Introdução ao Estudo da Matemática Numérica

Natureza e Objetivos da Matemática Aplicada

Com o desenvolvimento dos computadores e calculadoras nas últimas décadas, a aplicação de métodos numéricos à resolução de problemas técnicos e científicos teve um notável crescimento, devido principalmente a sensível melhora em exatidão e tempo de resposta.

Entende-se por Matemática Numérica o desenvolvimento de métodos operacionais construtivos[1] para a resolução de problemas que se deixam representar em forma matemática.

A Matemática Numérica tem por objetivos estudar processos numéricos (algoritmos) para a solução de problemas visando a máxima economia em termos dos fatores envolvidos.

Algoritmo

O algoritmo é uma seqüência de instruções ordenadas de maneira a dar em seu decurso uma solução para um problema específico.Tais instruções devem aparecer em um número finito e ser executáveis mecanicamente com uma quantidade limitada de esforço.

Um algoritmo poderá depender ou não de informações iniciais (entradas), mas terá obrigatoriamente que produzir uma informação final (saída).

Algoritmos Numéricos

As principais características que os algoritmos numéricos devem apresentar são:

- *Inexistência de Erro Lógico*: se baseia na exigência de que:
  - haja um ponto de partida, mesmo não havendo entradas;
  - haja finitude das instruções e continuidade de uma em outra até uma instrução de parada, tendo havido, no mínimo, uma saída.

  Isto implica em uma previsão completa de todas as tendências do processo.

- *Não Ter Dados Dependentes da Máquina Utilizada:* ou seja, o programa deve ser executável em diferentes máquinas.

---

[1] É todo método que envolve apenas um sistema de operações elementares dadas "a priori", utilizadas em um número finito de vezes e que "construirão" todo o processo de cálculo envolvido.

Dentro da Matemática Numérica foi escolhido o sistema de operações aritméticas, devido à facilidade de implementação automática, e possibilidade de, em se combinando, serem capazes de "construir" métodos mais complexos.

- *Inexistência de Erro Aritmético:* se baseia na exigência que não devam ocorrer valores menores (*underflow*) ou maiores (*overflow*), dos que os possíveis de serem representados por uma máquina.

- *Quantidade Finita de Cálculos:*ou seja, o algoritmo deve terminar após um número finito de passos.

- *Existência de Um Critério de Exatidão:* em virtude das limitações de precisão da máquina e exatidão desta e do método, todo resultado deverá enquadra-se em um critério de exatidão, de modo a possibilitar que um resultado aceitável seja escrito na forma: Resultado = Valor Aproximado ± Limite de Erro.

- *Com Precisão Infinita os Limites de Erro Devem Convergir a Zero:* esta exigência estabelece a dependência entre a solução ideal e a solução de máquina.

- *Eficiência*[2]*:* ou seja, produz a melhor resposta (mais vantajosa) em termos de custo operacional.

Precisão e Exatidão das Máquinas Digitais

Os conceitos de precisão e exatidão são distintos um do outro. A precisão de uma máquina informa sobre o número de dígitos significativos da máquina (mantissa), sendo este fixo para uma máquina. A exatidão, ao contrário, define a perfeição do resultado (bom ou ruim), que depende de diversos fatores, entre eles a precisão da máquina, a base do sistema de numeração, o algoritmo, etc.

Assim, para uma boa qualidade do resultado final é necessário se ter, uma máquina de boa precisão e um algoritmo de boa exatidão.

Erros

A obtenção de uma solução numérica para um problema físico por meio da aplicação de métodos numéricos nem sempre fornece valores que se encaixam dentro de limites razoáveis. Esta afirmação é verdadeira mesmo quando se aplica um método adequado e os cálculos são efetuados de uma maneira correta.

Esta diferença é chamada de erro e é inerente ao processo, não podendo, em muitos casos, ser evitada.

---

[2] Em Matemática Numérica, é necessário entender a diferença existente entre eficiência e eficácia dos processos de cálculo. Eficácia é a qualidade do processo em produzir uma resposta correta para o problema dado, enquanto que eficiência, além de intuir a idéia anterior, exige que o processo seja econômico em tempo, exatidão, volume de dados de referência, volume de memória, dificuldade de representação, etc...

