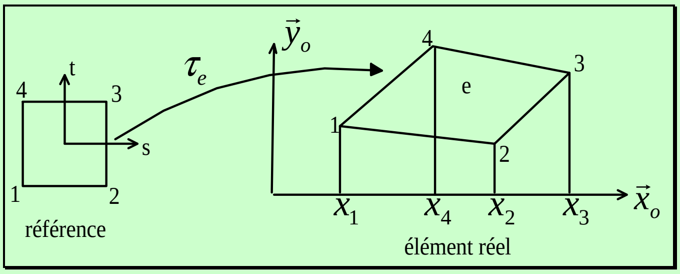
Exercice 2 : Élément Q4 en contraintes planes

Objectifs : Transformation géométrique et intégration numérique,

Analyse du script Q4_ke de MEFlab

Soit l'élément de référence quadrilatère à quatre nœuds de type Q4.



Rappeler :

la base polynomiale de l'approximation.

le principe de construction de l'approximation nodale.

l'expression de $[N(s,t)]$ telle que : $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N(s,t)]\{U_e\}$

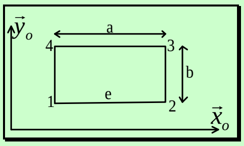
Transformation géométrique du Q4

Appliquez la transformation au centre du carré puis au point de coordonnées $s = t = 0,5$

Donner l'expression de la matrice Jacobienne de cette transformation géométrique en fonction de s, t et x_i, y_i

Que pensez-vous du calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne ?

Dans le cas particulier ou l'élément réel est un rectangle



Montrer que la matrice Jacobienne est : $[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$

En déduire l'expression de $[J]^{-1}$

Calculer la dérivée première par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

En déduire l'expression de la matrice $[B]$ en fonction de s et t

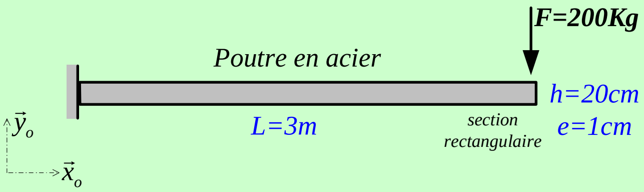
Est –il possible de calculer analytiquement la matrice raideur d'un élément rectangulaire ?

Calculs numériques

Analyser le script « Q4_ke » qui utilise l'intégration numérique

Le diaporama Q4 proposé sur le site vous aidera à faire le lien avec le cours.

Utiliser MEFLAB pour réaliser un modèle en contrainte plane d'une poutre console.

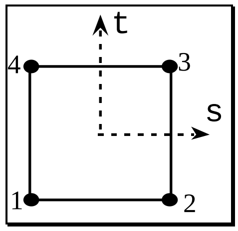


Pour un maillage de 5 par 3 éléments pour une longueur L et une hauteur h.

Analyser les résultats et comparer avec la solution analytique poutre car L >> h

Effectuez une étude de convergence

1- Approximation



Soit l'élément de référence quadrilatère à quatre noeuds de type Q4
La base polynomiale de l'approximation est : $<1 \quad s \quad t \quad st>$

$$u^h{}_{(s,t)} = <1 \quad s \quad t \quad st>\{a\}$$

Par identification du déplacement nodal aux noeuds de l'élément nous obtenons :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ a_2 = \frac{1}{4}(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) \\ a_3 = \frac{1}{4}(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) \\ a_4 = \frac{1}{4}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \end{cases}$$

Soit $\quad u^*{}_{(s,t)} = < N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 > \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = < N_{(s,t)} > \{U\}_e \quad$ avec $\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{cases}$

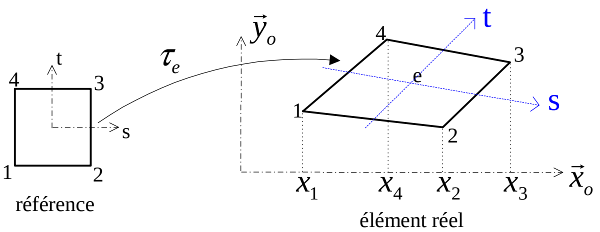
Pour le champ des déplacements nous obtenons:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [N_{(s,t)}]\{U_e\}$$

Les fonctions d'interpolation sont linéaires sur les cotés de l'élément, mais elles contiennent des termes quadratiques en "st" sur le domaine.

2- Transformation géométrique

Pour l'élément Q4 iso-paramétrique, nous utilisons les fonctions d'interpolation pour définir la transformation géométrique. L'élément réel est un quadrilatère à bords droits.



