

机场出租车管理优化与司机决策模型——以广州市为例

摘要

随着我国经济的高质量发展，中国民航业在未来相当长的一段时间内仍将保持较高的发展速度^[1]。作为机场与城市间联系枢纽的陆侧公共交通，出租车是其主要组成部分之一。国内多数机场都是将送客（出发）与接客（到达）通道分开，从而送客到机场的出租车司机往往需要做出合理决策以使自己的收益最最大化。对于问题 1，我们建立了出租车司机的成本-收益决策模型，给出了司机的选择策略，给出了司机的选择策略；对于问题 2，我们收集了广州白云机场及广州市出租车的相关数据，结合问题 1 的模型，给出了白云机场出租车司机的选择方案，并对模型的合理性进行了分析；对于问题 3，我们建立了M/M/s/∞多服务台排队模型，给出了乘车区长度不同、实际服务率不同情况下的合理安排策略；对于问题 4，我们通过建立线性规划模型确定了长短途载客出租车的收益差值范围，然后通过对短途载客出租车优先权因子 γ 的枚举检验，给出了一个合理的“优先”安排方案。

具体来说，对于问题 1，我们首先建立了成本-收益决策模型，求得了出租车司机作出不同决策的转折阈值 β_t ，即当司机观测到 $\frac{N_{(t)}^{taxi}}{N_{(t)}^{tourist}} > \beta_t$ ，司机选择进入

“蓄车池”等待；当司机观测到 $\frac{N_{(t)}^{taxi}}{N_{(t)}^{tourist}} < \beta_t$ ，司机选择空载回到市区。接着我们建立了一个民航旅客吞吐量季节性时间序列模型，得出民航旅客吞吐量季节性变化规律——即在“夏秋航季”（当年 3 月至 10 月），尤其是 7、8、10 月，机场吞吐量达到一年之中的“高峰期”，从而对司机的决策策略作进一步的优化——司机在机场吞吐量高峰期应该更倾向于选择策略(A)进入蓄车池等待。

对于问题 2，我们以民航旅客吞吐量位居全国第三的广州市为例，通过检索各官方门户网站以及相关论文搜集了关于机场和出租车的数据，包括全国月度民航旅客吞吐量、广州市交通月报、广州白云机场某天航班时刻表等。利用这些数据我们计算出了问题 1 所建立模型的各参数的估计值，给出了白云机场出租车司机的决策策略，并对问题 1 中的模型进行了合理性检验。最后我们结合广州市实际情况，给出了机场出租车管理优化的建议。

对于问题 3，我们建立了M/M/s/∞多服务台排队模型，根据在不同机场乘车区车道长度 L ，以及不同实际服务率 μ 的情况下，通过模型的求解，得出合理安排策略，即在实际安排中使 $\lambda = \mu(2 \times \left\lceil \frac{L}{40} \right\rceil + 2)$ 。

对于问题 4，我们通过线性规划模型，结合问题 2 的数据及假设，确定了长短途载客出租车的收益差值范围。然后利用 matlab 程序对优先权因子 γ 进行合理枚举检验，最后确定 γ 的合理取值范围，给出了一个合理的优先安排方案，即机场出租管理人员放行出租车进入乘车区时，按1： γ 的比例分别将长途载客出租车和短途载客出租车蓄车池中的出租车放行进入乘车区。

最后，我们给出了本文所涉及模型及方法的评价与推广。

关键词：成本-收益决策模型、决策转折阈值、时间序列模型、M/M/s/∞多服务台排队模型、优先权因子

一、问题重述

大多数乘客下飞机后要去市区（或周边）的目的地，出租车是主要的交通工具之一。送客到机场的出租车司机都将会面临两个选择：

(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。出租车必须到指定的“蓄车池”排队等候，依“先来后到”排队进场载客，等待时间长短取决于排队出租车和乘客的数量多少，需要付出一定的时间成本。

(B) 直接放空返回市区拉客。出租车司机会付出空载费用和可能损失潜在的载客收益。

在某时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数是司机可观测到的确定信息。乘客要到指定的“乘车区”排队，按先后顺序乘车。机场出租车管理人员负责“分批定量”放行出租车进入“乘车区”，同时安排一定数量的乘客上车。

请你们团队结合实际情况，建立数学模型研究下列问题：

(1) 分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，综合考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益，建立出租车司机选择决策模型，并给出司机的选择策略。

(2) 收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，给出该机场出租车司机的选择方案，并分析模型的合理性和对相关因素的依赖性。

(3) 在某些时候，经常会出现出租车排队载客和乘客排队乘车的情况。某机场“乘车区”现有两条并行车道，管理部门应如何设置“上车点”，并合理安排出租车和乘客，在保证车辆和乘客安全的条件下，使得总的乘车效率最高。

(4) 机场的出租车载客收益与载客的行驶里程有关，乘客的目的地有远有近，出租车司机不能选择乘客和拒载，但允许出租车多次往返载客。管理部门拟对某些短途载客再次返回的出租车给予一定的“优先权”，使得这些出租车的收益尽量均衡，试给出一个可行的“优先”安排方案。

二、问题分析

（一）问题 1 的分析

问题 1 属于经济活动上的决策问题，对于解决此类问题，首先要建立决策者的基于需求量和供应量的成本-收益模型，根据“最大化单位时间净利润”原则选择最优策略。在机场出租车司机决策的情景下，需求量为机场乘坐出租车的乘客数量，供应量为机场等待载客的出租车数量。

为优化决策模型，辅助司机作出更合理的需求量预测，需要进一步研究机场客流量的变化规律。根据中国民用航空局公布的主要运输生产指标统计，分析发现全国各年度各月份的民航旅客吞吐量的时间序列具有明显的季节周期规律性，符合季节性时间序列模型。

综上，对于问题 1，我们首先建立一个出租车司机的成本-收益决策模型，记作模型 I，然后建立一个民航旅客吞吐量季节性时间序列模型，记作模型 II，分析给出对司机的决策建议。

（二）问题 2 的分析

问题 2 属于搜集相关数据并代入检验模型的问题。首先我们确定以民航旅客吞吐量位居全国第三的广州市为例，通过检索国家、广东省、广州市政

府机关、广州白云机场、相关企业官方网站以及相关论文搜集关于机场和出租车的数 据，包括全国月度民航旅客吞吐量、广州白云机场某天航班时刻表等。然后将数据代入问题 1 建立的数学模型，预测广州白云机场某天的航班情况，并给出对当地司机的决策建议。求解后与实际情况进行对比，分析模型的合理性以及对现实的解释性。

(三) 问题 3 的分析

问题三要求分析出租车排队和乘客排队情况下，求出乘车效率最高的安排方案，属于双对象排队问题。

首先，需要确定在两条并行车道的情况下，上车点的数量及位置分布，即确定排队论模型中服务台的数量。

其次，讨论双对象在最高效率问题中的角色问题，即出租车、乘客在排队模型中的定位。在不同的情况下，出租车可作为排队模型中的服务对象，也可作为排队模型中的服务台，同理乘客。假设服务对象的到达为 Poisson 流，服务台服务时间服从负指数分布，得到排队系统为 $M/M/s/\infty$ 的多服务台排队模型。。

