

$$C(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

   - Nếu đường cong cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = r(\varphi)$ thì:

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

1.3 Hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số

1. Định nghĩa:

   Định nghĩa 1.1. *Cho họ đường cong (L) phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) tại một điểm nào đó trên E và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc (E) đều tồn tại một đường cong của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là hình bao của họ đường cong (L).*

2. Quy tắc tìm hình bao của họ đường cong phụ thuộc một tham số.

   Định lý 1.1. *Cho họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc một tham số c. Nếu họ đường cong trên không có điểm kì dị thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình*

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

3. Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình (1.2) bao gồm hình bao (E) và quỹ tích các điểm kì dị thuộc họ các đường cong đã cho.

Bài tập 1.1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại $(-2, 5)$.

Lời giải. $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } y = 5 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x = -2 \end{cases}$ ∎

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$.

Lời giải. – Tại $M_1(-1, 1)$, $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } 2x - y + 3 = 0 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

– Tại $M_2(-1, 1)$, $\begin{cases} \text{Phương trình tiếp tuyến } 2x + y - 3 = 0 \\ \text{Phương trình pháp tuyến } x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ ∎

c. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ tại $A(2, 2)$.

Lời giải. – Phương trình tiếp tuyến $y = x$.

– Phương trình pháp tuyến $x + y - 4 = 0$. ∎

d. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ tại $M(8, 1)$.

Lời giải. – Phương trình tiếp tuyến $x + 2y - 10 = 0$.

– Phương trình pháp tuyến $2x - y - 15 = 0$. ∎

Bài tập 1.2. Tính độ cong của:

a. $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$C(M) = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \dots = \frac{192}{125}$$

∎

b. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ tại điểm bất kì.

Lời giải.

$$C(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = ... = \frac{1}{2a\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos t}}$$ ■

c. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tại điểm bất kì $(a > 0)$.

Lời giải. Phương trình tham số: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, nên

$$C(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = ... = \frac{1}{3a\left|\sin t \cos t\right|}$$ ■

d. $r = a\mathrm{e}^{b\varphi}, (a, b > 0)$

Lời giải.

$$C(M) = \frac{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{ae^{b\varphi}\sqrt{1 + b^2}}$$ ■

Bài tập 1.3. Tìm hình bao của họ đường cong sau:

a. $y = \frac{x}{c} + c^2$

b. $cx^2 + c^2y = 1$

c. $y = c^2(x - c)^2$

Lời giải. a. Đặt $F(x, y, c) := y - \frac{x}{c} - c^2 = 0$.
Điều kiện: $c \neq 0$.
Xét hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ 1 = 0. \end{cases}$
Hệ phương trình vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{x}{c} - c^2 = 0 \\ -2c + \frac{x}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c^3 \\ y = 3c^2 \end{cases}$$

nên $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = 0$. Do điều kiện $c \neq 0$ nên $x, y \neq 0$. Vậy ta có hình bao của họ đường cong là đường $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = 0$ trừ điểm $O(0, 0)$.

b. Đặt $F(x,y,c) := cx^2 + c^2y - 1 = 0$. Nếu $c = 0$ thì không thoả mãn phương trình đã cho nên điều kiện: $c \neq 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2cx = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = c = 0$, nhưng điểm kì dị đó không thuộc họ đường cong đã cho nên họ đường cong đã cho không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cx^2 + c^2y = 1 \\ x^2 + 2cx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{c} \\ y = \frac{-1}{c^2} \end{cases}$$

Do đó $x, y \neq 0$ và ta có hình bao của họ đường cong là đường $y = -\frac{x^4}{4}$ trừ điểm $O(0,0)$.

c. Đặt $F(x,y,c) := c^2(x-c)^2 - y = 0$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x,y,c) = 0 \\ F'_y(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ -1 = 0. \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm nên họ đường cong đã cho không có điểm kì dị. Ta có

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2(x-c)^2 - y = 0 & (1) \\ 2c(x-c) - 2c^2(x-c) = 0. & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = x \\ c = \frac{x}{2} \end{array}\right.$, thế vào (1) ta được $y = 0, y = \frac{x^4}{16}$.

Vậy hình bao của họ đường cong là $y = 0, y = \frac{x^4}{16}$. ■

§2. CÁC ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

2.1 Hàm véctơ

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$.

- Ánh xạ $I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \overrightarrow{r(t)} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là hàm véctơ của biến số t xác định trên $\mathbb{R}$. Nếu $n = 3$, ta viết
$$\overrightarrow{r(t)} = x(t).\overrightarrow{i} + y(t).\overrightarrow{j} + z(t).\overrightarrow{k}.$$
Đặt $M(x(t), y(t), z(t))$, quỹ tích M khi t biến thiên trong I được gọi là tốc đồ của hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$.

- **Giới hạn:** Người ta nói hàm véctơ có giới hạn là $\overrightarrow{a}$ khi $t \to t_0$ nếu
$$\lim_{t\to t_0} \left|\overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{a}\right| = \overrightarrow{0},$$
kí hiệu $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{a}$.

- **Liên tục:** Hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu
$$\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{r(t_0)}.$$
(Tương đương với tính liên tục của các thành phần tương ứng $x(t), y(t), z(t)$)

- **Đạo hàm:** Giới hạn, nếu có, của tỉ số
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{r}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t_0+h) - \overrightarrow{r}(t_0)}{h}$$
được gọi là đạo hàm của hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ tại t_0, kí hiệu $\overrightarrow{r}'(t_0)$ hay $\frac{d\overrightarrow{r}(t_0)}{dt}$, khi đó ta nói hàm véctơ $\overrightarrow{r(t)}$ khả vi tại t_0.
Nhận xét: nếu $x(t), y(t), z(t)$ khả vi tại t_0 thì $\overrightarrow{r(t)}$ cũng khả vi tại t_0 và
$$\overrightarrow{r}'(t_0) = x'(t_0).\overrightarrow{i} + y'(t_0).\overrightarrow{j} + z'(t_0).\overrightarrow{k}.$$

2.2 Đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$

Tương tự như cách chúng ta biểu diễn đường cong trong không gian $\mathbb{R}^2$ bởi phương trình tham số, mỗi đường cong trong không gian $\mathbb{R}^3$ được định nghĩa, một cách đơn giản, là một hàm véc tơ
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}.$$

Đường cong γ được gọi là trơn nếu như tồn tại $\gamma'(t)$ liên tục và $\gamma'(t) \neq 0$ với mọi $t \in [a,b]$. Nếu như trong mặt phẳng, một véc tơ tiếp tuyến của đường cong $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ là $\vec{n} = (x'(t), y'(t))$ thì trong không gian, một cách hoàn toàn tương tự, một véc tơ tiếp tuyến của đường cong $\gamma(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$ là $\gamma'(t) = x'(t).\vec{i} + y'(t).\vec{j} + z'(t).\vec{k}$. Do đó,

- Phương trình tiếp tuyến của γ tại điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ chính quy:

$$(d): \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

- Phương trình pháp diện tại M:

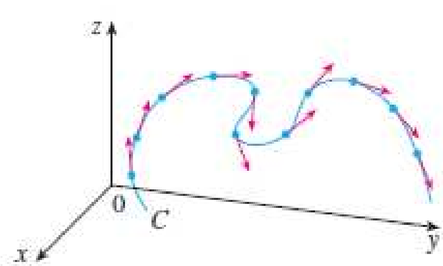
$$(P): x'(t_0).(x - x(t_0)) + y'(t_0).(y - y(t_0)) + z'(t_0).(z - z(t_0)) = 0.$$

2.3 Độ cong của đường cong

Cho đường cong $\gamma = \gamma(t)$. Khi đó, véc tơ tiếp tuyến đơn vị $\vec{N}(t)$ được xác định bởi

$$\vec{N}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Véc tơ này xác định hướng của đường cong như hình vẽ dưới đây.



Độ cong của đường cong tại một điểm P là một đại lượng đo "tốc độ" thay đổi hướng của đường cong tại điểm P đó. Một cách cụ thể, người ta định nghĩa độ cong của đường cong tại điểm P là "tốc độ" thay đổi của véc tơ tiếp tuyến đơn vị theo độ dài cung tại điểm P đó.

Định nghĩa 1.2. *Độ cong của đường cong γ là*

$$C = \left| \frac{d\vec{N}}{ds} \right|,$$

ở đó $\vec{N}$ là véc tơ tiếp tuyến đơn vị của γ.

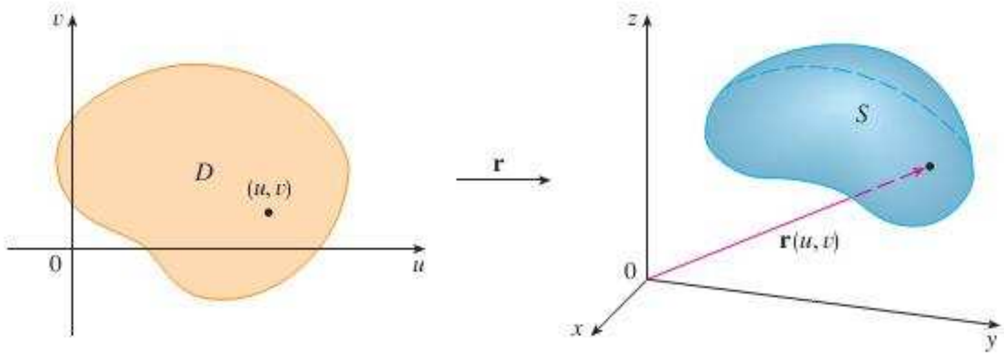
Ta có
$$C = \left|\frac{d\vec{N}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{N}/dt}{ds/dt}\right|.$$
Vì độ dài của cung γ được tính theo công thức
$$s = \int_a^b \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}dt = \int_a^b |\gamma'(t)|dt,$$
nên
$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)|du$$
là phần độ dài của cung nằm giữa $\gamma(a)$ và $\gamma(t)$. Lấy đạo hàm hai vế phương trình này theo t ta được
$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|.$$
Do đó,
$$C = \frac{|\vec{N}'(t)|}{|\gamma'(t)|}.$$

Định lý 1.2. *Độ cong của đường cong γ được cho bởi công thức*
$$C(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lời giải. Ta có
$$\vec{N}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma(t)|}$$
nên
$$N'(t) =$$
■

2.4 Mặt cong trong không gian $\mathbb{R}^3$

Tương tự như cách chúng ta biểu diễn đường cong trong không gian bởi một hàm véc tơ một tham số $r(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$, mỗi mặt cong trong không gian được biểu diễn tham số dưới dạng
$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k},$$
tức là một hàm véc tơ phụ thuộc vào hai tham số u, v.



Định nghĩa 1.3. *Tập hợp tất cả các điểm $(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ sao cho (u,v) biến thiên trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là một mặt cong cho bởi phương trình tham số.*

Ví dụ 2.2. *Mỗi mặt phẳng $ax + by + cz + d = 0$ trong không gian có một tham số tự nhiên*

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -\frac{d+ax+by}{c}, \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}^2.$$

Ví dụ 2.3. *Mỗi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ trong không gian đều có một tham số tự nhiên là*

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \end{cases} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}.$$

và một tham số trong tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta, \end{cases} \qquad D = \{(\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi.\}$$

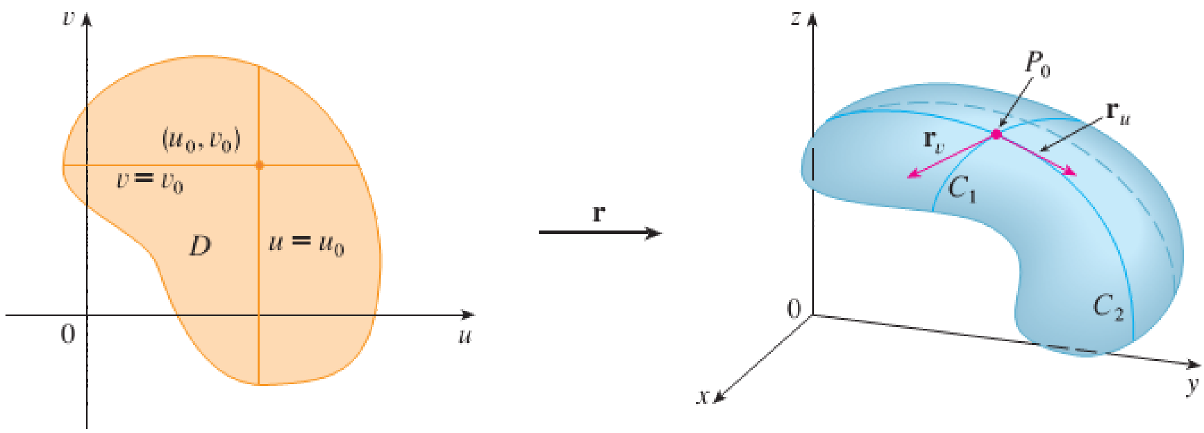
Như vậy, phương trình tham số của một mặt cong có thể không duy nhất.

Phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình tham số

Bài toán: Tìm mặt phẳng tiếp diện của mặt cong S cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$$

tại điểm P_0 ứng với $u = u_0, v = v_0$.



[Lời giải] Nếu ta cố định $u = u_0$ thì $r(u_0, v)$ xác định một đường cong $C_1 \subset S$ trong không gian. Tiếp tuyến với đường cong này tại P_0 có véc tơ chỉ phương là

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0).\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0).\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0).\vec{k}.$$

Tương tự như vậy, nếu ta cố định $v = v_0$ thì $r(u, v_0)$ xác định một đường cong $C_2 \subset S$ trong không gian. Tiếp tuyến với đường cong này tại P_0 có véc tơ chỉ phương là

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0).\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0).\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0).\vec{k}.$$

Lấy tích có hướng của r_u và r_v ta được véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong S tại điểm P_0. Nếu tại P_0, $r_u \wedge r_v \neq 0$ thì ta nói mặt cong S là trơn tại P_0.

Chú ý 1.1. *Đường thẳng đi qua P_0 và vuông góc với tiếp diện của S tại P_0 được gọi là pháp tuyến của mặt S tại P_0. Nó nhận véc tơ $\vec{N} = r_u \wedge r_v$ làm véc tơ chỉ phương.*

Ví dụ 2.4. *Viết phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình tham số $x = u^2, y = v^2, z = u + 2v$ tại điểm $(1, 1, 3)$.*

[Lời giải] Ta có

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}.\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}.\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}.\vec{k} = 2u.\vec{i} + \vec{k},$$
$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}.\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}.\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}.\vec{k} = 2v.\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Do đó,

$$r_u \wedge r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v.\vec{i} - 4u.\vec{j} + 4uv.\vec{k}.$$

Điểm $(1, 1, 3)$ ứng với giá trị $u = v = 1$ nên $r_u \wedge r_v = (-2, -4, 4)$. Vậy phương trình tiếp diện là

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x, y)$

Trường hợp đặc biệt, mặt cong S cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ thì S có một tham số hóa tự nhiên là $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u, v). \end{cases}$
Khi đó, $r_u = (1, 0, z'_u), r_v = (0, 1, z'_v)$ và do đó, véc tơ pháp tuyến của mặt cong S tại P là

$$r_u \wedge r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_u \\ 0 & 1 & z'_v \end{vmatrix} = (-z'_u, -z'_v, 1) = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

Do đó, phương trình tiếp diện tại $P(x_0, y_0, z_0)$ là

$$z - z_0 = z'_x(M) . (x - x_0) + z'_y(M) . (y - y_0) . \tag{1.3}$$

Phương trình tiếp diện của mặt cong cho bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$

Nếu mặt cong S xác định bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ và $M(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm chính quy của S thì nó xác định một hàm ẩn $z = z(x, y)$ và các đạo hàm z'_x, z'_y được tính theo công thức

$$z'_x = -\frac{f'_x}{f'_z}, \quad z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}.$$

Áp dụng công thức (1.3) ta được

- Phương trình tiếp diện tại M

$$z - z_0 = -\frac{f'_x(M)}{f'_z(M)}(x - x_0) - \frac{f'_y(M)}{f'_z(M)}(y - y_0)$$
$$\Leftrightarrow f'_x(M) . (x - x_0) + f'_y(M) . (y - y_0) + f'_z(M) . (z - z_0) = 0.$$

- Phương trình pháp tuyến tại M

$$(d) : \frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}.$$

2.5 Đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong như sau $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$..

Đặt $\overrightarrow{n_f} = \left(f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M)\right)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt

cong $f(x,y,z)=0$ tại M.
Đặt $\overrightarrow{n_g}=\left(g'_x(M),g'_y(M),g'_z(M)\right)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $g(x,y,z)=0$ tại M.
Khi đó $\overrightarrow{n_f}\wedge\overrightarrow{n_g}$ là véctơ chỉ phương của tiếp tuyến của đường cong đã cho tại M. Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$\begin{cases}\text{PTTQ}:\begin{cases} f'_x(M).(x-x_0)+f'_y(M).(y-y_0)+f'_z(M).(z-z_0)=0.\\ g'_x(M).(x-x_0)+g'_y(M).(y-y_0)+g'_z(M).(z-z_0)=0.\end{cases}\\ \text{PTCT}:\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f'_y(M) & f'_z(M)\\ g'_y(M) & g'_z(M)\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} f'_z(M) & f'_x(M)\\ g'_z(M) & g'_x(M)\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(M) & f'_y(M)\\ g'_x(M) & g'_y(M)\end{vmatrix}}\end{cases}$$

Bài tập 1.4. Giả sử $\overrightarrow{p}(t),\overrightarrow{q}(t),\overrightarrow{\alpha}(t)$ là các hàm véctơ khả vi. Chứng minh rằng:

a. $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)+\overrightarrow{q}(t)\right)=\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}+\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}$

b. $\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\overrightarrow{p}(t)\right)=\alpha(t)\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}+\alpha'(t)\overrightarrow{p}(t)$

c. $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)\overrightarrow{q}(t)\right)=\overrightarrow{p}(t)\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}+\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\overrightarrow{q}(t)$

d. $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)\wedge\overrightarrow{q}(t)\right)=\overrightarrow{p}(t)\wedge\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}+\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\wedge\overrightarrow{q}(t)$

Lời giải. a. Giả sử $\overrightarrow{p}(t)=(p_1(t),p_2(t),p_3(t))$, $\overrightarrow{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),q_3(t))$, khi đó:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)+\overrightarrow{q}(t)\right)&=\frac{d}{dt}(p_1(t)+q_1(t),p_2(t)+q_2(t),p_3(t)+q_3(t))\\&=\left(p'_1(t)+q'_1(t),p'_2(t)+q'_2(t),p'_3(t)+q'_3(t)\right)\\&=\left(p'_1(t),p'_2(t),p'_3(t)\right)+\left(q'_1(t),q'_2(t),q'_3(t)\right)\\&=\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}+\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\overrightarrow{p}(t)\right)\\&=\left([\alpha(t)p_1(t)]',[\alpha(t)p_2(t)]',[\alpha(t)p_3(t)]'\right)\\&=\left(\alpha'(t)p_1(t)+\alpha(t)p'_1(t),\alpha'(t)p_2(t)+\alpha(t)p'_2(t),\alpha'(t)p_3(t)+\alpha(t)p'_3(t)\right)\\&=\left(\alpha'(t)p_1(t),\alpha'(t)p_2(t),\alpha'(t)p_3(t)\right)+\left(\alpha(t)p'_1(t),\alpha(t)p'_2(t),\alpha(t)p'_3(t)\right)\\&=\alpha(t)\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}+\alpha'(t)\overrightarrow{p}(t)\end{aligned}$$

c. Chứng minh tương tự như câu b, sử dụng công thức đạo hàm của hàm hợp.

d.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p}(t)\wedge\overrightarrow{q}(t)\right)\\
&=\frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix} p_2(t) & p_3(t)\\ q_2(t) & q_3(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_3(t) & p_1(t)\\ q_3(t) & q_1(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2(t)\\ q_1(t) & q_2(t)\end{vmatrix}\right)\\
&=\ldots\\
&=\left(\begin{vmatrix} p_2(t) & p_3'(t)\\ q_2(t) & q_3'(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_3(t) & p_1'(t)\\ q_3(t) & q_1'(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_1(t) & p_2'(t)\\ q_1(t) & q_2'(t)\end{vmatrix}\right)\\
&+\left(\begin{vmatrix} p_2'(t) & p_3(t)\\ q_2'(t) & q_3(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_3'(t) & p_1(t)\\ q_3'(t) & q_1(t)\end{vmatrix},\begin{vmatrix} p_1'(t) & p_2(t)\\ q_1'(t) & q_2(t)\end{vmatrix}\right)\\
&=\overrightarrow{p}(t)\wedge\frac{d\overrightarrow{q}(t)}{dt}+\frac{d\overrightarrow{p}(t)}{dt}\wedge\overrightarrow{q}(t)
\end{aligned}$$

■

Bài tập 1.5. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a. $\begin{cases} x = a\sin^2 t\\ y = b\sin t\cos t\\ z = c\cos^2 t\end{cases}$ tại điểm ứng với $t=\frac{\pi}{4}, (a,b,c>0)$.

b. $\begin{cases} x = \frac{e^t\sin t}{\sqrt{2}}\\ y = 1\\ z = \frac{e^t\cos t}{\sqrt{2}}\end{cases}$ tại điểm ứng với $t=0$.

Lời giải. a. – Phương trình tiếp tuyến: $(d): \frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c}$

– Phương trình pháp diện: $(P): a\left(x-\frac{a}{2}\right)-c\left(z-\frac{c}{2}\right)=0$.

b. – Phương trình tiếp tuyến: $(d): \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

– Phương trình pháp diện: $(P): \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$. ■

Bài tập 1.6. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

a) $x^2-4y^2+2z^2=6$ tại điểm $(2,2,3)$.

b) $z=2x^2+4y^2$ tại điểm $(2,1,12)$.

c) $z=\ln(2x+y)$ tại điểm $(-1,3,0)$

Lời giải. a. – Phương trình pháp tuyến: $(d): \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12}$

– Phương trình tiếp diện: $(P): 4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0$

b. – Phương trình pháp tuyến: $(d): \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-12}{-1}$

– Phương trình tiếp diện: $(P): 8(x-2) + 8(y-1) - (z-12) = 0$.

c. – Phương trình pháp tuyến: $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$

– Phương trình tiếp diện: $(P): 2(x+1) + (y-3) - z = 0$. ■

Bài tập 1.7. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm $A(1,3,4)$

b. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2,6,1)$

Lời giải. a. Ta có $\begin{cases} f(x,y,z) := x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ g(x,y,z) := y^2 + z^2 - 25 = 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} n_f = (2,6,0) \\ n_g = (0,6,8) \end{cases}$.
Do đó $n_f \wedge n_g = 4(12,-4,3)$. Vậy:

– Phương trình tiếp tuyến $(d): \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$

– Phương trình pháp diện $(P): 12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$

b. Tương tự, $\begin{cases} n_f = (-8,6,12) \\ n_g = (-4,4,-1) \end{cases}$, $n_f \wedge n_g = -2(27,27,4)$ nên

– Phương trình tiếp tuyến $(d): \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{27} = \frac{z-6}{4}$

– Phương trình pháp diện $(P): 27(x+2) + 27(y-1) + 4(z-6) = 0$ ■

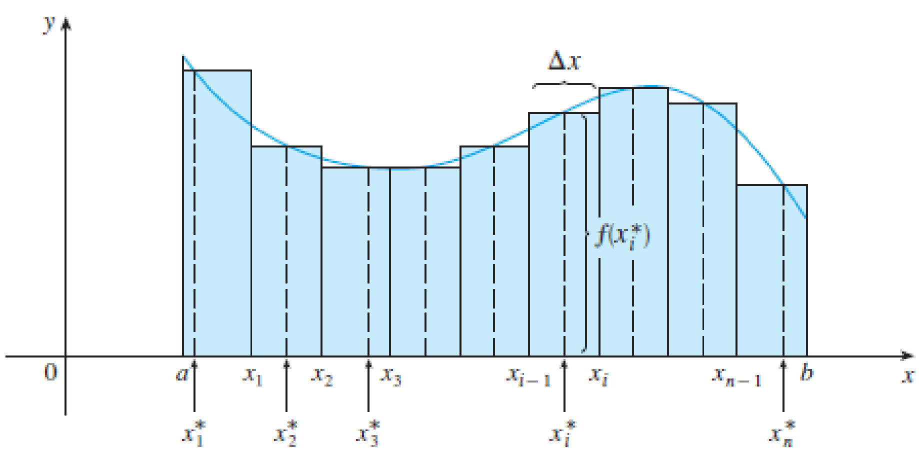
CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN BỘI

§1. TÍCH PHÂN KÉP

1.1 Định nghĩa

Diện tích và tích phân xác định



Cho $f(x)$ là một hàm số xác định với $a \leq x \leq b$. Đầu tiên ta chia khoảng $[a, b]$ này thành n khoảng nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ với độ dài bằng nhau $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ và chọn trong mỗi khoảng đó một điểm x_i^* bất kì. Sau đó lập tổng Riemann

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

và lấy giới hạn để thu được tích phân xác định từ a đến b của hàm số $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n).$$

Trường hợp đặc biệt, $f(x) \geq 0$, tổng Riemann trên chính là tổng diện tích của các hình chữ nhật xấp xỉ miền D giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = 0$ và $y = f(x)$ và $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích của miền D.

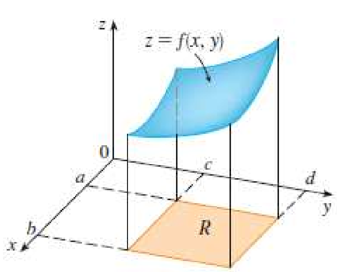
Thể tích và tích phân bội hai trên hình chữ nhật

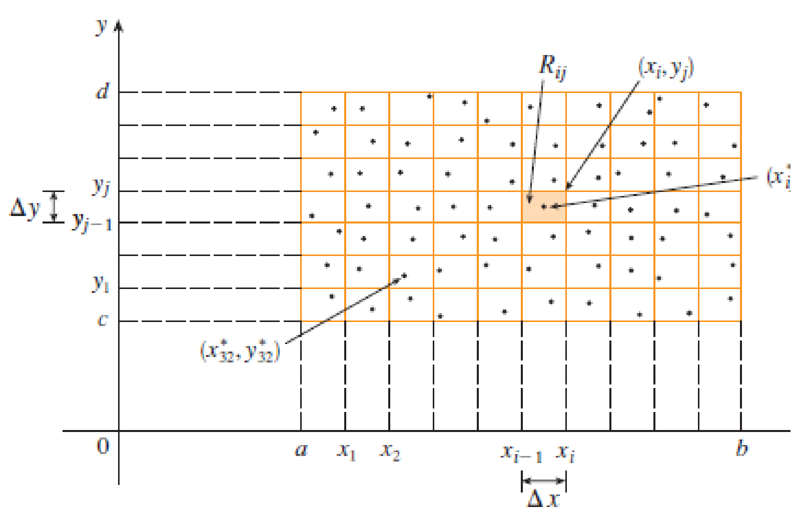
Một cách hoàn toàn tương tự như trên, xét hàm số f phụ thuộc vào hai biến số x, y xác định trên một hình chữ nhật đóng

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Gọi S là miền nằm phía dưới của mặt $z = f(x,y)$ và phía trên của hình chữ nhật R, nghĩa là

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in R\}.$$





Đầu tiên ta chia miền R thành các miền hình chữ nhật con, bằng cách chia khoảng $[a,b]$ thành m khoảng con với độ dài bằng nhau và bằng $\frac{b-a}{m}$, chia khoảng $[c,d]$ thành n khoảng con với độ dài bằng nhau và bằng $\frac{d-c}{n}$. Như vậy ta đã chia miền R thành $m \times n$ hình chữ nhật con

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

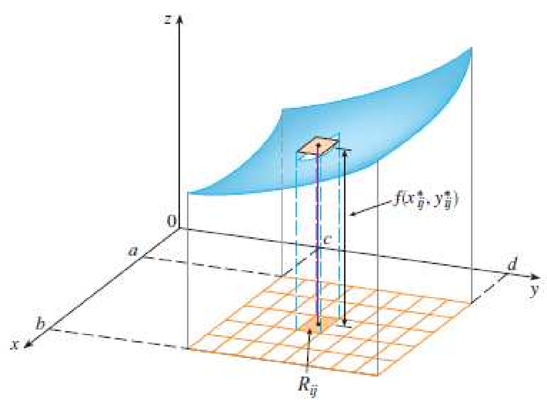
mỗi hình chữ nhật con có diện tích $\Delta S = \Delta x \Delta y$. Trên mỗi hình chữ nhật R_{ij} ta chọn một điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*) bất kì. Khi đó thể tích của phần con của S nằm phía trên của hình chữ nhật R_{ij} có thể được xấp xỉ bằng

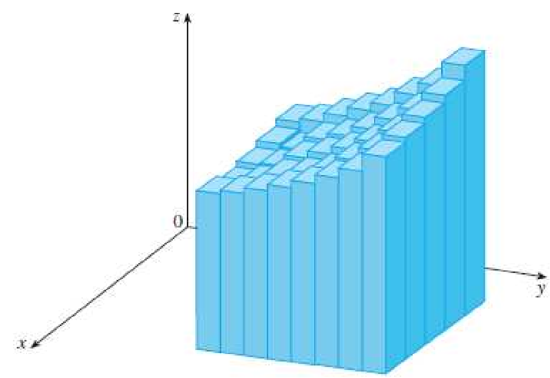
$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta S.$$

Chúng ta tiếp tục quá trình này và thu được công thức xấp xỉ thể tích của miền S:

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta S.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu ta chia miền R càng nhỏ thì công thức xấp xỉ trên càng tốt.





Định nghĩa 2.4. *Tích phân kép (hay tích phân bội hai) của hàm số $f(x)$ trên miền hình chữ nhật R là*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta S,$$

nếu như giới hạn này tồn tại.

Chú ý 2.2. *Nếu $f(x,y) \geq 0$ thì thể tích của miền nằm phía dưới mặt cong $z = f(x,y)$ và phía trên hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ là*

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy.$$

Tích phân lặp và Định lý Fubini

Giả sử $f(x,y)$ là một hàm số khả tích trên $R = [a,b] \times [c,d]$. Xét hai tích phân lặp sau:

$$I_1 = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx, \quad I_2 = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy.$$

Định lý 2.3 (Định lý Fubini). *Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên miền hình chữ nhật $R=[a,b]\times[c,d]$ thì*

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

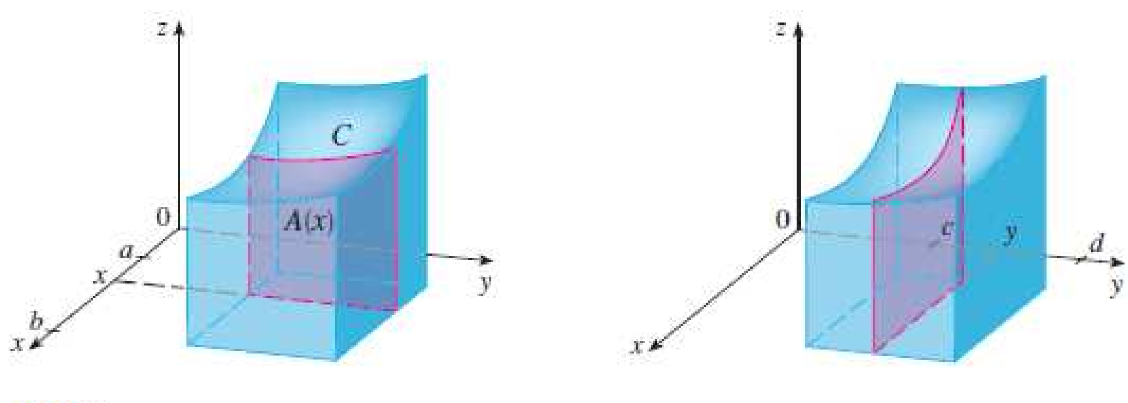
Chứng minh. Trong khuôn khổ của Bài giảng này, thay vì đưa ra chứng minh cho trường hợp tổng quát, chúng ta sẽ chỉ chứng minh cho trường hợp $f(x,y)\geq 0$. Trước hết, thể tích của miền nằm phía dưới mặt $z=f(x,y)$ và phía trên hình chữ nhật R được tính theo công thức.

$$V=\iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

Trong học phần Giải tích I, phần ứng dụng của tích phân xác định để tính thể tích, chúng ta có một công thức khác, đó là

$$V=\int\limits_a^b A(x)dx,$$

ở đó $A(x)$ là diện tích của thiết diện của miền V cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox.



