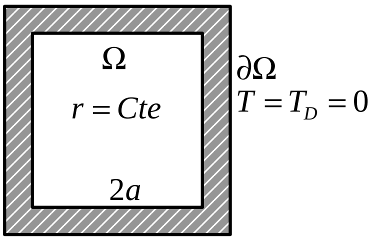
NUM 3 :: Modèle EF bidimensionnel en thermique

Problème test (cas académique)

Ce problème sera traité en TP d'initiation à l'utilisation de Cast3m



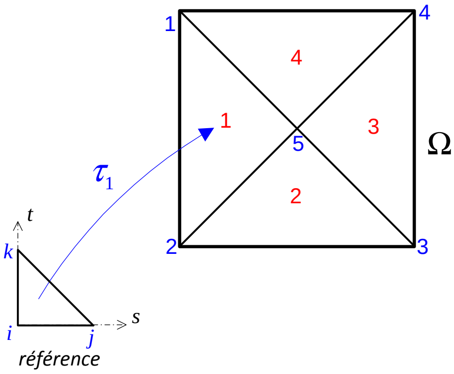
Soit un carré de coté $2a$ dont la température sur les bords est maintenue à 0°C, une source de chaleur fournie une puissance volumique r sur la surface du carré.

Ce problème est représenté sur la figure ci-contre. L'objectif est de déterminer en régime permanent la température au centre du carré en utilisant quatre éléments finis triangulaires identiques.

Mise en équations

a. Écrire le système d'EDP de ce problème
b. Écrire la forme variationnelle correspondante
c. Simplifier la forme variationnelle à un champ thermiquement admissible.
d. En déduire l'expression de la matrice raideur et du vecteur force généralisée à calculer au niveau élémentaire.

Modélisation EF du problème



Pour traiter ce problème nous utiliserons le maillage représenté sur la figure ci-contre, il comporte 5 nœuds pour quatre éléments triangulaires de degré 1.

Lors des calculs vous utiliserez l'élément de référence représenté sur la figure et la notion de transformation géométrique.

On n'effectuera les calculs que pour l'élément 1 les résultats pour les autres éléments étant identiques compte tenu des symétries du problème.

1. Transformation géométrique

a. Montrer que l'approximation nodale sur l'élément de référence est de la forme
$< N_{(s,t)} >=< 1-s-t \quad s \quad t >$
b. Écrire la transformation géométrique de l'élément (1) :1-2-5
Exprimer (x,y) en fonction de (s,t)
Vérifier votre expression en calculant la position du milieu du coté (j,k)

2. Matrice jacobienne

a. Exprimer la matrice jacobienne de la transformation de l'élément 1
Calculer l'inverse.
b. Vérifier le calcul de la surface de l'élément en utilisant la transformation géométrique
c. Exprimer les vecteurs $\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix}$ ce sont des constantes fonctions de la dimension du coté

3. Matrice raideur

a. Des calculs précédents en déduire l'expression de la matrice $[B]=\left[\overrightarrow{gradT}\right]$
Calculer le produit $B^T B$, puis exprimer la matrice raideur $[K_1]$ de l'élément 1

4. Chargement

a. A la source de chaleur correspond un vecteur force généralisé élémentaire, donner sont expression et effectuer en utilisant les résultats obtenus en 2.

5. Assemblage résolution

Le problème ne possède qu'un degré de liberté la température au centre du carré.
Les quatre éléments étant identiques vous pouvez calculer cette température à partir des calculs effectués pour l'élément 1.

A titre de comparaison la solution analytique est $0,294\ ra^2/\lambda$

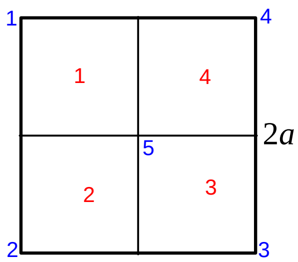
Annexe

Lors du TP d'initiation à Cast3M nous traiterons numériquement ce problème en utilisant des éléments quadrangles réguliers et nous réaliserons une étude de convergence en fonction de la taille des éléments.