(四) 问题 4 的分析

问题 4 属于调度安排问题，目的是通过某种调度方案使得短途载客出租车和长途载客出租车的收益尽量均衡。

由问题 1，2，3，可以得出结论：出租车的等待载客时间越短，收益越高；出租车的等待载客时间主要由蓄车池中的排队时间决定。

由于以上原因，我们将首先给出一种优先安排方案，然后以广州市的真实数据为例，建立线性规划模型求得长短途载客出租车运营利润差的取值范围，最后利用计算机进行模拟验证。

三、基本假设

1. 假设本文所收集的数据真实可靠；
2. 假设出租车的收益仅与其运营利润有关；
3. 假设出租车运营利润仅由运价与成本决定；
4. 假设出租车成本只考虑行驶过程中的燃油费；
5. 假设每趟到达航班选择乘坐出租车的旅客比例都相同且为常量；
6. 假设出租车行驶过程中的油耗情况与工信部综合油耗情况一致；
7. 假设进入乘车区的旅客不会中途离开；
8. 假设进入蓄车池的出租车不会中途离开；
9. 假设载客里程超过 15 公里时为长途载客；
10. 假设对于给定的机场和城市，机场与市中心的距离一定。

四、定义与符号说明

符号	符号说明
----	------

t_1	出租车司机在蓄车池中的等待时间
t_2	机场到市区的驾驶时间
x	出租车司机行车成本
y	出租车司机行车利润
BR	出租车司机行车利润率
T	每趟到达航班的旅客
Δt	两趟航班到达的时间间隔
α	每趟到达航班选择乘坐出租车的旅客比率
β_t	t时刻司机做出不同决策的转折阈值
$N_{(t)}^{tourist}$	t时刻乘车区中的旅客数量
t'	司机到达的时刻
$N_{(t)}^{taxi}$	t时刻蓄车池中的出租车数量
L	机场乘车区车道长度
s	乘车区上车点总数
N	系统达到平衡状态后服务对象队列长度
ρ	服务台处于忙的状态的概率，也称服务强度
L_q	服务对象平均排队队列长度
W_q	服务对象的平均等待时间
$\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$	系统状态i下单位时间平均到达的顾客数
$\mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$	系统状态i下单位时间内被服务完成的服务对象数
\bar{t}	出租车司机在蓄车池中的平均最大等待时间
γ	短途载客出租车的优先权因子
W	单辆出租车一趟运营利润
d	乘客目的地与机场的行车距离
d_1	乘客目的地与机场的行车距离（小于 3 公里）
d_2	乘客目的地与机场的行车距离 （大于 3 公里，小于 15 公里）
d_3	乘客目的地与机场的行车距离 （大于 15 公里，小于 25 公里）
d_4	乘客目的地与机场的行车距离（大于 25 公里）
W_i ($i = 1, 2, 3, 4$)	乘客目的地与机场的行车距离为 d_i 时单辆出租车一趟运营 利润
z_{ij} ($i = 3, 4,$ $j = 1, 2$)	长途载客出租车与短途载客出租车的一趟运营利润之差

五、模型的建立与求解

第一部分：准备工作

（一）数据的处理

1. 全国各年度各月份的民航旅客吞吐量和运输量数据的处理
可以收集到 2015 年 1 月至 2018 年 12 月的旅客运输量数据，以及 2017

年 3 月至 2018 年 12 月的旅客吞吐量数据^[2]。为估计缺失的吞吐量数据，计算已知运输量与吞吐量的协方差为+0.9977，故二者高度线性正相关，可以建立吞吐量-运输量的线性回归模型，拟合优度 R-square 为+0.9968。



2. 民航旅客吞吐量数据的特点分析
民航旅客吞吐量时间序列呈上升趋势，并有 12 个月的季节性。在 4 月初至 10 月末的“夏秋航季”吞吐量较大，7、8、10 月吞吐量尤为突出；在 11 月初至明年 3 月末的“冬春航季”吞吐量较小。
3. 乘车区上车点的数量及位置分布
结合实际机场的乘车区的道路设计及上车点分布，规定两条车道是同向的，参考广东省广州市白云机场的接机出口间隔，每个出口间距约 40 米，因此，同车道的每个上车点间隔规定为 40 米。故而可得：

$$s = 2 \times \left[\frac{L}{40} \right] + 2$$

在这种情况下，每个服务台的平均服务率为乘客的上车效率 (/min)。假设一人一车，实际影响因素是乘客行动效率及行李的多少，因而设平均服务率 $\mu = 1/\text{min}$

第二部分：问题 1 的决策模型

(一) 模型 I (成本-收益决策模型)

1. 成本-收益决策模型

成本-收益决策模型是以最大化经济目标的决策模型，决策者从一个决策空间中选择使得经济目标最大化的最优决策。引入赢得函数 $H(p)$ 来描述经济目标的完成情况， p 为决策空间中的一个决策方案。经济目标有多种指标，即赢得函数有多种，一个时间段内的单位时间净利润是其中之一，其公式为：

$$r_{benefit} = \frac{-m_{cost} + m_{gain}}{t_{interval}}$$

令 $t_{interval}$ 为关注的时间段， m_{cost} 和 m_{gain} 分别为该时间段内的成本和收益， $r_{benefit}$ 为该时间段内的单位时间净利润。

2. 模型 I 的建立和求解

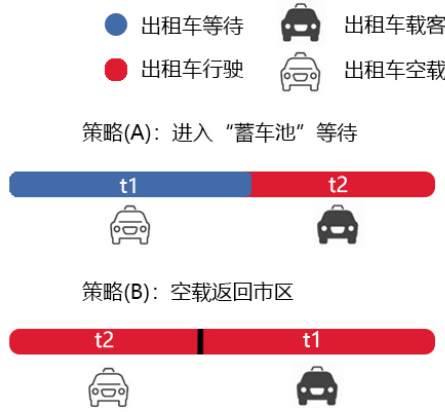
出租车司机有两种决策：(A) 进入“蓄车池”等待乘客、(B) 空载离开机场返回市区，分别记作 p_{wait} 和 p_{leave} ，司机的决策空间为 $P = \{p_{wait}, p_{leave}\}$ 。

司机的赢得函数 $H(p)$, $p \in P$, 设置为单位时间的净利润。

假设司机从机场返回市区的耗时相同且为常量 t_2 ，只考虑行驶时的燃油成本。 y 为出租车载客的单位利润， x 为出租车行驶的单位燃油成本。两种策略赢得函数的数学表达式分别为：

$$H(p_{wait}) = \frac{yt_2 - xt_2}{t_1 + t_2}$$

$$H(p_{leave}) = \frac{yt_1 - x(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2}$$