Nhìn vào hình vẽ, có thể thấy $A(x)$ diện tích của miền là miền nằm phía dưới đường $z=f(x,y)$, ở đó x được cố định và $c\leq y\leq d$. Do đó,

$$A(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy\Rightarrow\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

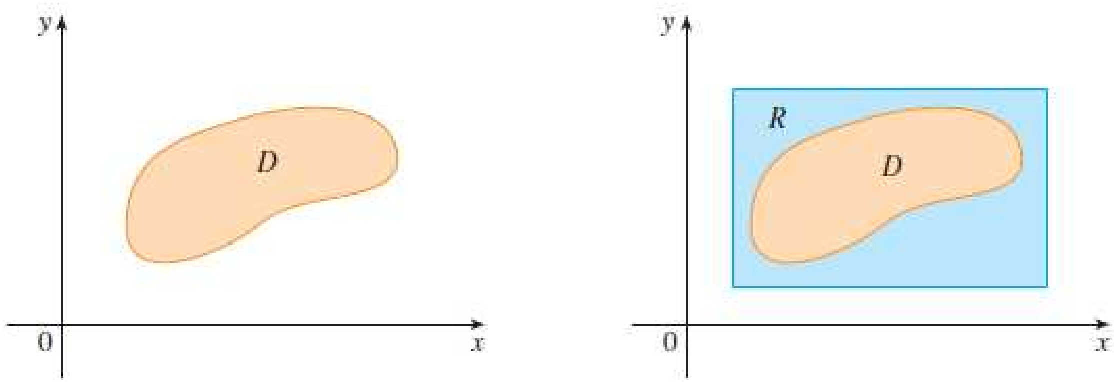
Một cách hoàn toàn tương tự,

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Tích phân kép trên miền bị chặn bất kì

Nếu như miền D không phải là hình chữ nhật mà chỉ là miền bị chặn bất kì thì ý tưởng rất đơn giản là chọn một hình chữ nhật R chứa D và định nghĩa hàm số F với miền xác định là R bởi

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \notin D, \end{cases}$$



Định nghĩa 2.5. *Tích phân kép (hay tích phân bội hai) của hàm số $f(x,y$ trên miền D được định nghĩa bằng*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_R F(x,y)dxdy.$$

Có một cách định nghĩa khác của tích phân kép như sau.

Định nghĩa 2.6. *Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tuỳ ý thành n mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta S_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm $M(x_i, y_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x,y)$ trong miền D, kí hiệu là*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Cách định nghĩa này về cơ bản ý tưởng cũng giống như định nghĩa ở trên. Tuy nhiên, việc chia miền D thành n mảnh nhỏ như vậy dẫn đến việc khó hình dung. Thay vào đó, do tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ nên ta "chủ động" chia D thành hai họ đường thẳng song song với các trục toạ độ như trong Định nghĩa 2.4.

Chú ý 2.3. *Nếu tồn tại tích phân kép* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *thì ta nói hàm số* $f(x,y)$ *khả tích trong miền* D.

Tính chất cơ bản:

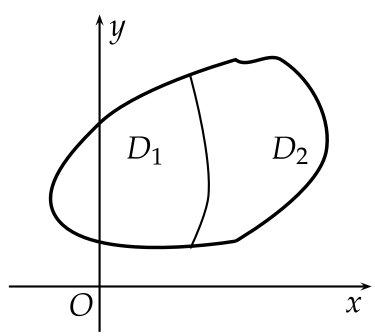
- Tính chất tuyến tính:

$$\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

$$\iint\limits_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $D = D_1 \cup D_2$, ở đó D_1 và D_2 không "chồng" lên nhau (có thể ngoại trừ phần biên) thì

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

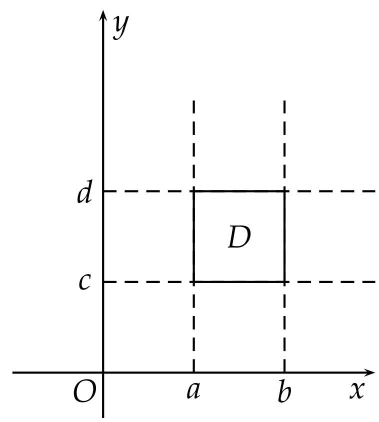


1.2 Tính tích phân kép trong hệ toạ độ Descartes

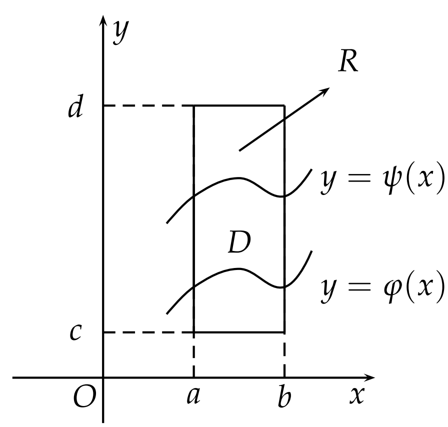
Để tính các tích phân hai lớp, ta cần phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Nếu D là miền hình chữ nhật $(D): \ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_c^d f(x,y)\,dx.$$



2. Nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Oy, $(D) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$ thì, một cách hết sức đơn giản, ta chọn hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ như hình vẽ.



Khi đó,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_R F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)dy,$$

ở đó, nhắc lại rằng,

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Ta có

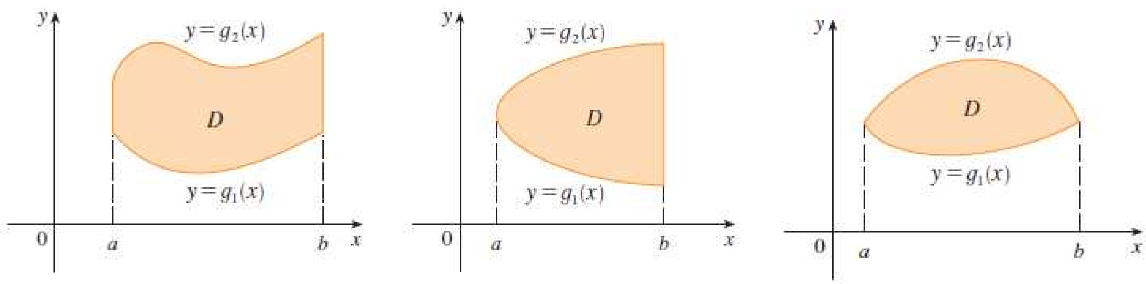
$$\int\limits_c^d F(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

bởi vì với $y \geq \psi(x)$ hoặc $y < \varphi(x)$ thì $F(x,y) = 0$.

Do đó, tích phân kép trong trường hợp này được chuyển về tích phân lặp với thứ tự dy trước, dx sau như sau:

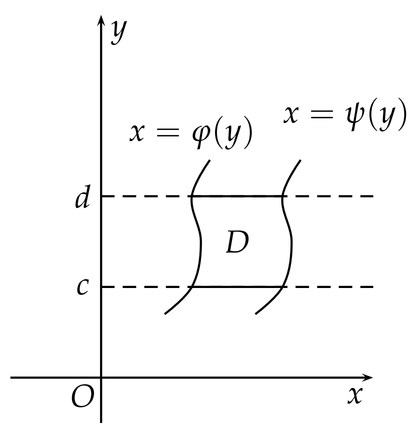
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

Một số miền có dạng hình thang cong có cạnh đáy song song với Oy khác được thể hiện ở hình vẽ sau:



3. Một cách hoàn toàn tương tự, nếu D là hình thang cong có cách cạnh song song với Ox, $(D) : c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)$ thì tích phân kép được chuyển về tích phân lặp với thứ tự dx trước, dy sau như sau:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$



4. Nếu D là miền có hình dáng phức tạp, không có dạng 2,3 thì thông thường ta sẽ chia miền D thành một số hữu hạn miền có dạng 2 hoặc 3 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về việc tính toán những tích phân lặp trên miền có dạng 2, 3.

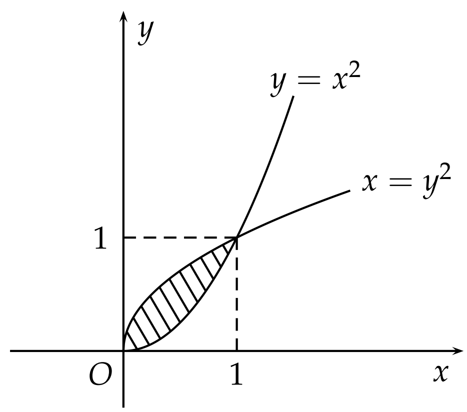
Bài tập 2.1. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,d\mathrm{x}\mathrm{d}y, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dy = ... = \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dx = ... = \frac{\pi}{2}$$

b) $I = \iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy, D$ giới hạn bởi $y = x^2$ và $x = y^2$.



Hình 2.1

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2y - x^3\right) dy = ... = -\frac{1}{504}.$$

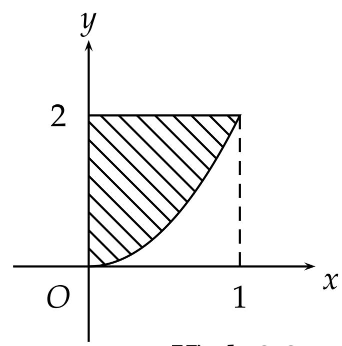
Một số dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Đổi thứ tự lấy tích phân.

Chúng ta bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài tập 2.2. Tính $I = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{x^2}^1 e^{y^2} dy.$

Hàm số $f(x,y) = xe^{y^2}$ liên tục trên miền D nên chắc chắn khả tích trên D. Tuy nhiên, nếu tính tích phân trên mà làm theo thứ tự dy trước dx sau như trong đề bài thì không tính được, vì hàm số e^{y^2} không có nguyên hàm sơ cấp! Do đó, nảy sinh nhu cầu đổi thứ tự lấy tích phân.



Hình 2.2

Lời giải. Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu diễn giải tích của miền D là $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq 1. \end{cases}$

Ta vẽ miền D và biểu diễn nó lại dưới dạng $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$

Do đó,

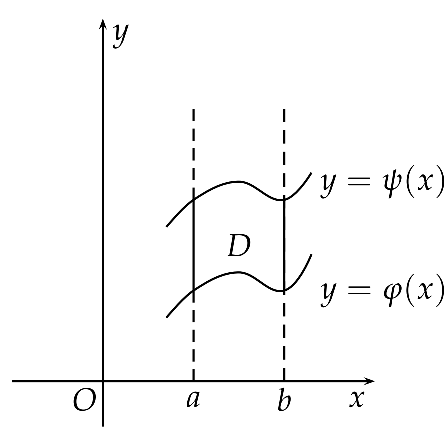
$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dx = \int_0^1 e^{y^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2}.ydy = \frac{1}{4} e^{y^2} |_0^1 = \frac{1}{4} (e-1).$$

Quy trình làm bài toán đổi thứ tự lấy tích phân

Bài toán 1: Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy$

1. Từ biểu thức tích phân lặp, suy ra biểu diễn giải tích của miền lấy tích phân là $(D): \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x). \end{cases}$

2. Vẽ phác thảo miền D.



3. Chia D thành các hình thang cong có các cạnh song song với Ox. Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ $(D_i): \begin{cases} c_i \leqslant y \leqslant d_i, \\ \varphi_i(y) \leqslant x \leqslant \psi_i(y). \end{cases}$

   Sau đó viết

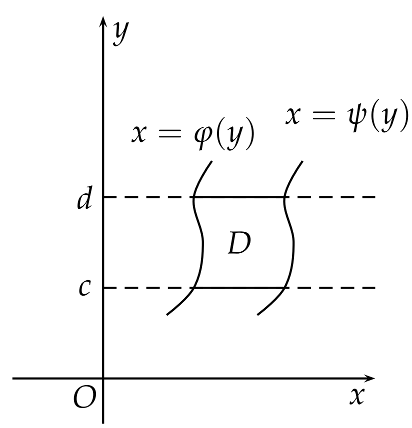
$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy = \sum_i \int_{c_i}^{d_i} dy \int_{\varphi_i(y)}^{\psi_i(y)} f(x,y)\, dx.$$

Làm tương tự với

Bài toán 2: Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

1. Từ biểu thức tích phân lặp, suy ra biểu diễn giải tích của miền lấy tích phân là $(D): \begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y). \end{cases}$

2. Vẽ phác thảo miền D.



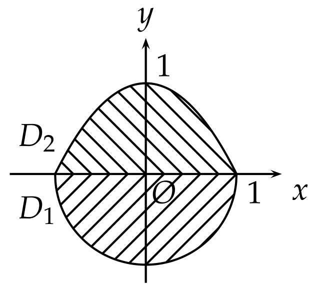
3. Chia D thành các hình thang cong có các cạnh song song với Oy. Tìm biểu diễn giải tích của các miền con, ví dụ $(D_i): \begin{cases} a_i \leqslant y \leqslant b_i, \\ \varphi_i(x) \leqslant y \leqslant \psi_i(x). \end{cases}$

   Sau đó viết

$$\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\varphi_i(x)}^{\psi_i(x)} f(x,y)\, dy.$$

Bài tập 2.3. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy.$



Hình 2.3 a)

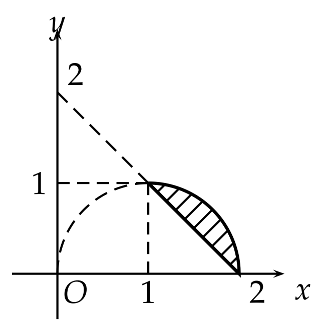
Chia miền D thành hai miền con D_1, D_2 như hình vẽ, với

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-y} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y}. \end{cases}$$

Vậy

$$I = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

b) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

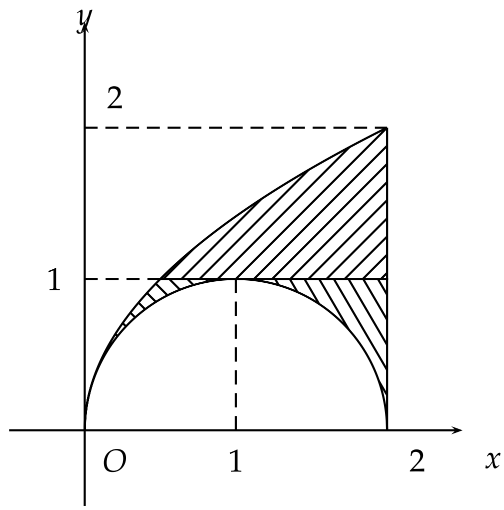


Hình 2.3 b)

Lời giải. Ta có biểu diễn giải tích của D là $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2-x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$ nên:

$$I = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dx.$



Hình 2.3 c)

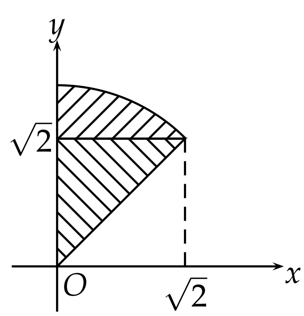
Lời giải. Chia D thành 3 miền như hình vẽ, với

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 1 - \sqrt{1-y^2} \end{cases}, D_2 : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 + \sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}, D_3 : \begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 2 \\ \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Vậy:

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx.$$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$



Hình 2.3 d)

Lời giải. Biểu diễn giải tích của D là $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \end{cases}$ nên:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy.$$

Bài tập 2.4. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2} \neq \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}.$$

Hãy giải thích tại sao không đổi thứ tự lấy tích phân được trong tích phân trên.

[Gợi ý] Hàm lấy tích phân $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ không liên tục trên miền $D = [0,1] \times [0,1]$ nên

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy$$

có thể không tồn tại. Đây thực chất là một tích phân bội suy rộng.

Dạng 2: Tính các tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Giả sử cần tính $\iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy$.

Mục đích của chúng ta là phá bỏ được dấu giá trị tuyệt đối. Vì vậy ta khảo sát dấu của hàm $f(x,y)$. Do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường cong $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành hai miền, D^+ và D^-. Trên miền $D^+, f(x,y) \geqslant 0$, và trên miền $D^-, f(x,y) \leqslant 0$. Ta có công thức:

$$\boxed{\iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D^-} -f(x,y)\, dxdy} \qquad (2.1)$$

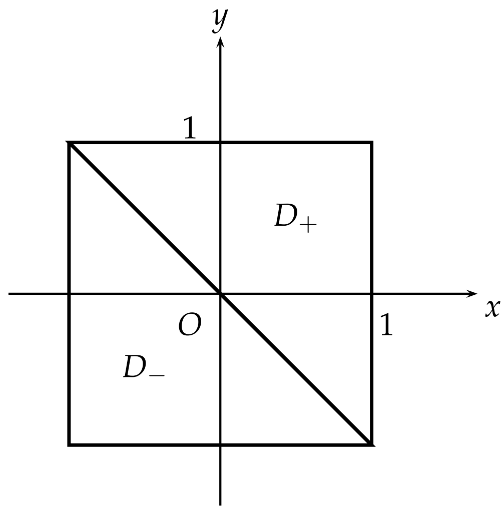
Các bước để làm bài toán tính tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối:

1. Vẽ đường cong $f(x,y) = 0$ để tìm đường cong phân chia miền D.

2. Giả sử đường cong tìm được chia miền D thành hai miền. Đề xác định xem miền nào là D^+ , miền nào là D^-, ta xét một điểm (x_0, y_0) bất kì, sau đó tính giá trị $f(x_0, y_0)$. Nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì miền chứa (x_0, y_0) là D^+ và ngược lại.

3. Sau khi xác định được các miền D^+, D^-, sử dụng công thức (2.1) để tính tích phân.

Bài tập 2.5. Tính $\iint\limits_D |x+y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,||x \leqslant 1|\,, |y| \leqslant 1\right\}$



Hình 2.5

Lời giải. Ta có:

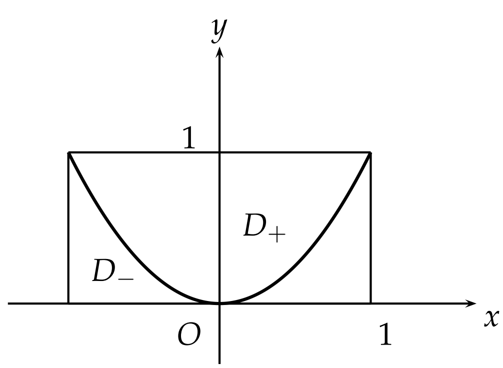
$$D^+ = D \cap \{x+y \geqslant 0\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

$$D^- = D \cap \{x+y \leqslant 0\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant -x. \end{cases}$$

nên

$$I = \iint\limits_{D^+} (x+y)\, dxdy - \iint\limits_{D^-} (x+y)\, dxdy = ... = \frac{8}{3}.$$

Bài tập 2.6. Tính $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy, D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,||x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}.$



Hình 2.6

Lời giải. Chia miền D thành hai miền con

$$D^{+} = D \cap \left\{(x,y) \,\middle|\, y - x^2 \geqslant 0\right\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

$$D^{-} = D \cap \left\{(x,y) \,\middle|\, y - x^2 \leqslant 0\right\} = \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

Do đó

$$I = \iint\limits_{D^+} \sqrt{y - x^2} dxdy + \iint\limits_{D^-} \sqrt{x^2 - y} dxdy = I_1 + I_2,$$

trong đó

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \sqrt{y - x^2} dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx \overset{x=\sin t}{=} \frac{4}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = ... = \frac{\pi}{4},$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-1}^{1} |x|^3 dx = \frac{4}{3} \int\limits_{0}^{1} x^3 dx = \frac{1}{3}.$$

Kết luận $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$. ■

Dạng 3: Tính tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng.

Định lý 2.4. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và hàm là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = 0.$$

Định lý 2.5. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng Oy) và hàm là hàm chẵn đối với y (tương ứng đối với x) thì*

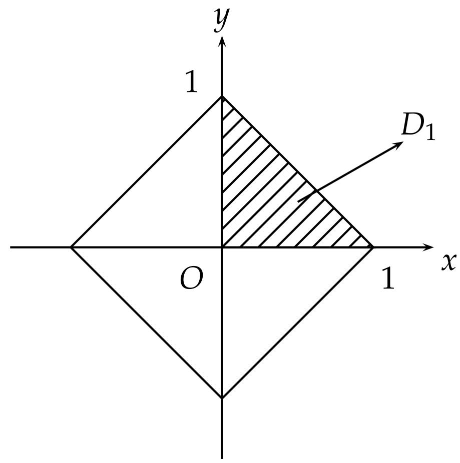
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = 2 \iint\limits_{D^+} f(x,y)\, dxdy,$$

trong đó D^+ là phần nằm bên trên trục Ox của D (tương ứng phía phải trục Oy của D).

Định lý 2.6. *Nếu miền D là miền đối xứng qua trục gốc toạ độ O và hàm $f(x,y)$ thoả mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = 0.$$

Bài tập 2.7. Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |x|+|y|dxdy$.



Hình 2.7

Lời giải. Do D đối xứng qua cả Ox và Oy, $f(x,y) = |x|+|y|$ là hàm chẵn với x, y nên

$$I = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy = \frac{4}{3}.$$

1.3 Phép đổi biến số trong tích phân kép

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D. Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{2.2}$$

thoả mãn:

- $x = x(u,v), y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng $O'uv$.
- Công thức (2.2) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- Định thức Jacobi $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0\ \forall (u,v) \in D_{uv}$.

Khi đó ta có công thức đổi biến số:

$$\boxed{I = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,dudv}$$

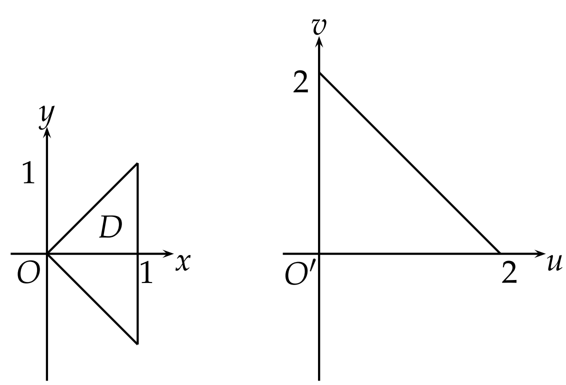
Chú ý:

- Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân $f(x,y)$.
- Để xác định được miền D_{uv}, lưu ý rằng phép đổi biến số tổng quát sẽ biến biên của miền D thành biên của miền D_{uv}, biến miền D bị chặn thành miền D_{uv} bị chặn.
- Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Bài tập 2.8. Chuyển tích phân sau sang hai biến u, v:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\,dxdy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2 - x - y)^2$.



Hình 2.8

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

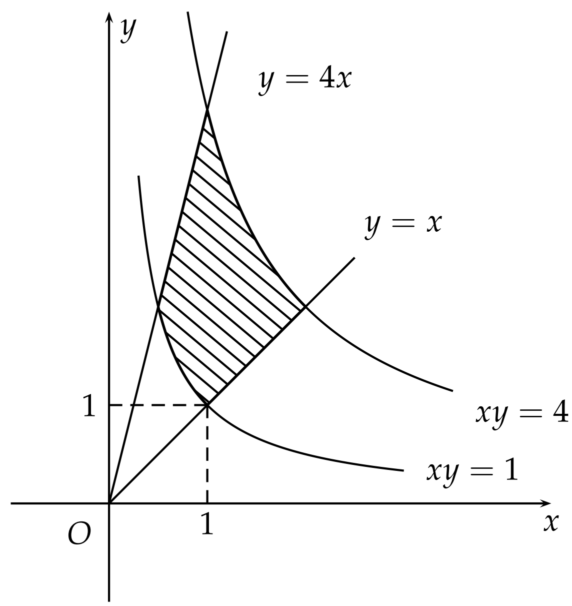
Hơn nữa

$$D \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x \leqslant y \leqslant x \end{cases} \leftrightarrow D_{uv} \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2 - u \end{cases}$$

nên

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 du \int\limits_0^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

Bài tập 2.9. Tính $I = \iint\limits_D \left(4x^2 - 2y^2\right) dxdy$, trong đó $D : \begin{cases} 1 \leqslant xy \leqslant 4 \\ x \leqslant y \leqslant 4x. \end{cases}$



Hình 2.9

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 4 \\ 1 \leqslant v \leqslant 4 \end{cases}, J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Ta có

$$I = \int\limits_1^4 du \int\limits_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right).\frac{1}{2v} dv = \int\limits_1^4 du \int\limits_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right) dv = \int\limits_1^4 -\frac{3}{2} u du = -\frac{45}{4}.$$

Dùng tích phân kép để chứng minh Công thức Euler (Giải tích III)

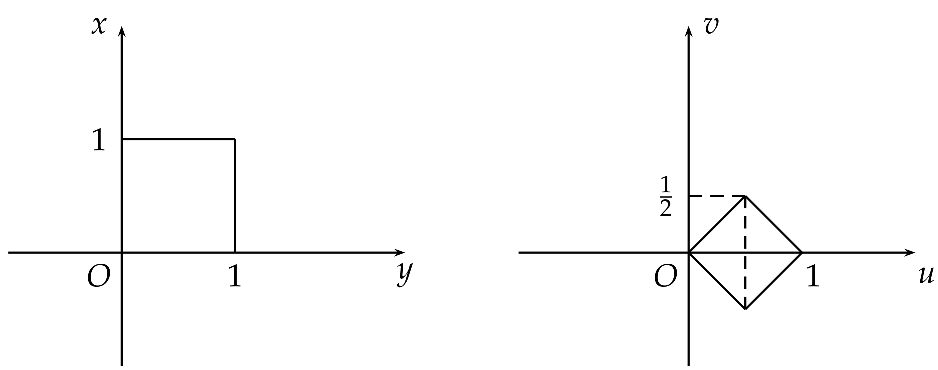
Chứng minh công thức Euler sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Có nhiều cách để chứng minh công thức này, một trong những cách đó là sử dụng khai triển Fourier. Sau đây tôi xin giới thiệu một phương pháp chứng minh khác dựa vào Tích phân kép. Trước hết, vì $\int_0^1 x^n dx=\int_0^1 y^n dy=\frac{1}{n+1}$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n dx\int_0^1 y^n dy=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 (xy)^n dxdy=\int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy.$$

Để tính được tích phân kép này ta thực hiện phép đổi biến $x=u-v, y=u+v$. Khi đó $J=2$ và miền D sẽ biến thành miền D_{uv} như hình vẽ (Tại sao? Phải dựa vào nhận xét phép đổi biến biến biên của miền D thành biên của miền D_{uv}).



Ta có

$$\begin{aligned}I=\iint_D\frac{1}{1-xy}dxdy&=2\iint_{D_{uv}}\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv\\&=4\int_0^{\frac{1}{2}}du\int_0^u\frac{1}{1-u^2+v^2}dv+4\int_{\frac{1}{2}}^1 du\int_0^{1-u}\frac{1}{1-u^2+v^2}dv.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Vì

$$\int_0^z\frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}\Big|_0^z=\frac{1}{a}\arctan\frac{z}{a}$$

nên

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}du = I_1 + I_2.$$

Đặt $u = \sin\theta$ đối với tích phân I_1 ta được

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \arctan\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}. \tag{2.4}$$

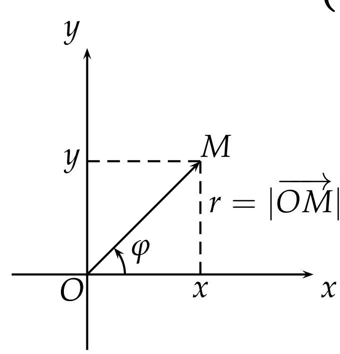
Đặt $u = \cos 2\theta$ đối với tích phân I_2 ta được

$$I_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}} \arctan\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}\right) d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta)d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Kết luận $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$.

Phép đổi biến số trong toạ độ cực

Trong rất nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong toạ độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong toạ độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình tròn, quạt tròn, cardioids,... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức $\left(x^2+y^2\right)$. Toạ độ cực của điểm $M(x,y)$ là bộ (r,φ), trong đó $\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM}} \end{cases}$.

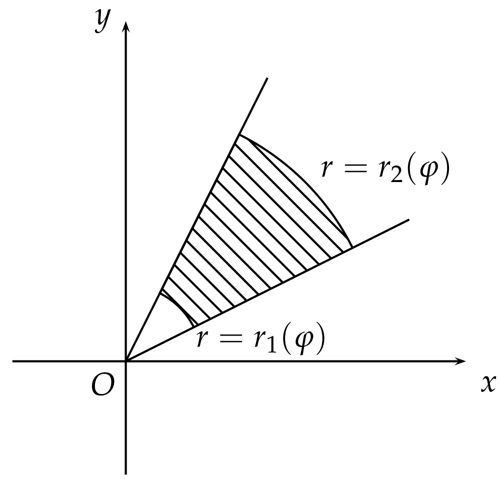


Công thức đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ trong đó miền biến thiên của r, φ phụ thuộc vào hình dạng của miền D. Khi đó

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r \text{ và } I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

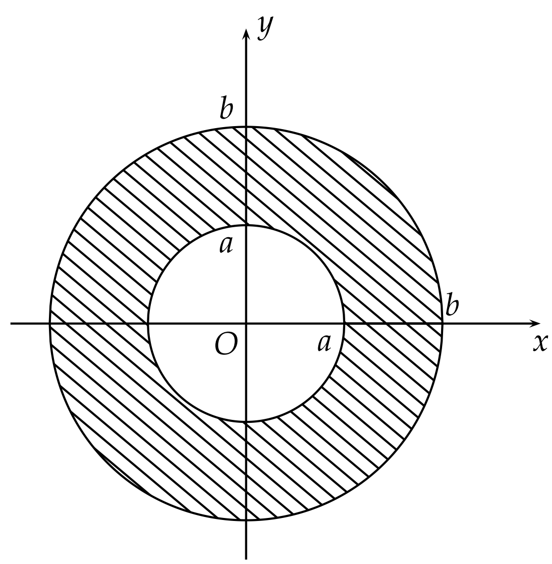
Đặc biệt, nếu miền lấy tích phân có dạng hình quạt $\begin{cases}\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)\end{cases}$ (xem hình vẽ) thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr.$$



Bài tập 2.10. Tìm cận lấy tích phân trong toạ độ cực $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó D là miền xác định như sau:

a) $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$

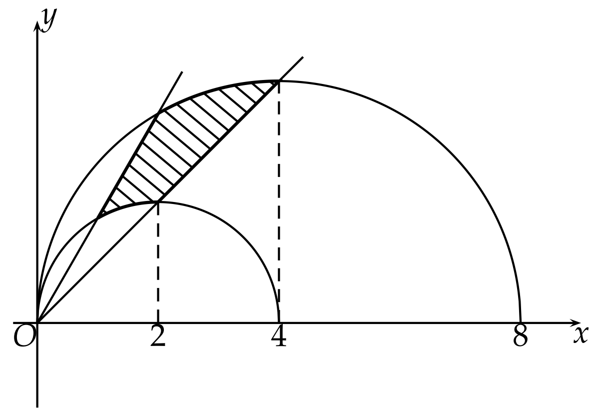


Hình 2.10a

Lời giải.

$$D: \begin{cases}0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ a \leqslant r \leqslant b\end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, rdr$$

b) $x^2+y^2 \geqslant 4x, x^2+y^2 \leqslant 8x, y \geqslant x, y \leqslant 2x$



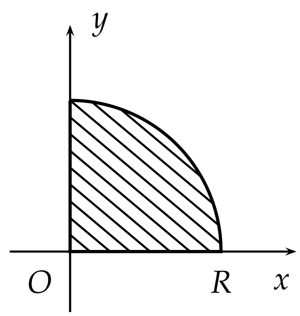
Hình 2.10b

Lời giải. Ta có:

$$D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\cos\varphi \leqslant r \leqslant 8\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) rdr.$$

Bài tập 2.11. Dùng phép đổi biến số trong toạ độ cực, hãy tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^R d\mathrm{x} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) dy \ \ (R>0).$



Hình 2.11 a

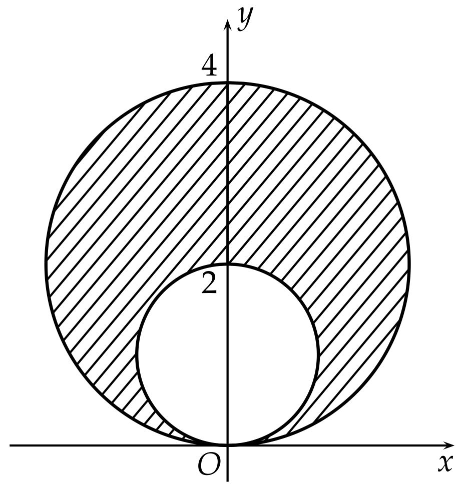
Từ biểu thức tính tích phân ta suy ra biểu thức giải tích của miền D là:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}. \end{cases}$$

Chuyển sang toạ độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant R. \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \ln\left(1+r^2\right) rdr = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^R \ln\left(1+r^2\right) d\left(1+r^2\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(R^2+1\right)\ln\left(R^2+1\right) - R^2\right].$$

b) Tính $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D giới hạn bởi $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ x^2+y^2-4y=0. \end{cases}$



Hình 2.11 b

$$\text{Đặt } \begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 2\sin\varphi\leqslant r\leqslant 4\sin\varphi. \end{cases}$$

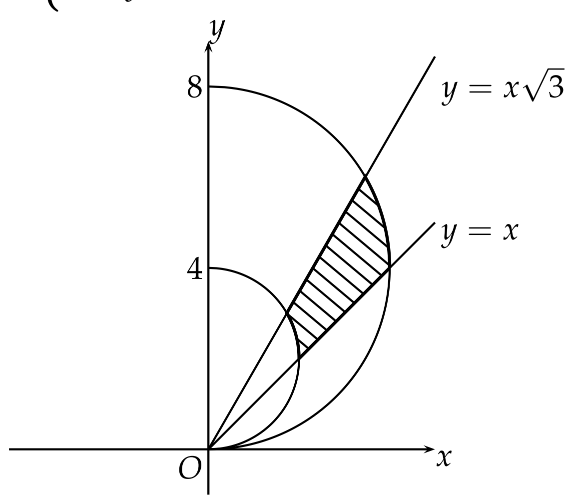
$$I=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}r\cos\varphi.(r\sin\varphi)^2\,rdr$$

$$=0.$$

Cách 2: Vì D đối xứng qua Oy và $f(x,y)=xy^2$ là hàm số lẻ đối với x nên $I=0$.