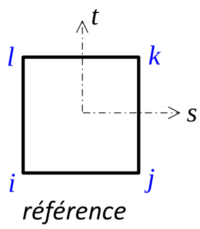
6. Vous pouvez traiter à la main le modèle à quatre éléments

Le maillage et les fonctions de forme de l'élément de référence que vous pouvez utiliser sont donnés dans la figure ci-dessous.

Maillage



Élément de référence



$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{cases}$$

Comparer le résultat de ce modèle au résultat du modèle T3

Correction NUM 3

Mise en équations

Système d'EDP du problème

$$\begin{cases} sur\ D & \mathrm{div}\vec{q} - r = 0 \quad avec\ \ \vec{q} = -\lambda\ \overrightarrow{\mathrm{grad}T} \\ sur\ \partial D & T = T_d \end{cases} \qquad \text{soit :} \begin{cases} sur\ D & \Delta T = -r/\lambda \\ sur\ \partial D & T = 0 \end{cases}$$

Forme variationnelle

$$\forall \delta T \quad \int_D \lambda\ \overrightarrow{grad\delta T}.\overrightarrow{gradT}\ dS = \int_D r\delta T\ dS + \int_{\partial D} \delta T \phi_I\ dc$$

Champ thermiquement admissible : $sur\ \partial D \quad \delta T = 0$

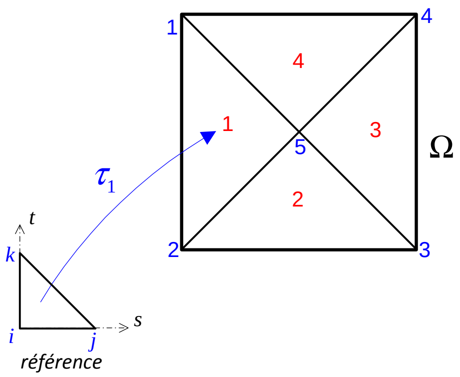
$$\forall \delta T_{Th} \quad \int_D \lambda\ \overrightarrow{grad\delta T}.\overrightarrow{gradT}\ dS = \int_D r\delta T\ dS$$

Forme matricielle élémentaire. On pose $T_{(x,y)} = < N_{(x,y)} > \{T_e\} = N\ T_e$

$$[K_e] = \lambda \int_{D_e} [B]^T [B]\ dS \quad \text{avec} \quad [B] = \left[\overrightarrow{gradN}\right] = \begin{bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = r \int_{D_e} N\ dS$$

Modélisation EF du problème



Sur l'élément de référence l'approximation est

$$T_{(s,t)} = a_0 + a_1 s + a_2 t = <1 \quad s \quad t> \{a\}$$

D'où $\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a\}$ ➔ $\{a\} = P^{-1}\{T_e\}$

Puis $T_{(s,t)} = <1 \quad s \quad t> P^{-1}\{T_e\} = < N_{(s,t)} > \{T_e\}$

On trouve $< N_{(s,t)} > = <1 - s - t \quad s \quad t>$

1. Transformation géométrique de l'élément (1) :1-2-5

$\begin{cases} x = < N_{(s,t)} > \{x_e\} \\ y = < N_{(s,t)} > \{y_e\} \end{cases}$ ➔ pour l'élément 1-2-5 $\langle x \quad y \rangle = [1 - s - t \quad s \quad t] \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vérification pour (s , t) = (0.5 , 0.5) on trouve $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = -\frac{a}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ qui est bien le milieu du coté 2-5

2. Matrice jacobienne

La matrice jacobienne de l'élément 1 est

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,s} & N_{2,s} & N_{3,s} \\ N_{1,t} & N_{2,t} & N_{3,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

D'où $\det[J]=2a^2$ et $[J]^{-1}=\dfrac{1}{2a^2}\begin{bmatrix}-a & 2a\\ -a & 0\end{bmatrix}$

La surface de l'élément réel est $S_{réel}=\int_0^1\int_0^{1-s} 2a^2\ dsdt = 2a^2\int_0^1(1-s)ds=a^2$ c'est bien le cas

Sachant que $\begin{Bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\partial/\partial s\\ \partial/\partial t\end{Bmatrix}$ nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix}N_{1,x}\\ N_{1,y}\end{Bmatrix}=J^{-1}\begin{Bmatrix}-1\\ -1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2a^2}\begin{Bmatrix}-a\\ a\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}N_{2,x}\\ N_{2,y}\end{Bmatrix}=J^{-1}\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}=\frac{1}{2a^2}\begin{Bmatrix}-a\\ -a\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}N_{3,x}\\ N_{3,y}\end{Bmatrix}=J^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2a^2}\begin{Bmatrix}2a\\ 0\end{Bmatrix}$$