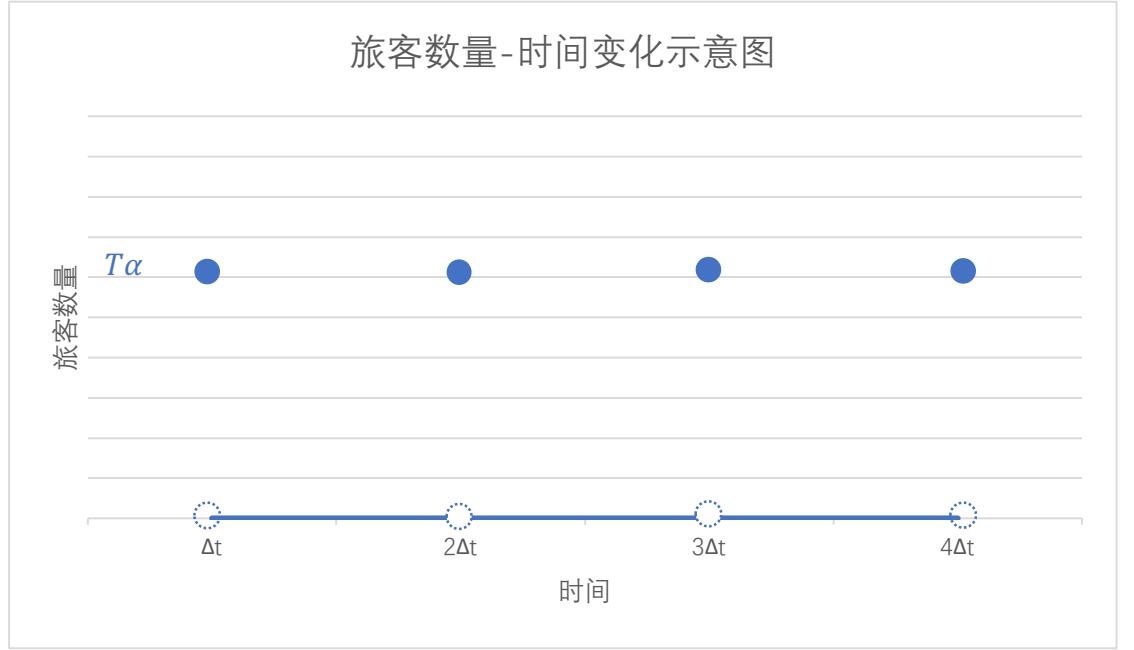
司机的最优决策 p^* , $p^* \in P$, 使得：

$$H(p^*) = \max_{p \in P} H(p) = \max (H(p_{wait}), H(p_{leave}))$$

成立。

假设一天之中航班到达时间服从均匀分布且时间间隔为 Δt ，每趟航班的旅客数量相同为 T ，每趟航班选择乘坐出租车的旅客比例相同且为常量 α ，不考虑旅客在“乘车区”的排队上车时间。一天之中选择乘坐出租车的旅客数量 $N^{tourist}$ 随时间 t 变化的公式为：

$$N_{(t)}^{tourist} = \begin{cases} T\alpha & t \% \Delta t = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



假设每位旅客搭乘一辆出租车，若某司机在 t' 时刻到达机场，此时“蓄车池”已有出租车数量为 $N_{(t')}^{taxi}$ 若他选择进入“乘车区”等待，则其等待时间为：

$$t_1 = \frac{N_{(t')}^{taxi}}{N_{(t')}^{tourist}} \times \Delta t + (\Delta t - t' \bmod \Delta t)$$

化简得：

$$t_1 = \left(\frac{N_{(t')}^{taxi}}{N_{(t')}^{tourist}} + 1 \right) \times \Delta t - t' \bmod \Delta t \quad (1)$$

司机已知航班时刻表和 t' 时刻“蓄车池”的出租车数量，即已知 $\frac{N_{(t')}^{taxi}}{N_{(t')}^{tourist}}$ ，求解方程：

$$H(p_{wait}) = H(p_{leave})$$

解得：

$$\frac{N_{(t')}^{taxi}}{N_{(t')}^{tourist}} = \frac{\frac{yt_2}{y-x} + t' \bmod \Delta t}{\Delta t} - 1 = \beta_{t'}$$

故 $\beta_{t'}$ 即在 t' 时刻司机作出不同决策的转折阈值，当司机观测到 $\frac{N_{(t')}^{taxi}}{N_{(t')}^{tourist}} > \beta_{t'}$ ，司机选择进入“蓄车池”等待；当司机观测到 $\frac{N_{(t')}^{taxi}}{N_{(t')}^{tourist}} < \beta_{t'}$ ，司机选择空载回到市区。

(二) 模型 II (季节性时间序列模型)

1. 季节性时间序列模型

由季节性因素或其它周期因素引起的周期性变化的时间序列，称为季节性时间序列^[3]，相应的模型为季节性模型，可以用一类疏系数 ARIMA

模型去描述。周期为s的季节性时间序列 X_t 满足：

$$\Phi(B^s)\nabla_s^D X_t = \Theta(B^s)E_t$$

其中，

$$\begin{cases} \Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{ps} \\ \Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_q B^{qs} \end{cases}$$

可设 E_t 是另一个 ARIMA(p, d, q)序列：

$$\varphi(B)\nabla^d E_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

故有：

$$\Phi(B^s)\nabla^d \nabla_s^D X_t = \Theta(B^s)\nabla^d E_t$$

$$\varphi(B)\Phi(B^s)\nabla^d \nabla_s^D X_t = \Theta(B^s)\varphi(B)\nabla^d E_t = \Theta(B^s)\theta(B)\varepsilon_t$$

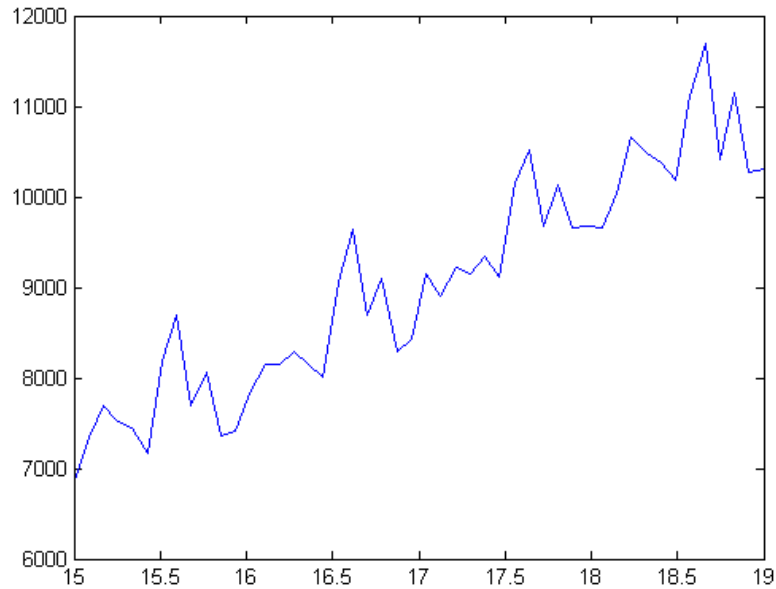
令 $W_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t$ ，得：

$$\varphi(B)\Phi(B^s)W_t = \Theta(B^s)\theta(B)\varepsilon_t$$

为乘积型季节性模型，其阶数常用(p, d, q)×(P, D, Q)表示，反映了序列相邻时刻与相隔为周期s的时刻之间复杂变化的规律。其中 W_t 有原本的序列 X_t 经差分 $\nabla^d \nabla_s^D$ 得到，消除了序列 X_t 的非平稳性和季节性。

2. 模型 II 的建立和求解

在准备工作的数据处理中，作全国民航吞吐量的时序图，可直观观测到吞吐量具有上升的趋势性和季节性，同时结合中国民航局按照季节分为“夏秋航季”与“冬春航季”以安排航班的经验知识，可以假设全国民航吞吐量符合周期为 12 的季节性时间序列模型。



利用 MATLAB 软件提供的 GARCH 族函数，并使用 AIC 准则，求解、选

择模型参数，中间结果见表：

P	Q	AIC
0	0	-140.131693
0	1	-149.135965
0	2	-149.212818
⋮	⋮	⋮
2	7	-146.761014
2	8	-151.098592
2	9	-149.239891
⋮	⋮	⋮
3	11	-145.856143
3	12	-144.594398
3	13	-143.951688