Bài tập 2.12. Tính các tích phân sau:

a) $\iint\limits_D \frac{d\mathrm{x}\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $D:\begin{cases} 4y\leqslant x^2+y^2\leqslant 8y, \\ x\leqslant y\leqslant x\sqrt{3}. \end{cases}$



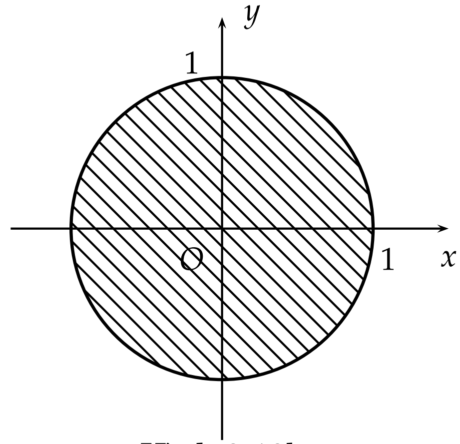
Hình 2.12a

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 4\sin\varphi \leqslant r \leqslant 8\sin\varphi. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \frac{1}{r^4} r dr = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{64\sin^2\varphi} - \frac{1}{16\sin^2\varphi}\right) d\varphi = \frac{3}{128}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

b) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy$ trong đó $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$.



Hình 2.12b

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$

Ta có:

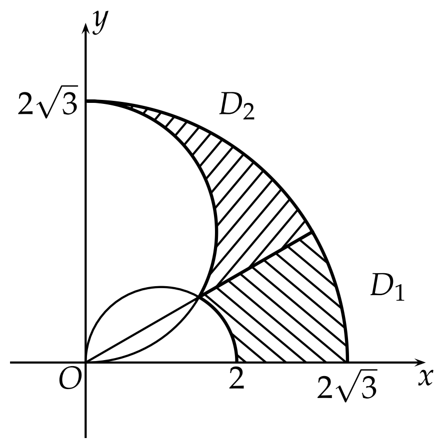
$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr \overset{u=r^2}{=} 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du.$$

Đặt

$$t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \pi \int\limits_0^1 t\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right) dt = -\pi\int\limits_0^1 \frac{4dt}{1+t^2} + 4\pi\int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} \\ &= -4\pi \arctan t \Big|_0^1 + 4\pi\left[\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan t\right]\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

c) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ trong đó $D: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 12 \\ x^2+y^2 \geqslant 2x \\ x^2+y^2 \geqslant 2\sqrt{3}y \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$



Hình 2.12c

Lời giải. Chia miền D thành hai miền $D = D_1 \cup D_2$ như hình vẽ,

$$D_1 = \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} \\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases}, D_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{3}\sin\varphi \leqslant r \leqslant 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy $I = I_1 + I_2$, trong đó

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 4\cos^2\varphi\right)d\varphi = \dots = \frac{17}{32},$$

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\sqrt{3}\sin\varphi}^{2\sqrt{3}} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\left(12 - 12\sin^2\varphi\right)d\varphi = \dots = \frac{27}{32}.$$

Kết luận $I = \frac{11}{8}$. ■

Phép đổi biến số trong toạ độ cực suy rộng.

Phép đổi biến trong toạ độ cực suy rộng được sử dụng khi miền D có hình dạng ellipse hoặc hình tròn có tâm không nằm trên các trục toạ độ. Khi sử dụng phép biến đổi này, bắt buộc phải tính lại các Jacobian của phép biến đổi.

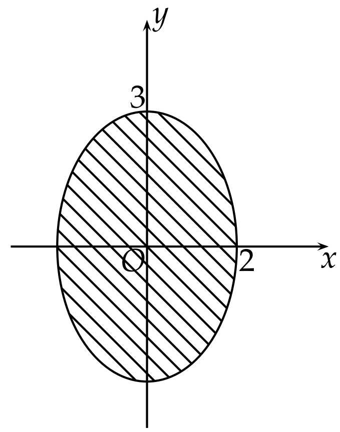
1. Nếu $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}, J = abr.$

2. Nếu $D : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}, J = r.$

3. Xác định miền biến thiên của r, φ trong phép đổi biến trong hệ toạ độ cực suy rộng.

4. Thay vào công thức đổi biến tổng quát và hoàn tất quá trình đổi biến.

Bài tập 2.13. Tính $\iint\limits_D \left|9x^2 - 4y^2\right| dxdy$, trong đó $D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.



Hình 2.13

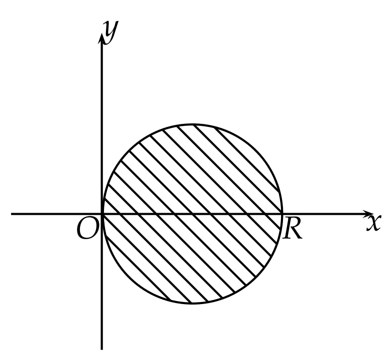
Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = 6r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$$

Ta có:

$$I = 6\iint\limits_{D_{r\varphi}} \left|36r^2\cos^2\varphi - 36r^2\sin^2\varphi\right| rdrd\varphi = 6.36\int\limits_0^{2\pi} |\cos 2\varphi|\, d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = ... = 216$$

Bài tập 2.14. Tính $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx - x^2 - y^2} dy, (R > 0)$.



Hình 2.14

Lời giải. Từ biểu thức tính tích phân suy ra biểu thức giải tích của D là:

$$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant R\\ -\sqrt{R\mathrm{x}-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{R\mathrm{x}-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{4}.$$

$$\text{Đặt }\begin{cases}x=\frac{R}{2}+r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow|J|=r,\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant\frac{R}{2}\end{cases}$$

Vậy

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{R}{2}}r\sqrt{\frac{R^2}{4}-r^2}dr=2\pi.\frac{-1}{2}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\sqrt{\frac{R^2}{4}-r^2}d\left(\frac{R^2}{4}-r^2\right)=\frac{\pi R^3}{12}.$$

Chú ý 2.4. *Đối với Bài tập 2.14, nếu chỉ đổi biến số trong tọa độ cực thông thường*

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\quad\textit{thì}\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\\ 0\leq r\leq R\cos\varphi.\end{cases}$$

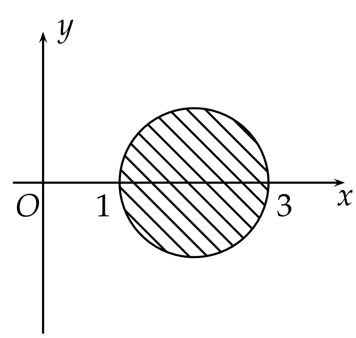
Tích phân đã cho trở thành

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\left(\sqrt{Rr\cos\varphi-r^2}\right)rdr.$$

Tích phân này không dễ tính vì nó chứa biểu thức vô tỉ $\sqrt{Rr\cos\varphi-r^2}$. Đây là một ví dụ điển hình về việc phép đổi biến số trong tọa độ cực suy rộng không những biến miền lấy tích phân về miền đơn giản, mà còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân.

Bài tập 2.15. Tính $\iint\limits_D xydxdy$, với

a) D là hình tròn $(x-2)^2+y^2\leqslant 1$.



Hình 2.15a

Lời giải.

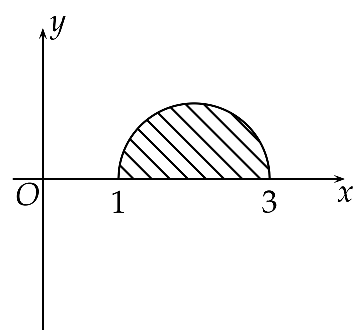
$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . r dr = 0.$$

Cách 2. Nhận xét D là miền đối xứng qua Ox và $f(x,y) = xy$ là hàm lẻ đối với y nên $I = 0$. ■

b) D là nửa hình tròn $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$.



Hình 2.15b

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi . r dr = \frac{4}{3}.$$

1.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 2.16. *Tính*

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[Gợi ý] Nên tính tích phân này theo thứ tự dy trước, dx sau.

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bài tập 2.17. *Tính*

a) $I_1 = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, *trong đó* D *là miền giới hạn bởi các đường thẳng* $x = 2, y = x$ *và hyperbol* $xy = 1$.

b) $I_2 = \iint\limits_C (x^2 + y) dxdy$, *trong đó* C *là miền giới hạn bởi các parbaol* $y = x^2$ *và* $x = y^2$.

[Đáp số]

a) $I_1 = \frac{9}{4}$

b) $I_2 = \frac{33}{140}$

Bài tập 2.18. *Tính tích phân*

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dxdy,$$

trong đó D *là miền giới hạn bởi bốn parabol*

$$x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = px, y^2 = qx, \ (0 < a < b, 0 < p < q).$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến số $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$.

Bài tập 2.19. *Tính tích phân* $I = \iint\limits_D xydxdy$ *trong đó* D *là miền giới hạn bởi các đường cong*

$$y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px, y^2 = qx, \ (0 < b < a, 0 < p < q).$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến số $u = \frac{x^3}{y}, v = \frac{y^2}{x}$.

Bài tập 2.20. *Chứng minh rằng*

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy = \frac{e-1}{2}.$$

[Gợi ý] Thực hiện phép đổi biến $u = x + y, v = y$.

Bài tập 2.21. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường* $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$.

[Gợi ý] Đặt $u = xy, v = xy^3$. Đáp số $S = 2\ln 3$.

Bài tập 2.22. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi bốn parabol* $y^2 = x, y^2 = 8x, x^2 = y, x^2 = 8y$.

[Gợi ý] Đặt $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y}$. Đáp số $S = \frac{279\pi}{2}$.

Bài tập 2.23. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi các đường* $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$.

[Đáp số] $S = \frac{1}{8}$.

Bài tập 2.24. *Chứng minh rằng*

$$\iint\limits_{x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \frac{\sin 1}{2}.$$

[Gợi ý] Đặt $u = x - y, v = x + y$.

Bài tập 2.25. *Tính tích phân*

$$I = \iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right) dxdy,$$

trong đó D *là miền giới hạn bởi các trục tọa độ và parabol* $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$.

§2. TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 2.7. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn V của không gian $Oxyz$. Chia miền V một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi miền Δ_i lấy một điểm tuỳ ý $M(x_i, y_i, z_i)$ và thành lập tổng tích phân $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\{\Delta V_i \to 0\}$ mà I_n tiến tới một giá trị hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm $M(x_i, y_i, z_i)$ thì giới hạn ấy được gọi là* tích phân bội ba *của hàm số $f(x,y,z)$ trong miền V, kí hiệu là $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$.*

Khi đó ta nói rằng hàm số $f(x,y,z)$ khả tích trong miền V.
Do tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền V thành các miền nhỏ nên ta có thể chia V bởi ba họ mặt thẳng song song với các mặt phẳng toạ độ, khi đó $dV = dxdydz$ và ta có thể viết

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Các tính chất cơ bản

- Tính chất tuyến tính

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\,dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)\,dxdydz = k\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

- Tính chất cộng tính: Nếu $V = V_1 \cup V_2$, ở đó V_1 và V_2 không "chồng" lên nhau (có thể ngoại trừ phần biên) thì:

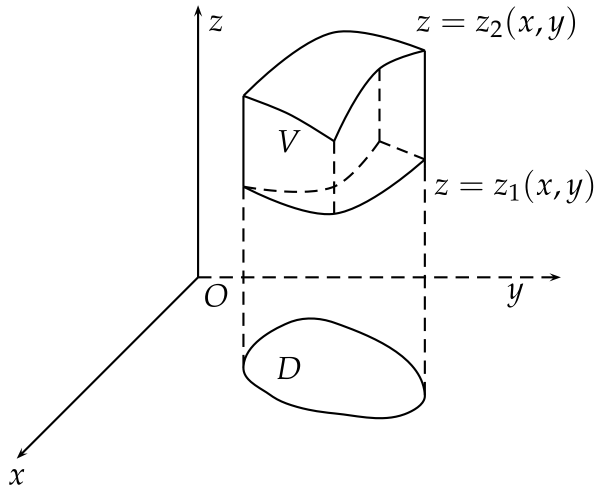
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

2.2 Tính tích phân bội ba trong hệ toạ độ Descartes

Cũng giống như việc tính toán tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp. Việc chuyển đổi này sẽ được thực hiện qua trung gian là tích phân kép.

$$\boxed{\text{Tích phân ba lớp} \Rightarrow \text{Tích phân hai lớp} \Rightarrow \text{Tích phân lặp}}$$

Sơ đồ trên cho thấy việc tính tích phân ba lớp được chuyển về tính tích phân kép (việc tính tích phân kép đã được nghiên cứu ở bài trước). Đương nhiên việc chuyển đổi này phụ thuộc chặt chẽ vào hình dáng của miền V. Một lần nữa, kĩ năng vẽ hình là rất quan trọng.



Nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$, trong đó $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm số liên tục trên miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy thì ta có:

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \tag{2.5}$$

Thuật toán chuyển tích phân ba lớp về tích phân hai lớp

1. Xác định hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy.
2. Xác định biên dưới $z = z_1(x,y)$ và biên trên $z = z_2(x,y)$ của V.
3. Sử dụng công thức 2.5 để hoàn tất việc chuyển đổi.

Đến đây mọi việc chỉ mới xong một nửa, vấn đề còn lại bây giờ là:

$$\boxed{\text{Xác định } D \text{ và các biên } z = z_1(x,y), z = z_2(x,y) \text{ như thế nào?}}$$

Có hai cách để xác định: Dùng hình học hoặc là dựa vào biểu thức giải tích của miền V. Mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng. Cách dùng hình học có ưu điểm là rất trực quan, dễ hiểu. Cách dùng biểu thức giải tích của V tuy có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng thường khó hiểu và phức tạp. Vì thế, chúng ta cố gắng thử cách vẽ hình trước. Muốn làm được điều này, đòi hỏi bạn đọc phải có kĩ năng vẽ các mặt cong cơ bản trong không gian như mặt phẳng, mặt trụ, mặt nón, mặt cầu, ellipsoit, paraboloit, hyperboloit 1 tầng, hyperboloit 2 tầng, hơn nữa cần có trí tưởng tượng tốt để hình dung ra sự giao cắt

của các mặt.
Chú ý: Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền V và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ đôi khi giúp sinh viên giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

Định lý 2.7. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$ (Oxy) và $f(x,y,z)$ là hàm số lẻ đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 0$.*

Định lý 2.8. *Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng $z = 0$ (Oxy) và $f(x,y,z)$ là hàm số chẵn đối với z thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V^+} f(x,y,z)\,dxdydz$, trong đó V^+ là phần phía trên mặt phẳng $z = 0$ của V.*

Chú ý 2.5. *Vai trò của z trong hai định lý trên có thể được thay đổi bằng x hoặc y. Hai định lý này có thể được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp đổi biến số.*

Bài tập 2.26. Tính $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi:

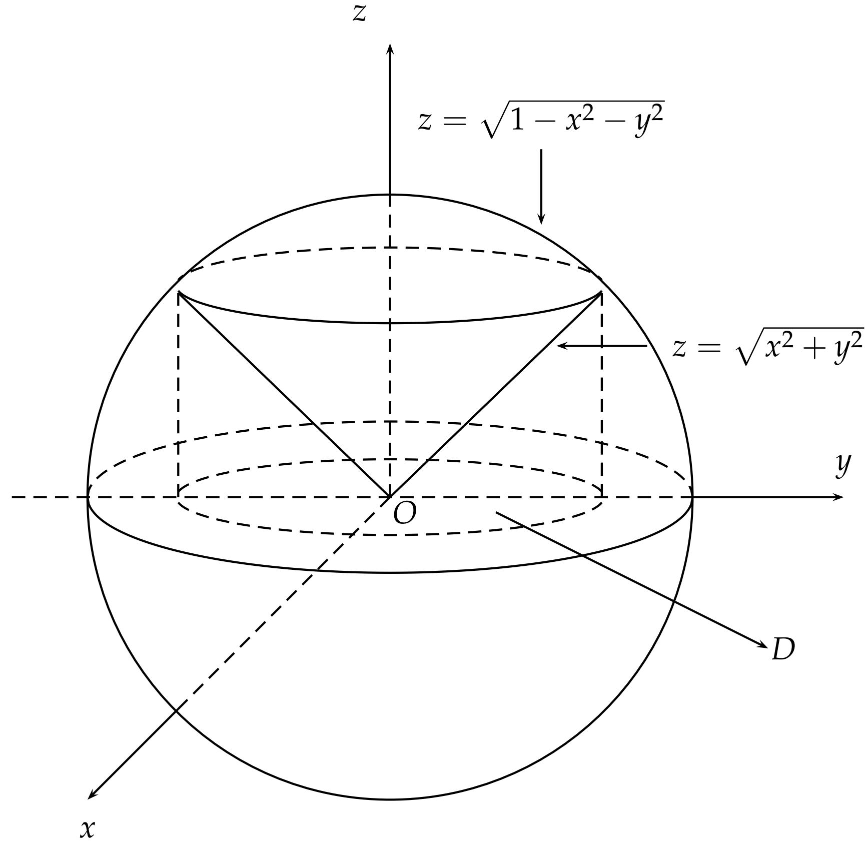
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4} \\ x \leqslant y \leqslant 2x \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Lời giải.

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_x^{2x} \frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{10}{3}x^3\right) dx = \frac{43}{3072}.$$ ∎

Bài tập 2.27. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$ trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$



Hình 2.27

Lời giải. Do tính chất đối xứng, $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = 2\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2)\,dxdydz = 2I_1$, trong đó V_1 là nửa phía trên mặt phẳng Oxy của V. Ta có $\begin{cases} V_1 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \\ D : x^2+y^2 \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$

với D là hình chiếu của V_1 lên Oxy. Ta có

$$I_1 = \iint\limits_D x^2+y^2dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r, \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr \overset{(r=\cos\alpha)}{=\!=} \cdots = \frac{2\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}.$$

Vậy

$$I = \frac{4\pi}{5}.\frac{8-5\sqrt{2}}{12}. \qquad \blacksquare$$

2.3 Đổi biến số trong tích phân bội ba

Phép đổi biến số tổng quát

Phép đổi biến số tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt cong. Giả sử cần tính $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ trong đó $f(x,y,z)$ liên tục trên V.

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \tag{2.6}$$

thoả mãn

- x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw} của mặt phẳng $O'uvw$.
- Công thức 2.6 xác định song ánh $V_{uv\mathrm{w}} \to V$.
- $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})} \neq 0$ trong V_{uvw}. Khi đó

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]\,|J|\,dudvdw$$

Chú ý 2.6. *1. Cũng giống như phép đổi biến trong tích phân kép, phép đổi biến trong tích phân bội ba cũng biến biên của miền V thành biên của miền V_{uvw}, biến miền V bị chặn thành miền V_{uvw} bị chặn.*

2. Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$.

Bài tập 2.28. Tính thể tích miền V giới hạn bởi $\begin{cases} x+y+z = \pm 3 \\ x+2y-z = \pm 1 \\ x+4y+z = \pm 2 \end{cases}$ biết $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y - z \\ \text{w} = x + 4y + z. \end{cases}$

Vì phép đổi biến biến biên của V thành biên của V_{uvw} nên V_{uvw} giới hạn bởi: $\begin{cases} u = \pm 3 \\ v = \pm 1 \\ \text{w} = \pm 2. \end{cases}$

Ta có

$$J^{-1} = \frac{D(u,v,\text{w})}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow J = \frac{1}{6} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\iiint\limits_{V_{uvw}} dudvdw = \frac{1}{6}.6.2.4 = 8.$$

■

Bài tập 2.29. Tính

a) $\iiint\limits_V (3x^2 + 2y + z)dxdydz$, trong đó $V : |x - y| \le 1, |y - z| \le 1, |z + x| \le 1.$

b) $\iiint\limits_V dxdydz$, trong đó $V : |x - y| + |x + 3y| + |x + y + z| \le 1.$

[Gợi ý]

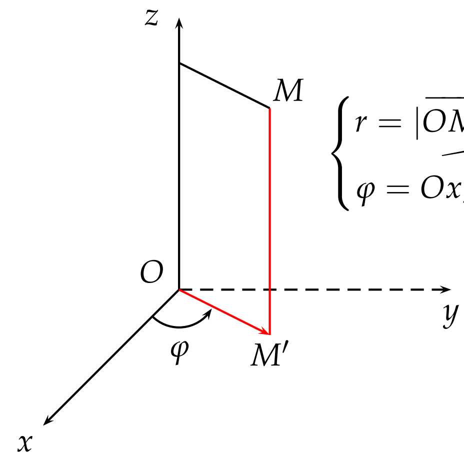
a) Đặt $\begin{cases} u = x - y, \\ v = y - z, \\ w = z + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le u \le 1, \\ -1 \le v \le 1, \\ -1 \le w \le 1. \end{cases}$

b) Đặt $\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + 3y, \\ w = x + y + z \end{cases} \Rightarrow |u| + |v| + |w| \le 1.$

Phép đổi biến số trong toạ độ trụ

Khi miền V có biên là các mặt như mặt paraboloit, mặt nón, mặt trụ, và có hình chiếu D lên Oxy là hình tròn, hoặc hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $(x^2 + y^2)$ thì ta hay sử dụng công thức đổi biến trong hệ toạ độ trụ.

Toạ độ trụ của điểm $M(x,y,z)$ là bộ ba (r,φ,z), trong đó (r,φ) chính là toạ độ cực của điểm M' là hình chiếu của điểm M lên Oxy.



$$\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM'}| \\ \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}} \end{cases}$$

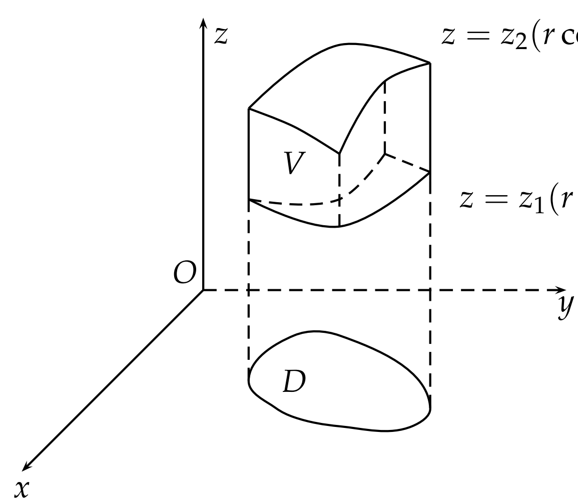
Công thức đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$

Định thức Jacobian của phép biến đổi là $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$, ta có:

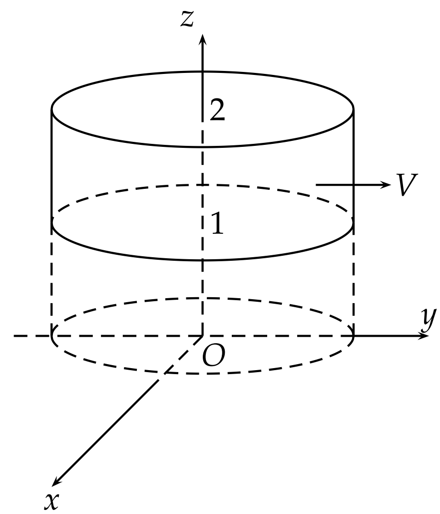
$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rdrd\varphi dz.$$

Nếu miền $V : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y) \end{cases}$, trong đó $D : \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi) \end{cases}$ thì:

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz.$$



Bài tập 2.30. Tính $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó $V: \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 1 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$



Hình 2.30

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$

Ta có

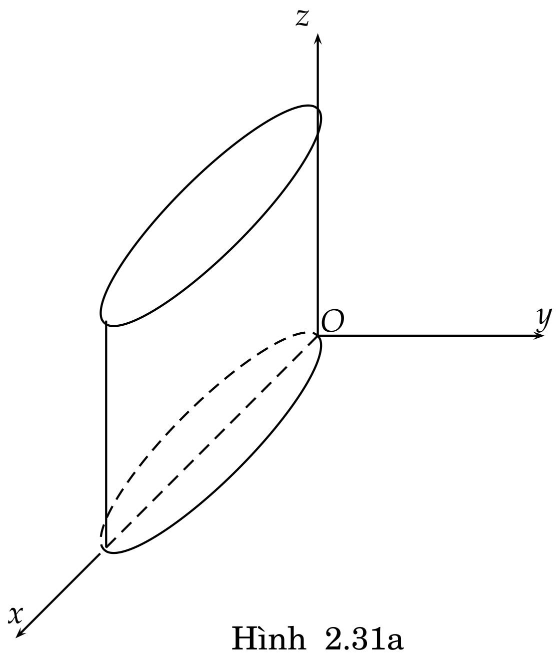
$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_1^2 z dz = ... = \frac{3\pi}{4}.$$

■

Bài tập 2.31. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó:

a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng $z=0, z=a\,(a>0)$.

b) V là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2, z \geqslant 0\,(a>0)$



Hình 2.31a

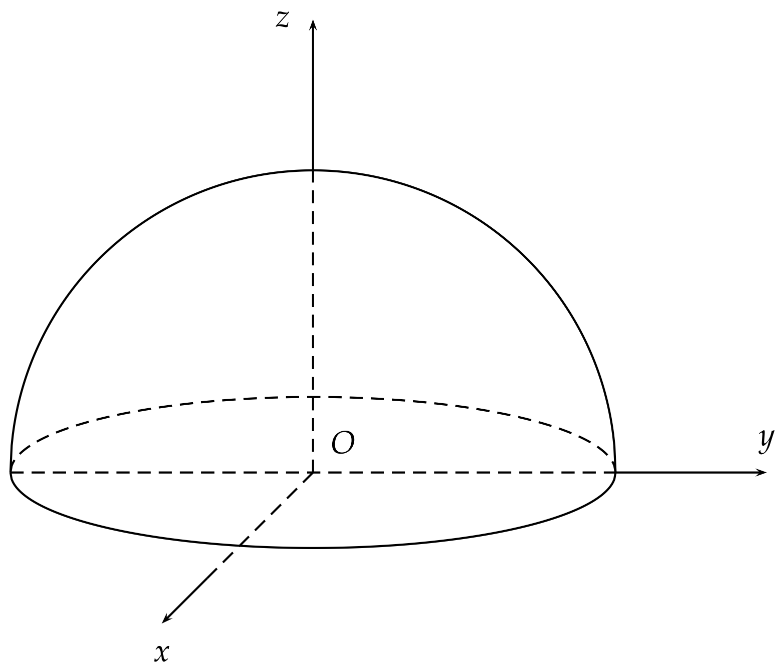
Lời giải. a) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$

Từ $x^2 + y^2 = 2x$ suy ra $r = 2\cos\varphi$. Do đó: $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant a. \end{cases}$

Vậy

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_{0}^{a} z dz = ... = \frac{16a^2}{9}.$$

■



Hình 2.31b

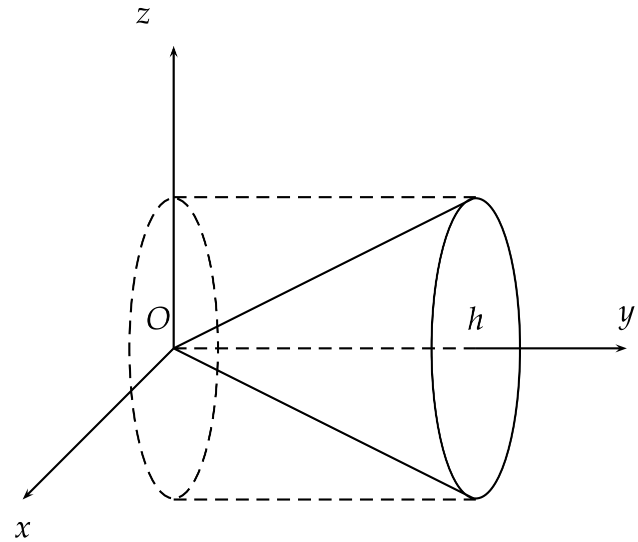
Lời giải. b) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - r^2}. \end{cases}$

Ta có

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr \int\limits_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z dz = 2\pi \int\limits_0^a r^2.\frac{a^2 - r^2}{2} dr = \frac{2\pi a^5}{15}.$$

■

Bài tập 2.32. Tính $I = \iiint\limits_V y dx dy dz$, trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} y = \sqrt{z^2 + x^2} \\ y = h. \end{cases}$



Hình 2.32

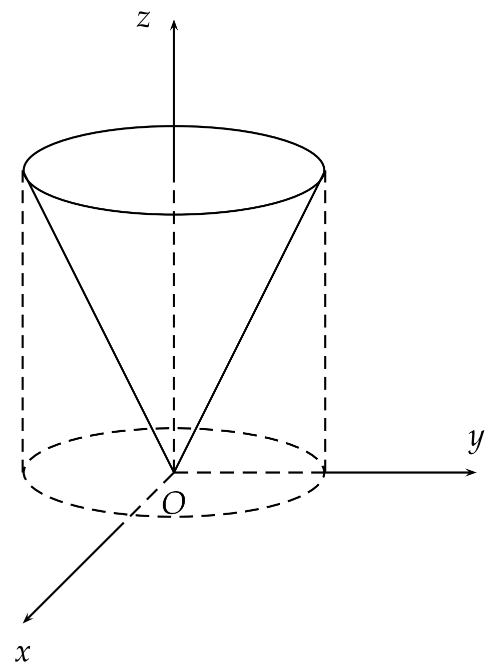
Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant h \\ r \leqslant y \leqslant h. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h rdr \int\limits_r^h ydy = 2\pi \int\limits_0^h r.\frac{h^2 - r^2}{2} dr = \frac{\pi h^4}{4}.$$

■

Bài tập 2.33. Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ trong đó V giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1. \end{cases}$



Hình 2.33

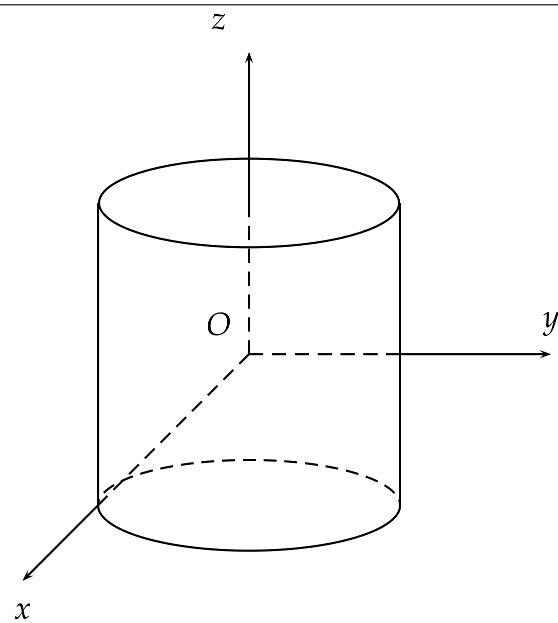
Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, ta có $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ r \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$

Do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi \int_0^1 r^2 (1-r)\, dr = \frac{\pi}{6}.$$

■

Bài tập 2.34. Tính $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, trong đó $V : \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ |z| \leq 1. \end{cases}$



Hình 2.34

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z' = z-2 \end{cases} \Rightarrow |J| = r, V_{r\varphi z}: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ -3 \leqslant z' \leqslant -1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{-3}^{-1} \frac{dz'}{\sqrt{r^2+z'^2}} \\ &= \pi \int\limits_0^1 r.\ln\left(z' + \sqrt{r^2+z'^2}\right)\Big|_{z'=-3}^{z'=-1} dr \\ &= 2\pi\left[\int\limits_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)dr - \int\limits_0^1 r\ln\left(\sqrt{r^2+9}-3\right)dr\right] \\ &= 2\pi\left(I_1 - I_2\right). \end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+1}-1\right) = \lim\limits_{r\to 0} r\ln\left(\sqrt{r^2+9}-3\right) = 0$ nên thực chất I_1, I_2 là các tích phân xác định.

