

§4.3, 齐次线性方程组

1. 齐次方程至少有一零解

1) $r(A)=r(\bar{A})=n$. 有唯一零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

2) 有非零解: $\Leftrightarrow r(A) < n$

3) 方程个数 < 未知数个数 有非零解. $r(A) \leq \min\{m, n\} = m < n$

4) 方程个数 = 未知数个数 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$ 不可逆

推论: 方程个数 = 未知数个数 只有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

$r(A)=n$

例: 判断下列方程解的个数

1) $(1, 3, 0, 5), (1, 2, 1, 4), (1, 1, 2, 3), (2, 5, 1, 9), (1, -3, 6, -1)$

解: 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 + x_5\alpha_5 = 0$

① 写出线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

② 求出系数行列式

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

④ 做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0 + x_3 - x_4 + 5x_5$$

$$x_2 = 0 - 2x_3 - x_4 - 6x_5$$

线性方程都是 $\dots = 0$