UNISINOS

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
Ciências Exatas e Tecnológicas
Métodos Numéricos - Horário 42 - Profª Zeliane
1ºTeste -Valor: 3,0 - Data: 09/09/2015

Nomes: Vitor Werner de Borges Nota: 3,0

Questão 1: (1,5 pontos) Considerando a função $y = \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 3sen(x)$:

a) Determine o intervalo onde se localiza sua **menor raiz positiva**, construindo um gráfico no MATLAB;
b) Calcule esta raiz, com seis casas decimais exatas, construindo um programa no MATLAB para o método de Newton-Raphson. Justifique a escolha da aproximação inicial.

a) $\boxed{\left(0, \frac{1}{2}\right)}$ C

b) $y = e^{x/2} - 3\,sen(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{2}e^{x/2} - 3\cos(x) \longrightarrow y'' = \frac{1}{4}e^{x/2} + 3\,sen(x)$ C C

$x_1 = 0{,}4 \longrightarrow f(0{,}4) \cdot f''(0{,}4) > 0 \quad \therefore$ x_1 serve para a aproximação (cálculo dino no Matlab) C

$\boxed{\bar{x} = 0{,}424907}$ C

Questão 2: (1,5 pontos) Considerando a função $f(x) = x^5 - 10x - 5$:

a) Determine o intervalo onde se localiza sua **maior raiz negativa**, construindo um gráfico no MATLAB;
b) Calcule esta raiz, com seis casas decimais exatas, construindo um programa no MATLAB para o método da Iteração Linear. Justifique a escolha da Função de Iteração.

a) $\boxed{(-1, 0)}$ C

b) $0 = x^5 - 10x - 5 \longrightarrow 10x = x^5 - 5 \longrightarrow x = \frac{x^5 - 5}{10} = F(x)$ C

$F'(x) = \frac{5x^4}{10} - 0 = \frac{x^4}{2}$

$\boxed{F(x) = \frac{x^5 - 5}{10} \longrightarrow F'(x) = \frac{x^4}{2}}$ C

i) $F(x)$ e $F'(x)$ são contínuas em $(-1, 0)$ ✓
ii) $|F'(x)| \leq 1, \forall x \in (-1, 0)$ ✓

$\therefore F(x)$ é uma função de iteração (cálculo dino no matlab) C

$\boxed{\bar{x} = -0{,}503227}$ C

OBS: Enviar os programas construídos em um único arquivo para o e-mail zeliane@unisinos.br

UNISINOS

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS – UNISINOS
Ciências Exatas e Tecnológicas
Métodos Numéricos – Horário 42 – Profª Zeliane
Grau A –Valor: 7,0 - Data: 30/09/2015

Nome: Vitor Werner de Vargas Nota: 7,0

Questão 1: (1,7 pontos) Calcule pelo método de Newton-Raphson, a raiz da função $y = \ln(2x) + x^2 - 0{,}88$, localizada no intervalo (0,5;1), com duas casas decimais exatas. Justifique a escolha da aproximação inicial.

$\to \varepsilon = 0{,}5.10^{-2}$

1,7

$$y' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} + 2x = \boxed{\frac{1}{x} + 2x} \ C \longrightarrow y'' = \boxed{\frac{-1}{x^2} + 2} \ C$$

Como $y' > 0, \forall x \in (1/2, 1), \exists$ uma única $\bar{x} \in (1/2, 1)$ ✓

$x_1 = 0{,}8 \longrightarrow \underset{+}{f(0{,}8)} . \underset{+}{f''(0{,}8)} > 0$ C $\therefore$ $x_1 = 0{,}8$ pode ser uma aproximação inicial, ✓

$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert < 0{,}5.10^{-2} \to \varepsilon$
$x_n = x_1 = 0{,}8$	— " —
$x_2 = 0{,}719$	$0{,}081 > \varepsilon$
$x_3 = 0{,}719$	$0 < \varepsilon$ ✓

$\longrightarrow \boxed{\bar{x} = 0{,}71}$ C

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}71) = -0{,}02 \\ f(0{,}719) = 2.10^{-4} \end{array}\right\} \cong 0 \ ✓$$

Questão 2: (1,7 pontos) Calcule pelo método de Iteração Linear, a maior raiz negativa da função $f(x) = x^3 - 12x - 5$, com erro menor que 10^{-2}. Justifique a escolha da Função de Iteração.