Đặt $\sqrt{r^2+1} = t \Rightarrow rdr = tdt$, ta có

$$\begin{aligned} &\int r\ln\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)dr \\ &= \int t\ln(t-1)\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t-1}dt \\ &= \frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + C. \end{aligned}$$

Do đó

$$I_1 = \left[\frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right]\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Tương tự, $I_2 = \frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2} + C$ nên

$$I_2 = \left[\frac{t^2-9}{2}\ln(t-3) - \frac{t^2}{4} - \frac{3t}{2}\right]\Big|_3^{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{10}-3\right) - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\left(\sqrt{10}-3\right).$$

Kết luận

$$I = 2\pi(I_1 - I_2) = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - 8 - \sqrt{2}\right).$$

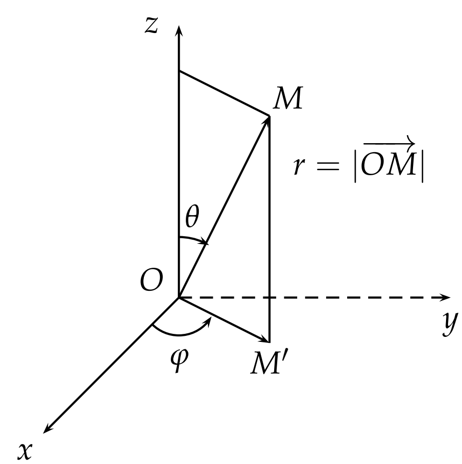
■

Phép đổi biến số trong toạ độ cầu

Trong trường hợp miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu,... và khi hàm lấy tích phân $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ thì ta hay sử dụng phép đổi biến trong toạ độ cầu.

Toạ độ cầu của điểm $M(x,y,z)$ trong không gian là bộ ba (r,θ,φ), trong đó:

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \\ \theta = \left(\widehat{Oz,\overrightarrow{OM}}\right) \\ \varphi = \left(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM'}}\right). \end{cases}$$



Công thức của phép đổi biến là: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

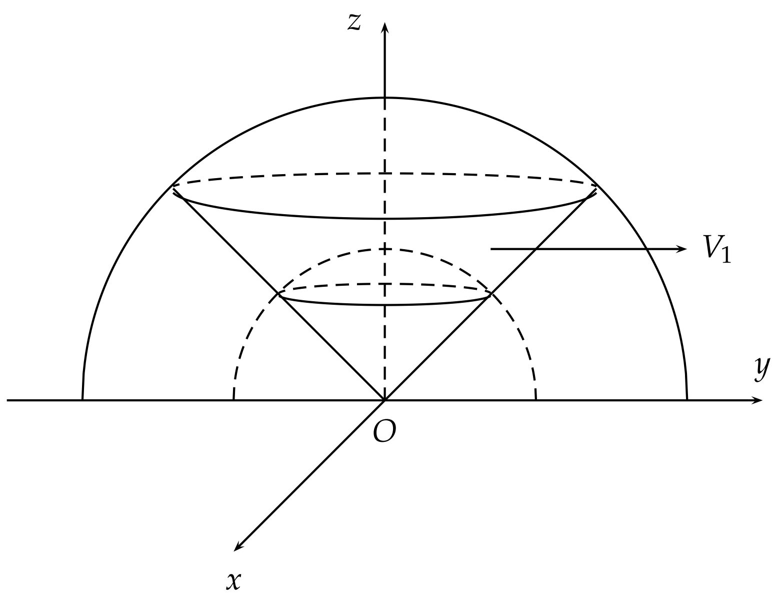
Định thức Jacobian $J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = -r^2 \sin\theta$. Ta có công thức đổi biến

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Đặc biệt, nếu miền $V_{r\theta\varphi} : \begin{cases} \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, & (\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 dr.$$

Bài tập 2.35. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, trong đó $V : \begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \\ x^2+y^2 \leqslant z^2. \end{cases}$



Hình 2.35

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

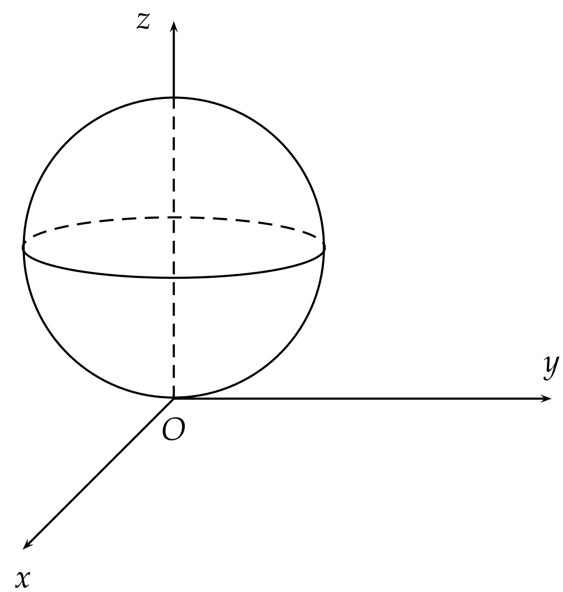
Do $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ nên $1 \leq r \leq 2$. Trên mặt nón có phương trình $x^2+y^2 = z^2$ nên $\theta = \frac{\pi}{4}$. Vậy cận lấy tích phân là $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \leqslant r \leqslant 2. \end{cases}$

Ta có

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int\limits_1^2 r^2.r^2 dr = 2.2\pi.\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.\frac{r^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{4.31\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

■

Bài tập 2.36. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ trong đó $V:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.



Hình 2.36

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Do $x^2+y^2+z^2 \leqslant z$ nên $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$. Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r.r^2 dr = 2\pi.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.\frac{1}{4}\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{10}.$$

■

Phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng.

1. Tương tự như khi tính tích phân kép, nếu miền V có dạng *hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục toạ độ* nên nghĩ tới phép đổi biến số trong toạ độ cầu suy rộng. Khi đó ta phải tính lại Jacobian của phép biến đổi.

2. – Nếu $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}, J = -abcr^2\sin\theta$$

– Nếu $V : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + r\cos\theta \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

3. Xác định miền biến thiên của φ, θ, r.

4. Dùng công thức đổi biến tổng quát để hoàn tất việc đổi biến.

Bài tập 2.37. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, trong đó V là nửa của khối ellipsoit $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1, z \geqslant 0, (a, b > 0)$.

Lời giải. 1. **Toạ độ trụ suy rộng.**

Đặt $\begin{cases} z = bz' \\ x = ar\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z' \leqslant \sqrt{1-r^2}. \end{cases}, J = a^2br$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} bz'.ar.a^2brdz'$$
$$= 2a^3b^2\pi \int\limits_0^1 r^2.\frac{1-r^2}{2}dr$$
$$= \frac{2\pi a^3b^2}{15}.$$

2. **Toạ độ cầu suy rộng.**

Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ z = br\cos\theta \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}, J = a^2br^2\sin\theta.$$

Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 br\cos\theta.ar\sin\theta.a^2b\sin\theta dr$$
$$= 2a^3b^2\pi \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta\sin^2\pi d\theta \int\limits_0^1 r^4dr$$
$$= \frac{2\pi a^3b^2}{15}.$$

■

Bài tập 2.38. Tính $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, ở đó $V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, (a,b,c>0)$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$, ta có

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta, V_{r\varphi z'} = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Vậy

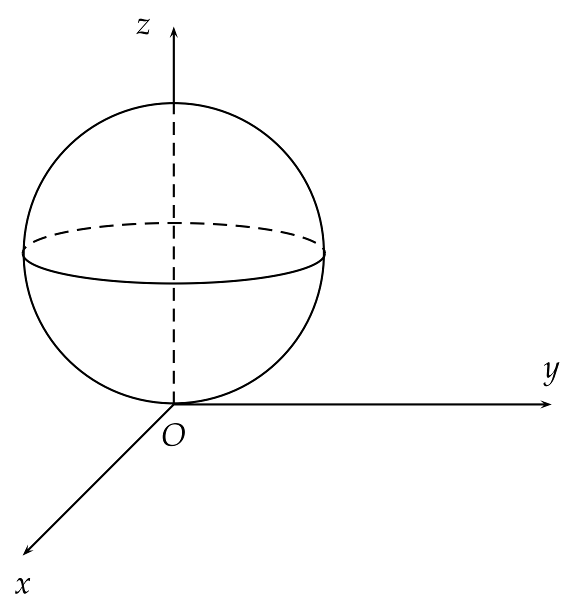
$$I = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^2.r^2\sin\theta = \frac{4\pi}{5}abc.$$

■

Tọa độ cầu vs Tọa độ cầu suy rộng

Phép đổi biến số không những có tác dụng làm đơn giản miền lấy tích phần, mà trong nhiều tình huống nó còn có tác dụng làm đơn giản hóa biểu thức tính tích phân. Trong bài tập sau đây, phép đổi biến số trong tọa độ cầu suy rộng sẽ làm cho biểu thức tính tích phân đơn giản hơn rất nhiều so với phép đổi biến trong tọa độ cầu thông thường.

Bài tập 2.39. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{z-x^2-y^2-z^2}dxdydz$ trong đó $V: \ x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.



Hình 2.39

Lời giải.

1. **Tọa độ cầu thông thường**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \cos\theta. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{r\cos\theta - r^2}.r^2\sin\theta dr$$

tích phân này không dễ tính

2. **Tọa độ cầu suy rộng**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{2} + r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq r \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

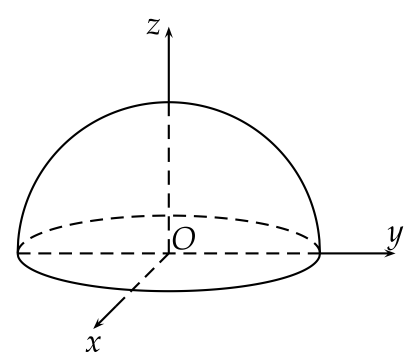
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - r^2}.r^2\sin\theta dr$$
$$= \frac{\pi^2}{64}.$$ ■

Tọa độ cầu vs Tọa độ trụ

Nói chung thì việc sử dụng tọa độ cầu hay tọa độ trụ phụ thuộc vào hai yếu tố chính: hình dáng của miền V và biểu thức tính tích phân.

- Nếu miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu và biểu thức tính tích phân có chứa $x^2 + y^2 + z^2$ thì ta thường sử dụng phép đổi biến trong tọa độ cầu (khi đó $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$).
- Nếu miền V có dạng hình trụ hoặc có chứa mặt nón, mặt paraboloid và biểu thức tính tích phân có chứa $x^2 + y^2$ thì ta thường sử dụng phép đổi biến trong tọa độ trụ (khi đó $x^2 + y^2 = r^2$).

Trong nhiều trường hợp thì chúng ta có thể sử dụng được đồng thời cả tọa độ trụ lẫn tọa độ cầu. Chẳng hạn như, tính $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, trong đó V là nửa phía trên của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.



1. **Tọa độ cầu.**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2\sin^2\theta . r^2\sin\theta dr = \frac{4\pi}{15}.$$

2. **Tọa độ trụ.**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}. \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r^2.rdz = \frac{4\pi}{15}.$$

Tuy nhiên, cũng có những tình huống mặc dù miền lấy tích phân là hình cầu nhưng việc sử dụng tọa độ trụ lại thuận tiện hơn (vì biểu thức tính tích phân có chứa x^2+y^2). Chẳng hạn như, tính $\iiint\limits_V \sqrt{1-x^2-y^2}dxdydz$, trong đó V là nửa phía trên của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$ (xem hình vẽ của ví dụ phía trên).

1. **Tọa độ cầu.**

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2\sin^2\theta}.r^2\sin\theta dr$$

(tích phân này không dễ tính).

2. **Tọa độ trụ.**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}. \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{1-r^2}.rdz = \frac{\pi}{2}.$$

2.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 2.40. *Tính*

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

trong đó V *là tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng* $x=0, y=0, z=0$ *và* $x+y+z=1$.

[Đáp số] $I = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$.

Bài tập 2.41. *Tính*

$$\iiint\limits_V zdxdydz,$$

trong đó V *là nửa trên của ellipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \le 1, (z \ge 0).$$

[Đáp số] $I = \frac{\pi abc^2}{4}$.

Bài tập 2.42. *Tính các tích phân sau*

a) $I_1 = \iiint_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$, *trong đó* B *là ellipsoid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

b) $I_2 = \iiint_C zdxdydz$, *trong đó* C *làm miền giới hạn bởi mặt nón* $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ *và mặt phẳng* $z = h$.

c) $I_3 = \iiint_D z^2dxdydz$, *trong đó* D *là phần chung của hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ *và hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$.

d) $I_4 = \iiint_V (x+y+z)^2dxdydz$, *trong đó* V *là phần chung của paraboloid* $x^2+y^2 \le 2az$ *và hình cầu* $x^2+y^2+z^2 \le 3a^2$.

Bài tập 2.43. *Tính thể tích của vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt phẳng* $0xy$, *mặt bên là các mặt phẳng* $x=0, x=a, y=0, y=b$, *phía trên bởi paraboloid elliptic*

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2y}, \ (p > 0, q > 0).$$

Bài tập 2.44. *Tính tích phân*

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

trong đó V *là miền giới hạn bởi mặt* $x^2+y^2+z^2 = z$.

[Đáp số] $I = \frac{\pi}{10}$.

Bài tập 2.45. *Tính*

$$I = \iiint\limits_V z dxdydz,$$

trong đó V *là miền giới hạn bởi các mặt* $z = x^2 + y^2$ *và* $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

[Đáp số] $I = \frac{11\pi}{3}$.

Bài tập 2.46. *Tính tích phân*

$$I = \iiint\limits_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dxdydz,$$

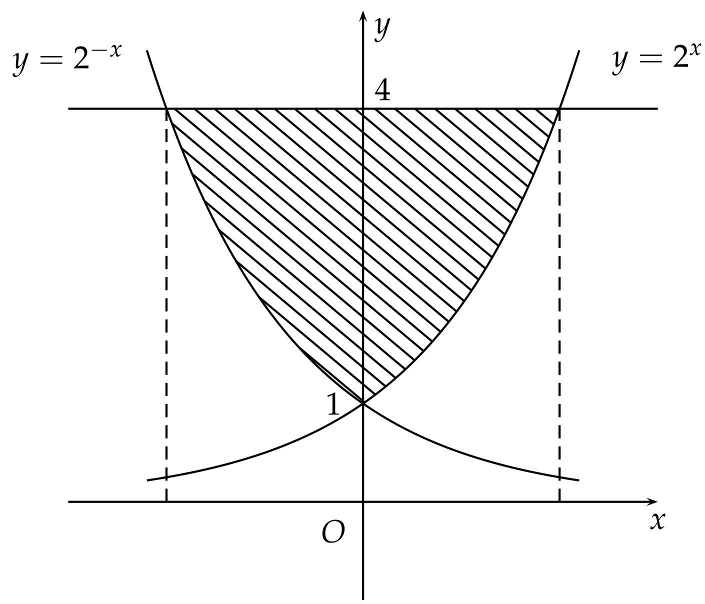
trong đó V *là vật thể giới hạn phía trên bởi mặt* $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$ *và phía dưới bởi mặt* $z = 0$.

§3. Các ứng dụng của tích phân bội

3.1 Tính diện tích hình phẳng

Công thức tổng quát: $\boxed{S = \iint\limits_D dxdy}$

Bài tập 2.47. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4. \end{cases}$



Hình 2.47

Lời giải. Nhận xét: $D = D_1 \cup D_2$, ở đó

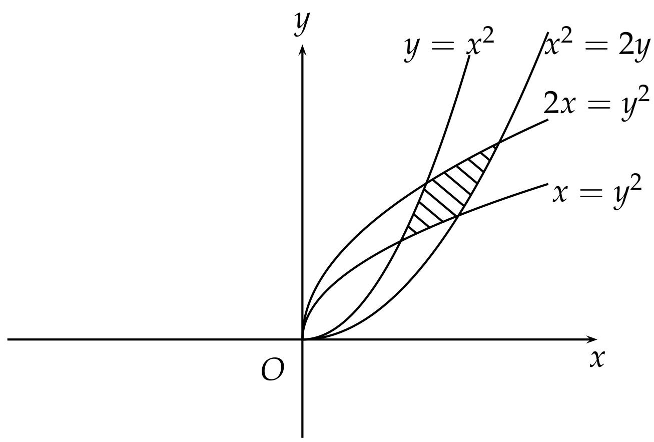
$$D_1 \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2^{-x} \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}, D_2 \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2^x \leqslant y \leqslant 4. \end{cases}$$

Do đó

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = 2\iint\limits_{D_1} dxdy = ... = 2\left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right).$$

■

Bài tập 2.48. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$



Hình 2.48

Lời giải. Ta có $S = \iint\limits_D dxdy$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases},$$

và

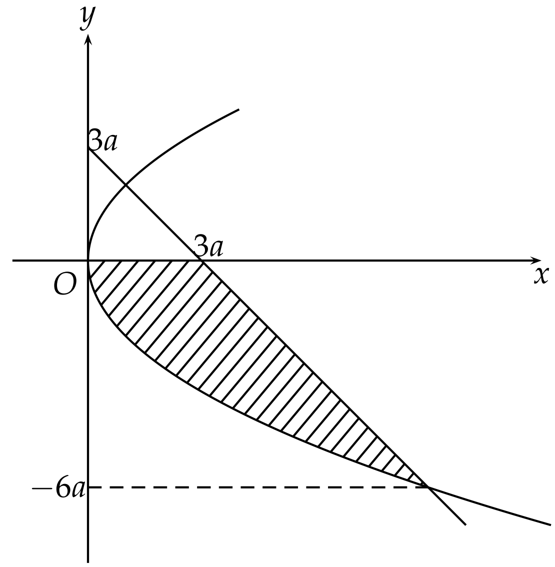
$$J^{-1} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3.$$

Vậy

$$S = \iint\limits_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}.$$

■

Bài tập 2.49. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leqslant 0 \ (a > 0). \end{cases}$



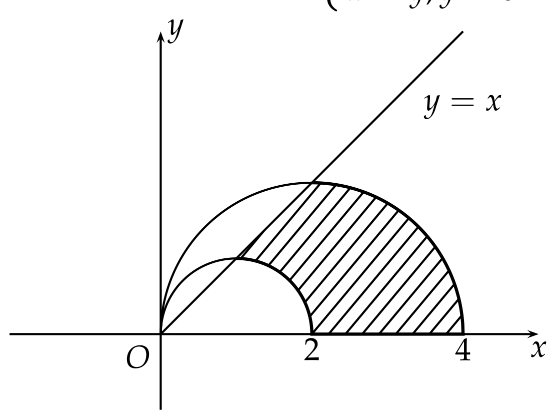
Hình 2.49

Lời giải. Nhìn hình vẽ ta thấy $D:\begin{cases}-6a\leqslant y\leqslant 0\\ \dfrac{y^2}{4a}\leqslant x\leqslant 3a-y\end{cases}$ nên

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-6a}^{0}dy\int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y}dx=\int\limits_{-6a}^{0}\left(3a-y-\frac{y^2}{4a}\right)dy=18a^2.$$

■

Bài tập 2.50. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $\begin{cases}x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x\\ x=y, y=0.\end{cases}$



Hình 2.50

Lời giải. Ta có $S=\iint\limits_D dxdy$. Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ thì $D:\begin{cases}0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ 2\cos\varphi\leqslant r\leqslant 4\cos\varphi\end{cases}$ nên

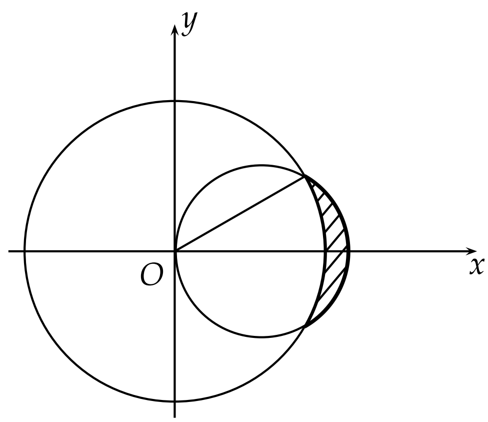
$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}rdr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}12\cos^2\varphi d\varphi=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}.$$

■

Bài tập 2.51. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường tròn $r = 1, r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.

Chú ý:

- $r = a$ là phương trình đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính a.
- $r = 2a \cos \varphi$ là phương trình đường tròn tâm $(a, 0)$, bán kính a.
- $r = 2a \sin \varphi$ là phương trình đường tròn tâm $(0, a)$, bán kính a.



Hình 2.51

Lời giải. Giao tại giao điểm của 2 đường tròn:

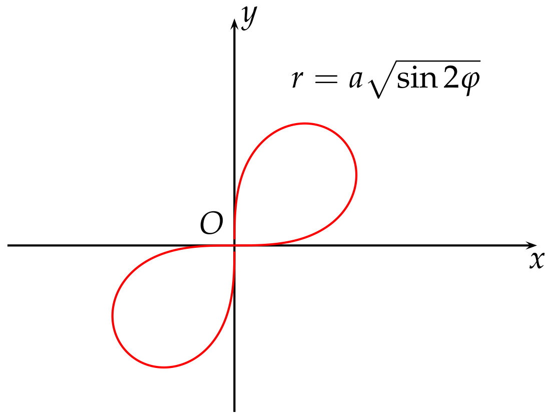
$$r = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Do đó

$$S = 2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_{1}^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi} r dr = 2.\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{4}{3} \cos^2 \varphi - 1 \right) d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}.$$

■

Bài tập 2.52. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy \ \ (a > 0)$.



Hình 2.52

Lời giải. Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.52). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

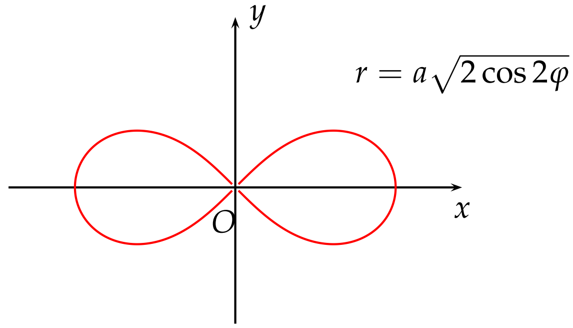
Do tính đối xứng của hình vẽ nên

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

■

Bài tập 2.53. *Tính diện tích của miền giới hạn bởi đường Lemniscate*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \ (a > 0).$$

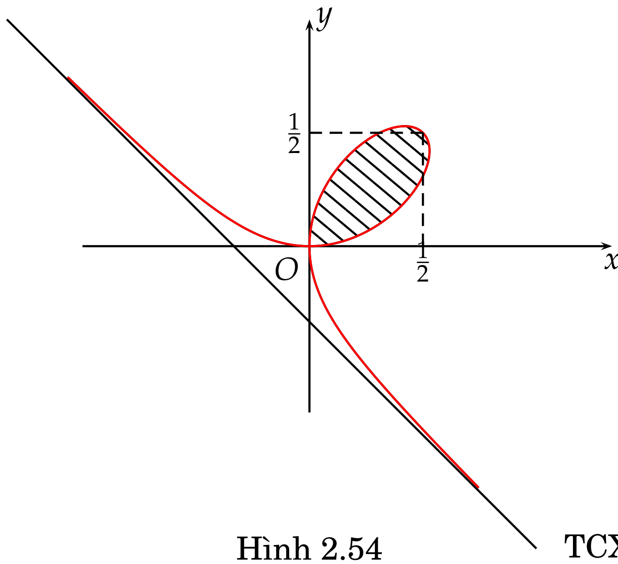


Hình 2.53

[Gợi ý] Phương trình của đường Lemniscate trong tọa độ cực là $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, và do tính đối xứng của miền nên

$$\frac{S}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = \frac{a^2}{2}.$$

Bài tập 2.54. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $x^3 + y^3 = axy \;\; (a > 0)$ (Lá Descartes).



Hình 2.54

Tham số hoá đường cong đã cho, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, phương trình đường cong tương đương với

$$r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

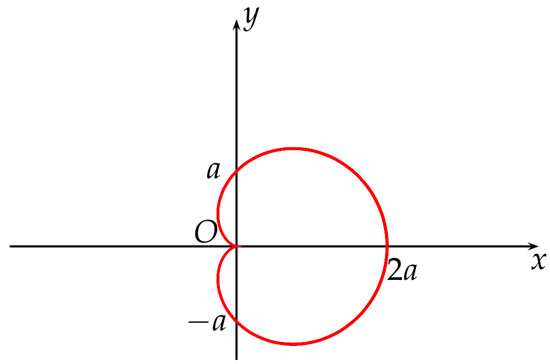
Khảo sát và vẽ đường cong đã cho trong hệ toạ độ cực (xem hình vẽ 2.54). Ta có

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}. \end{cases}$$

Do đó

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}} r dr = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right)^2} d\varphi \overset{t=\tan\varphi}{=} \frac{a^2}{2} . \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(t^3+1\right)}{\left(t^3+1\right)^2} = \frac{a^2}{6}.$$

Bài tập 2.55. Tính diện tích miền D giới hạn bởi đường $r = a\left(1 + \cos\varphi\right) \;\; (a > 0)$ (đường Cardioids hay đường hình tim)



Hình 2.55

Lời giải. Ta có

$$D = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\varphi)\}$$

nên

$$S = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr = a^2 \int\limits_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = ... = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

■

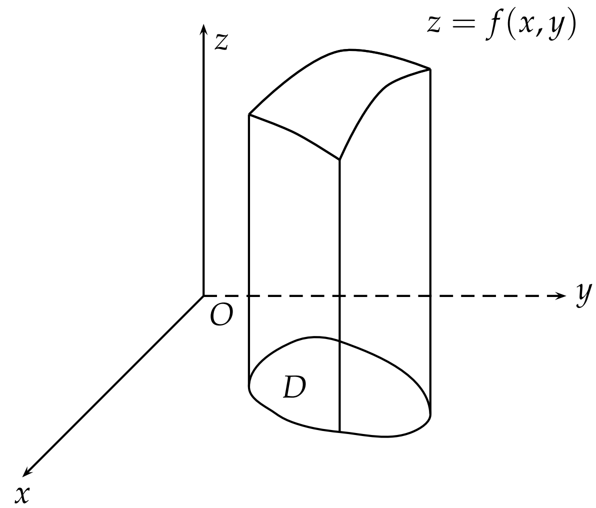
3.2 Tính thể tích vật thể

Công thức tổng quát:

$$\boxed{V = \iiint\limits_V dxdydz}$$

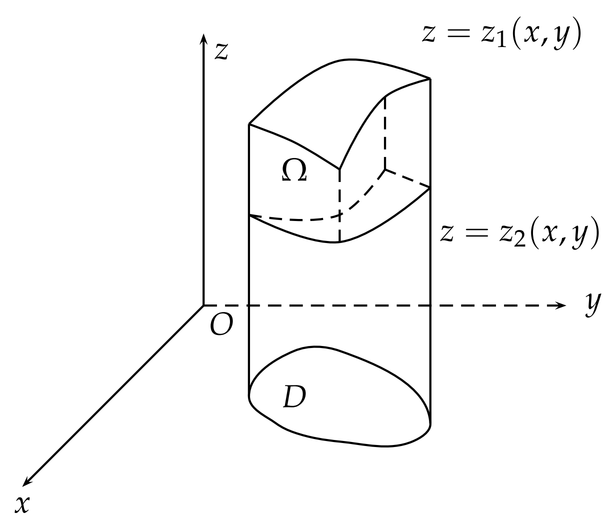
Các trường hợp đặc biệt

1. Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x,y)$, $f(x,y) \geqslant 0$ và liên tục trên D thì $V = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$. (Xem hình vẽ dưới đây).

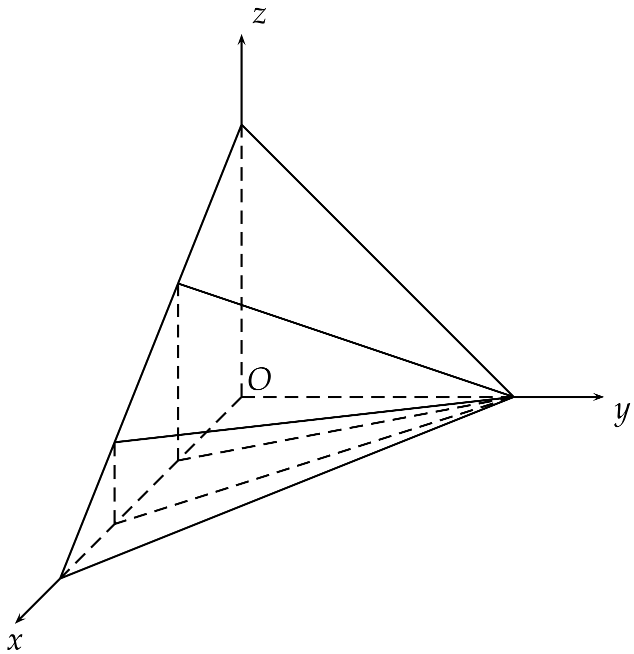


2. Vật thể là khối trụ, giới hạn bởi các đường sinh song song với trục Oz, hai mặt $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D, $z_1(x,y), z_2(x,y)$ là các hàm liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$V = \iint\limits_D |z_1(x,y) - z_2(x,y)| dxdy$$



Bài tập 2.56. Tính thể tích miền giới hạn bởi $\begin{cases} 3x + y \geqslant 1 \\ 3x + 2y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y. \end{cases}$



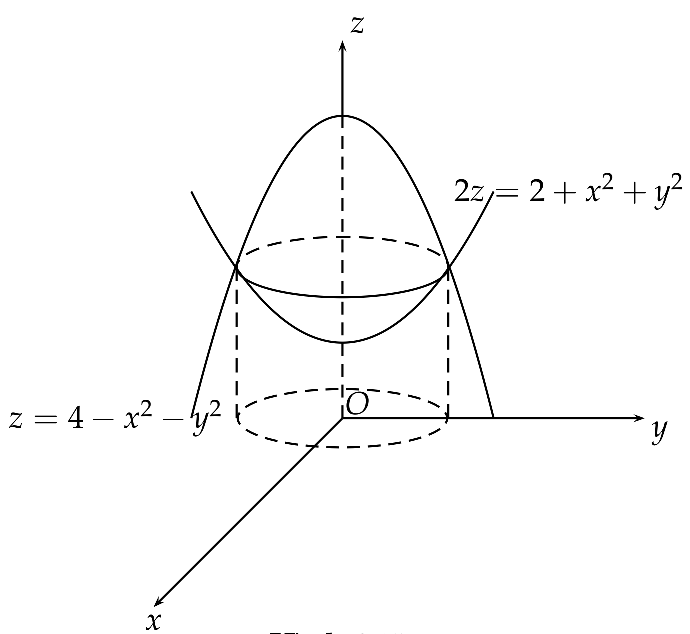
Hình 2.56

Lời giải.