Para facilitar a apresentação das fontes de erros, o processo de solução de um problema físico, por meio da aplicação de métodos numéricos, é representado abaixo de uma forma geral.

$$\boxed{\textit{PROBLEMA FÍSICO}} \xrightarrow{\textit{MODELAGEM}} \boxed{\textit{MODELO MATEMÁTICO}} \xrightarrow{\textit{RESOLUÇÃO}} \boxed{\textit{SOLUÇÃO}}$$

Duas fases podem ser identificadas no diagrama anterior:

⇨ Modelagem – é a fase de obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento do sistema físico em questão.

⇨ Resolução – é a fase de obtenção da solução do modelo matemático através da aplicação de métodos numéricos.

➢ *Erros na Fase de Modelagem*

Ao tentar se aproximar um fenômeno físico por meio de um modelo matemático, raramente se tem uma descrição correta deste fenômeno. Normalmente, são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo matemático com o qual se possa trabalhar, provocando desta maneira os erros que chamamos **inerentes**.

Os erros **inerentes** aparecem na criação ou simplificação de um modelo matemático de determinado sistema, ou ainda nas medidas, em geral. Os valores de medidas como tempo, temperatura, distância, intensidade luminosa, etc. são obtidos de instrumentos que têm precisão limitada. Sobre tais erros o analista numérico não tem meios de evitá-los ou mesmo minimizar seu efeito.

➢ *Erros na Fase de Resolução*

Para a resolução de modelos matemáticos, muitas vezes torna-se necessária a utilização de instrumentos de cálculo que necessitam, para seu funcionamento, que sejam feitas certas aproximações. E tais aproximações podem gerar erros de **truncamento**, erros de **arredondamento** ou ainda erros de **propagação**.

Os erros de **truncamento** são os erros cometidos quando se substitui qualquer processo infinito por um processo finito ou discreto. Por exemplo, suponha que queiramos calcular a constante e que é dada por:

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

Se quisermos obter o valor de e, por esta série teremos de efetuar o cálculo de várias parcelas e depois parar, ou seja, truncando a série cometemos um erro causado pelo abandono das parcelas que não foram somadas.

Estes processos infinitos são muito utilizados na avaliação de funções matemáticas, tais como, exponenciação, logaritmos, funções trigonométricas e várias outras que uma máquina pode ter.

Os erros de **arredondamento** surgem quando trabalhamos com máquina de calcular ou com o computador. A representação de um número depende da base escolhida ou disponível na máquina em uso e do número máximo de dígitos usados na sua representação. A base decimal é a que mais empregamos atualmente, porém o computador opera normalmente no sistema binário e representa os números, no sistema denominado *aritmética de ponto flutuante.*[3]

Os arredondamentos podem ser de dois tipos:

i) arredondamento do **Tipo Corte** (cancelamento)

ii) arredondamento para o **número mais próximo de máquina.**

Os erros de **propagação** são aqueles provenientes de outros erros (dos dados em uma expressão, das operações aritméticas com ponto flutuante, truncamento, arredondamento) ocorridos anteriormente nas operações.

➢ *Medida de Erros*

---

[3] Para mudar da **base 2 para a base 10**, basta multiplicar o dígito binário por uma potência de 2 adequada.

Por exemplo: $1011_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_{10}$

$10{,}01_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 3{,}25_{10}$

Para converter um número **da base 10 para a base 2,** tem–se que aplicar um processo para a parte inteira (divisões sucessivas) e outro para a parte fracionária (multiplicações sucessivas).

Por exemplo: $13{,}25_{10} = 13_{10} + 0{,}25_{10} = 1101_2 + 0{,}01_2 = 1101{,}01_2$

13 |2	0,25	0,50
1 6 |2	x 2	x 2
0 3 |2	0,50	1,00
1 1		

No sistema de **aritmética de ponto flutuante,** o número r é representado na forma:

$$r = \pm\left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{d_t}{\beta^t}\right) \times \beta^e$$

, onde: β é a base em que a máquina opera, t é o número de dígitos significativos do sistema de representação na mantissa, comumente chamado de precisão da máquina e e é o expoente no intervalo $[l,u]$.