当阶数为(2,8)时 AIC 取得最小值-151.098592，故全国民航吞吐量时间序列模型的数学表达式为：

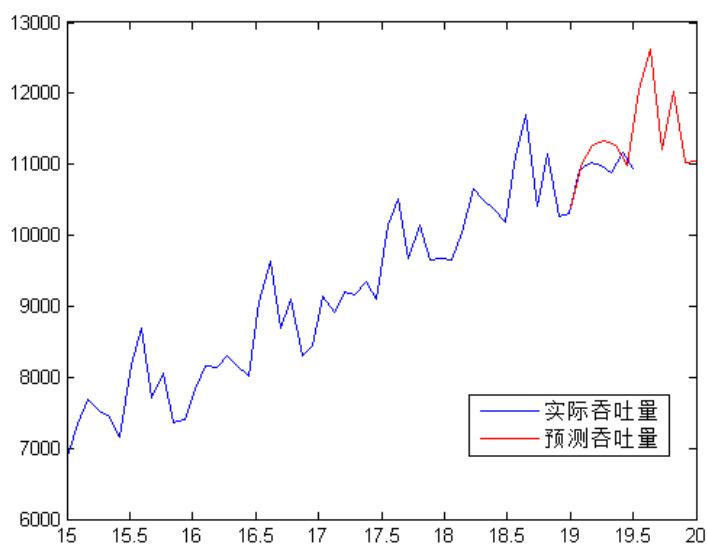
$$\Phi(B^s)\nabla_s^D X_t = \Theta(B^s)E_t$$

$$\begin{cases} \Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps} \\ \Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs} \end{cases}$$

其中， $s = 12, P = 2, Q = 8$ 。

3. 模型 II 的数值模拟

使用模型 II 对 2019 年全年各个月份的吞吐量情况进行预测，并用 1 月至 6 月的预测值与已有的实际值计算平均绝对百分比误差 MAPE 为 2.21%，接近于 0，模型的拟合程度较优，认为可以基本准确进行预测。



故在“夏秋航季”，即当年 3 月至 10 月，尤其是 7、8、10 月，机场吞吐量达到一年之中的“高峰期”。结合实际生活经验，7、8 月暑假和 10 月国庆“黄金周”属于我国的旅游旺季，居民出行量大，进一步佐证了模型 II 的合理性。

司机在机场吞吐量高峰期应该更倾向于选择策略(A)进入蓄车池等待。

第三部分：问题 2 的数据代入求解结果及分析

(一) 数据收集

以广州市白云国际机场和广州市出租车情况为例,对 2019 年 9 月 13 日白云机场的航班和旅客情况进行预测,并给出司机对应的策略方案。

(二) 根据收集数据估计各参数值

1. 估计出租车司机行车利润率 y

广州市交通运输局公布了 2014 年 1 月至 2019 年 7 月每月的出租车日均载客量数据,以及截至 2018 年末统计广州市共有出租车 22442 辆。分析可知在 2014 年至 2016 年载客量急剧下滑,从 2017 年开始恢复平稳,可以预估接下来广州出租车日均载客量将保持在 75 人/车左右。



由于 2019 年广州市出租车的日均运营里程数据缺失,我们在接下来使用 2016 年的日均运营里程 257.86 公里/车作为估计量。

自 2018 年 5 月 15 日起,广州市的出租车计价标准修改为:前 3 公里 12 元,超过 3 公里部分,每公里 2.6 元。

以工信部综合油耗标准的测试方法估计出租车的综合行驶匀速(市区与郊区行车的均值)为 49.4 公里/时^[4]。

2019 年广州出租车行车利润相关数据及估计量^[5]:

日均载客量	日均运营里程	计价	匀速
75.1142628 人/车	257.86 公里/车	前 3 公里 12 元 续租价: 2.6 元/公里	49.4 公里/时

从而估计出租车司机行车利润率 $y \approx 3.10821$ 元/分钟。

2. 估计出租车司机行车成本 x

以广州市出租车常用车型起亚远舰为代表。

起亚远舰的工信部综合耗油量为 8.3 升/100 公里,以工信部综合油耗标准的测试方法估计出租车的综合行驶匀速(市区与郊区行车的均

值) 为 49.4 公里/时。

截至 2019 年 9 月 4 日, 92 号汽油的价格为 6.6 元/升。

2019 年广州出租车行车成本相关数据及估计量:

耗油量	匀速	油价
8.3 升/100 公里	49.4 公里/时	6.6 元/升

从而估计出租车司机行车成本 $x \approx 0.451022$ 元/分钟。

3. 估计机场到市区的驾驶时间 t_2

2019 年广州出租车机场到市区的驾驶时间相关数据及估计量:

机场到市区距离	市郊匀速
35 公里	63 公里/时

从而估计机场到市区的驾驶时间 $t_2 \approx 33.33$ 分钟。

4. 估计每趟到达航班的旅客量 T

调用问题 1 的模型 II (民航旅客吞吐量季节性时间序列模型), 预测 2019 年下半年的月均旅客吞吐量。

根据中国民航局公布的《全国民航 2019 年夏秋航班计划 3 月 31 日起执行》, 2019 年 3 月 31 日至 10 月 26 日每周客运航班总数 (包含国内、港澳台、国际) 为 91223 趟^[6]。

2019 年 9 月广州白云机场每趟到达航班的旅客量相关数据及估计量:

全国月均旅客吞吐量	全国每周客运航班总数
11205 万人	91223 趟

从而估计每趟到达航班的旅客量 $T \approx 122.8174$ 人。

5. 估计两趟航班到达的时间间隔 Δt

以携程网的 2019 年 9 月 13 日到达站为广州白云机场的航班时刻作为测试数据, 若将同时到达的航班看作一个集合, 航班集合的计划到达时间严格以 5 分钟为间隔即 $\Delta t = 5$ 分钟。

6. 估计每趟到达航班选择乘坐出租车的旅客比率 α

至 2017 年底, 主城区范围内机动化出行方式中, 公共交通 (常规公交+轨道) 占比达 61.1%, 基本确立了公共交通在城市客运体系中的主导地位^[7]。

广州市人民政府公布的《广州交通运输月报》统计了每月出租车在广州市公共交通 (常规公交+轨道+出租车) 中的占比, 根据 2018 年 6 月至 2019 年 7 月的数据计算得到出租车在公共交通的平均占比为 10.21357%^[8]。

估计每趟到达航班选择乘坐出租车的旅客比率 $\alpha \approx 6.95\%$ 。

7. 估计 t' 时刻司机的最优决策

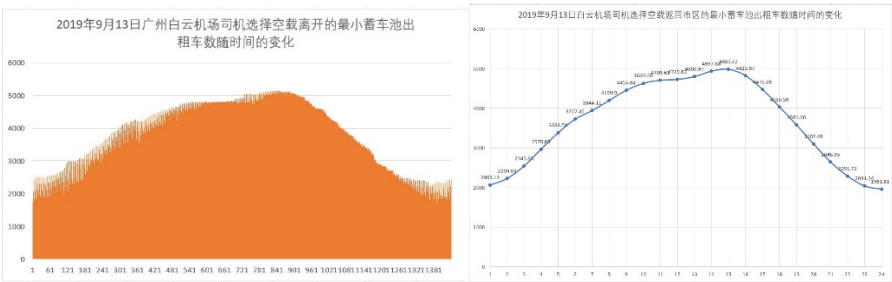
已知白云机场停车场车位合计 10694 个, 假设在 t' 时刻蓄车池中出租车的数量 $N_{(t)}^{taxi} \in [0, 10693]$, $N_{(t)}^{taxi} \in \mathbb{Z}$, 求解在各个时刻 t_i (粒度为 1 分