$\varepsilon = 10^{-2} = 0{,}01$

1,7

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

$\longrightarrow I = (-1,0)$ C

$f'(x) = 3x^2 - 12 \longrightarrow$ Como $f'(x) < 0 \ \forall x \in (-1,0)$, $\exists$ uma única $\bar{x} \in (-1,0)$ ✓ C

$0 = x^3 - 12x - 5 \longrightarrow x = \boxed{\frac{x^3-5}{12} = F_1(x)}$ C $\longrightarrow \boxed{F_1'(x) = \frac{3}{12}x^2 = \frac{x^2}{4}}$ C

i) $F_1(x)$ e $F_1'(x)$ são contínuas $\forall x \in (-1,0)$ ✓ C

ii) $|F_1'(x)| < 1 \ \forall x \in (-1,0)$ ✓ C

$x_{n+1} = \frac{(x_n)^3 - 5}{12}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert < 0{,}01$
$x_n = x_1 = -0{,}4$	—— // ——
$x_2 = -0{,}422$	$0{,}022 > 0{,}01$
$x_3 = -0{,}423$	$0{,}001 < 0{,}01$

$\longrightarrow \boxed{\bar{x} = -0{,}423}$ C

$f(-0{,}42) = -0{,}03 \cong 0$ ✓

Questão 3: (1,8 pontos) Encontre, se possível, as duas primeiras soluções do sistema $\begin{cases} 0{,}1x+7y-0{,}3z=-19{,}3 \\ 0{,}3x-0{,}2y+10z=71{,}4 \\ 3x-0{,}1y-0{,}2z=7{,}85 \end{cases}$ pelo método de Gauss-Seidel, usando como aproximação inicial o vetor nulo.

1,8

$\alpha_1 = \frac{7{,}3}{0{,}1} > 1$ / $\alpha_2 = \frac{10{,}3}{0{,}2} > 1$ C / $\alpha_3 = \frac{3{,}1}{0{,}2} > 1$

∴ não se tem certeza que o sistema convergirá/

$$\left.\begin{array}{l} 3x-0{,}1y-0{,}2z=7{,}85 \\ 0{,}1x+7y-0{,}3z=-19{,}3 \\ 0{,}3x-0{,}2y+10z=71{,}4 \end{array}\right\} \quad W^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = \frac{0{,}3}{3} < 1$ / $\alpha_2 = \frac{0{,}4}{7} < 1$ / $\alpha_3 = \frac{0{,}5}{10} < 1$ C

∴ o sistema convergirá/

$x = [7{,}85 + 0{,}1y + 0{,}2z]/3$ $\quad y = [-19{,}3 - 0{,}1x + 0{,}3z]/7$ $\quad z = [71{,}4 - 0{,}3x + 0{,}2y]/10$

$$\left.\begin{array}{l} x^{(1)} = 7{,}85/3 = 2{,}617 \text{ C} \\ y^{(1)} = [-19{,}3 - 0{,}1.(2{,}617)]/7 = -2{,}795 \text{ C} \\ z^{(1)} = [71{,}4 - 0{,}3.(2{,}617) + 0{,}2.(-2{,}795)]/10 = 7{,}006 \text{ C} \end{array}\right\} \quad W^{(1)} = \begin{bmatrix} 2{,}617 \\ -2{,}795 \\ 7{,}006 \end{bmatrix} \text{ C}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{(2)} = [7{,}85 + 0{,}1.(-2{,}795) + 0{,}2.(7{,}006)]/3 = 2{,}991 \text{ C} \\ y^{(2)} = [-19{,}3 - 0{,}1.(2{,}991) + 0{,}3.(7{,}006)]/7 = -2{,}500 \text{ C} \\ z^{(2)} = [71{,}4 - 0{,}3.(2{,}991) + 0{,}2.(-2{,}5)]/10 = 7{,}000 \text{ C} \end{array}\right\} \quad \boxed{W^{(2)} = \begin{bmatrix} 2{,}991 \\ -2{,}5 \\ 7 \end{bmatrix}} \text{ C}$$

$0{,}1.(2{,}991) + 7.(-2{,}5) - 0{,}3.(7) = -19{,}3009 \cong -19{,}3$ ✓

Questão 4: (1,8 pontos) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x-6y-z=-38 \\ -3x-y+7z=-34 \\ -8x+y-2z=-20 \end{cases}$ pelo método de Gauss.