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1-y}{3}}^{\frac{2-2y}{3}} (1-x-y)\,dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(1-2y+y^2\right)dy = \frac{1}{18}.$$

■

Bài tập 2.57. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2. \end{cases}$



Hình 2.57

Lời giải. Giao tuyến của hai mặt cong: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2, \end{cases}$ nên hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là $D: x^2+y^2 \leq 2$. Hơn nữa trên D thì $4-x^2-y^2 \geqslant \frac{2+x^2+y^2}{2}$ nên ta có:

$$V = \iint\limits_D \left(4-x^2-y^2-\frac{2+x^2+y^2}{2}\right) dxdy.$$

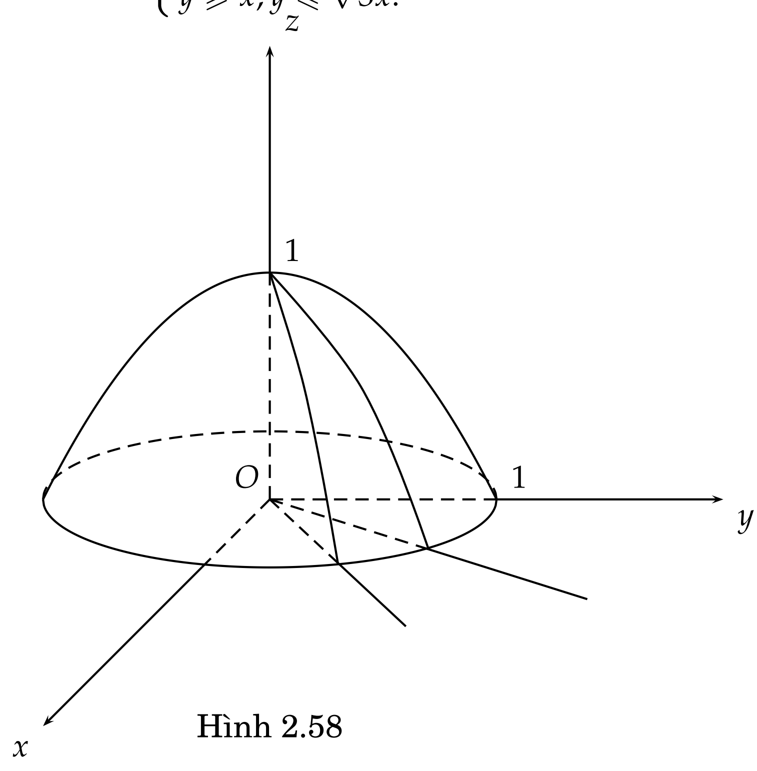
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}. \end{cases}$

Do đó

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3-\frac{3}{2}r^2\right) rdr = ... = 3\pi.$$

■

Bài tập 2.58. Tính thể tích của $V: \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2 \\ y \geqslant x, y \leqslant \sqrt{3}x. \end{cases}$



Hình 2.58

Lời giải. Do $x \leq y \leq \sqrt{3}x$ nên $x, y \geq 0$. Ta có

$$V = \iint\limits_D \left(1-x^2-y^2\right) dxdy.$$

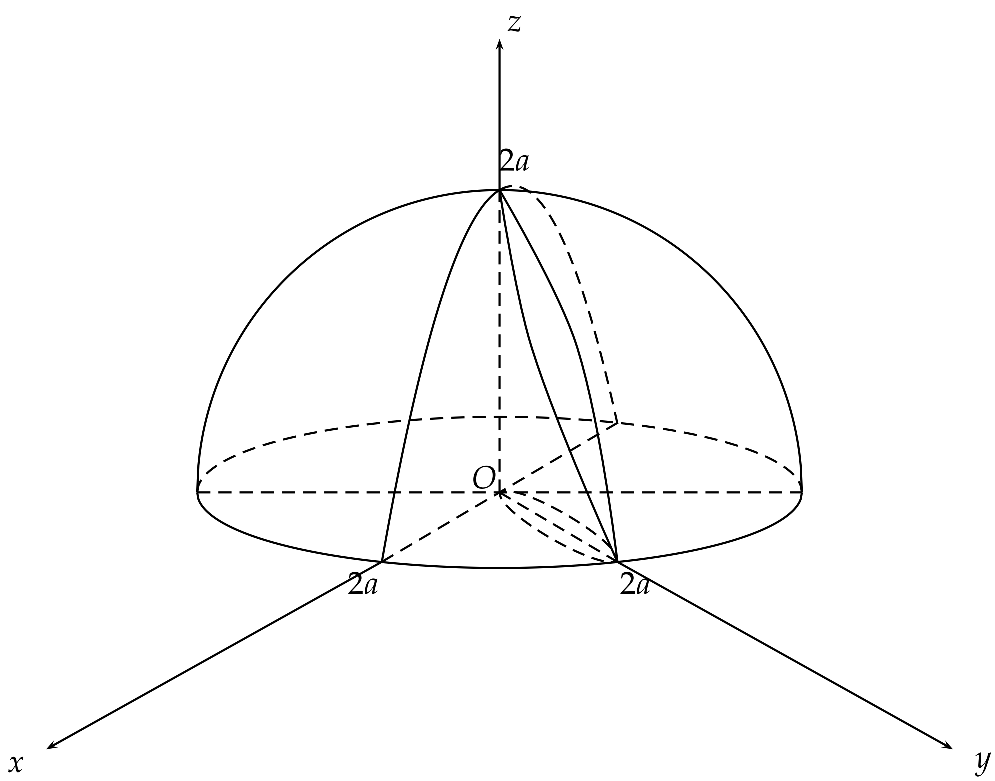
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$

Vậy

$$V = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \left(1 - r^2\right) r dr = \ldots = \frac{\pi}{48}.$$

■

Bài tập 2.59. Tính thể tích $V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0. \end{cases}$



Hình 2.59

Lời giải. Do tính chất đối xứng của miền V nên

$$V = 4 \iint\limits_{D} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dxdy,$$

trong đó D là nửa hình tròn $D : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay \leqslant 0 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

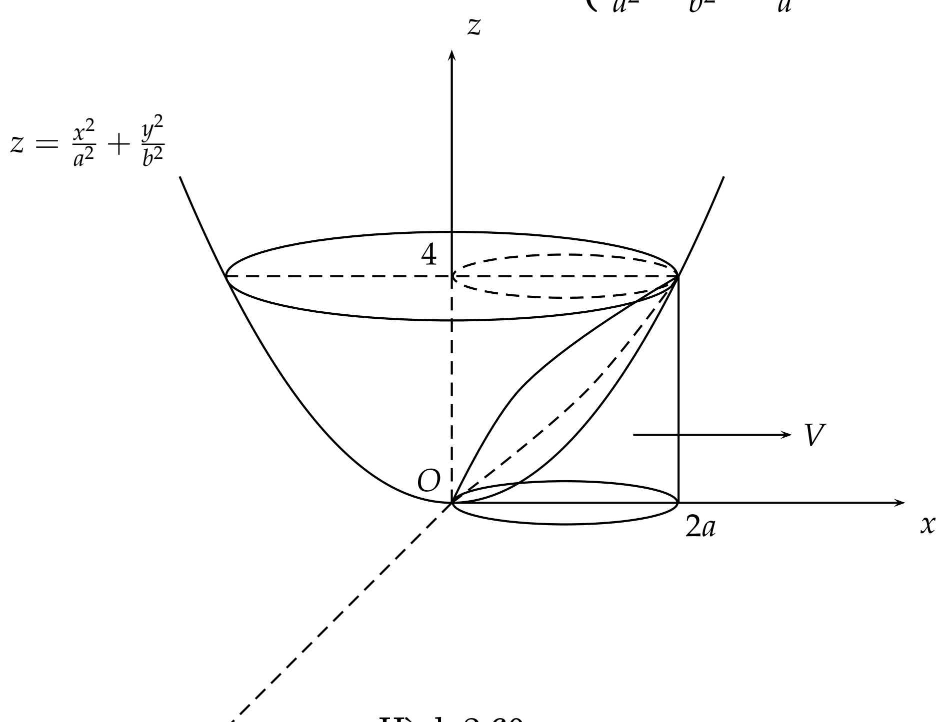
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2a\sin\varphi. \end{cases}$

Vậy

$$
\begin{aligned}
V &= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{4a^2-r^2}rdr \\
&= 4.\frac{-1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(4a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=2a\sin\varphi} d\varphi \\
&= \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8a^3-8a^3\cos^3\varphi\right)d\varphi \\
&= \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

■

Bài tập 2.60. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $\begin{cases} z=0 \\ z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{2x}{a}. \end{cases}$



Hình 2.60

Lời giải. Ta có hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là miền $D : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq \frac{2x}{a}$. Do tính chất đối xứng của miền V nên:

$$V = 2\iint\limits_{D^+}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

trong đó D^+ là nửa ellipse $D^+ : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{2x}{a}, y \geqslant 0$

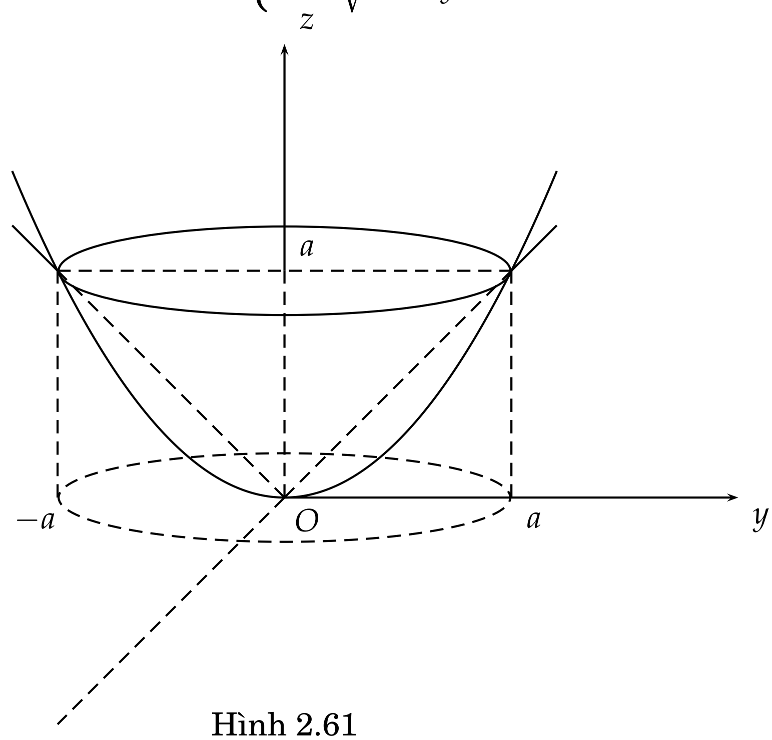
Đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ thì $|J| = abr$, $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi. \end{cases}$

Vậy

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 r dr = ... = \frac{3\pi}{2}.$$

■

Bài tập 2.61. Tính thể tích của miền $V : \begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$



Hình 2.61

Lời giải. Giao tuyến của hai đường cong:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Vậy hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là

$$D : x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Nhận xét rằng, ở trong miền D thì mặt nón ở phía trên mặt paraboloit nên:

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{a}\right) dxdy.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant a. \end{cases}$

Vậy

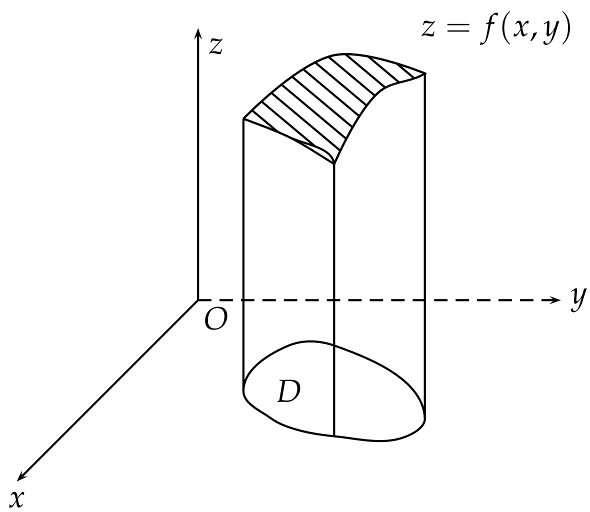
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) r dr = ... = \frac{\pi a^3}{6}.$$

■

3.3 Tính diện tích mặt cong

Mặt $z = f(x, y)$ giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. Giả thiết $f(x, y)$ là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy, p = f'_x, q = f'_y$$



3.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 2.62. *Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hình trụ elliptic* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *mặt phẳng* $z = 0$ *và paraboloid elliptic* $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$ $(c > 0)$.

Bài tập 2.63. *Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt hyperbolic* $xy = 1, xy = 9, xz = 4, xz = 36, yz = 25, yz = 49$.

[Gợi ý] Đặt $u = xy, v = xz, w = yz$. Đáp số $V = 64$.

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ.

§1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH PHỤ THUỘC THAM SỐ.

1.1 Giới thiệu

Xét tích phân xác định phụ thuộc tham số: $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, trong đó $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$ với mỗi $y \in [c,d]$. Trong bài học này chúng ta sẽ nghiên cứu một số tính chất của hàm số $I(y)$như tính liên tục, khả vi, khả tích.

1.2 Các tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số.

1) Tính liên tục.

Định lý 3.9. *Nếu $f(x,y)$là hàm số liên tục trên $[a,b] \times [c,d]$ thì $I(y)$là hàm số liên tục trên $[c,d]$. Tức là:*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx}$$

(có thể chuyển dấu lấy giới hạn vào bên trong biểu thức tính tích phân)

Ví dụ 1.1. *Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên $[0,1]$.*

Lời giải. Nhận xét rằng hàm số $g(x,y) = \frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ liên tục trên mỗi hình chữ nhật $[0,1]\times[c,d]$ và $[0,1]\times[-d,-c]$ với $0<c<d$ bất kì, nên theo Định lý 3.9, $I(y)$ liên tục trên mỗi $[c,d],[-d,-c]$, hay nói cách khác $I(y)$ liên tục với mọi $y\neq 0$.
Bây giờ ta xét tính liên tục của hàm số $I(y)$ tại điểm $y=0$. Do $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $m=\min\limits_{[0,1]} f(x)>0$. Khi đó $f(x)\geqslant m>0\ \forall x\in[0,1]$ và với $\varepsilon>0$ thì:

$$I(\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \geqslant \int_0^1 \frac{\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = m.\arctan\frac{x}{\varepsilon},$$

$$I(-\varepsilon)=\int_0^1 \frac{-\varepsilon f(x)}{x^2+\varepsilon^2}dx \leqslant \int_0^1 \frac{-\varepsilon.m}{x^2+\varepsilon^2}dx = -m.\arctan\frac{x}{\varepsilon}.$$

Suy ra $|I(\varepsilon)-I(-\varepsilon)|\geqslant 2m.\arctan\frac{x}{\varepsilon}\to 2m.\frac{\pi}{2}$ khi $\varepsilon\to 0$, tức là $|I(\varepsilon)-I(-\varepsilon)|$ không tiến tới 0 khi $\varepsilon\to 0$, $I(y)$ gián đoạn tại $y=0$. ■

Ví dụ 1.2. *Xét tính liên tục của hàm số* $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx.$

Lời giải. Tại $y=0$, $I(0)=\int\limits_0^1 -\frac{1}{x^2}dx=-\infty$, nên hàm số $I(y)$ không xác định tại $y=0$.
Tại $y\neq 0$, cũng có thể sử dụng Định lý 3.9 để khảo sát tính liên tục của $I(y)$. Khi đó phải xét hàm số $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2}$ trong khoảng $[0,1]\times[c,d]$ với $d>c>0$ bất kì (để tránh điểm $y=0$) giống như trong Ví dụ 1.1. Tuy nhiên, trong trường hợp này có thể tính được $I(y)$ một cách trực tiếp như sau:

$$I(y)=\int_0^1 \frac{(x^2+y^2)-2x.x}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_0^1 d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{1+y^2}.$$

Do đó $I(y)$ xác định và liên tục với mọi $y\neq 0$. ■

2) Tính khả vi.

Định lý 3.10. *Giả sử với mỗi $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ là hàm số liên tục theo x trên $[a,b]$ và $f'_y(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên (c,d) và* $\boxed{I'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx}$*, hay nói cách khác chúng ta có thể đưa dấu đạo hàm vào trong tích phân.*

Ví dụ 1.3. *Tính các tích phân sau:*

a) $I_n(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$, *n là số nguyên dương.*

Lời giải. $*$ Với mỗi $\alpha > 0$, hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x, n = 0, 1, 2, ...$ liên tục theo x trên $[0,1]$

$*$ Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln^{n+1} x = 0$ nên $\frac{\partial f_n(x,\alpha)}{\partial \alpha} = x^\alpha \ln^{n+1} x$ liên tục trên $[0,1] \times (0,+\infty)$. ■

Nghĩa là hàm số $f_n(x,\alpha) = x^\alpha \ln^n x$ thoả mãn các điều kiện của Định lý 3.10 nên:

$$I'_{n-1}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\alpha}\left(x^\alpha \ln^{n-1} x\right) dx = \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = I_n(\alpha).$$

Tương tự, $I'_{n-2} = I_{n-1}, ..., I'_2 = I_1, I'_1 = I_0$, suy ra $I_n(\alpha) = [I_0(\alpha)]^{(n)}$. Mà

$$I_0(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow I_n(\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha+1}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}.$$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + y\sin^2 x\right) dx$, *với* $y > 1$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x,y) = \ln\left(1 + y\sin^2 x\right)$ thoả mãn các điều kiện sau:

- $f(x,y) = \ln\left(1 + y\sin^2 x\right)$ xác định trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1,+\infty)$ và với mỗi $y > -1$ cho trước, $f(x,y)$ liên tục theo x trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Tồn tại $f'_y(x,y) = \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x}$ xác định, liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (1,+\infty)$.

Theo Định lý 3.10, $I'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+y\sin^2 x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1}{\sin^2 x}+y}$.

Đặt $t = \tan x$ thì $dx = \frac{dt}{1+t^2}, 0 \leqslant t \leqslant +\infty$.

$$I'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(1+t^2+yt^2)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{y}\left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{1+(y+1)t^2}\right] dt$$
$$= \frac{1}{y}\left[\arctan t\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{y+1}}\arctan\left(t\sqrt{y+1}\right)\Big|_0^{+\infty}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}.\frac{1}{1+\sqrt{1+y}}.$$

Suy ra

$$I(y) = \int I'(y)\,dy = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}.\frac{1}{1+\sqrt{1+y}}dy = \pi \ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) + C.$$

Do $I(0) = 0$ nên $C = -\pi \ln 2$ và $I(y) = \pi \ln\left(1+\sqrt{1+y}\right) - \pi \ln 2.$ ■

3) Tính khả tích.

Định lý 3.11. *Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c,d]$, và:*

$$\boxed{\int_c^d I(y)\,dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx}$$

Ví dụ 1.4. *Tính* $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx,\ (0 < a < b).$

Lời giải. Hàm lấy tích phân $f(x) = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$ mặc dù không xác định tại $x = 0$ nhưng $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^b-x^a}{\ln x} = 0$ nên có thể xếp tích phân này vào loại tích phân xác định.
Ta có:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x,b) - F(x,a) = \int_a^b F_y'(x,y)\,dy = \int_a^b x^y dy;\ \left(F(x,y) := \frac{x^y}{\ln x}\right)$$

nên:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

1.3 Các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi.

Xét tích phân phụ thuộc tham số với cận biến đổi

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx,\ \text{với } y \in [c,d], a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b\ \forall y \in [c,d].$$

1) Tính liên tục

Định lý 3.12. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$ *, các hàm số* $a(y), b(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$ *và thoả mãn điều kiện* $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b\ \forall y \in [c,d]$ *thì* $J(y)$ *là một hàm số liên tục đối với* y *trên* $[c,d]$.

2) Tính khả vi

Định lý 3.13. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$ *,* $f'_y(x,y)$ *liên tục trên* $[a,b]\times[c,d]$ *, và* $a(y), b(y)$ *khả vi trên* $[c,d]$ *và thoả mãn điều kiện* $a \leqslant a(y), b(y) \leqslant b\ \forall y \in [c,d]$ *thì* $J(y)$ *là một hàm số khả vi đối với y trên* $[c,d]$*, và:*

$$J'(y) = f(b(y),y)\,b'_y(y) - f(a(y),y)\,a'_y(y) + \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx.$$

Ví dụ 1.5. *Tìm* $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra được hàm số $I(y) = \int\limits_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$ liên tục tại $y=0$ dựa vào định lý 3.12, nên $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2} = I(0) = \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. ∎

1.4 Bài tập

Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$.

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int\limits_c^d F(x,y)\,dy$.

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b F(x,y)\,dx\right)dy.$$

Dạng 2. Tính tích phân bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$.

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$.

B2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại $I(y)$ bằng cách $I(y) = \int I'(y)\,dy + C$.

B3. Cho một giá trị đặc biệt của y để xác định C.

Chú ý: Phải kiểm tra điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 3.11 hoặc chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 3.10.

Bài tập 3.1. Tính $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, $(0 < a < b)$.

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = F(x,b) - F(x,a) = \int\limits_a^b F'_y(x,y)\,dy = \int\limits_a^b x^y dy \quad \left(F(x,y) := \frac{x^y}{\ln x}\right).$$

nên:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b x^y dy\right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^1 x^y dx\right) dy = \int\limits_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP

Đặt $I(b) = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$.

Ta có

$$I'(b) = \int\limits_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}.$$

nên

$$I(b) = \int I'(b)db = \ln(b+1) + C.$$

Thay giá trị đặc biệt $b = a$ vào biểu thức tính tích phân $I(b)$ ta được

$$I(a) = 0 \Leftrightarrow C = -\ln(a+1).$$

Do đó $I = \ln\frac{b+1}{a+1}$. ■

Bài tập 3.2. Tính tích phân sau:

a) $I(y) = \int\limits_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx.$ b) $J(y) = \int\limits_0^1 \ln\left(x^2 + y^2\right) dx.$

[Gợi ý]

a) B1. Kiểm tra $I(y)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý về tính khả vi.

B2. Nhận xét rằng $I'(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{1+y^2}$.

B3. $I(y) = \arctan \frac{1}{y} + \frac{1}{2} y \ln \frac{y^2}{1+y^2} + C$.

B4. Thay một giá trị đặc biệt $y = y_0$ vào để tính C. Chẳng hạn, $I(1) = \int_0^1 \arctan x dx$, và tính được $C = 0$.

b) B1. Kiểm tra $J(y)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý về tính khả vi.

B2. Tính $I'(y) = 2 \arctan \frac{1}{y}$.

B3. $I(y) = \ln(1 + y^2) - 2 + 2y \arctan \frac{1}{y}$.

B4. Thay một giá trị đặc biệt $y = y_0$ vào để tính C. Chẳng hạn, $I(0) = \int_0^1 \ln x^2 dx$, và tính được $C = 0$.

Bài tập 3.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, & 0 < x, y \leq 1, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng

$$\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y) dx \right) dy \neq \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y) dy \right) dx = -\frac{\pi}{4},$$

nghĩa là hàm số $I(y) = \int_0^1 f(x,y) dx$ khả tích trên đoạn $[0,1]$ nhưng không thể đổi thứ tự lấy tích phân được trong trường hợp này. Hãy giải thích vì sao.

Bài tập 3.4. Chứng minh hàm Bessel

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

thỏa mãn phương trình Bessel

$$x^2 I_n''(x) + x I_n(x) + (x^2 - n^2) I_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

Xét tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, y $\in [c,d]$. Các kết quả dưới đây tuy phát biểu đối với tích phân suy rộng loại II (có cận bằng vô cùng) nhưng đều có thể áp dụng một cách thích hợp cho trường hợp tích phân suy rộng loại I (có hàm dưới dấu tích phân không bị chặn).

2.1 Các tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.

Giả thiết

- $f(x,y)$ là hàm số xác định trên $[a,\infty) \times [c,d]$,
- với mỗi $y \in [c,d]$ cố định, $f(x,y)$ khả tích theo x trên $[a,b]$, $\forall b > a$.

Định nghĩa 3.8. *Ta nói TPSR phụ thuộc tham số là*

- *hội tụ tại* $y_0 \in [c,d]$ *nếu* $\int_a^\infty f(x,y_0)dx$ *hội tụ, nghĩa là với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại* $b(\epsilon, y_0) > a$ *(phụ thuộc vào* ϵ *và* y_0*) sao cho*

$$\left| I(y_0) - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx \right| = \left| \int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx \right| < \epsilon \text{ với mọi } b > b(\epsilon, y_0).$$

- *hội tụ trên* $[c,d]$ *nếu* $I(y)$ *hội tụ tại mọi* $y \in [c,d]$,
- *hội tụ đều trên* $[c,d]$ *nếu với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại* $b_\epsilon > a$ *(chỉ phụ thuộc vào* ϵ *mà không phụ thuộc vào* y*) sao cho*

$$\left| I(y) - \int\limits_a^b f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_b^\infty f(x,y)dx \right| < \epsilon \text{ với mọi } b > b_\epsilon \text{ và với mọi } y \in [c,d].$$

Ví dụ 2.6. $I(y) = \int\limits_1^\infty \sin(yx)dx$ *hội tụ khi* $y = 0$ *và phân kỳ khi* $y \neq 0$.

Ví dụ 2.7. *a) Tính* $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx \quad (y > 0)$.

b) *Chứng minh rằng* $I(y)$ *hội tụ đều tới* 1 *trên* $[y_0, +\infty)$ *với mọi* $y_0 > 0$.

c) *Giải thích tại sao* $I(y)$ *không hội tụ đều trên* $(0, +\infty)$.

[Gợi ý]

a) $I(y) = -e^{-yx}\Big|_0^{\infty} = 1$ với mọi $y > 0$.

b) Theo định nghĩa, muốn chỉ ra $I(y)$ hội tụ đều tới 1 trên $[y_0, +\infty)$ ta phải chỉ ra với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại số b_ϵ chỉ phụ thuộc vào ϵ, không phụ thuộc vào y sao cho

$$\left|I(y) - \int\limits_0^b ye^{-yx}dx\right| < \epsilon, \quad \forall b > b_\epsilon.$$

Thật vậy,

$$\left|I(y) - \int\limits_0^b ye^{-yx}dx\right| = |1 - (1 - e^{-by})| = e^{-by} \leq e^{-by_0} < \epsilon \text{ nếu } b > \frac{1}{y_0}\ln\frac{1}{\epsilon}.$$

Do đó, có thể chọn $b_\epsilon = \frac{1}{y_0}\ln\frac{1}{\epsilon}$.

c) Ta có

$$\left|I(y) - \int\limits_0^b ye^{-yx}dx\right| = |1 - (1 - e^{-by})| = e^{-by}.$$

Muốn $\left|I(y) - \int_0^b ye^{-yx}dx\right| < \epsilon$ thì $e^{-by} < \epsilon \Leftrightarrow b > \frac{1}{y}\ln\frac{1}{\epsilon}$. Tuy nhiên, $\frac{1}{y}\ln\frac{1}{\epsilon} \to +\infty$ khi $y \to 0^+$. Do đó, không thể chọn được hằng số b_ϵ chỉ phụ thuộc vào ϵ thỏa mãn yêu cầu của hội tụ đều.

Ví dụ 2.8. *Chứng minh rằng* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yx = \frac{a}{y^2+a^2}$ *với* $a > 0$ *và với mọi* y.

[Gợi ý]

$$\int e^{-ax}\cos yx dx = -\frac{a}{a^2+y^2}e^{-ax}\cos yx + \frac{y}{a^2+y^2}e^{-ax}\sin yx,$$

nên $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yx dx = \frac{a}{a^2+y^2}$.

1) Tiêu chuẩn hội tụ đều Weierstrass

Định lý 3.14. *Nếu* $|f(x,y)| \leqslant g(x)\, \forall (x,y) \in [a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *hội tụ, thì tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$.

Ví dụ 2.9. *Chứng minh rằng*

a) $I(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2+1}$ *là hội tụ đều trên* $\mathbb{R}$.

b) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx \quad (y>0)$ *hội tụ đều trên* $[y_0,+\infty)$ *với mọi* $y_0 > 0$.

c) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\cos\alpha x$ *hội tụ đều trên khoảng* $[a,b]$ *với mọi* $0 < a < b$ *và* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Tính liên tục

Định lý 3.15. *Nếu hàm số* $f(x,y)$ *liên tục trên* $[a,+\infty] \times [c,d]$ *và nếu tích phân suy rộng* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *hội tụ đều đối với* $y \in [c,d]$ *thì* $I(y)$ *là một hàm số liên tục trên* $[c,d]$*, nghĩa là*

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = I(y_0).$$

Ví dụ 2.10. *Tính* $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2+1}$.

Ví dụ 2.11. *Chứng minh rằng* $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$ *không liên tục phải tại* $y = 0$, *nghĩa là*

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\int\limits_0^{+\infty} ye^{-yx}dx\right) \neq \int\limits_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to 0^+} ye^{-yx}\right)dx.$$

Hãy giải thích tại sao không chuyển được dấu giới hạn vào trong biểu thức tính tích phân trong trường hợp này.

3) Tính khả vi

Định lý 3.16. *Giả sử hàm số $f(x,y)$ xác định trên $[a,+\infty]\times[c,d]$ sao cho với mỗi $y\in[c,d]$, hàm số $f(x,y)$ liên tục đối với x trên $[a,+\infty]$ và $f'_y(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty]\times[c,d]$. Nếu tích phân suy rộng $I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ và $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều đối với $y\in[c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả vi trên $[c,d]$ và $I'(y)=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$.*

Ví dụ 2.12. *Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số $I(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}dx$ là một hàm số liên tục khả vi đối với biến y. Tính $I'(y)$ rồi suy ra biểu thức của $I(y)$.*

Lời giải. Ta có:

1) $f(x,y)=\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]\times[-\infty,+\infty]$.

2) $\left|\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}.\frac{1}{1+x^2}$, mà $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}=\pi$ hội tụ, nên $I(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$.

Theo Định lý 3.15, $I(y)$ liên tục trên $[-\infty,+\infty]$.

Hơn nữa $\left|f'_y(x,y)\right|=\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}\leqslant\frac{1}{1+x^2}$, ∀y; do đó $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều trên $[-\infty,+\infty]$. Theo Định lý 3.16, $I(y)$ khả vi trên $[-\infty,+\infty]$, và: $I'(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}dx$.

Đặt $\frac{1}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]}=\frac{\mathrm{A}x+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{1+(x+y)^2}$, dùng phương pháp đồng nhất hệ số ta thu được:$A=\frac{-2}{y(y^2+4)},B=\frac{2}{y(y^2+4)},C=\frac{1}{y^2+4},D=\frac{3}{y^2+4}$. Do đó:

$$\begin{aligned}
I'(y)&=\frac{1}{y^2+4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-2x+y}{1+x^2}+\frac{2x+3y}{1+(x+y)^2}\right]\\
&=\frac{1}{y^2+4}\left[-\ln\left(1+x^2\right)+y\arctan x+\ln\left(1+(x+y)^2\right)+y\arctan(x+y)\right]\Big|_{x=-\infty}^{+\infty}\\
&=\frac{4\pi}{y^2+4}
\end{aligned}$$

Suy ra $I(y)=\int I'(y)\,dy=2\arctan\frac{y}{2}+C$, mặt khác $I(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=0$ nên $C=0$ và $I(y)=2\arctan\frac{y}{2}$. ■

Ví dụ 2.13. *Tính* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$

Lời giải. Đặt $I_n(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}, f_n(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^{n+1}}$. Khi đó:

$$[I_{n-1}(y)]'_y = \left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^n}\right]'_y = -n\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}} = -n.I_n(y) \Rightarrow I_n = -\frac{1}{n}(I_{n-1})'.$$

Tương tự, $I_{n-1} = -\frac{1}{n-1}(I_{n-2})', I_{n-2} = -\frac{1}{n-2}(I_{n-3})', ..., I_1 = -(I_0)'$.