钟) 司机选择策略 (B) 空载返回市区的最小蓄车池出租车数 $N_{min}^{t_i, taxi}$ 。

对于 2019 年 9 月 13 日于 t' 时刻到达白云国际机场的司机的策略方案

为, 当司机观测到的实际蓄车池出租车数 $N_{t'}^{taxi} < N_{min}^{t', taxi}$ 时, 选择策

略(A)进入乘车区等待,反之,当 $N_{t'}^{taxi} \geq N_{min}^{t',taxi}$ 时,选择策略(B)空载返回市区。



可见在白云机场一日之内的客流量从凌晨0点至早上10点逐渐增大;从早上10点到下午4点基本平稳保持,该时段可以认为是机场一天之内的“客流高峰期”;从下午4点至深夜24点,客流量逐渐减少。该结论与经验相符,模型具有合理性。司机在一日之内的“客流高峰期”应更倾向于选择策略(A)进入乘车区等待。

综上,根据模型 I 和模型 II,在广州白云机场的情境下,送客到达白云机场的司机只有在蓄车池出租车数量至少达到 2000 车以上时,策略(B)空载返回市区才会比策略(A)进入蓄车池等待利润更高。实际情况是出租车“供不应求”,乘客需要等待,所以在绝大多数情况下,作为司机选择策略(A)是合理的,作为政府和机场方面则应该鼓励司机进入蓄车池等待。

第四部分：问题 3 的双向多服务台排队模型

(一) 排队模型理论

1. 机场排队模型用六个符号表示,在符号之间用斜线隔开,即X/Y/Z/A/B/C。第一个符号X表示顾客到达或顾客到达间隔时间的分布;第二个符号 Y表示服务时间的分布;第三个符号Z表示服务台数目;第四个符号A是系统容量限制;第五个符号B是 顾客源数目;第六个符号C是服务规则,如 FCFS, LCFS 等。并约定,如略去后三项,即指 X/Y/Z/ ∞ / ∞ /FCFS的情形^[3]。

(二) 模型建立与求解 (M/M/s/ ∞ 多服务台排队模型)

1. 参数 λ 的确定
 - (1) 当乘客数量饱和时,即乘车区出租车供不应求,可视为乘客是无穷的,此时需要安排更多出租车进入,因而在排队模型中,出租车为服务对象,效率最高的方案应当是使出租车司机在“乘车区”的等待时间最短,因此 λ 为出租车的到达速率(辆/min)
 - (2) 当出租车数量饱和时,即乘车区出租车数量视为无穷时,服务对象为乘客,效率最高的方案应当是使出乘客在“乘车区”的等待时间最短,因此 λ 为乘客的到达速率(人/min)
 - (3) 当两者饱和,排队模型不可用,此时转为简单的 I/O 模型,不存在安排上的优化

因此在平均服务率 $\mu = 1$ 的情况下,(1)、(2)的服务对象

2. M/M/s/∞多服务台排队模型建立

基于上述讨论，以下结合排队论模型基础，建立多服务台排队模型。排队模型是流入流出平衡的，即服务对象进入服务台和服务对象离开服务台恒等，根据这一原理得到任一状态下的平衡方程^[3]：

$$\begin{aligned}\mu_1 p_1 &= \lambda_0 p_0 \\ \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 &= (\lambda_1 + \mu_1) p_1 \\ \lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 &= (\lambda_2 + \mu_2) p_2 \\ &\dots \\ \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} &= (\lambda_n + \mu_n) p_n \\ &\dots\end{aligned}$$

由上述平衡方程可求得：

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \\ p_3 &= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0 \\ &\dots \\ p_{n+1} &= \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} p_0\end{aligned}$$

记

$$C_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1}, n = 1, 2, \dots$$

则平衡状态的分布为：

$$p_n = C_n p_0, n = 1, 2, \dots$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ ，可得：

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right] p_0 = 1$$

所以，

$$p_0 = \frac{1}{[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n]}$$

接下来讨论多服务台系统中的平稳分布。

$p_n = P\{N = n\} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 为N的概率分布，其中，

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= \begin{cases} n\mu, n = 1, 2, \dots, s \\ s\mu, n = s + 1, s + 2, \dots \end{cases}\end{aligned}$$

记 $\rho_s = \frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu}$ ，则当 $\rho_s < 1$ 时，系统中工作台空闲概率 p_0 ：

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s! (1 - \rho_s)} \right]^{-1}$$

多服务台等待制系统的平衡分布可以得到：

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)p_n = \frac{p_0 \rho_s^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)\rho_s^{n-s} = \frac{p_0 \rho_s^s \rho_s}{s! (1-\rho_s)^2}$$

从而能求出服务对象的平均等待时间

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

3. 模型求解

$$s = 2 \times \left\lceil \frac{L}{40} \right\rceil + 2, \mu = 1, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda, \rho_s = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{\lambda}{2}$$

此处以乘车区长度 $L < 40$, $s = 2$ 作为例解

(1) 整个系统出现空闲的概率

$$p_0 = \left[\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2! (1 - \frac{\lambda}{2})} \right]^{-1} = \frac{2 - \lambda}{2 + \lambda}, 0 \leq \lambda < 2$$

(2) 平均排队长

$$L_q = \frac{p_0 \lambda^2 \frac{\lambda}{2}}{2! (1 - \frac{\lambda}{2})^2} = \frac{\lambda^3}{4 - \lambda^2}, 0 \leq \lambda < 2$$

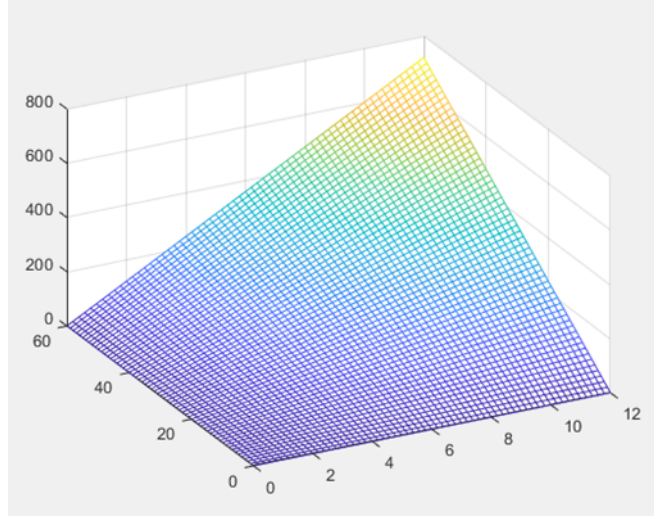
(3) 服务对象平均等待时间

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{4 - \lambda^2}, 0 \leq \lambda < 2$$

W_q 关于 λ 在定义域单调递增, 因此要使系统高效, 应不让服务台空闲

且服务对象平均等待时间, 应使 $\lambda = 2$ 。即在实际情况中, 若乘车区出现乘客过多出租车供不应求的情况时, 应平均每分钟从蓄车池里放行 2 辆车进入乘车区; 若乘车区车辆过多, 且乘客进入速率 λ 能达到 s , 则平均每分钟让 2 位乘客进入乘车区。

