Exercice 1 : Mise en équations d'un barreau en traction

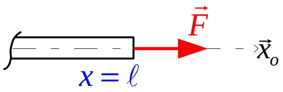
1- Écriture des conditions aux limites.

Conditions aux limites homogènes :

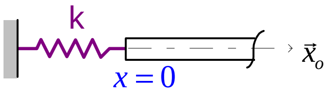
Déplacement imposé : $u = 0$

Force imposée : $ESu_{,x} = 0$ soit $u_{,x} = 0$

Conditions aux limites des trois figures ci-dessous.



$$ESu_{,x}(\ell) = F(t)$$

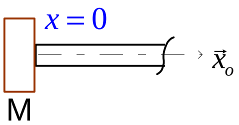


$$\vec{F}_o = -k(u(0,t) - \delta_o)\vec{x}_o$$ Effort du ressort sur la barre

δ_o représente la position à vide de l'extrémité libre du ressort

$$\vec{F}_o = -ESu_{,x}(0,t)\vec{x}_o$$ Attention aux signes, il faut penser normale extérieure

Soit : $ESu_{,x}(0,t) = k(u(0,t) - \delta_o)$

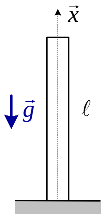


Il faut isoler la masse et écrire le PFD, et penser action-réaction, donc faire vraiment attention aux signes.

$$M\ddot{u}(0,t)\vec{x}_o = -(-ESu_{,x}(0,t)\vec{x}_o)$$

Soit : $M\ddot{u}(0,t) = ESu_{,x}(0,t)$

2- Application du PFD.



Le système d'EDP de ce problème en statique est :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]0,\ell\right[& -ESu_{,xx} = -\rho g S \\ CL & \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ ESu_{,x}(\ell,t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

L'équation différentielle s'intègre à vue:

$ESu_{,xx} = \rho g S$ ➔ $u_{,x} = \dfrac{\rho g}{E}x + Cte$ En tenant compte de la CL en ℓ ; $u_{,x}(\ell,t) = 0$

$u_{,x} = \dfrac{\rho g}{E}(x - \ell)$ ➔ $u = \dfrac{\rho g}{2E}(x-\ell)^2 + Cte$ En tenant compte de la CL en 0 ; $u(0,t) = 0$

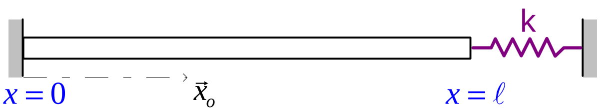
$u = \dfrac{\rho g}{2E}x(x - 2\ell)$ Le tassement est : $u_{max} = \dfrac{\rho g \ell^2}{2E}$

Le diagramme de l'effort normal est donné par $ESu_{,x} = \rho g S(x - \ell)$

C'est le point de départ d'une solution type "RDM".
Le bilan des efforts extérieurs permet de construire ce diagramme.

On retrouve le poids de la colonne $P = -N(0,t) = \rho g S \ell$, l'extrémité libre $N(\ell,t) = 0$ et la variation linéaire entre les deux extrémités.

3- Application du PTV, pour un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible.



Le PTV appliqué à la barre s'écrit :

Mise en équations des barres

$$\forall \delta u \quad \int_o^\ell \rho S \ddot{u}\ \delta u\ dx = -\int_o^\ell ES u_{,x}\ \delta u_{,x}\ dx + F_o \delta u_o - k(u_\ell - \Delta)\delta u_\ell$$

$-k(u_\ell - \Delta)$ représente l'effort exercé par le ressort sur la barre

$\Delta = \ell - x_\ell$ représente la précontrainte du ressort pour un déplacement de l'extrémité $u_\ell = 0$

x_ℓ est la position à vide de l'extrémité du ressort

Si $x_\ell = \ell$ **ressort non contraint si la barre n'est pas déformée** ➔ $F_k = -ku_\ell$

F_o est une inconnue du Pb (effort de l'encastrement sur la barre), pour obtenir l'équation du mouvement nous utiliserons des déplacements virtuels cinématiquement admissibles : $\delta u_o = 0$.

$$\Rightarrow \quad \forall \delta u_{CA} \quad \int_o^\ell \rho S \ddot{u}\ \delta u\ dx + \int_o^\ell ES u_{,x}\ \delta u_{,x}\ dx + k u_\ell\ \delta u_\ell = 0$$

C'est le problème des oscillations libres du système

En considérant le système complet, la barre et le ressort.

