Resolução Numérica de Equações Não-Lineares

Em muitos problemas de Ciência e Engenharias há a necessidade de se determinar um número ξ para o qual uma função $f(x)$ seja zero, ou seja, $f(\xi) = 0$. Este número é chamado *raiz da equação* $f(x) = 0$ *ou zero da função* $f(x)$.

Em alguns casos, por exemplo, de equações polinomiais, os valores de x que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexos. Nós, no entanto, estaremos interessados somente nos zeros reais de $f(x)$.

Graficamente, os zeros reais são representados pelas abscissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

Sabemos que, para algumas equações, como por exemplo, as equações polinomiais de 2º grau, existem fórmulas explícitas (fórmula de *Báskara*) que dão as raízes em função dos coeficientes. No entanto, no caso de polinômios de grau mais alto e no caso de funções mais complicadas, é praticamente impossível se achar os zeros exatamente. Por isso, temos de nos contentar em encontrar apenas aproximações para esses zeros; mas isto não é uma limitação muito séria, pois, com os métodos que veremos, conseguimos, a menos de limitações de máquinas, encontrar os zeros de uma função com qualquer precisão prefixada.

Embora estes métodos não forneçam raízes exatas, elas podem ser calculadas com a exatidão que o problema requeira, desde que certas condições sobre f sejam satisfeitas.

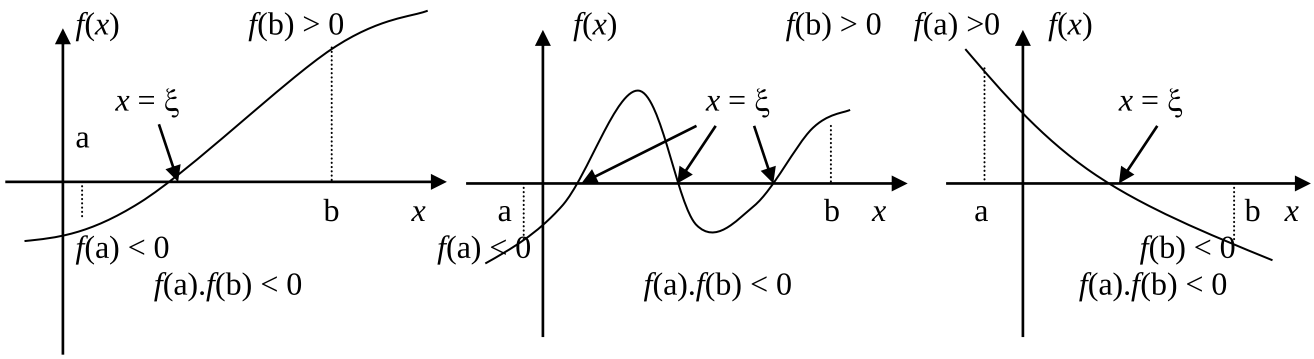
Para se calcular uma raiz, duas etapas devem ser obedecidas:

a) Isolar a raiz, ou seja, achar um intervalo (a, b), o menor possível, que contenha uma e somente uma raiz da equação $f(x) = 0$;
b) Melhorar o valor da raiz aproximada, isto é, refiná-la até o grau de exatidão requerido.

☞ *Isolamento das Raízes*

Teorema: Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo [a, b]. Se $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo, isto é, $f(a).f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é raiz de $f(x)$.

Graficamente,



No caso das equações algébricas, para termos uma boa indicação sobre o número de raízes reais existentes no intervalo (a, b), podemos usar o **Teorema de Bolzano**.

⇨ **Teorema de Bolzano:** Seja $f(x) = 0$, uma função polinomial com coeficientes reais e $x = \xi \in$ (a, b).

(i) Se $f(a).f(b) < 0$, então existe um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo [a, b].

(ii) Se $f(a).f(b) > 0$, então existe um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existem raízes reais no intervalo [a, b].

Já para as equações transcendentes, a determinação do número de raízes geralmente é quase impossível, pois algumas equações podem ter um número infinito de raízes. O método mais simples de isolar é o método gráfico.