从模型推导过程中可得出, 当 $\rho_s = \frac{\lambda}{s\mu} = 1$ 时, 从统计学角度上看, 乘车效率是最高的。因此根据不同机场不同情况, 可以对模型中机场乘车区车道长度 L 及其推导出来的服务台数量 s , 以及实际服务率 μ 做出调整, 并在实际安排中使 $\lambda = \mu(2 \times \left\lceil \frac{L}{40} \right\rceil + 2)$, 即可得到实际排队模型中的安排策略。



图像中, $0 \leq s \leq 60$, $0 \leq \mu \leq 12$

第五部分：问题 4 的可行的优先安排方案

(一) 可行的优先安排方案

机场设置两个蓄车池，分别为长途载客出租车蓄车池和短途载客出租车蓄车池。机场出租管理人员放行出租车进入乘车区时，将按 $1 : \gamma$ 的比例分别将长途载客出租车和短途载客出租车蓄车池中的出租车放行进入乘车区。

(二) 长短途载客出租车一趟利润差范围确定（线性规划模型）

1. 线性规划模型的一般形式^[9]为：

$$\begin{aligned} & \text{目标函数 } \max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ & \text{s. t. } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. 模型的建立与求解

(1) 计算乘客目的地与机场的行车距离为 $d_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 时单辆出租车一趟运营利润 $W_i (i = 1, 2, 3, 4)$

$$W_1 = 12 - 1.0956d_1, \quad d_1 < 3km,$$

$$W_2 = 1.5044d_2 + 4.2, \quad 3km < d_2 < 15km,$$

$$W_3 = 2.0244d_3 - 3.6, \quad 15km < d_3 < 25km,$$

$$W_4 = 2.8044d_4 - 23.1, \quad d_4 > 25km,$$

(2) 计算长途载客出租车与短途载客出租车运营利润之差 $z_{ij} (i =$

3,4, $j = 1,2$)

$$z_{31} = 2.0244d_3 + 1.0956d_1 - 15.6,$$

$$z_{41} = 2.8044d_4 + 1.0956d_1 - 35.1,$$

$$z_{32} = 2.0244d_3 - 1.5044d_2 - 7.8,$$

$$z_{42} = 2.8044d_4 - 1.5044d_2 - 27.3,$$

(3) 求 $z_{ij}(i = 3,4, j = 1,2)$ 的取值范围

$$\max z_{31} = 2.0244d_3 + 1.0956d_1 - 15.6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 0 \leq d_1 \leq 3 \\ 15 \leq d_3 \leq 25 \end{cases}$$

$$\min z_{31} = 2.0244d_3 + 1.0956d_1 - 15.6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 0 \leq d_1 \leq 3 \\ 15 \leq d_3 \leq 25 \end{cases}$$

$$\max z_{41} = 2.8044d_4 + 1.0956d_1 - 35.1$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 0 \leq d_1 \leq 3 \\ d_4 \geq 25 \end{cases}$$

$$\min z_{41} = 2.8044d_4 + 1.0956d_1 - 35.1$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 0 \leq d_1 \leq 3 \\ d_4 \geq 25 \end{cases}$$

$$\max z_{32} = 2.0244d_3 - 1.5044d_2 - 7.8$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3 \leq d_2 \leq 15 \\ 15 \leq d_3 \leq 25 \end{cases}$$

$$\min z_{32} = 2.0244d_3 - 1.5044d_2 - 7.8$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3 \leq d_2 \leq 15 \\ 15 \leq d_3 \leq 25 \end{cases}$$

$$\max z_{42} = 2.8044d_4 - 1.5044d_2 - 27.3$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3 \leq d_2 \leq 15 \\ d_4 \geq 25 \end{cases}$$

$$\min z_{42} = 2.8044d_4 - 1.5044d_2 - 27.3$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3 \leq d_2 \leq 15 \\ d_4 \geq 25 \end{cases}$$

(4) 经过 (3) 的求解, 可以得出:

$$z_{31} \in [14.766, 38.2968]$$

$$z_{41} \in [35.01, +\infty)$$

$$z_{32} \in [18.0528, 42.81]$$

$$z_{42} \in [20.244, +\infty)$$

故而，长短途载客出租车一趟利润差 $Z \in [14.766, +\infty)$

- (5) 以广州市为例，在问题 2 中已合理估计广州市中心与白云机场的距离为 35 公里（长途载客）。则可计算出此时长短途载客出租车的最大利润差为 66.3408 元。

(三) 优先权因子 γ 的确定

1. 长短途载客出租车等待时间之比

当机场出租管理人员按 $1 : \gamma$ 的比例分别放行长短途载客出租车进入乘车区时，由(1)式可得，长短途载客出租车等待时间之比为 $\gamma : 1$

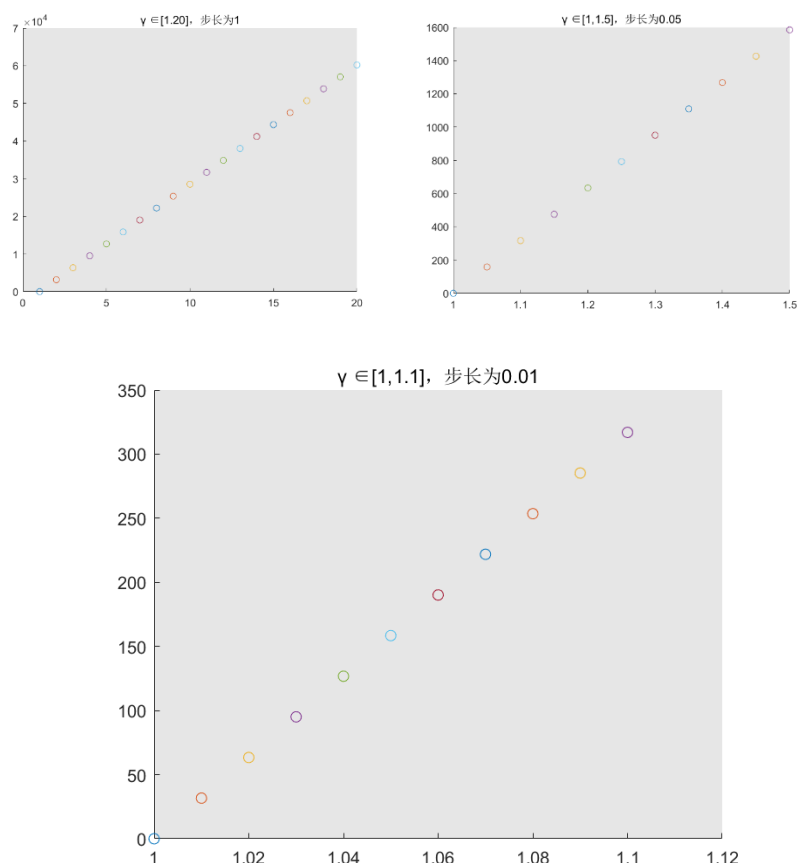
- #### 2. 由问题 1 的估计出租车司机行车利润率 γ ，且以广州市为例，根据问题 2 的演算可得出出租车司机在蓄车池中的平均最大等待时间 \bar{t} 。故而可以得出在长短途载客出租车等待时间之差内，即 $(\gamma - 1) * \bar{t}$ ，短途载客出租车与长途载客出租车的利润之差为：

