§4.2. 有解判定

一、线性方程组的表示

例：
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+9x_2+10x_3=11 \end{cases}$$

1. 矩阵表示

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ ⇒ 增广系数矩阵 $\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right)$

2. 向量表示

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\9\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\11\end{pmatrix} \Rightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$$

3.

对线性方程组 $\underbrace{m}_{\text{方程个数}}, \underbrace{n}_{\text{未知数个数}}$，有：

① 当 $r(A)=r(\bar{A})$ 时，有解：
$$\begin{cases} \text{当 } r(A)=r(\bar{A})=n \text{ 时，有唯一解} \\ \text{当 } r(A)=r(\bar{A})<n \text{ 时，有无穷解} \end{cases}$$

② 当 $r(A)\neq r(\bar{A})$ 时，无解

如何判断 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$？

① 写出 $\bar{A}$（虚线左边 A，右边为方程右边常数）

② 只做初等行变换，化为阶梯形

③ 比较 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$：

比较虚线两边非零行行数是否相同

④ 化为最简行列式，将除首非零元以外的变量移到右边

例:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

唯一解. $r(A)=r(\bar{A})=3=$ 未知数个数

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = 5 - x_3 \\ x_2 = 9 - x_3 \end{cases}$$

无穷多解 $r(A)=r(\bar{A})=2<3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

无解 $r(A)=2 \neq r(\bar{A})=3$

例

$$\bar{A} \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$r(A) \neq r(\bar{A})$, 无解

例:

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{化为最简行阶梯形}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 0 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4$$

$$x_2 = 1 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

(x_3, x_4 是自由未知量)

例:

$$\bar{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \text{——} \\ 0 & \lambda & \text{——} \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) \ \text{——} \end{pmatrix}$$

注意: 参数一定不能在分母, 如果在也需要讨论过解的情况