Le terme $-ku_\ell \delta u_\ell$ qui représente le travail virtuel des efforts de déformations du ressort, est obtenu directement à partir de l'énergie potentielle du ressort $2E_d = ku_\ell^2$ ➔ $\delta E_d = ku_\ell \delta u_\ell$

4- Équivalence des principes.

Le système d'EDP de ce problème est : $\begin{cases} \forall x \in]0,\ell[\quad \rho S\ddot{u} - ESu_{,xx} = 0 \\ CL \quad \begin{cases} u_{(0,t)} = 0 \\ ESu_{,x(\ell,t)} = -k\ u_{(\ell,t)} \end{cases} \end{cases}$

Partons de l'équation locale : $\rho S\ddot{u} - ESu_{,xx} = 0 \qquad \forall x \in]0,\ell[$

$$\forall P \quad \int_0^\ell P\ (\rho S\ddot{u} - ESu_{,xx})\ dx = 0$$

Intégration par partie du terme en $u_{,xx}$

$$\forall P \quad \int_0^\ell P\rho S\ddot{u}\ dx + \int_0^\ell P_{,x} ESu_{,x}\ dx = P(\ell)\ ESu_{,x}(\ell) - P(0)\ ESu_{,x}(0)$$

Tenons compte de la condition en $x = \ell$

$$\forall P \quad \int_0^\ell P\rho S\ddot{u}\ dx + \int_0^\ell P_{,x} ESu_{,x}\ dx + P(\ell)ku(\ell) = -P(0)\ N(0)$$

Or $F_o = -N_{(o,t)}$

D'où $$\forall P \quad \int_0^\ell P\rho S\ddot{u} dx + \int_0^\ell P_{,x} ESu_{,x}\ dx + P(\ell)ku(\ell) = P_o F_o$$

F_o est l'effort de l'appui sur la barre (c'est une inconnue du problème)

Pour résoudre il faut tenir compte de la condition $u_{(0,t)} = 0$

Le système d'EDP est donc équivalent à $\forall P_{CA} \quad \int_0^\ell P\rho S\ddot{u} dx + \int_0^\ell P_{,x} ESu_{,x}\ dx + P(\ell)ku(\ell) = 0$

Partons maintenant de la forme intégrale complète

Mise en équations des barres

$$\forall P \qquad \int_0^{\ell} P\rho S\ddot{u}dx + \int_0^{\ell} P_{,x}ESu_{,x}\ dx + P(\ell)ku(\ell) = P_o F_o$$

Une intégration par partie permet d'obtenir

$$\forall P \qquad \int_0^{\ell} P\rho S\ddot{u}dx + \left[PESu_{,x}\right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} PESu_{,xx}\ dx + P(\ell)ku(\ell) = P_o F_o$$

Choix de différentes fonctions de pondération

$\forall P \neq 0$ sur $]0,\ell[$ on retrouve l'équation locale $\qquad \rho S\ddot{u} - ESu_{,xx} = 0 \qquad \forall x \in]0,\ell[$

$\forall P = 0$ sur $]0,\ell]$ on retrouve la condition en 0 $\qquad F_0 = -ESu_{,x\,(0,t)} = -N_0$

$\forall P = 0$ sur $[0,\ell[$ on retrouve la condition en ℓ $\qquad ESu_{,x\,(\ell,t)} = -k\ u_{(\ell,t)}$

Remarque

Si on part de la forme Cinématiquement admissible tenant compte de la CL en 0, on ne retrouvera pas la valeur de l'effort inconnu (action de l'appui sur la barre) en x = 0 .