1,8

$$[A^{(0)} \vdots B^{(0)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ -3 & -1 & 7 & -34 \\ -8 & 1 & -2 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 = L_2 + m_{21} \cdot L_1 \\ \to L_3 = L_3 + m_{31} \cdot L_1 \end{array}$$

$m_{21} = -\left(\frac{-3}{2}\right) = 1{,}5$ / C

$m_{31} = -\left(\frac{-8}{2}\right) = 4$ / C

$$[A^{(1)} \vdots B^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ 0 & -10 & 5{,}5 & -91 \\ 0 & -23 & -6 & -172 \end{array}\right]$$

C

$m_{32} = -\left(\frac{-23}{-10}\right) = -2{,}3$ / C

$$[A^{(2)} \vdots B^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -1 & -38 \\ 0 & -10 & 5{,}5 & -91 \\ 0 & 0 & -18{,}65 & 37{,}3 \end{array}\right]$$

C

$-18{,}65z = 37{,}3$

$\boxed{z = -2}$ C

$\to -10y + 5{,}5 \cdot (-2) = -91$

$\boxed{y = 8}$ C

$\to 2x - 6(8) - 1 \cdot (-2) = -38$

$\boxed{x = 4}$ C

$2 \cdot (4) - 6 \cdot (8) - (-2) = \boxed{-38 = -38}$ ✓

$x = 4$

$y = 8$ C

$z = -2$ //

UNISINOS

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
Ciências Exatas e Tecnológicas
Métodos Numéricos - Horário 42 - Profª Zeliane
2ºTeste -Valor: 3,0 - Data: 28/10/2015

Nomes: Vita Werner de Vargas e Vinícius Branquielle Nota: 3,0

Questão 1: Encontre, se possível, a solução do sistema $\begin{cases} x+3y-z+6t=5 \\ -x-y+8z+2t=4 \\ 2x+9y-z-t=12 \\ 7x+3y+2z+t=-2 \end{cases}$ com cinco casas decimais exatas, pelo método de Gauss-Seidel, usando como aproximação inicial o vetor unitário.

Análise de convergência:

$\alpha_1 = \frac{3+1+6}{1} = 10 > 1$

$\alpha_2 = \frac{1+8+2}{1} = 11 > 1$

$\alpha_3 = \frac{2+9+1}{1} = 12 > 1$

$\alpha_4 = \frac{7+3+2}{1} = 12 > 1$

Não se tem certeza de que o sistema irá convergir.

$\begin{cases} 7x+3y+2z+t=-2 \\ 2x+9y-z-t=12 \\ -x-y+8z+2t=4 \\ x+3y-z+6t=5 \end{cases}$

$\alpha_1 = \frac{3+2+1}{7} = \frac{6}{7} < 1$ $\alpha_3 = \frac{1+1+2}{8} = \frac{4}{8} < 1$

$\alpha_2 = \frac{2+1+1}{9} = \frac{4}{9} < 1$ $\alpha_4 = \frac{1+3+1}{6} = \frac{5}{6} < 1$

∴ o sistema converge.

Questão 2: A seguinte tabela relaciona calor específico da água e temperatura:

Temperatura (°C)	25	30	35	40
Calor Específico	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828

a) Calcule o polinômio interpolador para os pontos da tabela acima;

b) Determine o calor específico da água a uma temperatura de 32°C.

$a_0 \cong 1{,}00252$

$a_1 \cong -0{,}00025$

$a_2 = 0{,}0000036$

$a_3 = 0$

a)

$\boxed{c(t) = 0{,}0000036t^2 - 0{,}00025t + 1{,}00252}$

b)

$c(32) = 0{,}0000036.(32)^2 - 0{,}00025.32 + 1{,}00252$

$\boxed{c(32) = 0{,}9982064}$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isolando,

$$x = (-2 - 3y - 2z - t)/7$$

$$y = (12 - 2x + z + t)/9$$

$$z = (4 + x + y - 2t)/8$$

$$t = (5 - x - 3y + z)/6$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -1,18664 \\ 1,68216 \\ 0,49385 \\ 0,27233 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{x = -1,18664 \; ; \; y = 1,68216 \; ; \; z = 0,49385 \; ; \; t = 0,27233}$$ //.