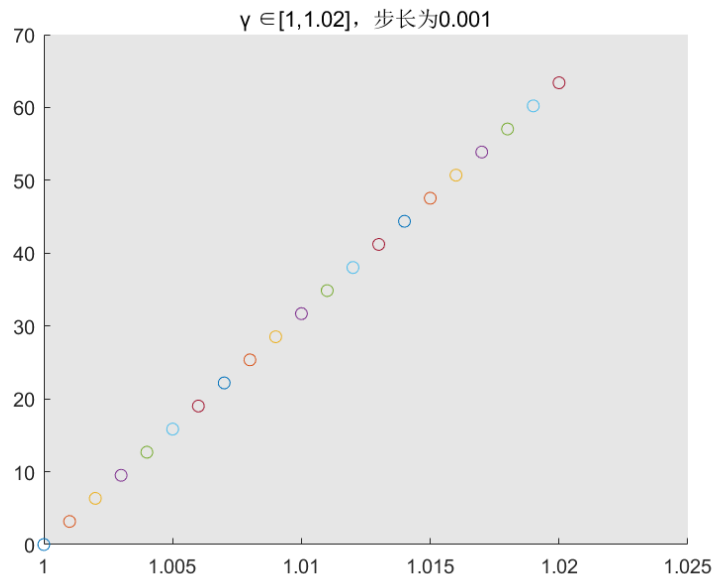
$$z = (\gamma - 1) * \bar{t} * y$$

3. 以下对 γ 做合理性假设并枚举检验

- (1) $\gamma \in [1.20]$ ，步长为 1；
- (2) $\gamma \in [1, 1.5]$ ，步长为 0.05；
- (3) $\gamma \in [1, 1.1]$ ，步长为 0.01；
- (4) $\gamma \in [1, 1.02]$ ，步长为 0.001；

通过 matlab 计算并作图可得到如下结果：





4. 综合上述, γ 的一个合理取值范围为[1, 1.02]

六、模型评价与推广

问题 1 的模型 I（成本-收益决策模型）在实际应用于广州白云机场的数据时,其预测结果与现实经验基本相符,结论表明当地司机在绝大多数情况下选择进入蓄车池等待是最优策略,对司机决策具有指导意义。由于广州市出租车运营和白云机场车流量大数据的缺失,模型 I 可能会存在误差,若应用计算机视觉、物联网、区块链技术可以高效捕获出租车相关的可信大数据,就能结合神经网络进行数据挖掘,研究机场出租车决策的潜在相关因素,进一步优化模型。

应用问题 1 的模型 II（民航旅客吞吐量季节性时间序列模型）对 2019 年各月度的全国民航旅客吞吐量进行预测,预测结果与 2019 年上半年的实际吞吐量对比,误差很小,说明模型 II 具有合理性,可以用于未来旅客吞吐量的预测,一方面为机场司机判断客

流量提供理论依据，另一方面可以辅助中国民航交通局优化航班安排，充分满足旅客需求并降低运输成本。

问题 3 的双向多服务台排队模型建立了机场乘车区容量、旅客上车耗时分布与合理乘车点数量的关系，并能进一步推出乘客与出租车进入乘车区的合理批量，能够帮助机场提高乘车区的效率。同时，该模型具有很强泛化性，可以应用于不同的机场。

问题 4 提供了一个平衡长短途出租车利润的设计方案：开辟两个蓄车池分别停放长途和短途出租车，并使二者按照一个合理比例进入乘车区中，使得短途出租车的等待时间小于长途出租车，并计算了广州白云机场情景的长短途出租车放行进入乘车区的合理比例值。同样，由于广州市出租车相关大数据的缺失，比例值的计算结果可能存在误差，若能获取广州市出租车轨迹数据，结合居民出行热力图、图论等方法，可以提高准确度。

七、参考文献（4 号黑体）

（书写格式如下）

- [1] 杨波. 拐点？还早着呢——2019 年 1-4 月中国民航市场发展解析[J]. 大飞机, 2019(6):48-52
- [2] 中国民用航空局. 统计数据[DB/OL].
http://www.caac.gov.cn/XXGK/XXGK/index_172.html?f1=11, 2019-09-14
- [3] 司守奎. 数学建模算法与程序[DB/OL].
<https://max.book118.com/html/2019/0405/6151222132002021.shtm>, 2019-09-14
- [4] 陶涛, 马洋. “工信部油耗”究竟是如何测出来的. 江苏科技报[N], 2018-02-02(A15)
- [5] 广州市人民政府.《广州市发展改革委 广州市交通委员会关于优化调整巡游出租车运价的通知》的政策解读[DB/OL].
<http://www.gz.gov.cn/gzgov/snzc/201805/1d508ab0fa43465bacdac79207b255e4.shtml>, 2019-09-15

- [6] 中国民用航空局. 全国民航 2019 年夏秋航季航班计划 3 月 31 日起执行 [DB/OL]. http://www.caac.gov.cn/XWZX/MHYW/201903/t20190329_195430.html, 2019-09-15
- [7] 刘佳辉. “公交都市”后时代广州市公共交通发展战略研究[J]. 城市公共交通, 2019(07):31-35.
- [8] 广州市人民政府. 交通数据 [DB/OL]. <http://zwgk.gz.gov.cn/GZ16/index1.shtml>, 2019-09-15
- [9] 甘应爱, 田丰, 李维铮. 运筹学 (第三版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005

八、附录

问题 3 Matlab 图像程序:

```
x=0:0.2:12
y=0:1:60
[xx,yy]=meshgrid(x,y)
zz=xx.*yy
mesh(xx,yy,zz)
```

问题 4 γ 枚举检验程序 (Matlab):

```
function [i,z] = enumerate(y,t1,stepNum,startNum,endNum)
for i = startNum:stepNum:endNum
    z = (i-1)*t1*y;
    disp(z);
    scatter(i,z);
    hold on;
end

enumerate(3.10821,1019.68,1,1,20);
close all;
enumerate(3.10821,1019.68,0.05,1,1.5);
close all;
enumerate(3.10821,1019.68,0.01,1,1.1);
close all;
enumerate(3.10821,1019.68,0.001,1,1.02);
```

白云机场航班降落时间统计程序:

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <algorithm>
using namespace std;

const string suffix = ".html";
```

```

string intToString(int num) {
string rslt = "";
while (num) {
    rslt += (num%10+'0');
    num /= 10;
}
reverse(rslt.begin(),rslt.end());
return rslt;
}

int main() {
ofstream outFile("白云机场 2019-09-13 航班降落时间统计表.csv");
outFile << "航班号" << ',' << "降落时间" << endl;
cout << "航班号" << ',' << "降落时间" << endl;
string flight = "";
string landingTime = "";
for (int fileIndex = 1; fileIndex <=50; fileIndex++) {
    string filename = intToString(fileIndex)+suffix;
    ifstream inFile;
    inFile.open(filename, ios::in );
    if (inFile.is_open()) {
        string tmp = "";
        while (!inFile.eof()) {
            inFile >> tmp;
            //cout << tmp << "\n";
            if (tmp == "class=\"bg_0\">") {
                while (!inFile.eof()) {
                    inFile>>tmp;
                    if (tmp == "<strong>"){
                        inFile >> flight;
                        while (!inFile.eof()) {
                            inFile >> tmp;
                            if (tmp == "<br") {
                                inFile >> tmp;
                                if (tmp == ">") {
                                    inFile >> landingTime;
                                    cout << flight << "\t" <<
landingTime << "\n";
                                    outFile << flight << ',' <<
landingTime << endl;
                                    break;
                                }
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
}
}

```

