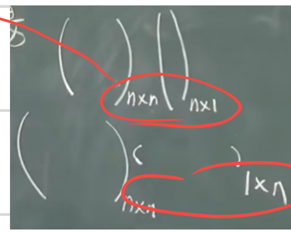
一、特征值与特征向量

特征向量都是列向量 且不为0



对 n 阶方阵 A，数 λ，若 $\exists$ 非零列向量 α，使 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 λ 称为一个特征值 α 称为一个特征值对应的特征向量

（λ 可以为0）

1. 求特征值：

数

$\lambda\alpha - A\alpha = 0 \Rightarrow \lambda E\cdot\alpha - A\cdot\alpha = 0$ 即 $(\lambda E - A)\cdot\alpha = 0$

$\Leftrightarrow$ 求 $(\lambda E - A)\cdot X = 0$ 的非零解 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$，记作特征方程

称 $\lambda E - A$ 为特征矩阵

2. 性质：

①若 λ 是 A 的特征值，α 是 λ 对应的特征向量，则 $k\alpha$ 也是 λ 对应的特征向量

②若 α_1, α_2 都是 λ 对应的特征向量，则 $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2$ 也是 λ 的特征向量

③ A^T 和 A 有相同的特征值，但特征向量不一定相同

④若 $\sum|a_{ij}|<1$ $i=1\cdots n$ 或 $j=1\cdots n$，则 $|\lambda_k|<1$

$\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的每行(列)元素绝对值之和 <1

⑤若矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$，则有：

1> $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ （特征值之和等于主对角线元素之和）

2> $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$ （特征值之积等于 A 的行列式）

⑥互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ 对应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关

⑦ k 重特征根对应的线性无关的特征向量的个数 $\le k$

⑧ $k\lambda$ 是 kA 的特征值，λ^k 是 A^k 的特征值

例：已知2是矩阵 A 的特征值，求矩阵 A^5+6A^2+A+3E 的特征值

将所有 A 替换为特征值，特别的，E 一定替换为1

$2^5+6\times2^2+2+3\times1$

⑨若 λ 是 A 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，$\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值

$\Rightarrow (A^*)^*$ 的特征值？令 $A = A^*$，则 $\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值 $\Rightarrow (A^*)^* = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}|A|}\cdot|A^*| = \lambda\cdot|A|^{n-2}$

例，已知 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&5\end{pmatrix}$，则：

设特征值为λ，特征向量α，则，

$A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow |\lambda E-A|=0$ 怎么解？

$$\Rightarrow \lambda\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&5\end{vmatrix}=\boxed{\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=0}$$

单位阵是 $\begin{vmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{vmatrix}$

完全展开？⇒ 出现三次方程(x)
按行(列)展开？⇒ 使0尽可能多
提公因子(都含λ)
关键！
相同(反)数，行(列)和相同数，相减(加)

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}(\lambda-2)[(\lambda+1)(\lambda-3)+4]=0$$

$\Downarrow$

$\begin{cases}\lambda-2=0\\(\lambda+1)(\lambda-3)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=1\\\lambda_3=2\end{cases}$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时

例，求 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向

设特征值为λ，则：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}\xrightarrow{②+③}\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{\text{先提取公因式}}{=\!=\!=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$\frac{2}{3}$ $-4-\frac{2}{3}$ $-5-\frac{1}{3}$

λ代入最开始的式子中（千万不能代错!!）

$$=(\lambda-2)\left(\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\2&-4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda+2\end{vmatrix}\right)=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+7)$$ 解得 $\lambda_1=-7$，$\lambda_2=\lambda_3=2$

①当 $\lambda=-7$ 时

$$|\lambda E-A|=\boxed{\begin{vmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\0&-9&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-\frac14&\frac14\\2&-5&-4\\0&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-\frac14&\frac14\\0&-\frac92&-\frac92\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-\frac14&\frac14\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}$$

依题意，α是 $(\lambda E-A)\cdot X=0$ 的一个解，此时：

$$=\begin{vmatrix}1&0&\frac12\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0+0x_2-\frac12\cdot x_3=-\frac12x_3\\x_2=0+0x_1-1\cdot x_3=-x_3\end{cases}$$ ∴ x_3 是自由未知量

自由未知量 (x_3) 分别取 (1)，(0)，得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac12\\-1\end{pmatrix}$ ∴原方程基础解系为：$C_1\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ $(C_1\neq0)$

2) $\lambda_2=\lambda_3=2$ $\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\cdots\to$ (行简)

$C_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ C_2, C_3 不同时为0

(当基础解系的向量有2个及以上时，只要参数不全为0即可)