Por exemplo: Numa máquina de calcular cujo sistema de representação utilizado tenha $\beta = 2$, $t = 10$, $l = -15$ e $u = 15$, o número 25 na base decimal é, assim representado: $25_{10} = 11001_2 = 0{,}11001 \times 2^5 = 0{,}11001 \times 2^{101}$

$$\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}}\right) \times 2^{101}$$

ou, de forma mais compacta:

0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Tendo em vista que na aplicação dos métodos numéricos trabalhamos com aproximações, precisamos estabelecer algumas maneiras de medir ou, como na maioria das vezes, delimitar o erro de valores aproximados.[4]

A diferença entre o valor arredondado e o valor exato pode ser medida pelo **erro absoluto** ou pelo **erro relativo**.

Definimos como **erro absoluto**, que é indicado por $\mathbf{E}_A$, o módulo da diferença entre o valor exato x e o valor aproximado $\bar{x}$:

$$\mathbf{E}_A = \left|x - \bar{x}\right|.$$

Dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos, o erro absoluto não é suficiente para descrever a precisão de um cálculo. Por esta razão, o erro relativo é amplamente empregado.

Definimos como **erro relativo**, que é indicado por $\mathbf{E}_R$, como o quociente entre o erro absoluto e o módulo do valor exato:

$$\mathbf{E}_R = \frac{\mathbf{E}_A}{|x|} = \left|\frac{x - \bar{x}}{x}\right| = 1 - \left|\frac{\bar{x}}{x}\right| \Rightarrow 0 \le \mathbf{E}_R \le 1$$

O **erro relativo percentual**, que é indicado por $\mathbf{E}_P$ é dado pelo produto do erro relativo por 100:

$$\mathbf{E}_P = (\mathbf{E}_R.100)\ \%$$

Como em problemas práticos, o valor exato não é conhecido, é necessário, em geral, obter limites para os erros relativo e absoluto.

__Exemplo:__ Determine $\mathbf{E}_A$,$\mathbf{E}_R$ e o $\mathbf{E}_P$ de $\sqrt{2} = 1{,}41$, considerando x = valor da máquina.

Podemos estimar o **erro de limitação ou arredondamento** de um número em ponto flutuante através de $\mu = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^{1-t}, \text{no caso de arredondamento para o número mais próximo} \\ \beta^{1-t}\ \ , \text{para outros casos de arredondamento (corte, etc)} \end{cases}$,

[4] O erro nunca será "calculado" mas sim avaliado.

onde t é a precisão da máquina para a base β. μ é dito unidade de arredondamento e dá a medida da exatidão de representação dos números de ponto flutuante.

➢ *Algarismos Significativos Corretos*

Quando obtemos um resultado de uma expressão numérica avaliada numa máquina e não podemos saber o seu valor exato, torna-se impossível calcular o erro relativo ou absoluto. Precisamos, no entanto, avaliar o resultado, ou seja, saber quão exato é o resultado. Vejamos alguns conceitos que nos auxiliarão nesta tarefa.

Consideramos **algarismos significativos**, num sistema decimal, os algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e o 0 (zero) caso esteja precedido de um outro significativo (com ou sem vírgula).

Exemplo: Em 0.0087035 temos 5 algarismos significativos; em 30.457 temos 5 algarismos significativos; em 23.000 temos 5 algarismos significativos.

Algarismos significativos corretos, denotados por **ASC**, são os algarismos de um valor aproximado $\bar{x}$ que coincidem com os algarismos do valor exato x até que ocorra a primeira discrepância.

O **ASC** pode ser calculado por $\mathbf{ASC}(\bar{x}) = -(0{,}3 + \log(\mu + \mathbf{E_R}))$ e permite analisar quantitativamente a aproximação do número x.

Na prática, não conhecemos o valor exato da grandeza x. Assim, o que fazemos, ao tomar duas medidas consecutivas de x é calcular a grandeza $D(x_i, x_{i+1}) = -\left(0{,}3 + \log\left(\mu + \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_i|}\right)\right)$, que nos dá o número de algarismos significativos corretos de x_{i+1} com relação ao valor x_i.