```

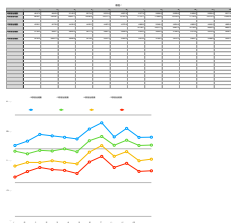
        break;
    }
}
}
}
inFile.close();
}
else
    cout << "文件 " << fileIndex << " 打开失败\n";
}
}

```

2019 航班安排:

每周航班	2018冬春航季10.28-3.30	2019夏秋航季3.31-10.26
国内客运	67048	71772
港澳台客运	3817	1927
国际客运	15684	17524
总客运	86549	91223

2015 年-2018 年全国民航客运量:



广州市各月日均客运量:

时间（月份）	所有出租车日均运客量（万辆/人次）	每车日均运客量估计（假设出租
201907	166	
201906	165	
201905	168	
201904	167	
201903	178	
201902	161	
201901	175	
201812	179	
201811	177	
201810	165	
201809	168	
201808	168	
201807	169	
201806	164	
201805	169	
201804	165	
201803	176	
201802	157	
201801	168	
201712	172	
201711	172	
201710	163	
201709	164	
201708	172	
201707	174	
201706	169	
201705	172	
201704	163	
201703	172	
201702	171	
201701	164	
201612	169	
201611	163	
201610	161	
201609	158	
201608	154	
201607	158	
201606	157	
201605	156	
201604	190	
201603	162	
201602	157	
201601	158	
201512	159	
201511	163	
201510	171	
201509	171	
201508	174	
201507	174	
201506	178	

2014 年全国民航机场旅客吞吐量排名:

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		26		27		28		29		30		31		32		33		34		35		36		37		38		39		40		41		42		43		44		45		46		47		48		49		50		51		52		53		54		55		56		57		58		59		60		61		62		63		64		65		66		67		68		69		70		71		72		73		74		75		76		77		78		79		80		81		82		83		84		85		86		87		88		89		90		91		92		93		94		95		96		97		98		99		100		101		102		103		104		105		106		107		108		109		110		111		112		113		114		115		116		117		118		119		120		121		122		123		124		125		126		127		128		129		130		131		132		133		134		135		136		137		138		139		140		141		142		143		144		145		146		147		148		149		150		151		152		153		154		155		156		157		158		159		160		161		162		163		164		165		166		167		168		169		170		171		172		173		174		175		176		177		178		179		180		181		182		183		184		185		186		187		188		189		190		191		192		193		194		195		196		197		198		199		200		201		202		203		204		205		206		207		208		209		210		211		212		213		214		215		216		217		218		219		220		221		222		223		224		225		226		227		228		229		230		231		232		233		234		235		236		237		238		239		240		241		242		243		244		245		246		247		248		249		250		251		252		253		254		255		256		257		258		259		260		261		262		263		264		265		266		267		268		269		270		271		272		273		274		275		276		277		278		279		280		281		282		283		284		285		286		287		288		289		290		291		292		293		294		295		296		297		298		299		300		301		302		303		304		305		306		307		308		309		310		311		312		313		314		315		316		317		318		319		320		321		322		323		324		325		326		327		328		329		330		331		332		333		334		335		336		337		338		339		340		341		342		343		344		345		346		347		348		349		350		351		352		353		354		355		356		357		358		359		360		361		362		363		364		365		366		367		368		369		370		371		372		373		374		375		376		377		378		379		380		381		382		383		384		385		386		387		388		389		390		391		392		393		394		395		396		397		398		399		400		401		402		403		404		405		406		407		408		409		410		411		412		413		414		415		416		417		418		419		420		421		422		423		424		425		426		427		428		429		430		431		432		433		434		435		436		437		438		439		440		441		442		443		444		445		446		447		448		449		450		451		452		453		454		455		456		457		458		459		460		461		462		463		464		465		466		467		468		469		470		471		472		473		474		475		476		477		478		479		480		481		482		483		484		485		486		487		488		489		490		491		492		493		494		495		496		497		498		499		500		501		502		503		504		505		506		507		508		509		510		511		512		513		514		515		516		517		518		519		520		521		522		523		524		525		526		527		528		529		530		531		532		533		534		535		536		537		538		539		540		541		542		543		544		545		546		547		548		549		550		551		552		553		554		555		556		557		558		559		560		561		562		563		564		565		566		567		568		569		570		571		572		573		574		575		576		577		578		579		580		581		582		583		584		585		586		587		588		589		590		591		592		593		594		595		596		597		598		599		600		601		602		603		604		605		606		607		608		609		610		611		612		613		614		615		616		617		618		619		620		621		622		623		624		625		626		627		628		629		630		631		632		633		634		635		636		637		638		639		640		641		642		643		644		645		646		647		648		649		650		651		652		653		654		655		656		657		658		659		660		661		662		663		664		665		666		667		668		669		670		671		672		673		674		675		676		677		678		679		680		681		682		683		684		685		686		687		688		689		690		691		692		693		694		695		696		697		698		699		700		701		702		703		704		705		706		707		708		709		710		711		712		713		714		715		716		717		718		719		720		721		722		723		724		725		726		727		728		729		730		731		732		733		734		735		736		737		738		739		740		741		742		743		744		745		746		747		748		749		750		751		752		753		754		755		756		757		758		759		760		761		762		763		764		765		766		767		768		769		770		771		772		773		774		775		776		777		778		779		780		781		782		783		784		785		786		787		788		789		790		791		792		793		794		795		796		797		798		799		800		801		802		803		804		805		806		807		808		809		810		811		812		813		814		815		816		817		818		819		820		821		822		823		824		825		826		827		828		829		830		831		832		833		834		835		836		837		838		839		840		841		842		843		844		845		846		847		848		849		850		851		852		853		854		855		856		857		858		859		860		861		862		863		864		865		866		867		868		869		870		871		872		873		874		875		876		877		878		879		880		881		882		883		884		885		886		887		888		889		890		891		892		893		894		895		896		897		898		899		900		901		902		903		904		905		906		907		908		909		910		911		912		913		914		915		916		917		918		919		920		921		922		923		924		925		926		927		928		929		930		931		932		933		934		935		936		937		938		939		940		941		942		943		944		945		946		947		948		949		950		951		952		953		954		955		956		957		958		959		960		961		962		963		964		965		966		967		968		969		970		971		972		973		974		975		976		977		978		979		980		981		982		983		984		985		986		987		988		989		990		991		992		993		994		995		996		997		998		999		1000		1001		1002		1003		1004		1005		1006		1007		1008		1009		1010		1011		1012		1013		1014		1015		1016		1017		1018		1019		1020		1021		1022		1023		1024		1025		1026		1027		1028		1029		1030		1031		1032		1033		1034		1035		1036		1037		1038		1039		1040		1041		1042		1043		1044		1045		1046		1047		1048		1049		1050		1051		1052		1053		1054		1055		1056		1057		1058		1059		1060		1061		1062		1063		1064		1065		1066		1067		1068		1069		1070		1071		1072		1073		1074		1075		1076		1077		1078		1079		1080		1081		1082		1083		1084		1085		1086		1087		1088		1089		1090		1091		1092		1093		1094		1095		1096		1097		1098		1099		1100		1101		1102		1103		1104		1105		1106		1107		1108		1109		1110		1111		1112		1113		1114		1115		1116		1117		1118		1119		1120		1121		1122		1123		1124	
---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--