Transformation géométrique du Q4

On peut vérifier que le transformé du centre est le centre etc …

tracé du repère (s,t) sur l'élément réel

Calculons la matrice Jacobienne de cette transformation géométrique.

$$[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1+t & 1-t & 1+t & -1-t \\ -1+s & -1-s & 1+s & 1-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

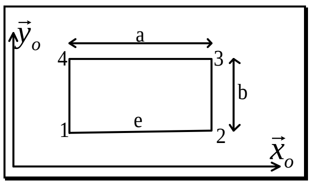
Il n'est pas utile de pousser plus loin les calculs analytiques. Les coefficients de la matrice Jacobienne sont des fonctions linéaires de "s" et "t", son déterminant est un polynôme en "s et t". Nous ne pourrons pas intégrer analytiquement les termes de la matrice raideur. L'expression de [J] et de son déterminant sont donné dans le D&T (chapitre I.5.2). Dans le cas général, pour cet élément nous aurons recours à l'intégration numérique pour effectuer les calculs.

Le fichier Maple disponible sur le site permet d'effectuer des simulations numériques pour obtenir l'expression de la matrice raideur d'un élément quadratique de forme quelconque

Dans le cas particulier ou l'élément réel est un rectangle nous pouvons envisager le calcul analytique En effet:

la matrice Jacobienne est : $[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$

d'où $\det([J]) = \frac{ab}{4}$ et $[J]^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$



Cas du rectangle

Ces relations nous permettent de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{cases} N_{i,x} = \dfrac{2}{a} N_{i,s} \\ N_{i,y} = \dfrac{2}{b} N_{i,t} \end{cases}$$

D'où $[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$ *en fonction de s et t*

Pour l'élément rectangulaire le champ des déformations et des contraintes sont linéaires sur les éléments. Et nous pouvons intégrer analytiquement les termes des matrices raideur. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le D&T.

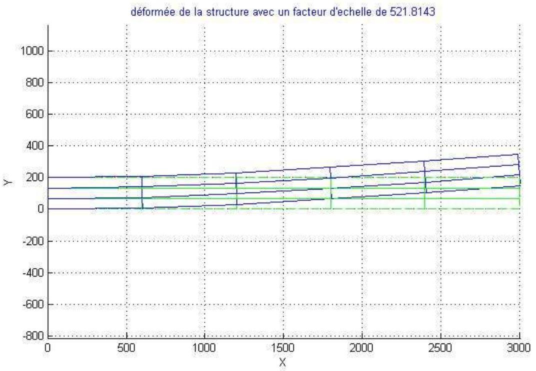
3- Calculs numériques

Vous disposez sur le site d'un fichier *MEFlab* ou les calculs élémentaires sont programmés, et d'un diaporama commentant les différentes étapes de ce script *MATLAB.*

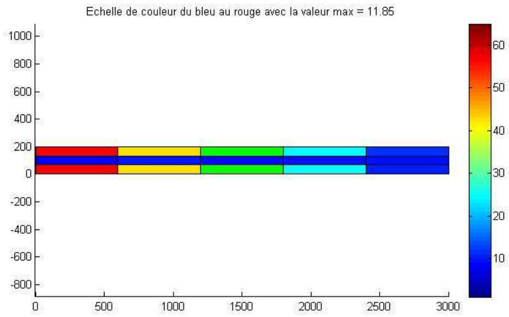
Pour une poutre console. (L=3m,h=20cm,e=1cm) en acier chargée de 200Kg en bout

Vous pouvez réaliser par vous même le jeu de données du modèle (5*3)

Nous donnons ci-dessous la solution pour ce maillage en Q4



$v_{Max} = 2{,}8mm$



Contrainte moyenne max : $\sigma_{xx}\big|_{Moy} = 12,4MPa$

La solution poutre $v = FL^3/3EI = 12{,}8mm$ et $\sigma_{xx}\big|_{MAx} = FLh/2I = 90MPa$

Analyse :

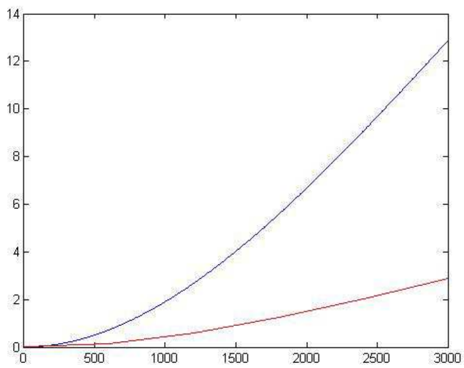
Globalement on retrouve le comportement de la poutre en flexion (M_f linéaire en x, et σ_{xx} en y)

L'erreur est importante car la contrainte varie de façon discontinue entre les éléments