Uma forma de se isolar as raízes de $f(x)$ usando os resultados anteriores é tabelar $f(x)$ para vários valores de x e analisar as mudanças de sinal de $f(x)$ e o sinal da derivada nos intervalos em que $f(x)$ mudou de sinal. A raiz ξ será definida e única se a derivada $f'(x)$ existir e preservar o sinal em [a, b], isto é, $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para $a < x < b$.

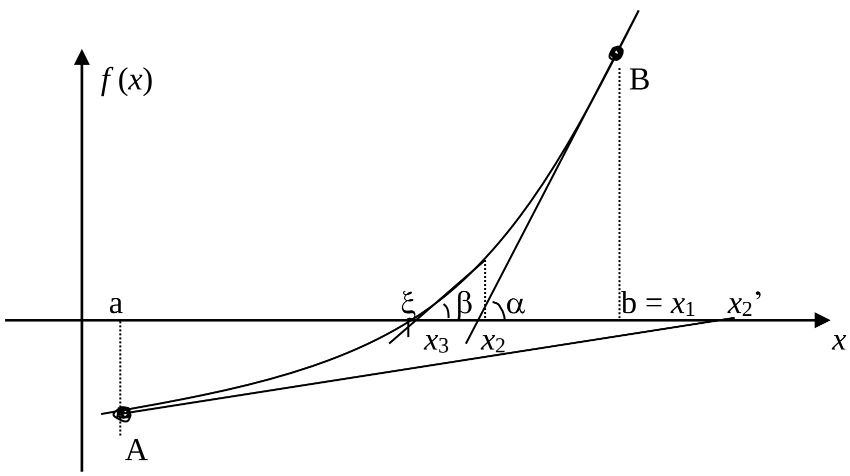
Exemplo: a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

Estudaremos dois métodos numéricos de refinamento de raiz. A forma como se efetua o refinamento é que diferencia os métodos. Os dois métodos pertencem à classe dos métodos iterativos.

☞ ***Método de Newton (Newton–Raphson)***

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e ξ o seu único zero neste intervalo; as derivadas $f'(x)$ ($f'(x) \neq 0$) e $f''(x)$ devem também ser contínuas.



A fim de se obter uma aproximação da raiz ξ, traça-se, a partir do ponto B (x_1, $f(x_1)$), uma reta tangente à curva $y = f(x)$, que intercepta o eixo dos x em x_2. Do ponto (x_2, $f(x_2)$) traça-se outra reta tangente à curva que corta o eixo dos x em x_3. O processo se repete até que se encontre $\xi = x_n$ com a tolerância requerida.

Geometricamente, temos que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

donde

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - x_2$$

e

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Da mesma forma para tg β, teremos

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Então, por indução, temos que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

que é conhecida como fórmula de Newton ou método das tangentes.

⇨ **Escolha de x_1:**

Pela figura acima, vê-se que traçando a tangente do ponto A, pode-se encontrar um ponto $x_2' \notin (a, b)$ e o método de Newton pode não convergir. Por outro lado, escolhendo-se $b = x_1$ o processo convergirá. É condição suficiente para a convergência do método de Newton que $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal em (a,b) e x_1 seja tal que $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$.

Em geral, pode-se afirmar que o método de Newton converge desde que x_1 seja escolhido "suficientemente próximo" da raiz ξ.

⇨ **Critério de Parada:**

Mede-se a convergência do método de Newton pelo teste do erro absoluto:

$$|x_{n+1} - x_n| = \mathbf{E}_n \leq \varepsilon.$$

onde $\mathbf{E}_n$ será o erro máximo da aproximação com relação a raiz exata. Logo, o processo para quando o $\mathbf{E}_n \leq \varepsilon$, onde ε é a tolerância.

<u>Exemplo 1</u>: Use o método de Newton para calcular a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo (0,1), com três casas decimais exatas.

<u>Exemplo 2</u>: Calcule pelo menos uma raiz real da equação $2x - senx + 4 = 0$, com duas casas decimais exatas, usando o método de Newton-Raphson.