Questão 3: Os dados a seguir referem-se ao crescimento de uma colônia de bactérias num meio de cultura:

Dias desde a inoculação	2	4	6	8	10
Contagem de bactérias (milhares)	112	148	241	363	585

a) Calcule a função de ajuste para os pontos da tabela acima, admitindo-se que o crescimento das bactérias é dado, aproximadamente, por uma função exponencial do tipo $A = a_0 e^{a_1 t}$.

b) Obtenha uma estimativa para o crescimento de bactérias 12 dias desde a inoculação.

a) $a_0 \cong 68,87406$
$a_1 \cong 0,21017$

$$\boxed{y(x) = 68,87406 \cdot e^{0,21017x}}$$ //

C

b) $y(12) = 68,87406 \cdot e^{0,21017 \cdot 12}$

$$\boxed{y(12) \cong 858}$$ //

C

OBS: Enviar os programas construídos em um único arquivo para o e-mail zeliane@unisinos.br

UNISINOS

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
Ciências Exatas e Tecnológicas
Métodos Numéricos - Horário 42 - Profª Zeliane
Grau B -Valor: 7,0 - Data: 25/11/2015

Nome: Nita Werner de Vargas Nota: 7,0

Questão 1: (1,0 ponto) Calcule, pelo método de Newton-Raphson, a raiz da equação $sen(x) - x^2 = 0$, localizada no intervalo $(0,5;1)$ com duas casas decimais exatas. Justifique a escolha da aproximação inicial.

$f(x) = sen(x) - x^2 \to f'(x) = \cos(x) - 2x \to f''(x) = -sen(x) - 2$ C C

1,0 $x_1 = 0,9 \to f(0,9) \cdot f''(0,9) > 0$ ∴ $x_1 = 0,9$ pode ser uma aproximação inicial, C

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert < 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,005 = \varepsilon$
$x_n = x_1 = 0,9$	— // —
$x_2 \cong 0,877$	$\lvert x_2 - x_1 \rvert = 0,023 > \varepsilon$ X
$x_3 \cong 0,877$	$\lvert x_3 - x_2 \rvert = 0 < \varepsilon$ ✓

$\boxed{x' = 0,87}$ C

$f(0,87) = 0,007$

$f(0,877) = -0,0003$ OK

Questão 2: (1,5 pontos) A tabela abaixo mostra o alongamento de uma mola medido em função da carga aplicada:

carga (kg)	2	4	6
alongamento (cm)	1	2,5	5

1,5

Obtenha o polinômio interpolador para os pontos da tabela acima e estime o alongamento para o caso de ser aplicada uma carga de 5 kg.

3 pontos $\therefore$ $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\left.\begin{aligned} P(2) &= a_2 . 4 + a_1 . 2 + a_0 = 1 \\ P(4) &= a_2 . 16 + a_1 . 4 + a_0 = 2,5 \\ P(6) &= a_2 . 36 + a_1 . 6 + a_0 = 5 \end{aligned}\right\}$$ Resolvendo o sistema pelo método de Gauss,

$$[A^{(0)} \vdots B^{(0)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 2,5 \\ 36 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 = L_2 + m_{21} . L_1 \\ \to L_3 = L_3 + m_{31} . L_1 \end{array}$$

$$\boxed{m_{21} = -\left(\frac{16}{4}\right) = -4 \quad \text{C} \qquad m_{31} = -\left(\frac{36}{4}\right) = -9 \quad \text{C}}$$

$$[A^{(1)} \vdots B^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -1,5 \\ 0 & -12 & -8 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \to L_3 = L_3 + m_{32} . L_2 \end{array}$$

C

$$\boxed{m_{32} = -\left(\frac{-12}{-4}\right) = -3 \quad \text{C}}$$

$$[A^{(2)} \vdots B^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -1,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{array}\right]$$

C

$\to \boxed{a_0 = 0,5 = \frac{1}{2}}$ C $\to -4a_1 - \frac{3}{2} = -1,5 = -\frac{3}{2}$

$\boxed{a_1 = 0}$ C

$4a_2 + 0 + \frac{1}{2} = 1 \to \boxed{a_2 = \frac{1}{8}}$ C

$\boxed{P(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{2}}$ C // $\to$ $\boxed{P(5) = \frac{25}{8} + \frac{1}{2} = 3,625 \text{ cm de alongamento}}$ C //

Questão 3: (1,5 pontos) A tabela abaixo mostra o resultado de medidas experimentais obtidas para se estudar a relação do tempo de germinação de sementes de uma dada espécie em função da temperatura média do solo:

Temperatura (°C)	3	6	7	8	14	16
Germinação (dias)	41	29	27	19	10	11

$\rightsquigarrow m = 6$ C

1,5

Calcule a função de ajuste para os dados fornecidos na tabela acima, admitindo-se que a germinação destas sementes é dada por uma função potencial. A seguir, obtenha o tempo de germinação destas sementes em um solo com temperatura média de 20°C.