Do đó, $I_n(y) = \frac{(-1)^n}{n!}[I_0(y)]^{(n)}$. Mà $I_0(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+y}dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$ nên $I_n(y) = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{\sqrt{y^{2n+1}}}$.

Vấn đề còn lại là việc kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.

1) Các hàm số $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y}, f'_y(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}, ..., f^{(n)}_{y^n}(x,y) = \frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}$ liên tục trong $[0,+\infty) \times [\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước.

2) $\frac{1}{x^2+y} \leqslant \frac{1}{x^2+\varepsilon}, \left|\frac{-1}{(x^2+y)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^2}, ..., \left|\frac{(-1)^n}{(x^2+y)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}$

   Mà các tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\varepsilon}dx, ..., \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}dx$ đều hội tụ, do đó $\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx, \int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx, ..., \int\limits_0^{+\infty} f^{(n)}_{y^n}(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên $[\varepsilon,+\infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$. ■

4) Tính khả tích

Định lý 3.17. *Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $[a,+\infty] \times [c,d]$ và nếu tích phân suy rộng $I(y)$ hội tụ đều đối với $y \in [c,d]$ thì $I(y)$ là hàm số khả tích trên $[c,d]$ và ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân theo công thức:*

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy := \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Ví dụ 2.14. *Tính* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx, \ (\alpha,\beta > 0)$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\overset{\left(F(x,y):=\frac{e^{-yx}}{x}\right)}{=}F(x,\alpha)-F(x,\beta)=\int_{\beta}^{\alpha}F'_y(x,y)=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-yx}dy$$

nên:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_{\alpha}^{\beta}e^{-yx}dy\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx\right)dy=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dy}{y}=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

Ví dụ 2.15 (Tích phân Gauss).

$$G=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Đặt $x=ut$ ta có

$$G=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
G^2&=G\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\\
&=\int_0^{+\infty}\left(ue^{-u^2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt\right)du\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}ue^{-(1+t^2)u^2}du\right)dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\\
&=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$G=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

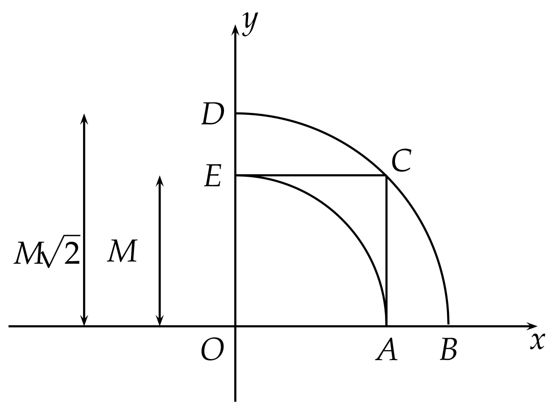
Ví dụ 2.16. *Chứng minh công thức tích phân Gauss*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

bằng tích phân kép.

Lời giải. Đặt $I_M = \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-y^2} dy$ ta có

$$I_M^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2} dy\right) = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$



Hình 2.16

Vì $e^{-(x^2+y^2)}dxdy \geq 0$ nên

$$\int\limits_{OAE} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq I_M^2 = \int\limits_{OACE} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \int\limits_{OBD} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Sử dụng tọa độ cực ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^M e^{-r^2} rdr \leq I_M^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} e^{-r^2} rdr$$

hay là

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-M^2}) \leq I_M^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2M^2})$$

Cho $M \to +\infty$ ta được

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ ■

Ví dụ 2.17 (Tích phân Dirichlet).

$$D = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nhận xét

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt,$$

ta có

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\infty \sin x \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt} \sin x dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

Chú ý: Bạn đọc có thể so sánh với một kết quả trong Giải tích III, đó là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Ví dụ 2.18. *Áp dụng công thức tích phân Dirichlet, chứng minh rằng*

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. *b)* $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ *c)* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

[Gợi ý]

a) Áp dụng công thức hạ bậc $\sin^3 x = \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.

b) Áp dụng công thức tích phân từng phần,

$$\int_\epsilon^M \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\cos x)\Big|_\epsilon^M + \int_\epsilon^M \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} - \frac{1-\cos M}{M} + \int_\epsilon^M \frac{\sin x}{x} dx.$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ và $M \to +\infty$ ta được

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1-\cos\epsilon}{\epsilon} = 0, \quad \lim_{M \to +\infty} \frac{1-\cos M}{M} = 0$$

Do đó,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Hơn nữa,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

Ví dụ 2.19 (Tích phân Fresnel).

$$I = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad J = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Đổi biến $x^2 = t$ ta có

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Từ công thức tích phân Gauss $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin t \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \sin t dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} . \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Kết luận

$$I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân.

2.2 Bài tập

Dạng 1. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx.$

B1. Biểu diễn $f(x,y) = \int\limits_c^d F(x,y)\,dy.$

B2. Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d F(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^{+\infty} F(x,y)\,dx\right)dy.$$

Dạng 2. Tính tích phân suy rộng phụ thuộc tham số bằng cách đạo hàm qua dấu tích phân.

Giả sử cần tính $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx.$

B1. Tính $I'(y)$ bằng cách $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$

B2. Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục $I(y)$ bằng cách $I(y) = \int I'(y)\,dy + C.$

B3. Cho một giá trị đặc biệt của y để xác định C.

Chú ý: Phải kiểm tra các điều kiện đổi thứ tự lấy tích phân trong Định lý 3.17 hoặc chuyển dấu đạo hàm qua tích phân trong Định lý 3.16.

Bài tập 3.5. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx, \ (\alpha, \beta > 0)$.

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

Ta có:

$$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \quad \left(F(x,y) := \frac{e^{-yx}}{x}\right)$$
$$= F(x,\alpha) - F(x,\beta)$$
$$= \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y) = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx}dy.$$

nên

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-yx}dy\right)dx$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}dx\right)dy$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP

Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$.

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}dx$$
$$= -\frac{1}{\alpha}.$$

Do đó

$$I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha$$
$$= -\ln\alpha + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \ln\beta$.

Kết luận

$$I = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.
Với $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$ ta có:

1) $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha, \beta > 0$.

2) $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x}$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}$ hội tụ đều đối với α trên mỗi khoảng $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $|-e^{-\alpha x}| \leqslant e^{-\varepsilon x}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}dx = \frac{1}{\varepsilon}$ hội tụ.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

Bài tập 3.6. Tính $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP.**

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} \qquad \left(F(x,y) := \frac{e^{-yx^2}}{x^2}\right)$$

$$= F(x,\alpha) - F(x,\beta)$$

$$= \int\limits_\beta^\alpha F'_y(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta e^{-yx^2}dy.$$

nên:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_\alpha^\beta e^{-x^2y}dy\right)dx$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx\right)dy$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}dy = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP.

Đặt $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx.$

Ta có

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2}dx$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha$$

$$= -\sqrt{\pi}.\sqrt{\alpha} + C.$$

Mặt khác, $I(\beta) = 0$ nên $C = \sqrt{\pi}.\sqrt{\beta}$. Kết luận

$$I(\alpha) = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right).$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.
Với $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}$ ta có:

1) $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $\alpha, \beta > 0$.

2) $f'_\alpha(x,\alpha) = -e^{-\alpha x^2}$ liên tục trên $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -e^{-\alpha x^2}dx \overset{x\sqrt{\alpha}=y}{=} -\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ hội tụ đều theo α trên $[\varepsilon,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy, $\left|-e^{-\alpha x^2}\right| \leqslant e^{-\varepsilon x^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2}dx$ hội tụ.

Trong chứng minh trên ta đã sử dụng công thức $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

Bài tập 3.7. Tính $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}$, $(a > 0)$.

Lời giải. **Cách 1: Đổi TT lấy TP**

Ta có:

$$e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}$$
$$= F(x,b) - F(x,c) \quad \left(F(x,y) = \frac{e^{-ax}\sin yx}{x}\right)$$
$$= \int\limits_c^b F_y'(x,y)dy = \int\limits_c^b e^{-ax}\cos yx dx.$$

nên

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_c^b e^{-ax}\cos yx dy\right)dx$$
$$= \int\limits_c^b\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yx dx\right)dy$$
$$= \int\limits_c^b \frac{a}{a^2+y^2}dy$$
$$= \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{c}{a}.$$

Cách 2: Đạo hàm qua dấu TP

Đặt $I(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}dx$. Ta có

$$I_b'(x,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

nên

$$I = \int \frac{a}{a^2+b^2}db = \arctan\frac{b}{a} + C.$$

Mặt khác $I(c) = 0$ nên $C = -\arctan\frac{c}{a}$.
Kết luận

$$I = \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{c}{a}.$$

Kiểm tra điều kiện chuyển đạo hàm qua dấu tích phân.
Với $f(x,b) = e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}$ ta có

1. $f(x,b) = e^{-ax}\frac{\sin bx - \sin cx}{x}$ liên tục theo x trên $[0,+\infty)$ với mỗi $a,b,c > 0$.

2. $f_b'(x,b) = e^{-ax}\cos bx$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

3.
$$\int\limits_0^{+\infty} f_b'(x,b)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx = \left(-\frac{a}{a^2+b^2}e^{-ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{-ax}\sin bx\right)\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$

hội tụ đều theo b trên mỗi $(0,+\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,

$|e^{-ax}\cos bx| \leqslant e^{-ax^2}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ hội tụ.

Trong chứng minh trên ta đã sử dụng công thức

$$\int e^{-ax}\cos yxdx = -\frac{a}{a^2+y^2}e^{-ax}\cos yx + \frac{y}{a^2+y^2}e^{-ax}\sin yx,$$

nên $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos yxdx = \frac{a}{a^2+y^2}$,

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện về đổi thứ tự lấy tích phân. ■

Bài tập 3.8. Một cách tương tự như Bài tập 3.7, tính

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\cos bx - \cos cx}{x},\ \ (a>0)\,.$$

[Đáp số] $I = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$.

Hệ quả 3.1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} = \ln\frac{c}{b}.$$

Bài tập 3.9. *Tính* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx.$

Lời giải. Đặt $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)\,dx, f(x,y) = e^{-x^2}\cos(yx)$. Ta có:

1) $f(x,y)$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.

2) $f'_y(x,y) = -xe^{-x^2}\sin yx$ liên tục trên $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.

2)

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin yxdx = \frac{1}{2}e^{-x^2}\sin yx\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} ye^{-x^2}\cos yxdx$$
$$= \frac{-y}{2}I(y)$$

hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass, thật vậy,

$$\left|f'_y(x,y)\right| \leqslant xe^{-x^2},\ \text{mà}\ \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\ \text{hội tụ.}$$

Do đó theo Định lý 3.16, $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2} \Rightarrow I = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$.

Mà $I(0) = C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nên $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}$. ■

2.3 Một số tích phân quan trọng

Tích phân Dirichlet

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Tích phân Gauss

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Tích phân Fresnel

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 3.10. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx, (a > 0)$

b) $\int_0^\pi \ln(1 + y\cos x) dx$,

c) $\int_0^\infty e^{-x^2} \sin ax dx$,

d) $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx, y \geq 0$,

e) $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx \ (a > 0)$,

f) $\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} \cos bx dx, n \in \mathbb{N}$.

g) $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$,

h) $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx$.

[Gợi ý]

a) Đặt $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân. Chú ý rằng $I(0) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos bx}{x^2} dx = b \int_0^\infty \frac{1 - \cos bx}{(bx)^2} dbx = \frac{b\pi}{2}$.

b) Đặt $I(y) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 + y\cos x)dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

c) Đặt $I(a) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sin ax dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

d) Sử dụng công thức tích phân Dirichlet.

e) Đặt $I(b) = \int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân.

f) Đặt $I_n(b) = \int\limits_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos bx dx$ và sử dụng công thức đạo hàm qua dấu tích phân để ra công thức truy hồi.

g) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và tích phân Dirichlet.

h) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và Hệ quả 3.1.

Bài tập 3.11. Chứng minh rằng

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-y}), \quad y \geq 0.$

b) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos yx}{x^2} = \frac{\pi}{2}|y|.$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin yx}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ay}, \quad a, y \geq 0.$

d) $\int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0.$

Bài tập 3.12. Sử dụng công thức

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a},$$

tính

$$I_n = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Bài tập 3.13. Chứng minh rằng

a) $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x}$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

b) $I(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$

Bài tập 3.14. Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a}{x^2}} - e^{-\frac{b}{x^2}}\right) dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}, \quad (a, b > 0).$$

Bài tập 3.15. Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{a} - \arctan \frac{x}{b}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}, \quad (a, b > 0).$$

Bài tập 3.16. a) Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} = \pi \ln(1+\alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

b) Sử dụng câu a), chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta) d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Bài tập 3.17. Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

Bài tập 3.18. Sử dụng tích phân Fresnel chứng minh rằng

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin(x^2+y^2) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Bài tập 3.19. Chứng minh rằng

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{x}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Áp dụng, tính $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+x^{-2})} dx$.

Bài tập 3.20. Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx^2}$ không liên tục tại $y = 0$, nghĩa là

$$\lim_{y\to 0} \int_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx^2} \neq \int_0^{+\infty} \lim_{y\to 0} y^2 x e^{-yx^2}.$$

Hãy giải thích tại sao?

Bài tập 3.21. Chứng minh rằng $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx}$ không liên tục tại $y = 0$, nghĩa là

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_0^{+\infty} y^2 x e^{-yx} \neq \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to 0} y^2 x e^{-yx}.$$

Hãy giải thích tại sao?

§3. TÍCH PHÂN EULER

3.1 Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ xác định trên $(0, +\infty)$.

Thật vậy,

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2.$$

- Với tích phân I_2 ta so sánh với $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Ta có

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+p}}{e^x} = 0,$$

  mà $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên I_2 hội tụ. Thậm chí, tích phân I_2 hội tụ với mọi $p \in \mathbb{R}$.

- Với tích phân I_1 thì nếu $p \geq 1$ ta có I_1 thực chất là tích phân xác định. Còn nếu $0 < p < 1$ thì ta so sánh I_1 với $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$. Ta có

  $$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{p-1}e^{-x} : \frac{1}{x^{1-p}}\right) = 1,$$

  mà $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ hội tụ nên I_1 cũng hội tụ. Nếu $p < 0$ thì $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ phân kì nên I_1 sẽ phân kì.

Các tính chất

1. Hạ bậc: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Công thức này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng tích phân từng phần. Thật vậy,

   $$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x} = p\Gamma(p).$$

   Ý nghĩa: Để nghiên cứu $\Gamma(p)$ ta chỉ cần nghiên cứu $\Gamma(p)$ với $0 < p \leqslant 1$ mà thôi, còn với $p > 1$ chúng ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc.

2. Đặc biệt,

   - $\Gamma(1) = 1$ (tính trực tiếp) nên $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Từ công thức tích phân Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ suy ra $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$.
  Do đó, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

3. Đạo hàm của hàm Gamma: $\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\left(\ln^k x\right).e^{-x}dx$.

4. $\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ $\forall 0 < p < 1$.

3.2 Hàm Beta

Dạng 1: $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Bằng cách đổi biến số $x = \frac{t}{t+1}$ ta sẽ thu được:

Dạng 2: $\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$.

Ví dụ 3.20. *Biểu thị* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx$ *qua hàm* $\mathrm{B}(m,n)$.

Lời giải. Đặt $\sin x = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1, \cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}.\cos x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\frac{m}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$
■

Từ ví dụ này ta suy ra:

Dạng lượng giác: $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t\cos^{2q-1} t dt$.

Các tính chất:

1. Tính đối xứng: $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$.

2. Hạ bậc:
$$\begin{cases} \mathrm{B}(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q), & \text{nếu } p>1 \\ \mathrm{B}(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1), & \text{nếu } q>1 \end{cases}$$

Ý nghĩa của công thức trên ở chỗ muốn nghiên cứu hàm bêta ta chỉ cần nghiên cứu nó trong khoảng $(0,1] \times (0,1]$ mà thôi.

3. Đặc biệt, $\mathrm{B}(1,1) = 1$ nên

$$\begin{cases} \mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ \forall m,n \in \mathbb{N} \\ \mathrm{B}(p,n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)p} B(p,1) \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4. Công thức liên hệ giữa hàm Bêta và Gamma: $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Chứng minh.

Ta có

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} s^{q-1}e^{-s}ds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{p-1}s^{q-1}e^{-(t+s)}dtds.$$

Áp dụng công thức đổi biến $t = xy$ và $s = x(1-y)$ ta được

$$\begin{cases} 0 \le t < +\infty, \\ 0 \le s < +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x < +\infty, \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}, J = \frac{D(t,s)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}y^{p-1}x^{q-1}(1-y)^{q-1}xdxdy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p+q-1}dx \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy \\ &= \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q). \end{aligned}$$

5. $\mathrm{B}(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Ví dụ 3.21. *Chứng minh công thức liên hệ giữa hàm Bêta và Gamma* $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *bằng tích phân kép.*

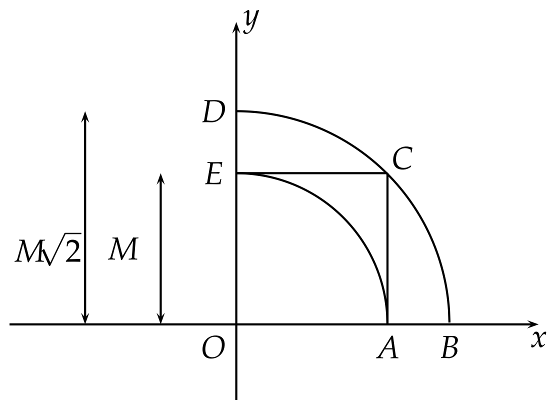
Lời giải. Xuất phát từ công thức $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ thực hiện phép đổi biến $x = t^2$ ta được

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2p-1}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2p-1}dx.$$

Do đó,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

Đặt $I_M = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy$. Ta có $\lim\limits_{M\to+\infty]} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4}$.



Hình 2.16

Ta có

$$\int\limits_{OAE} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy \le I_M \le \int\limits_{OBD} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy.$$

Thực hiện phép đổi biến số trong tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} d\varphi \int\limits_0^M r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \\ &\le I_M \le \\ &\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} d\varphi \int\limits_0^{M\sqrt{2}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ta có

$$\lim_{M\to+\infty} \int\limits_0^M r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int\limits_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr = \frac{\Gamma(p+q)}{2}$$

và

$$\lim_{M\to+\infty} \int\limits_0^{M\sqrt{2}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \int\limits_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr = \frac{\Gamma(p+q)}{2}.$$

Ngoài ra,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} d\varphi = \frac{1}{2} B(p,q).$$

Cho $M \to +\infty$ trong bất đẳng thức (3.2) ta được

$$\frac{1}{2}B(p,q)\frac{1}{2}\Gamma(p+q) \le \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4} \le \frac{1}{2}B(p,q)\frac{1}{2}\Gamma(p+q).$$

Do đó,

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

3.3 Bài tập

Bài tập 3.22.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx.$

Lời giải. Ta có

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi}.\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{512}$$

b) $\int\limits_0^{a} x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}dx \ \ (a>0).$

Lời giải. Đặt $x = a\sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^1 a^{2n}t^n.a\,(1-t)^{\frac{1}{2}}.\frac{adt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^{2n+2}}{2}.\int\limits_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{a^{2n+2}}{2}\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^{2n+2}}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} = \frac{a^{2n+2}}{2}.\frac{\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(n+1)!} = \pi\frac{a^{2n+2}}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

■

c) $\int\limits_0^{+\infty} x^{10}e^{-x^2}dx.$

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} t^5e^{-t}.\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{9}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^5} = \frac{9!!\sqrt{\pi}}{2^6}.$$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx.$

Lời giải. Đặt $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}.\frac{dt}{2\sqrt{t}}}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{B}(p,q) \text{ với } \begin{cases} p-1=-\frac{1}{4} \\ p+q=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\frac{3}{4} \\ q=\frac{5}{4} \end{cases}$$ ■

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-1}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$

Lời giải. Đặt $x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}dt}{1+t} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)}dx, \ (2 < n \in \mathbb{N}).$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{n}}.\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{n}}}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}+1, 1-\frac{2}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}.\frac{\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n}+1\right)+\left(1-\frac{2}{n}\right)-1}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}, 1-\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$ ■

g) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx, \ n \in \mathbb{N}^*.$

Lời giải. Đặt $x^n = t \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}.(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

Bài tập 3.23. *Chứng minh công thức Jacobi*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

[Gợi ý] Viết

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty e^{-y} y^{p-1} dy, \Gamma(q) = \int\limits_0^\infty e^{-x} y^{q-1} dx.$$

Nên

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-x-y} x^{q-1} y^{p-1} dx dy.$$

Thực hiện phép đổi biến số $x = u(v-1), y = uv$ để suy ra

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q).$$

CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên một cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ, gọi tên và độ dài của chúng lần lượt là $\Delta s_1, \Delta s_2, ...\Delta s_n$. Trên mỗi cung Δs_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta s_i \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại một của hàm số $f(x,y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds$.

Chú ý:

- Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào hướng của cung $\overset{\frown}{AB}$.
- Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng tại $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$ thì khối lượng của nó là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x,y)\,ds$. nếu tích phân đó tồn tại.
- Chiều dài của cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính theo công thức $l = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$.
- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định.

1.2 Các công thức tính tích phân đường loại I

1. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{1}$$

2. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy. \tag{2}$$

3. Nếu $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$, thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \tag{3}$$

4. Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta được $ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$ và

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi \tag{4}$$

1.3 Bài tập

Bài tập 4.1. *Tính* $\int\limits_C (x-y)\,ds, C$ *là đường tròn có phương trình* $x^2 + y^2 = 2x$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}dt = 2\pi$$

■

Bài tập 4.2. *Tính* $\int\limits_C y^2 ds, C$ *là đường cong* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

$$\begin{cases} x'(t) = a(1-\cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}.$$

Bài tập 4.3. *Tính* $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds, C$ *là đường* $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0.$

Lời giải.

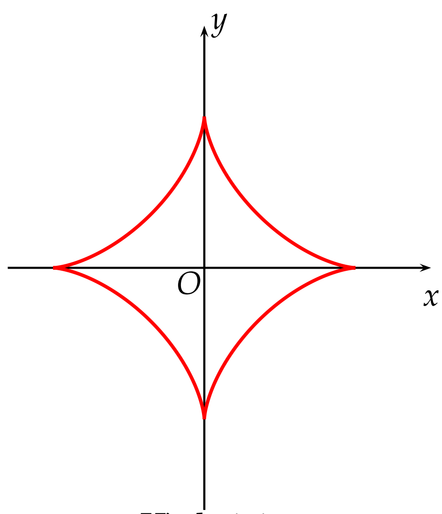
$$\begin{cases} x'(t) = at\cos t \\ y'(t) = at\sin t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = at$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}.atdt = \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi^2)^3}-1\right)$$

Bài tập 4.4. *Tính tích phân đường*

$$I = \int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds,$$

trong đó L *là đường Astroid* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$.



Hình 4.4

[Gợi ý] Tham số hóa đường cong $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \ (0 \le t \le 2\pi, a > 0) \end{cases}$ và dựa vào tính đối xứng của đường cong và hàm dưới dấu tích phân để tính I. Đáp số: $I = 4a^{\frac{7}{3}}$.

Bài tập 4.5. *Tính*

$$I = \int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

trong đó γ là đường xoắn ốc cho bởi phương trình tham số

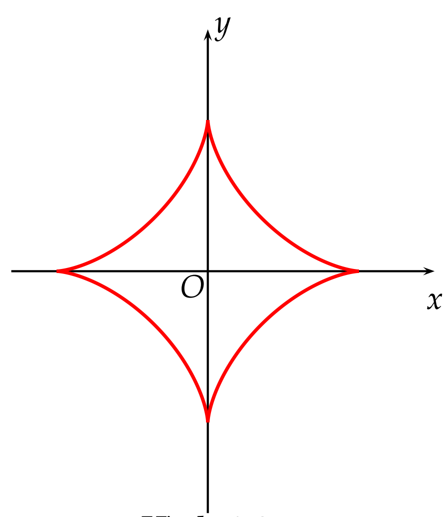
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \\ z = bt, \ (0 \le t \le 2\pi, a, b > 0). \end{cases}$$

[Đáp số] $I = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2\right)$

1.4 Bài tập ôn tập

Bài tập 4.6. *Tính độ dài các cung sau đây.*

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \ (a > 0)$.



Hình 4.6a

b) $y^2 = 2px, \ x \in [0, a], p > 0, a > 0$.

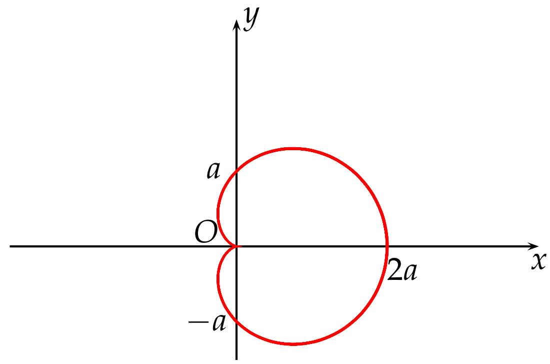
c) $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$.

d) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \ (0 \le t \le 2\pi)$.

Bài tập 4.7. *Tính các tích phân đường loại I.*

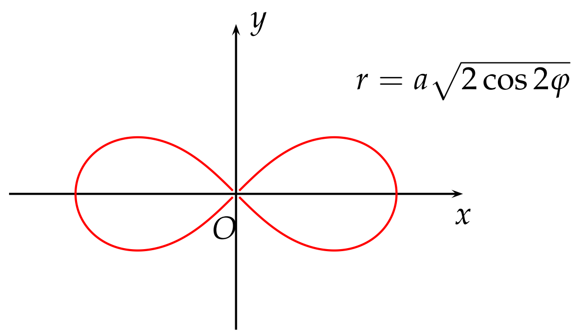
a) $I = \int_L xyds$, *trong đó* L *là cung ellip* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *nằm trong góc phần tư thứ nhất.*

b) $I = \int_L |y|ds$, *trong đó* L *là đường Cardioid* $r = a(1 + \cos\varphi) \ (a > 0)$.



Hình 4.7b

c) $I = \int_L |y| ds$, *trong đó* L *là cung Lemniscate* $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.



Hình 4.7c

d) $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, *trong đó* L *đường tròn* $x^2 + y^2 = ax$.

e) $I = \int_L x^2 ds$, *trong đó* L *là đường tròn* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$.

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1 Định nghĩa

Cho hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ xác định trên cung $\widehat{AB}$. Chia cung $\widehat{AB}$ thành n cung nhỏ Δs_i bởi các điểm chia $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$.Gọi toạ độ của vectơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ và lấy điểm M_i bất kì trên mỗi cung Δs_i. Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} [P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i]$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$, không phụ thuộc vào cách chia cung $\widehat{AB}$ và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ dọc theo cung $\widehat{AB}$, kí hiệu là $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Chú ý:

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung $\widehat{AB}$, nếu đổi chiều trên đường lấy tích phân thì tích phân đổi dấu, $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{\widehat{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.
- Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như tích phân xác định.

2.2 Các công thức tính tích phân đường loại II

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y'(x)\right] dx. \tag{5}$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d} \left[P\left(x(y).x'(y)\right] dy, y\right) + Q(x(y), y). \tag{6}$$

3. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, điểm đầu và điểm cuối tương ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right] dt \tag{7}$$

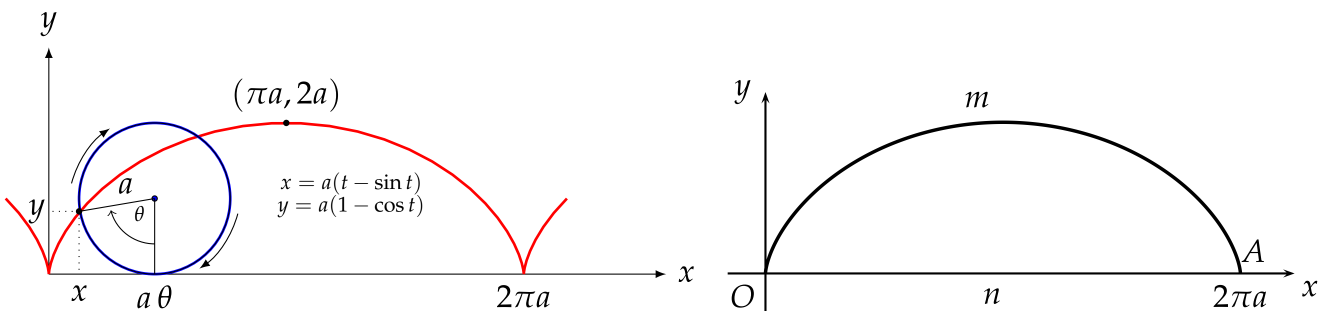
Bài tập

Bài tập 4.8. *Tính* $\int\limits_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy - y^2)\,dy$*, trong đó* $\widehat{AB}$ *là cung parabol* $y = x^2$ *từ* $A\,(1,1)$ *đến* $B\,(2,4)$*.*

Lời giải. Áp dụng công thức (5) ta có:

$$I = \int\limits_1^2 \left[\left(x^2 - 2x^3\right) + \left(2x^3 - x^4\right).2x\right] dx = -\frac{41}{30}.$$

Bài tập 4.9. *Tính* $\int\limits_C (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy - y^2)\,dy$ *trong đó* C *là đường cong xác định bởi một nhịp cycloid* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *theo chiều tăng của* $t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$*.*



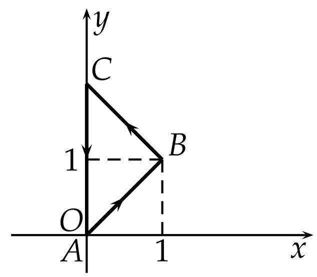
Hình 4.9

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a\sin t \end{cases}$ nên:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \{[2a(t - \sin t) - a(1 - \cos t)]\,a(1 - \cos t) + a(t - \sin t).a\sin t\}\,dt \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + \sin 2t + (t - 2)\sin t - (2t - 2)\cos t]dt \\ &= a^2 \int\limits_0^{2\pi} [(2t - 2) + t\sin t - 2t\cos t]dt \\ &= a^2\left(4\pi^2 - 6\pi\right). \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.10. *Tính* $\int\limits_{ABCA} 2\left(x^2+y^2\right)dx + x\left(4y+3\right)dy$ *ở đó* $ABCA$ *là đường gấp khúc đi qua các điểm* $A(0,0), B(1,1), C(0,2)$.



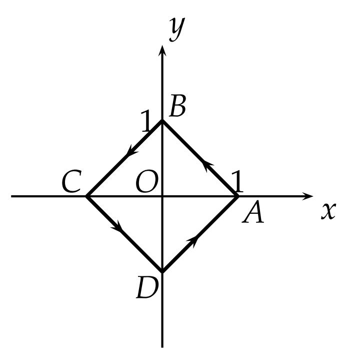
Hình 4.10

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \text{phương trình đường thẳng } AB: x = y \\ \text{phương trình đường thẳng } BC: x = 2-y \\ \text{phương trình đường thẳng } CA: x = 0 \end{cases}$ nên

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{AB} ... + \int\limits_{BC} ... + \int\limits_{CA} ... \\
&= \int\limits_0^1 \left[2\left(y^2+y^2\right) + y\left(4y+3\right)\right]dy + \int\limits_1^2 2\left[(2-y)^2+y^2\right].(-1) + (2-y)\left(4y+3\right)dy + 0 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

■

Bài tập 4.11. *Tính* $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ *trong đó* $ABCDA$ *là đường gấp khúc qua các điểm* $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$.



