§5.3.

一、内积.

已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}$，记 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，称为内积 ← 内积是一个数!

1. $(\alpha,\alpha)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq 0$ (当且仅当 $\alpha=0$ 时取等)

2. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

3. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$ $(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$

4. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$(k_1\alpha_1+k_2\beta,\gamma)=k_1(\alpha,\gamma)+k_2(\beta,\gamma)$

$(\alpha,k_1\beta+k_2\gamma)=k_1(\alpha,\beta)+k_2(\alpha,\gamma)$

5. $(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,m_1\beta_1+m_2\beta_2)=k_1m_1(\alpha_1,\beta_1)+k_1m_2(\alpha_1,\beta_2)+k_2m_1(\alpha_2,\beta_1)+k_2m_2(\alpha_2,\beta_2)$

二、向量的长度(范数，模)

记 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为向量的长度

若 $\|\alpha\|=1$，则称其为单位向量，$\alpha\to\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 称为单位化(标准化)

性质.

① $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$ 内积可以是负的

$=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}=|k|\cdot\|\alpha\|$

② $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

③ 三角不等式：$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

三、正交向量组

若 $(\alpha,\beta)=0\Rightarrow\alpha\perp\beta$，称 α 和 β 正交

$\Rightarrow$ 若 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 中向量两两正交且不含零向量，则称为正交向量组

若向量组中每个向量长度都是1，则称向量组为标准正交向量组且 $\begin{cases}(\alpha_i,\alpha_i)=1\\(\alpha_i,\alpha_j)=0\end{cases}$

定理. 若 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 是正交向量组，则 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关