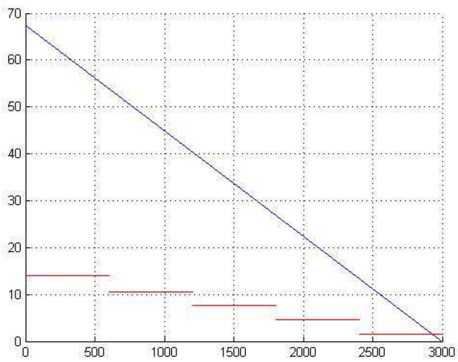
Les éléments sont tous rectangulaires l'intégration numérique est donc exacte

L'erreur est une erreur de modélisation, il faut affiner le maillage

Comparaison des solutions "numériques 2D" (en rouge) et "analytique poutre" (en bleu)



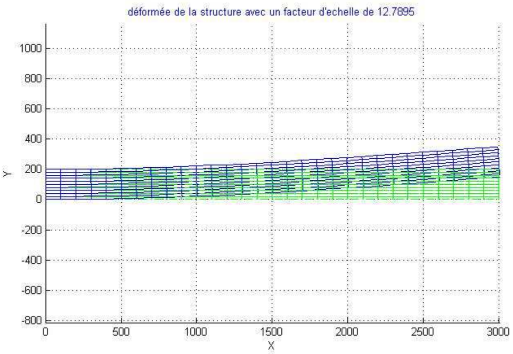
flèche

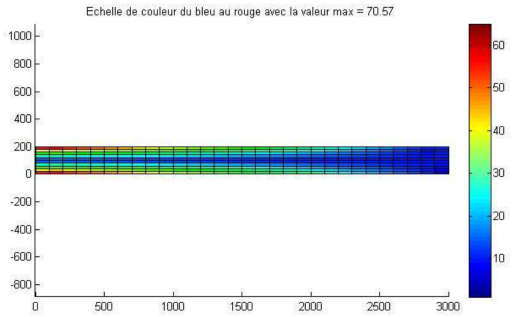


Contrainte σ_{xx}

Pour aller plus loin il faut passer au projet Num2 et utiliser le programme de maillage automatique proposé sur le site.

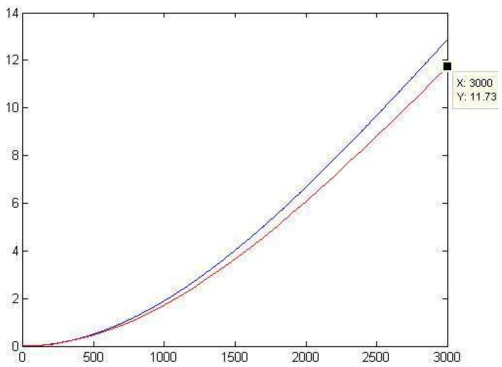
La solution pour un maillage Q4 de (30*10) est donnée ci-dessous.

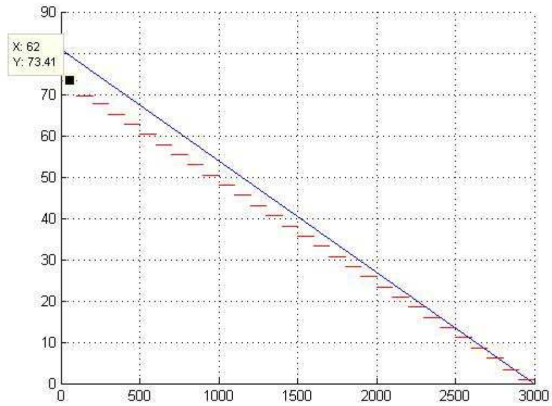




$v_{Max} = 11,8mm$ / $12,8mm$ (poutre)

Contrainte $\sigma_{xx} = 73,4$ / $80,1MPa$ (poutre)





La convergence est lente

Ces résultats valident le modèle poutre longue et pas le contraire

Si L voisin de h les résultats des deux modèles diffèrent

C'est le modèle poutre longue qui n'est pas justifié

De même si e << h le modèle contrainte plane est justifié, ce qui ne serai pas le cas de e voisin de h

Pédagogiquement :

Il est possible de réaliser tous ces modèles sous *MEFlab* puis avec un code de calcul industriel, ce qui donne un sujet de projet académique d'une dizaine d'heure, avec comme objectifs, regarder l'influence

Du degré de l'interpolation (programmer l'élément de degré deux Q8).
De la forme géométrique des éléments (dégénérer le maillage)
Du nombre de points d'intégration (intégration réduite ou sur intégration)
La position des points de calcul des contraintes sur les éléments
La prise en compte des conditions aux limites et des chargements.