Hình 4.11

Lời giải. Ta có

$$
\begin{cases}
AB: x+y=1 & \Rightarrow dx+dy=0 \\
BC: x-y=-1 & \Rightarrow dx=dy \\
CD: x+y=-1 & \Rightarrow dx+dy=0 \\
DA: x-y=1 & \Rightarrow dx=dy
\end{cases}
$$

nên

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{AB} \dots + \int\limits_{BC} \dots + \int\limits_{CD} \dots + \int\limits_{DA} \\
&= 0 + \int\limits_{BC} \frac{2dx}{x+y} + 0 + \int\limits_{DA} \frac{2dx}{x-y} \\
&= \int\limits_0^{-1} 2dx + \int\limits_0^1 2dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

Bài tập 4.12. *Tính* $\int\limits_C \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{2}dx + dy$ *trong đó* $\begin{cases} x = t\sin\sqrt{t} \\ y = t\cos\sqrt{t} \\ 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$ *theo chiều tăng của* t.

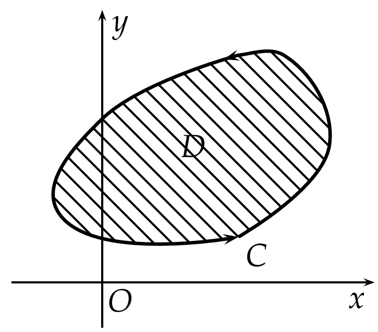
Lời giải. Đặt $u = \sqrt{t} \Rightarrow 0 \le u \le \pi$, $\begin{cases} x = u^2\sin u \\ y = u^2\cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(u) = 2u\sin u + u^2\cos u \\ y'(u) = 2u\cos u - u^2\sin u \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{u}{2}\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2\sin u\right] du \\
&= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{u^3}{2} + 2u\right)\cos u du \\
&= -\frac{3}{2}\pi^2 + 2
\end{aligned}
$$

■

2.3 Công thức Green.

Hướng dương của đường cong kín: Nếu đường lấy tích phân là đường cong kín thì ta quy ước hướng dương của đường cong là hướng sao cho một người đi dọc theo đường cong theo hướng ấy sẽ nhìn thấy miền giới hạn bởi nó ở gần phía mình nhất nằm về phía bên trái.



Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền đơn liên, liên thông, bị chặn với biên giới ∂D là đường cong kín với hướng dương, hơn nữa P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên D. Khi đó

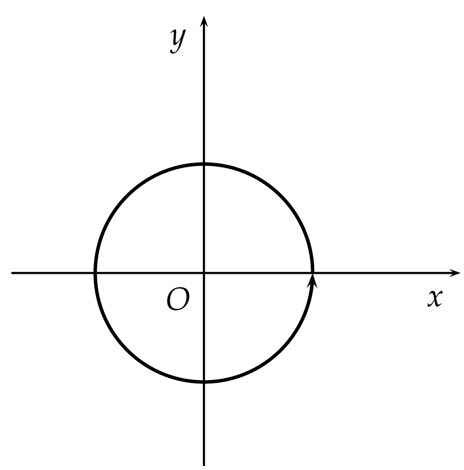
$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Chú ý:

- Nếu ∂D có hướng âm thì $\int\limits_C Pdx + Qdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$
- Trong nhiều bài toán, nếu C là đường cong không kín, ta có thể bổ sung C để được đường cong kín và áp dụng công thức Green. Tất nhiên, sau đó phải trừ đi phần đã bổ sung.

Bài tập 4.13. *Tính các tích phân sau* $\int\limits_C (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$ *bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với* C *là đường:*

a) $x^2 + y^2 = R^2$



Hình 4.13 a

1. **Tính trực tiếp**.

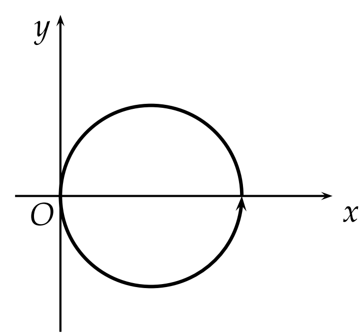
Tham số hóa đường cong
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \le t \le 2\pi.$$

Ta có
$$\begin{aligned} I &= ... \\ &= \frac{R^3}{2}\int_0^{2\pi}(\cos t\cos 2t + \sin t\cos 2t)\,dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. **Sử dụng công thức Green**.
$$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases}$$

Ta có $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$,
$$\begin{aligned} I &= \iint_D (y-x)\,dxdy \\ &= \iint_D ydxdy - \iint_D xdxdy \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) $x^2 + y^2 = 2x$



Hình 4.13 b

1. **Tính trực tiếp.**

Vì $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ *nên tham số hóa đường cong*
$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$$

ta được
$$\begin{aligned} I = &\int_0^{2\pi}[(1+\cos t)\sin t + (1+\cos t) + \sin t] \\ &\times(-\sin t)dt \\ &+ \int_0^{2\pi}[(1+\cos t)\sin t + (1+\cos t) - \sin t] \\ &\times \cos t dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

2. **Sử dụng công thức Green.**
$$\text{Ta có} \begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x \end{cases}$$

$$I = \iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1} (y-x)\,dxdy.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi}(r\sin\varphi - 1 - r\cos\varphi)rdr \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0).$

1. **Tính trực tiếp**

Đặt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= ... \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

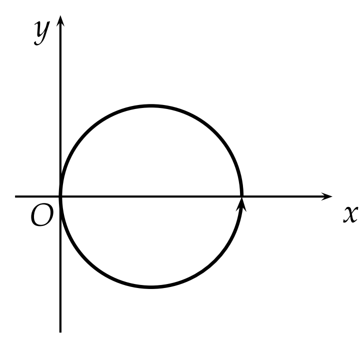
2. **Sử dụng công thức Green**

$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \\ Q(x,y) = xy + x - y \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_D (y - x)\, dxdy \\ &= \iint_D ydxdy - \iint_D xdxdy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bài tập 4.14. *Tính* $\int\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y + \frac{x}{4}\right) dy - y^2\left(x + \frac{y}{4}\right) dx.$



Hình 4.14

Lời giải. Áp dụng công thức Green ta có:

$$I = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_D \left(4xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2\right) dxdy = \frac{3}{4}\int_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

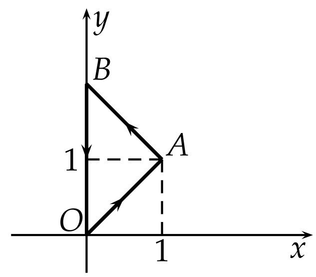
$\left(\text{vì} \int_D 4xydxdy = 0\right).$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi$. Vậy

$$I = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2.rdr = \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi = \frac{9}{8}\pi.$$

∎

Bài tập 4.15. *Tính* $\oint\limits_{OABO} e^x\left[(1-\cos y)\,dx - (y-\sin y)\,dy\right]$ *trong đó* $OABO$ *là đường gấp khúc* $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$



Hình 4.15

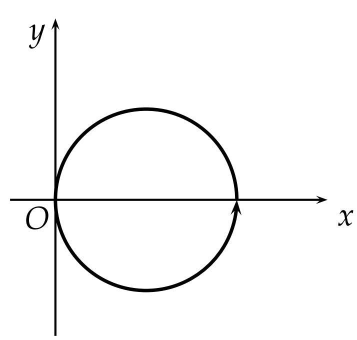
Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = e^x(1-\cos y) \\ Q(x,y) = -e^x(y-\sin y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x y.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -e^x y\,dx\,dy \\ &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} -e^x y\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x(4x-4)\,dx \\ &= 4-2e. \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.16. *Tính* $\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy + e^x\sin x + x + y)\,dx - (xy - e^{-y} + x - \sin y)\,dy$



Hình 4.16

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy + e^x \sin x + x + y \\ Q(x,y) = xy - e^{-y} + x - \sin y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2.$

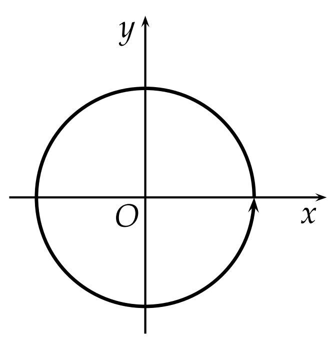
Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D -y - x - 2dxdy \\ &= \iint\limits_D -x - 2dxdy \text{ vì } \iint\limits_D ydxdy = 0 \\ &\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi \\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} (-r\cos\varphi - 2)\, rdr \\ &= -3\pi. \end{aligned}$$

■

Bài tập 4.17. *Tính* $\oint\limits_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy$

trong đó $C \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (a > 0).$



Hình 4.17

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P(x,y) = xy^4 + x^2 + y\cos xy \\ Q(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1.$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1dxdy \\
&= \iint\limits_D x^2 + y^2 - 1dxdy \text{ vì } \iint\limits_D 4xy^3dxdy = 0 \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le ra \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(r^2 - 1\right) rdr \\
&= \pi\left(\frac{a^4}{2} - a^2\right).
\end{aligned}$$

■

2.4 Ứng dụng của tích phân đường loại II

Áp dụng công thức Green cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ thoả mãn $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ta có:

$$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

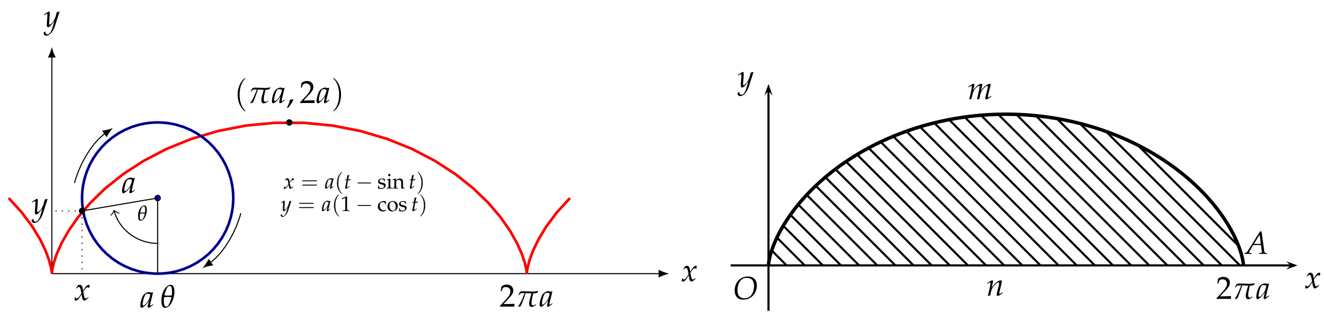
- Lấy $P(x,y) = 0, Q(x,y) = x$ thì $S(D) = \int\limits_{\partial D} xdy$.
- Lấy $P(x,y) = -y, Q(x,y) = 0$ thì $S(D) = \int\limits_{\partial D} -ydx$.
- Lấy $P(x,y) = \frac{1}{2}x, Q(x,y) = \frac{1}{2}y$ thì $S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} xdy - ydx$.

Bài tập 4.18. *Tính diện tích của miền elip* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

[Gợi ý] Phương trình tham số của đường elip là $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$. Do đó

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\sin\theta)d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)d\theta = \pi ab.$$

Bài tập 4.19. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid* $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ *và* Ox $(a > 0)$.

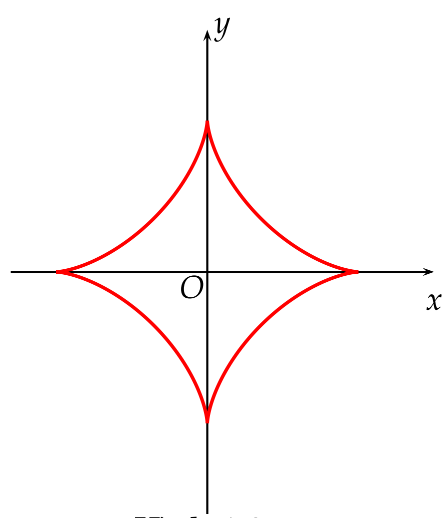


Hình 4.19

Lời giải. Áp dụng công thức

$$S(D) = \int\limits_{\partial D} xdy = \int\limits_{AmO} xdy + \int\limits_{OnA} xdy = \int\limits_{2\pi}^{0} a\left(t - \sin t\right).a \sin t dt = 3\pi a^2.$$

Bài tập 4.20. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi đường Astroid* $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$.

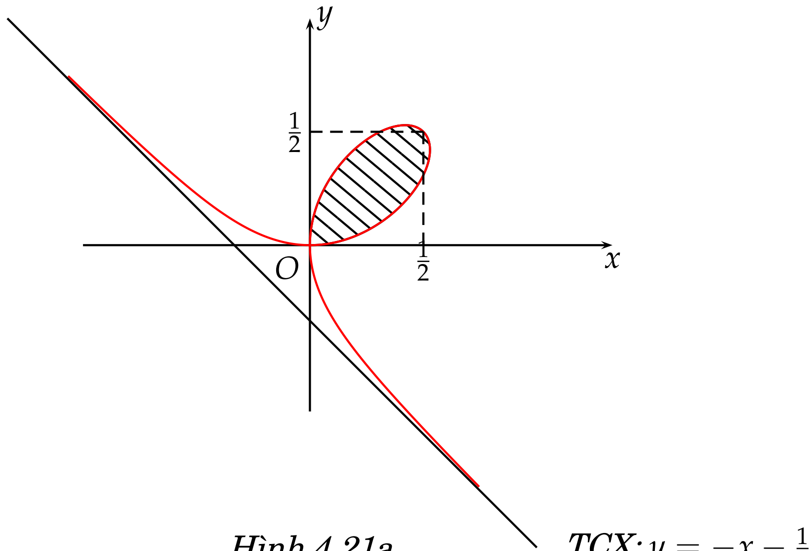


Hình 4.6a

[Đáp số] $S = \frac{3\pi a^2}{8}$.

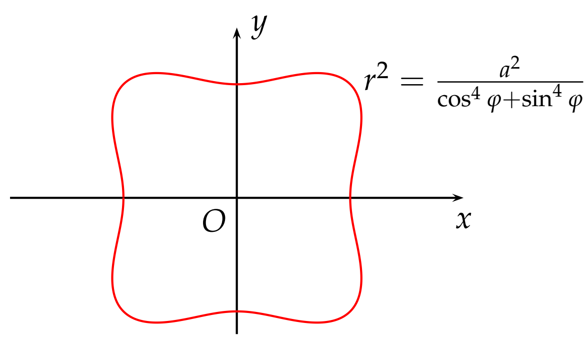
Bài tập 4.21. *Dùng tích phân đường loại II, tính diện tích của miền giới hạn bởi đường sau*

a) $x^2 + y^3 = 3axy, a > 0$ *(lá Descartes, xem thêm Bài tập 2.54).*



Hình 4.21a

b) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.



Hình 4.21b

2.5 Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân.

Giả sử rằng D là miền đơn liên, liên thông, P, Q cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên $\overline{D}$. Khi đó bốn mệnh đề sau là tương đương:

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ với mọi $(x, y) \in D$.

2. $\displaystyle\int_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đóng kín L nằm trong D.

3. $\displaystyle\int_{AB} Pdx + Qdy = 0$ không phụ thuộc vào đường đi từ A đếnB, với mọi đường cong AB nằm trong D.

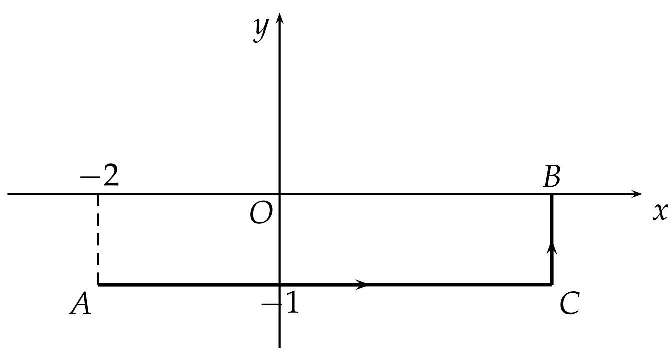
4. $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần. Nghĩa là có hàm số $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$. Hàm u có thể được tìm theo công thức:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi:

1. Kiểm tra điều kiện $P'_y = Q'_x$. (1)
2. Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$.
3. Nếu điều kiện (1) được thoả mãn và cần tính tích phân trên cung AB không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn là đường thẳng nối A với B, hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục toạ độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm F sao cho $du = Pdx + Qdy$ thì $I = u(B) - u(A)$.

Bài tập 4.22. *Tính* $\int\limits_{(-2,1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy.$

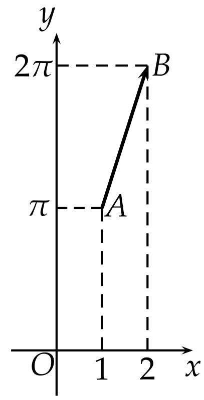


Hình 4.22

Lời giải. Nhận xét rằng $\left(x^4 + 4xy^3\right)'_y = \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)'_x$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Vậy ta chọn đường đi là đường gấp khúc ACB như hình vẽ.

$$I = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy = 62.$$

Bài tập 4.23. *Tính* $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy.$



Hình 4.23

Lời giải. Đặt $\begin{cases} P = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$ nên tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi từ A đến B. Khi đó ta chọn đường lấy tích phân là đường thẳng AB, nó có phương trình $y = \pi x$.

$$I = \int_1^2 \left(1 - \pi^2 \cos \pi\right) dx + \int_1^2 (\sin \pi + \pi \cos \pi)\, \pi dx = 1.$$

CHƯƠNG 5

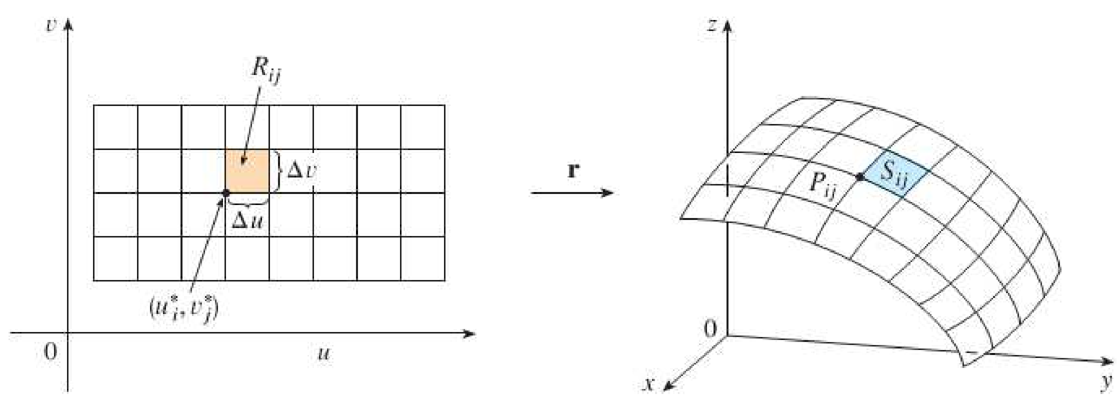
TÍCH PHÂN MẶT

§1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.1 Diện tích mặt cong

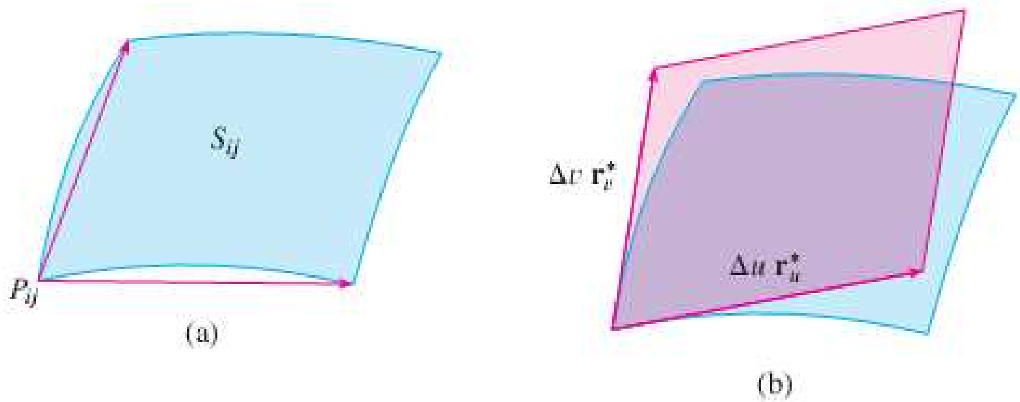
Xét mặt cong cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}.$$



Để đơn giản ta chọn miền D là hình chữ nhật và chia D thành các hình chữ nhật con có các cạnh song song với các trục tọa độ Ou và Ov. Giả sử S_{ij} là ảnh của hình chữ nhật R_{ij}. Khi đó

$$r_u = r_u(u_i, v_j) \text{ và } r_v = r_v(u_i, v_j)$$



là các véc tơ chỉ phương của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong S tại điểm P_{ij}.
Diện tích của S_{ij} có thể được xấp xỉ bởi diện tích của hình bình hành có hai cạnh là $\overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}}$ và $\overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}$. Do đó,

$$S(S_{ij}) \approx |\overrightarrow{P_{ij}P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{ij}P_{i,j+1}}| \approx |(\Delta u r_u) \wedge (\Delta v r_v)| = |r_u \wedge r_v|\Delta u \Delta v.$$

Vậy công thức tính xấp xỉ diện tích của mặt S là

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |r_u \wedge r_v|\Delta u \Delta v.$$

Nhận xét rằng nếu chia miền D thành các mảnh càng nhỏ thì công thức tính xấp xỉ trên càng tốt. Đồng thời, công thức ở vế phải chính là tổng Riemann của tích phân kép $\iint\limits_D |r_u \wedge r_v| dudv$. Điều này dẫn chúng ta tới định nghĩa sau:

Định nghĩa 5.9. *Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số*

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

và S chỉ được phủ một lần khi (u,v) biến thiên trên miền D. Khi đó diện tích của mặt cong S được định nghĩa bởi

$$S = \iint\limits_D |r_u \wedge r_v| dudv,$$

ở đó

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}, \quad r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

Ví dụ 1.1. *Tính diện tích của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.*

[Lời giải] Mặt cầu S có phương trình tham số trong tọa độ cầu là $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$

Do đó,

$$\begin{aligned} r_\theta \wedge r_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= R^2\sin^2\theta\cos\varphi.\vec{i} + R^2\sin^2\theta\sin\varphi.\vec{j} + R^2\sin\theta\cos\theta.\vec{k}. \end{aligned}$$

Vì vậy, $|r_\theta \wedge r_\varphi| = R^2\sin\theta$ và

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Trường hợp đặc biệt, nếu mặt cong cho bởi phương trình $z = z(x,y)$ thì

$$r_x \wedge r_y = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

Do đó,

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.$$

1.2 Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại I

Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

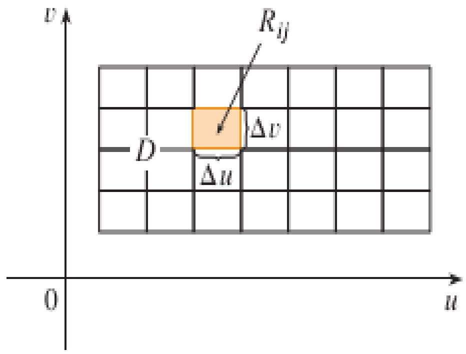
Hơn nữa, giả sử trên S có phân phối một khối lượng vật chất với mật độ (hay tỉ trọng bề mặt) tại điểm (x,y,z) là $\rho(x,y,z)$, trong đó $\rho(x,y,z$ là một hàm số liên tục trên S. Hãy tính khối lượng mặt S.

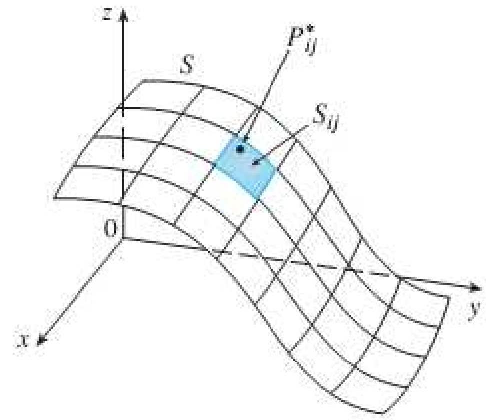
[Lời giải] Tương tự như cách tính diện tích mặt S, ta chia miền D thành các miền con bằng các đường song song với các trục tọa độ trong mặt phẳng Ouv. Khi đó mặt S được chia thành các mặt con S_{ij} và diện tích của nó được xấp xỉ bởi

$$S(S_{ij}) \approx |r_u \wedge r_v|\Delta u\Delta v.$$

Do tính liên tục của ρ, nếu ta chia miền D thành các miền khá nhỏ thì miền S_{ij} cũng khá nhỏ và ta coi hàm ρ không đổi trên S_{ij} và bằng $\rho(x(u_i^*, v_j^*), y(u_i^*, v_j*), z(u_i^*, v_j^*)) = \rho(P_{ij}^*)$. Khi đó khối lượng của S_{ij} là

$$m(S_{ij}) \approx \rho(P_{ij}^*)|r_u \wedge r_v|\Delta u\Delta v$$





Khối lượng của toàn bộ mặt S là

$$m(S) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho(P_{ij}^*)|r_u \wedge r_v|\Delta u \Delta v$$

Đây chính là tổng Riemann của tích phân kép $\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \wedge r_v|dudv$.

Điều này dẫn đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 5.10. *Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số*

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

và f là một hàm số xác định trên S. Nếu tồn tại tích phân

$$\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \wedge r_v|dudv$$

thì ta gọi giá trị của tích phân này là tích phân mặt loại I của hàm f lấy trên S và kí hiệu là

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

Ngoài ra, người ta có thể định nghĩa tích phân mặt loại I như sau:

Định nghĩa 5.11. *Cho hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên mặt cong S. Chia mặt cong S thành n mặt nhỏ $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì. Giới hạn, nếu có, của $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ khi $n \to \infty$ và $\max\limits_{1 \le i \le n} d(\Delta S_i) \to 0$ không phụ thuộc vào cách chia mặt cong S và cách chọn các điểm M_i được gọi là tích phân mặt loại I của hàm số $f(M)$ trên mặt cong S, kí hiệu là*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

1.3 Các công thức tính tích phân mặt loại I

Mặt S cho bởi phương trình tham số

Nếu mặt S cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

thì

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r_u \wedge r_v|dudv.$$

Mặt S cho bởi phương trình $z = z(x,y)$

Nếu mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x,y), (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, thì đó nó có một tham số hóa tự nhiên là $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = z(u,v). \end{cases}$

Khi đó, $r_u = (1,0,z'_u), r_v = (0,1,z'_v)$ và do đó, véc tơ pháp tuyến của mặt cong S tại P là

$$r_u \wedge r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_u \\ 0 & 1 & z'_v \end{vmatrix} = (-z'_u, -z'_v, 1) = (-z'_x, -z'_y, 1).$$

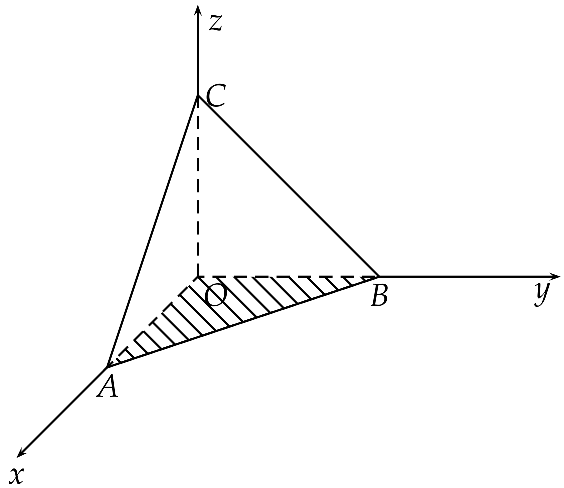
Vậy $|r_u \wedge r_v| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$. Ngoài ra, miền xác định của (u,v) chính là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Do đó

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy.$$

1.4 Bài tập

Bài tập 5.1. *Tính* $\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right) dS$ *trong đó*

$$S = \left\{(x,y,z) \,|\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\}.$$



Hình 5.1

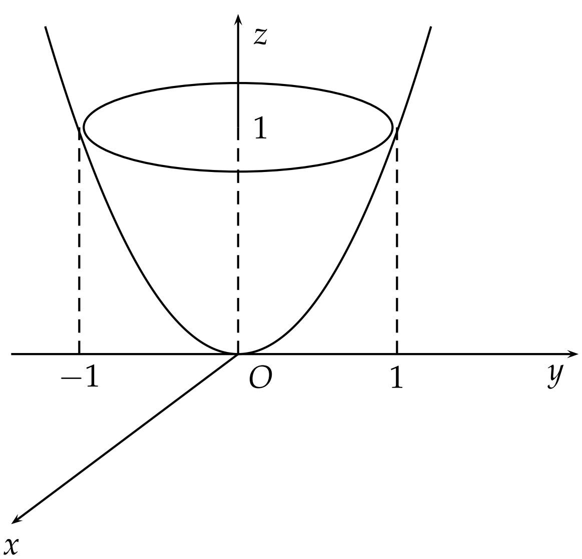
Lời giải. Ta có hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy là

$$D = \left\{(x,y) \,|\, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\} = \left\{(x,y) \,|0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right\}.$$

Mặt khác $z = 4(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}) \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = -2 \\ q = z'_y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy$ nên

$$I = \iint\limits_D \left[4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4y}{3}\right] \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy = 4\frac{\sqrt{61}}{3} \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3x}{2}} dy = 4\sqrt{61}.$$

Bài tập 5.2. *Tính* $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dS,\ S = \left\{(x,y,z) \,|z = z^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}.$



Hình 5.2

Lời giải. Ta có hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là $D = \left\{(x,y)\,|x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.

Mặt khác, $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} p = z'_x = 2x \\ q = z'_y = 2y \end{cases}$ nên

$$I = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy,$$

$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}rdr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}d\left(1+4r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_1^5 \frac{t-1}{4}\sqrt{t}dt\left(\text{đặt} t = 1+4r^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(\frac{20\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{15}\right).$$

■

Bài tập 5.3. *Tính tích phân mặt* $\iint\limits_S x^2y^2zdS$*, trong đó* S *là phần mặt nón* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *ở dưới mặt phẳng* $z = 1$.

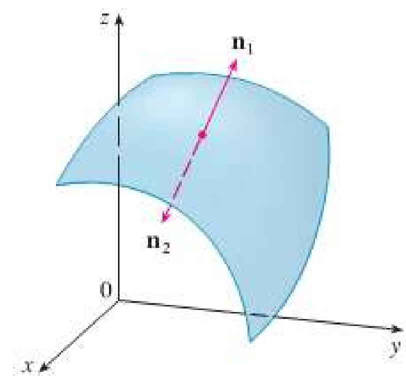
[Đáp số] $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{28}$.

§2. Tích phân mặt loại II

2.1 Định hướng mặt cong

Cho mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

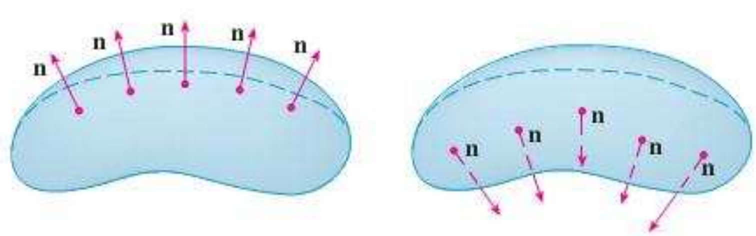


Như đã biết, véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại điểm P chính quy là $\vec{n}_1 = \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$, ở đó

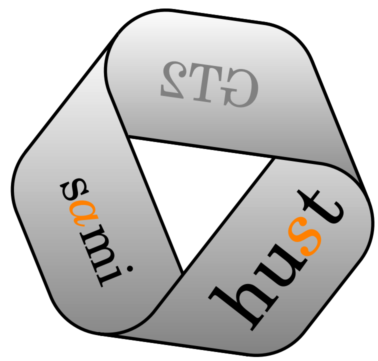
$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}, \quad r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

Tại mỗi điểm P chính quy của mặt cong S có hai vectơ pháp tuyến đơn vị là $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Giả sử $P_0 \in S$ và L là một đường cong kín nằm trên S và đi qua P_0. Chọn $\vec{n}(P_0)$ là một véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt S tại P_0. Khi P di chuyển dọc theo đường cong kín L từ P_0 và quay trở về P_0 thì véc tơ $\vec{n}(P)$ cũng biến thiên liên tục, và khi P trở về P_0 thì $\vec{n}(P)$ trở thành $\vec{n}'(P_0)$. Có hai khả năng xảy ra

- $\vec{n}'(P_0) = \vec{n}(P_0)$, tức là, pháp tuyến trở lại như cũ. Khi đó ta nói mặt S định hướng được (hay còn gọi là mặt hai phía).



