一、相似矩阵：

对 n阶方阵 A、B，若∃ n阶可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则记 $A\sim B$（A相似于B）

1、性质：

①反身性：$A\sim A$

②对称性：$A\sim B \Rightarrow B\sim A$

③传递性，$A\sim B$ $B\sim C$ $\Rightarrow A\sim C$

④若 $A\sim B$，则

1> $|A|=|B|$ A与B有相同的特征值 $\Rightarrow$ $tr(A)=tr(B)$

迹(数)：一个n阶矩阵A 主对角线上各个元素之和记作迹

$|\lambda E-A|$ $P^{-1}AP=B$

$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}EP-P^{-1}AP|=|P^{-1}\cdot\lambda E\cdot P-P^{-1}\cdot A\cdot P|=\cancel{|P^{-1}|}\cdot|\lambda E-A|\cdot\cancel{|P|}=|\lambda E-A|$

2> A可逆 $\Longleftrightarrow$ B可逆，且 $A^{-1}\sim B^{-1}$ $\Rightarrow$ 若 $A\sim B$，则 A、B同时可逆或不可逆

3> $A^m\sim B^m$

例：

1) $A=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & 1\\ & 2 & a\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 3 & 2\\ & -1 & b\end{pmatrix}$ 若 $A\sim B$ 求参数 a，b 的值

若 $A\sim B$，则：

- $tr(A)=tr(B)$ $\Rightarrow$ $2+1+a=1+3+b$ ①
- $|A|=|B|$ $\Rightarrow$ ②
- 均(不)可逆
- $A^{-1}\sim B^{-1}$
- $A^m\sim B^m$
- 特征值相同
- $r(A)=r(B)$

优先级

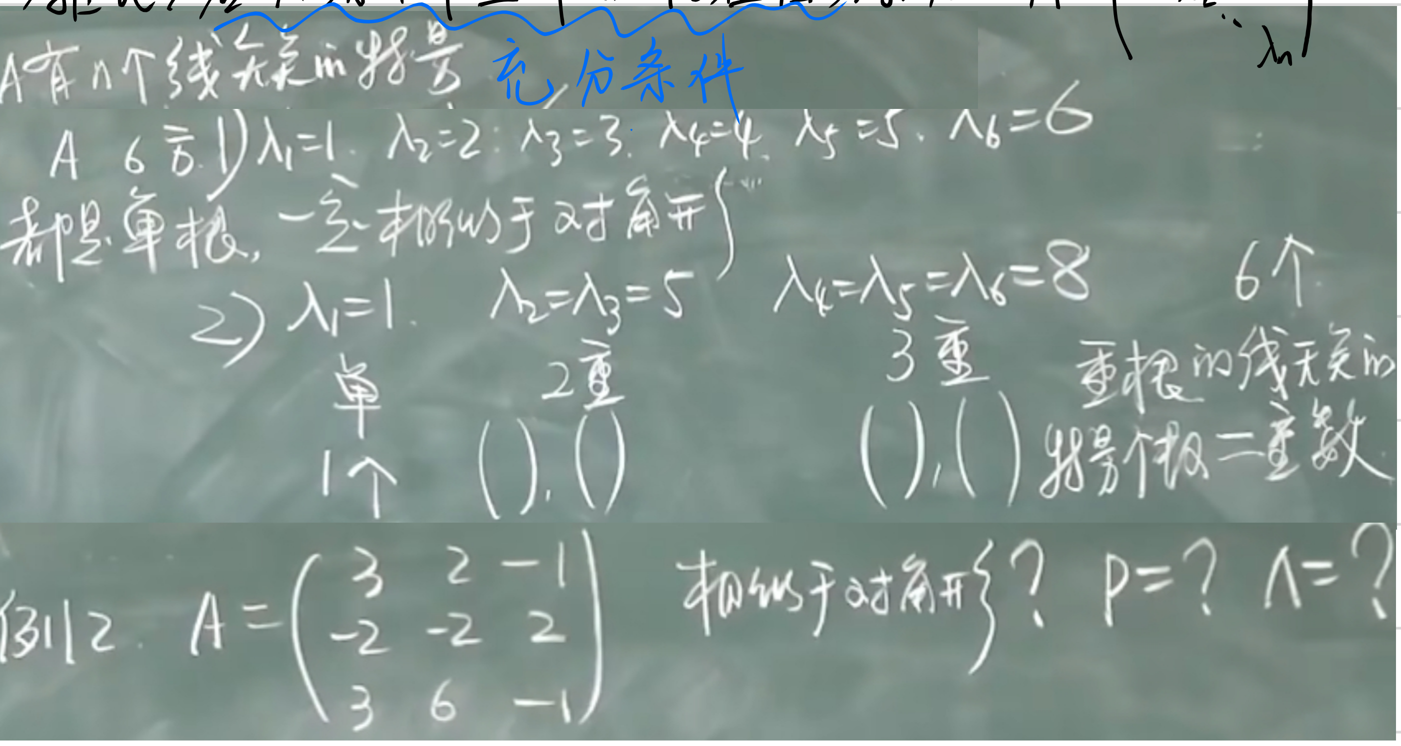
$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$（左乘、右乘、左右同乘可逆矩阵秩不变）

联立①② $\Rightarrow\begin{cases}a=\cdots\\ b=\cdots\end{cases}$

二、矩阵与对角形矩阵相似的条件:

定理一：若 $A \sim$ 对角形矩阵 $\Lambda \Longleftrightarrow A$ 有n个线性无关特征向量

⇒推论：若 A 有n个互异的特征值，则：$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$



①解 $|\lambda E - A|$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{③+①} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ \lambda-2 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 1 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\left(\begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 \\ -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \lambda+2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (\lambda-2)\left[1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 \\ -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \lambda+2 & -2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= (\lambda-2)\times[\lambda^2+3\lambda+2-12+4-\lambda-2] = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$$ 解得 $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=\lambda_3=2$

∵特征向量α是 $(\lambda E - A)\cdot X = 0$ 的解

∴①当 $\lambda=-4$ 时,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & -7 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$ (x_3为自由未知量) $\Rightarrow \eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore \alpha_1 = C_1\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

(C_1为常数且 $C_1 \neq 0$)

② $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时 $\left(\ \right) \to \left(\ \right)$，$\left\{ = \right.$ $\boxed{\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ ⇒两重根

∴相似

∴可逆矩阵 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ⇐所有特征列向量按行排列得到的矩阵

$$\text{对角形矩阵 } \Lambda=\begin{pmatrix}-4 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

定理，$A\sim\Lambda \Longleftrightarrow$ 有 r_i 重根，基础解系有 r_i 个解

例 6) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. A^{100} $\quad \cancel{A^2 \cdot A^3 \cdot A^4}$

解：$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=0 \quad \lambda_3=1$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad P^{-1}AP=\Lambda \quad A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}=P\Lambda \cancel{P^{-1}} \cancel{P}\Lambda \cancel{P^{-1}} \cdots \cancel{P}\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{100} & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

推论：

基础解系中解的个数：$n-r(A)$ 个 ⇒ $r(A)=n-r_i$