Potencial: $y = a_0 . x^{a_1} \rightarrow \ln(y) \cong \ln(a_0) + a_1 . \ln(x)$

OK

$$\therefore a_1 = \frac{m \sum \ln x . \ln y - \sum \ln x . \sum \ln y}{m \sum (\ln x)^2 - (\sum \ln x)^2} \; ; \; \ln(a_0) = \frac{\sum \ln y - (\sum \ln x) . a_1}{m}$$

ln x	1,099	1,792	1,946	2,079	2,639	2,773
ln y	3,714	3,367	3,296	2,944	2,303	2,398

$\sum \ln x = 12,328$ C

$(\sum \ln x)^2 \cong 151,980$ C

$\sum (\ln x)^2 \cong 27,182$ C

$\sum \ln y = 18,022$ C

$\sum \ln x . \ln y \cong 35,377$ C

$$a_1 = \frac{6 . 35,377 - 12,328 . 18,022}{6 . 27,182 - 151,980} \cong \boxed{-0,892 = a_1}$$ C

$$\ln(a_0) = \frac{18,022 - 12,328 . (-0,892)}{6} \cong 4,836 \cong \ln a_0$$

$$\boxed{a_0 \cong e^{4,836} \cong 125,96}$$ C

$y = a_0 . x^{a_1} = 125,96 . x^{-0,892} \rightarrow \boxed{y = \frac{125,96}{x^{0,892}}}$ C // $\rightarrow y(20) = \frac{125,96}{20^{0,892}} \cong 8,704$

$\boxed{y(20) \cong 8,704 \text{ dias}}$ // C

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \quad C$$

1,5

Questão 4: (1,5 pontos) Determine o valor da integral $I = \int_1^2 \frac{e^x}{\ln(1+x)}dx$, usando a Regra de Simpson com $n = 8$. $\rightarrow P = 9$

X =	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875	2
Y	3,923	4,086	4,304	4,572	4,891	5,262	5,689	6,175	6,726
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$I = \frac{1}{24} \cdot \left[3{,}923 + 6{,}726 + 4 \cdot (4{,}086 + 4{,}572 + 5{,}262 + 6{,}175) + 2 \cdot (4{,}304 + 4{,}891 + 5{,}689)\right]$$

$$\cong 5{,}033 \longrightarrow \boxed{I \cong 5{,}033 \ \cancel{u.a.}} \quad C$$

$m = \frac{0{,}75 - 0}{0{,}25} = 3 \quad C$

$\therefore \boxed{i = 1 : 3}$

1,5

Questão 5: (1,5 pontos) Ache aproximações para o PVI: $\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y} \\ y(0) = -2 \end{cases}$, no intervalo $[0;0{,}75]$, com $h = 0{,}25$. $\rightarrow \boxed{y(0) = -2}$

$\boxed{i = 1} \rightarrow y_2 = y_1 + h \cdot \left(\frac{2x_1}{y_1 + (x_1)^2 \cdot y_1}\right) = -2 + 0{,}25 \cdot (0) = -2$ C

$x_2 = x_1 + h = 0 + 0{,}25 = 0{,}25$ C $\quad \therefore \boxed{y(0{,}25) = -2}$ C

$\boxed{i = 2} \rightarrow y_3 = y_2 + h \cdot \left(\frac{2x_2}{y_2 + (x_2)^2 \cdot y_2}\right) = -2 + 0{,}25 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}25}{-2 + (0{,}25)^2 \cdot (-2)} \cong -2{,}059$ C

$x_3 = x_2 + h = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ C $\quad \therefore \boxed{y(0{,}5) = -2{,}059}$ C

$\boxed{i = 3} \rightarrow y_4 = -2{,}059 + 0{,}25 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0{,}5}{-2{,}059 - 2{,}059 \cdot 0{,}5^2}\right) = -2{,}156$ C

$\therefore \boxed{y(0{,}75) = -2{,}156}$ C

$x_4 = x_3 + h = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$ C