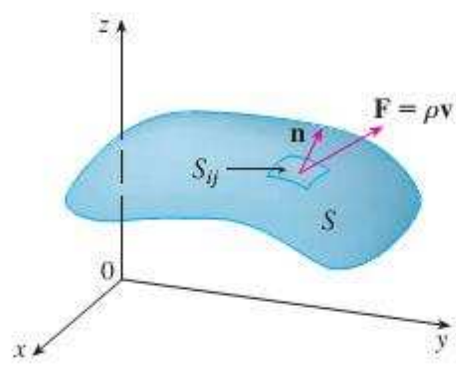
- Ngược lại, $\vec{n}'(P_0) = -\vec{n}(P_0)$, tức là, pháp tuyến trở về vị trí cũ thì đổi hướng. Khi đó ta nói mặt S gọi là không định hướng được (hay còn gọi là mặt một phía). Ví dụ như lá Mobius sau đây (được mang tên nhà toán học người Đức August Ferdinand Möbius).



Nếu mặt S định hướng được thì ta chọn một hướng làm hướng dương và hướng còn lại được gọi là hướng âm.

2.2 Bài toán dẫn đến tích phân mặt loại II

Giả sử có một mặt cong hai phía được nhúng vào một môi trường chất lỏng đang chảy với mật độ $\rho(x,y,z)$ và tốc độ $v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)$. Hãy tính lượng chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.



Ta chia mặt S thành các thành phần nhỏ S_{ij} như hình vẽ trên. Nếu chia mặt cong đủ nhỏ thì ta coi S_{ij} như mặt phẳng và khối lượng chất lỏng trên một đơn vị diện tích là $\vec{F} = \rho v$ coi như hằng số trên S_{ij}. Do đó, ta có thể xấp xỉ khối lượng của chất lỏng chảy qua S_{ij} theo hướng véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ trên một đơn vị thời gian bởi

$$(\vec{F}.\vec{n})S(S_{ij}).$$

Lượng chất lỏng chảy qua S trên một đơn vị thời gian là

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\vec{F}.\vec{n})S(S_{ij}).$$

Nếu chia mặt cong S càng nhỏ thì tổng trên chính là tổng Riemann của tích phân kép sau

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,$$

ở đó $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ và $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Định nghĩa 5.12. *Cho mặt cong S trơn, định hướng được, cho bởi phương trình tham số*

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

và $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị tại $M(x,y,z)$ theo hướng dương đã chọn của S. Giả sử

$$\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \quad (x,y,z) \in S$$

là một hàm véc tơ xác định trên S. Nếu tồn tại tích phân mặt loại I

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

thì giá trị đó được gọi là tích phân mặt loại II của hàm véc tơ $\vec{F}$ lấy theo hướng đã chọn của mặt S và kí hiệu là

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Người ta cũng có thể định nghĩa tích phân mặt loại II theo cách sau.

Định nghĩa 5.13. *Cho một mặt cong định hướng S trong miền $V \subset \mathbb{R}^3$ và $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véctơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của S tại điểm $M(x,y,z)$. Giả trường vectơ $\overrightarrow{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ biến thiên liên tục trên V, nghĩa là các toạ độ $P(M), Q(M), R(M)$ của nó là những hàm số liên tục trên V. Chia mặt S thành n mặt cong nhỏ, gọi tên và cả diện tích của chúng lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trên mỗi ΔS_i lấy một điểm M_i bất kì và gọi vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương đã chọn của nó là $n_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$.*

Giới hạn, nếu có, của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n}[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$ được gọi là tích phân mặt loại II của các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ trên mặt S, và được kí hiệu là:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

2.3 Các công thức tính tích phân mặt loại II

Mặt cong cho bởi phương trình tham số

Nếu mặt cong S trơn, cho bởi phương trình tham số

$$r(u,v) = x(u,v).\vec{i} + y(u,v).\vec{j} + z(u,v).\vec{k}, \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

thì một véc tơ pháp tuyến của S tại điểm P chính quy là $\vec{N} = r_u \wedge r_v = (A, B, C)$.

- Nếu véc tơ này cùng phương cùng hướng với $\vec{n}$, tức là, hướng theo phía đã chọn của mặt thì

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ dS &= \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv \end{aligned}$$

  nên ta đi đến công thức tính tích phân mặt loại II sau

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_D (AP + BQ + CR)dudv.$$

- Nếu véc tơ $\vec{N} = r_u \wedge r_v = (A, B, C)$ cùng phương, ngược hướng với $\vec{n}$, tức là, ngược hướng vói phía đã chọn của S thì

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

  Do đó,

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_D (AP + BQ + CR)dudv.$$

Mặt cong cho bởi phương trình $f(x,y,z) = 0$

Giả sử

$$I = \underbrace{\iint\limits_S Pdydz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_S Qdzdx}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_S Rdxdy}_{I_3}.$$

Người ta tính tích phân mặt loại II bằng cách đưa về tích phân kép. Chẳng hạn xét tích phân I_3. Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x,y)$, $z(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền D là hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy. Khi đó, véc tơ $\vec{N} = r_x \wedge r_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$. Véc tơ $\vec{N}$ này lập với Oz một góc nhọn (Tại sao?[(1)]) Do đó, để thuận lợi cho việc xác định xem $\vec{N}$ cùng hướng hay ngược hướng với $\vec{n}$, người ta xét góc giữa $\vec{n}$ và Oz.

- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc nhọn thì

$$\iint\limits_S Rdxdy = \iint\limits_S (AP + BQ + CR)dxdy = \iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy$$

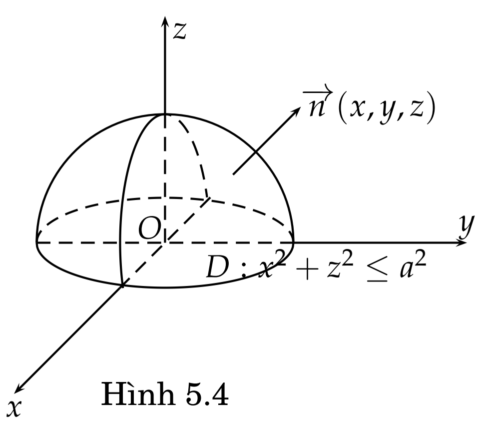
- Nếu vectơ pháp tuyến đơn vị theo hướng dương $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc tù thì

$$\iint\limits_S Rdxdy = -\iint\limits_D R\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dxdy$$

Tích phân I_1, I_2 được đưa về tích phân kép một cách tương tự.

Bài tập

Bài tập 5.4. *Tính* $\iint\limits_S z\left(x^2 + y^2\right) dxdy$, *trong đó* S *là nửa mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$, *hướng của* S *là phía ngoài mặt cầu.*



Hình 5.4

Lời giải. Ta có mặt $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là miền D :

[(1)] vì $\vec{N}.\vec{k} = (-Z'_x, -z'_y, 1).(0,0,1) = 1 = |\vec{N}|.|\vec{k}|.\cos(\vec{N}, Oz) \Rightarrow \cos(\vec{N}, Oz) > 0 \Rightarrow (\vec{N}, Oz) < \frac{\pi}{2}$

$x^2 + y^2 \leq 1$, hơn nữa $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz một góc nhọn nên:

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

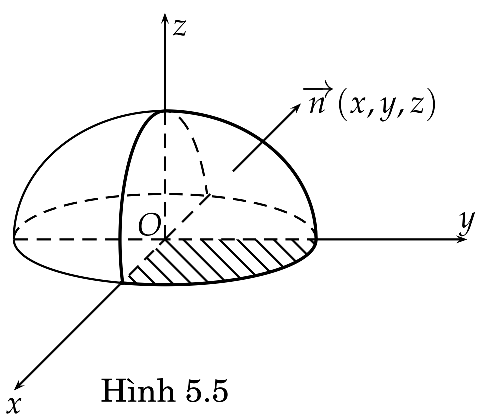
$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^3 dr$$

$$= \frac{4\pi}{15}.$$

■

Bài tập 5.5. *Tính* $\iint\limits_S ydxdz + z^2 dxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài mặt* $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$



Hình 5.5

Lời giải. Tính $I_1 = \iint\limits_S ydxdz.$

- Mặt $S : y = 2\sqrt{1 - x^2 - z^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\frac{1}{4}$ hình tròn, $D_1 : x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0.$
- $\beta = (\overrightarrow{n}, Oy$ là góc nhọn.

Do đó

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} 2\sqrt{1-x^2-z^2}dxdz \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1 \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 2\sqrt{1-r^2}rdr \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Tính $I_2 = \iint\limits_S z^2dxdy$.

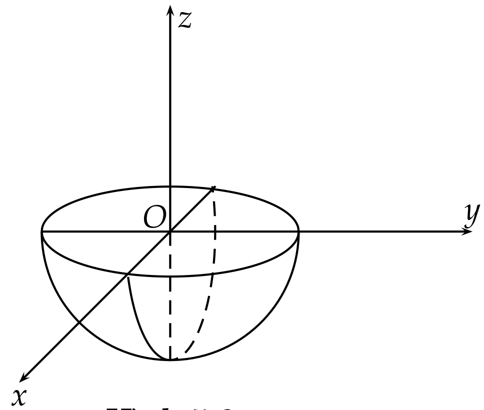
- Mặt $S : z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$
- Hình chiếu của S lên Oxz là $\frac{1}{4}$ elip, $D_2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1, x \ge 0, y \ge 0$.
- $\gamma = (\overrightarrow{n}, Oz$ là góc nhọn.

Do đó

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_2} 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}dxdy \\
&\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1, J = -2r \\
&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (1-r^2)2rdr \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{7\pi}{12}$. ■

Bài tập 5.6. *Tính* $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ *trong đó* S *là mặt trên của nửa mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \le 0$.



Hình 5.6

Lời giải. Ta có:

- Mặt $S : z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
- Hình chiếu của S lên Oxy là hình tròn, $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.
- $\beta = (\overrightarrow{n}, Oz)$ là góc nhọn.

Do đó

$$I = -\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

$$\text{đặt } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R, J = -r$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2 - r^2}.r^5 dr$$

$$= -\frac{2R^7}{105}.$$

■

2.4 Công thức Ostrogradsky

Giả sử P, Q, R là các hàm khả vi, liên tục trên miền bị chặn, đo được trong $V \subset \mathbb{R}^3$. V giới hạn bởi mặt cong kín S trơn hay trơn từng mảnh, khi đó:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

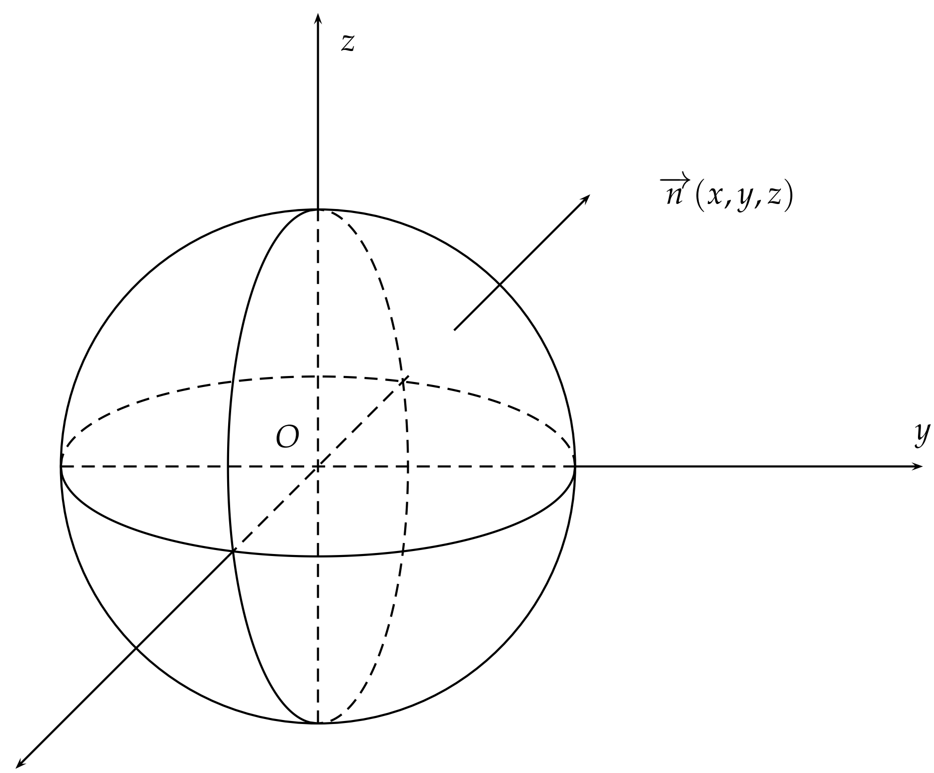
trong đó tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến ngoài.
Chú ý:

- Nếu tích phân ở vế trái lấy theo hướng pháp tuyến trong thì

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

- Nếu mặt cong S không kín, có thể bổ sung thành mặt cong S' kín để áp dụng công thức Ostrogradsky, rồi trừ đi phần bổ sung.

Bài tập 5.7. *Tính* $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Hình 5.7

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3V = 4\pi a^2.$$

Bài tập 5.8. *Tính* $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Lời giải. Xem hình vẽ 5.7, áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

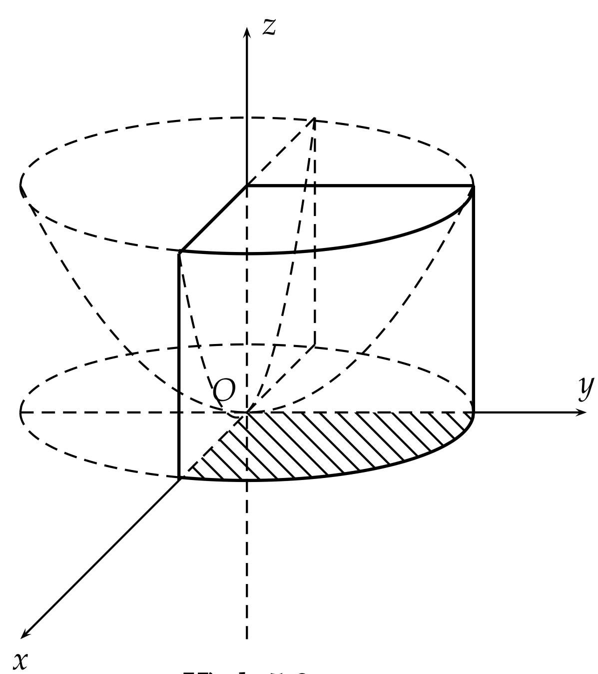
$$I = \iiint\limits_V 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

$$\text{đặt}\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$ ■

$$I = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} r^4 \sin\theta dr$$

$$= \frac{12\pi R^5}{5}.$$

Bài tập 5.9. *Tính* $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$ *trong đó* S *là phía ngoài của miền* $x \le 0, y \le 0, x^2+y^2 \le 1, z \le x^2+y^2$.



Hình 5.9

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V \left(y^2 + z + x^2\right) dxdydz$$

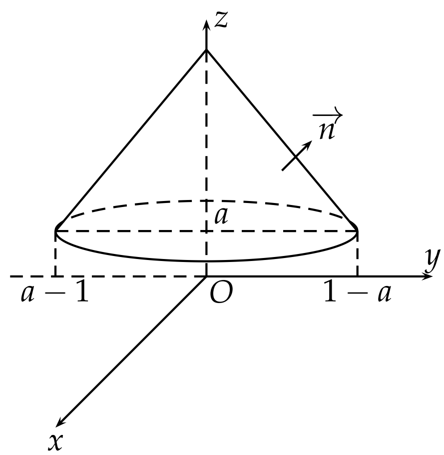
$$\text{đặt} \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}, J = -r$$

■

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{r^2} \left(r^2 + z\right) rdr$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

Bài tập 5.10. *Tính* $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *trong đó* S *là phía ngoài của miền* $(z-1)^2 \leqslant x^2 + y^2, a \leqslant z \leqslant 1, a > 0.$



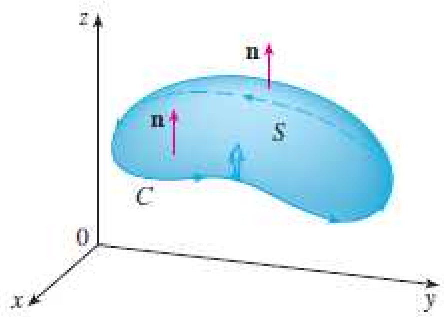
Hình 5.10

Lời giải. Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có:

$$I = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3V = 3.\frac{1}{3}Bh = \pi\left(1-a\right)^3.$$

2.5 Công thức Stokes

Giả sử S là mặt hai phía, đơn và trơn có biên giới là đường cong kín L. Giả sử $\vec{n}$ là hướng dương của pháp tuyến của S. Khi đó, ta xác định hướng dương trên biên giới L của mặt S là hướng sao cho, một người đứng thẳng theo hướng pháp tuyến $\vec{n}$, đi theo hướng đó thì thấy phần của mặt ở gần người đó nhất nằm ở phía tay trái.



Định lý 5.18 (Định lý Stokes). *Giả sử S là một mặt cong trơn, có biên ∂S là một đường cong trơn. Giả thiết P, Q, R là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong một tập mở nào đó chứa S. Khi đó*

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo hướng dương của ∂S phù hợp với hướng dương của mặt S.

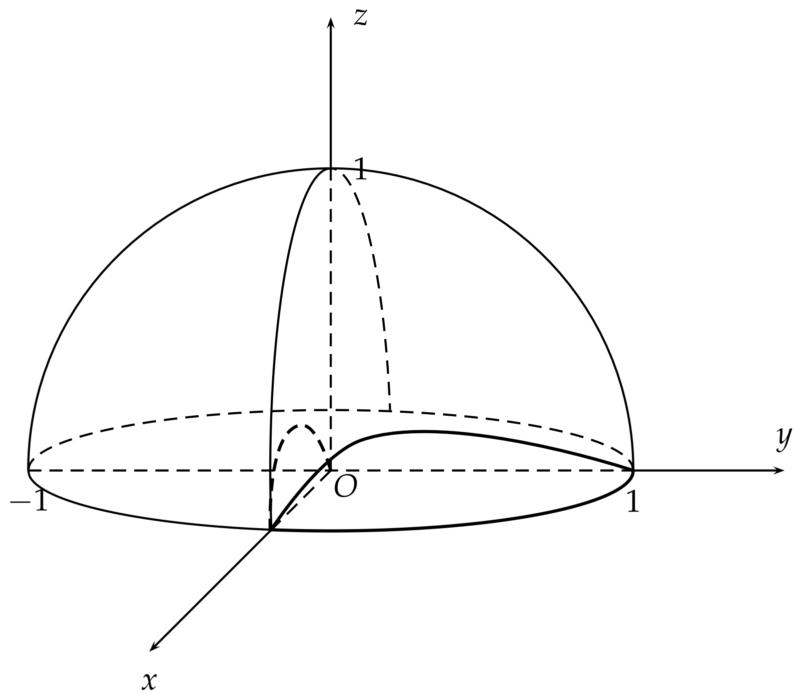
2.6 Công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\, dS\\ =&\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,\end{aligned} \tag{5.1}$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là cosin chỉ phương của véctơ pháp tuyến đơn vị của mặt S.

Bài tập 5.11. *Gọi S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong mặt trụ $x^2 + x + z^2 = 0, y \geq 0$, hướng S phía ngoài. Chứng minh rằng*

$$\iint\limits_{S} (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dxdz = 0.$$



Hình 5.11

Lời giải. Ta có $y = \sqrt{1-x^2-y^2}$ nên véctơ pháp tuyến của S là $\overrightarrow{n} = \pm(-y'_x, 1, -y'_z)$. Vì $(\overrightarrow{n}, Oy) < \frac{\pi}{2}$ nên

$$\overrightarrow{n} = (-y'_x, 1, -y'_z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\right).$$

Do đó $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-z^2} + 1 + \frac{z^2}{1-x^2-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}}$. Vậy

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(\overrightarrow{n}, Ox) = \dfrac{n_1}{|\overrightarrow{n}|} = x \\ \cos\beta = \cos(\overrightarrow{n}, Oy) = \dfrac{n_2}{|\overrightarrow{n}|} = y \\ \cos\gamma = \cos(\overrightarrow{n}, Oz) = \dfrac{n_3}{|\overrightarrow{n}|} = z \end{cases}$$ ■

Áp dụng công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và II 5.1 ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left[(x-y)\cos\gamma + (y-z)\cos\beta + (z-x)\cos\alpha\right] dS \\ &= \iint_S (x-y)z + (y-z)x + (z-x)y dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bài tập 5.12. *Tính tích phân mặt loại II*

$$I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

trong đó S *là phía ngoài mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

[Đáp số] $I = 4\pi a^3$.

Bài tập 5.13. *Tính tích phân mặt* $\iint\limits_S ydzdx$, *trong đó* S *là phía ngoài của mặt paraboloid* $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 2)$.

[Đáp số] $I = 2\pi$.

CHƯƠNG 6

LÝ THUYẾT TRƯỜNG

§1. TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.14. *Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{R}^3$ (hoặc $\mathbb{R}^2$). Một hàm số*

$$\begin{aligned} u : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto u = u(x,y,z) \end{aligned}$$

được gọi là một trường vô hướng xác định trên Ω.

Cho $c \in \mathbb{R}$, khi đó mặt $S = \{(x,y,z) \in \Omega | u(x,y,z) = c\}$ được gọi là mặt mức ứng với giá trị c (đẳng trị).

1.2 Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 6.15. *Cho $u = u(x,y,z)$ là một trường vô hướng xác định trên Ω và $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$. Giả thiết $\overrightarrow{l} = (a,b,c)$ là một véctơ đơn vị bất kì trong $\mathbb{R}^3$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số*

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(M_0 + t\vec{l})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+ta, y_0+tb, z_0+tc) - u(x_0,y_0,z_0)}{t} \tag{6.1}$$

được gọi là đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại M_0 của trường vô hướng u và được kí hiệu là $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0)$.

Chú ý:

- Nếu $\vec{l}$ không phải là véc tơ đơn vị thì giới hạn trong công thức 6.1 có thể được thay bằng
$$\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t},$$
trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.
- Nếu $\overrightarrow{l} \uparrow\uparrow Ox$ thì $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$.
- Đạo hàm theo hướng $\overrightarrow{l}$ tại điểm M_0 của trường vô hướng u thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\overrightarrow{l}$.

Định lý 6.19. *Nếu $u = u(x,y,z)$ khả vi tại $M(x_0,y_0,z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\overrightarrow{l} \neq 0$ tại M_0 và*
$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0).\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0).\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0).\cos\gamma, \tag{6.2}$$
trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\overrightarrow{l}$.

Lời giải. Giả sử $\cos\alpha = a, \cos\beta = b, \cos\gamma = c$. Xét hàm số một biết số
$$g(t) = u(x_0+ta, y_0+tb, z_0+tc).$$
Khi đó, theo định nghĩa,
$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc)-u(x_0,y_0,z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0).$$
Mặt khác, $g(t)$ có thể viết dưới dạng $g(t) = u(x,y,z)$, ở đó $x = x_0+ta, y = y_0+tb, z = z_0+tc$. Vì vậy, theo công thức đạo hàm của hàm hợp,
$$g'(h) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial h} = u_x(x,y,z).a + u_y(x,y,z).b + u_z(x,y,z).c$$
Thay $t = 0$ vào phương trình trên, ta có $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, và
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = u_x(M_0).a + u_y(M_0).b + u_z(M_0).c.$$
■

1.3 Gradient

Định nghĩa 6.16. *Cho $u(x,y,z)$ là trường vô hướng có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Người ta gọi gradient của u tại M_0 là véctơ*
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right)$$
và được kí hiệu là $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u(M_0)$.

Định lý 6.20. *Nếu trường vô hướng $u(x,y,z)$ khả vi tại M_0 thì tại đó ta có*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} u.\vec{l}$$

Chú ý: $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng u tại M_0 theo hướng $\vec{l}$. Từ công thức $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} u.\vec{l} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} u\right| \left|\vec{l}\right| . \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} u, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} u\right| \left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}$. Cụ thể

- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u tăng nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, cùng hướng với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}$.
- Theo hướng $\vec{l}$, trường vô hướng u giảm nhanh nhất tại M_0 nếu $\vec{l}$ có cùng phương, ngược hướng với $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}$.

1.4 Bài tập

Bài tập 6.1. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của $u = x^3 + 2y^3 - 3z^3$ tại $A(2,0,1)$, $\vec{l} = \overrightarrow{AB}, B(1,2,-1)$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1,2,-2)$ nên

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{-1}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-1}{3}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 12 \\
\cos\beta &= \frac{2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= 6y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 0 \\
\cos\gamma &= \frac{-2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{3}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= -9z^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(A) = -9
\end{aligned}$$ ■

Áp dụng công thức 6.2 ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) = 12.\frac{-1}{3} + 0.\frac{2}{3} + (-9).\frac{-2}{3} = 2$$

Bài tập 6.2. Tính môđun của $\overrightarrow{\mathrm{grad}} u$ với $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại $A(2,1,1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\mathrm{grad}} u \perp Oz$, khi nào $\overrightarrow{\mathrm{grad}} u = 0$.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (3x^2 = 3yz, 3y^2 - 3zx, 3z^2 - 3xy)$$

nên $\overrightarrow{\mathrm{grad}} u = (9,-3,-3)$ và $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} u\right| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{11}$.

- $\overrightarrow{\text{grad}}u \perp Oz \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{\text{grad}}u, \overrightarrow{k} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy$

- $\overrightarrow{\text{grad}}u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$ ■

Bài tập 6.3. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$ với $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ và $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bài tập 6.4. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x \sin z - y \cos z$ từ gốc toạ độ $O(0,0)$ là lớn nhất?

Lời giải. Từ công thức $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O) = \overrightarrow{\text{grad}}u.\vec{l} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}u\right| \left|\vec{l}\right| . \cos\left(\overrightarrow{\text{grad}}u, \vec{l}\right)$ ta có $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(O)\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\overrightarrow{\text{grad}}u\right| \left|\vec{l}\right|$ nếu $\vec{l}$ có cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}}u(O) = (0, -1, 0)$. ■

Bài tập 6.5. Tính góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{\text{grad}}z$ của các hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $M(3,4)$.

Lời giải. Ta có

- $\overrightarrow{\text{grad}}z_1 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ nên $\overrightarrow{\text{grad}}z_1(M) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

- $\overrightarrow{\text{grad}}z_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3y}}{2\sqrt{x}}, -3 + \frac{\sqrt{3x}}{2\sqrt{y}}\right)$ nên $\overrightarrow{\text{grad}}z_2(M) = \left(2, -\frac{9}{4}\right)$. Vậy ■

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \overrightarrow{\text{grad}}z_1, \overrightarrow{\text{grad}}z_2 \right\rangle}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}z_1\right| . \left|\overrightarrow{\text{grad}}z_2\right|} = \frac{-12}{5\sqrt{145}}$$

§2. TRƯỜNG VÉCTƠ

2.1 Định nghĩa

Cho Ω là một miền mở trong $\mathbb{R}^3$. Một hàm véctơ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} &: \Omega \to \mathbb{R}^3 \\ M &\mapsto \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M), \end{aligned}$$

trong đó

$$\overrightarrow{F} = F_x(M)\overrightarrow{i} + F_y(M)\overrightarrow{j} + F_z(M)\overrightarrow{k}$$

2.2 Thông lượng, dive, trường ống

a. Thông lượng: Cho S là một mặt định hướng và $\overrightarrow{F}$ là một trường véctơ. Đại lượng

$$\phi = \iint\limits_S F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy \tag{6.3}$$

được gọi là thông lượng của $\overrightarrow{F}$ đi qua mặt cong S.

b. Dive: Cho $\overrightarrow{F}$ là một trường véctơ có thành phần F_x, F_y, F_z là các hàm số có đạo hàm riêng cấp một thì tổng $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ được gọi là dive của trường véctơ $\overrightarrow{F}$ và kí hiệu là div $\overrightarrow{F}$.

c. Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ xác định trên Ω được gọi là một trường ống nếu div $\overrightarrow{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.
Tính chất: Nếu $\overrightarrow{F}$ là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra.

2.3 Hoàn lưu, véctơ xoáy

a. Hoàn lưu: Cho $\mathcal{C}$ là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian. Đại lượng

$$\int\limits_{\mathcal{C}} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{6.4}$$

được gọi là hoàn lưu của $\overrightarrow{F}$ dọc theo đường cong $\mathcal{C}$.

b. Véctơ xoáy: Véctơ

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} := \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ $\overrightarrow{F}$.

2.4 Trường thế - hàm thế vị

Trường véctơ $\overrightarrow{F}$ được gọi là trường thế (trên Ω) nếu tồn tại trường vô hướng u sao cho $\overrightarrow{\text{grad}}u = \overrightarrow{F}$ (trên Ω). Khi đó hàm u được gọi là hàm thế vị.

Định lý 6.21. *Điều kiện cần và đủ để trường véctơ $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ là một trường thế (trên Ω) là $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.*

Chú ý: Nếu $\overrightarrow{F}$ là trường thế thì hàm thế vị u được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^{x} F_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} F_z(x, y, z)dz + C \tag{6.5}$$

2.5 Bài tập

Bài tập 6.6. Trong các trường sau, trường nào là trường thế?

a. $\overrightarrow{a} = 5(x^2 - 4xy)\overrightarrow{i} + (3x^2 - 2y)\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

b. $\overrightarrow{a} = yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$.

c. $\overrightarrow{a} = (x + y)\overrightarrow{i} + (x + z)\overrightarrow{j} + (z + x)\overrightarrow{k}$.

Lời giải. a. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 6x - 20y) \neq 0$$

nên trường đã cho không phải là trường thế.

b. Ngoài cách tính $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{a}$, sinh viên có thể dễ dàng nhận thấy tồn tại hàm thế vị $u = xyz$ nên $\overrightarrow{a}$ là trường thế.

c. Ta có

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{a} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$$

nên $\overrightarrow{a}$ là trường thế. Hàm thế vị được tính theo công thức 6.5:

$$\begin{aligned} u &= \int_{x_0}^{x} F_x(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_y(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_z(x, y, t)dt + C \\ &= \int_0^x tdt + \int_0^y (x + 0)dt + \int_0^z (t + y)dt + C \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2} + yz + C \end{aligned}$$

■

Bài tập 6.7. Cho $\overrightarrow{F} = xz^2\overrightarrow{i} + {}^2\overrightarrow{j} + zy^2\overrightarrow{k}$. Tính thông lượng của $\overrightarrow{F}$ qua mặt cầu S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hướng ra ngoài.

Lời giải. Theo công thức tính thông lượng 6.3 ta có

$$\phi = \iint\limits_S xz^2dydz + yx^2dxdz + zy^2dxdy$$

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có

$$\phi = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

Thực hiện phép đổi biến trong toạ độ cầu

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}, J = -r^2\sin\theta$$

ta có

$$\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^2.r^2\sin\theta dr = \frac{4\pi}{5}$$

Bài tập 6.8. Cho $\overrightarrow{F} = x(y+z)\overrightarrow{i} + y(z+x)\overrightarrow{j} + z(x+y)\overrightarrow{k}$ và L là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 + y = 0$ và nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \ge 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\overrightarrow{F}$ dọc theo L bằng 0.

Lời giải. Theo công thức tính lưu số 6.4

$$I = \oint\limits_L x(y+z)dx + y(z+x)dy + z(x+y)dz$$

Áp dụng công thức Stokes ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} dydz + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix} dzdx + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint\limits_S (z-y)dydz + (x-z)dzdx + (y-x)dxdy \\ &= 0 \text{ (theo bài tập 5.11).} \end{aligned}$$

■