D'où $[B_{(s,t)}]=\dfrac{1}{2a}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ c'est une constante donc intégration analytique simple

3. Matrice raideur

$$[B]^T[B]=\frac{1}{2a^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad [K_1]=\frac{\lambda}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}_{sur\ 1\text{-}2\text{-}5}$$

4. Chargement

$$\{F_1\}=r\int_{D_e}N\ dS=r\int_0^1\int_0^{1-s}<1-s-t \quad s \quad t>^T\ 2a^2\ dsdt$$

$$\boxed{\int_0^1\int_0^{1-s}tdt\ \ ds=\int_0^1\frac{(1-s)^2}{2}ds=\frac{1}{6}\Big[(1-s)^3\Big]_0^1=\frac{1}{6}}$$

soit $\{F_1\}=\dfrac{r}{3}a^2\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}_{sur\ 1\text{-}2\text{-}5}$

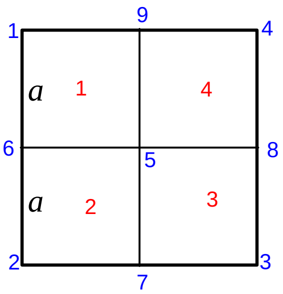
5. Assemblage résolution

Les quatre éléments étant identiques, nous obtenons en tenant compte des CL

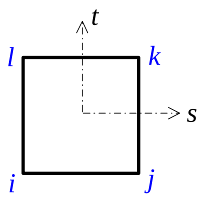
$4\lambda T_5=4\dfrac{r}{3}a^2$ soit $T_5=\dfrac{ra^2}{3\lambda}=0,333\ \dfrac{ra^2}{\lambda}$ solution analytique est $0,294\ ra^2/\lambda$

6. Annexe

Maillage



Élément de référence



référence

$$\begin{cases}N_1=\frac{1}{4}(1-s)(1-t)\\ N_2=\frac{1}{4}(1+s)(1-t)\\ N_3=\frac{1}{4}(1+s)(1+t)\\ N_4=\frac{1}{4}(1-s)(1+t)\end{cases}$$

Elément 1 (1-6-5-9): $[J]=\begin{bmatrix} N_{1,s} & N_{2,s} & N_{3,s} & N_{4,s} \\ N_{1,t} & N_{2,t} & N_{3,t} & N_{4,t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a & a \\ -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$$[J]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} t-1 & 1-t & 1+t & -1-t \\ s-1 & -1-s & 1+s & 1-s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a & a \\ -a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\frac{a}{4}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ==> } \det[J]=a^2/4$$

$[J]^{-1}=\frac{2}{a}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ d'où $[B_{(s,t)}]=\frac{2}{4a}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t-1 & 1-t & 1+t & -1-t \\ s-1 & -1-s & 1+s & 1-s \end{bmatrix}$

Soit : $[B_{(s,t)}]=\frac{1}{2a}\begin{bmatrix} s-1 & -1-s & 1+s & 1-s \\ 1-t & t-1 & -1-t & 1+t \end{bmatrix}$

Dans le produit $[B]^T[B]$ seul le coefficient (3,3) nous intéresse

$$K_{33}=\frac{\lambda}{4a^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left((1+s)^2+(1+t)^2\right)\frac{a^2}{4}\,dsdt=\frac{2}{3}\lambda$$

De même $\quad F_3 = r\int_{D_e} N_3\,dS = r\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+s)(1+t)\frac{a^2}{16}\,dsdt \text{ ==> } F_3=\frac{ra^2}{4}$

Les quatre éléments étant identiques

$\frac{2}{3}\lambda T_5=\frac{ra^2}{4}$ soit $T_5=\frac{3ra^2}{8\lambda}=0,375\,\frac{ra^2}{\lambda}$ c'est un peu moins bien que le T3

Lors du TP d'initiation TH1 nous retrouverons ce résultat numériquement, et nous ferons une étude de convergence.