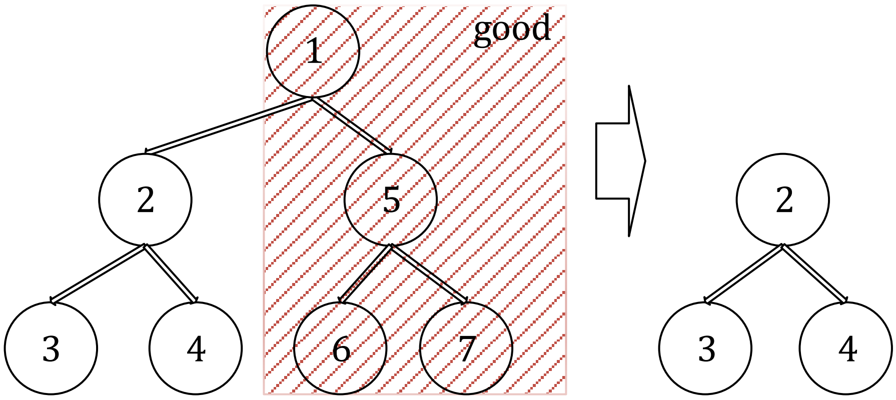
Binary Tree DP

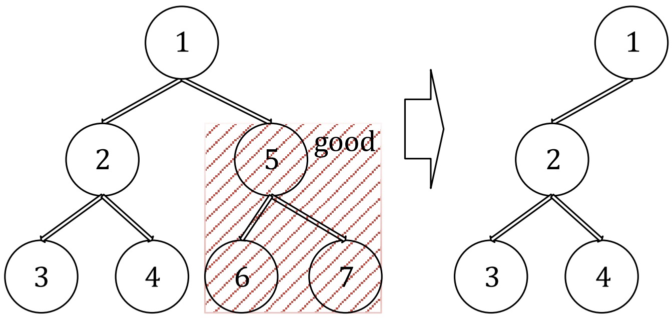
二叉树动规

问题：

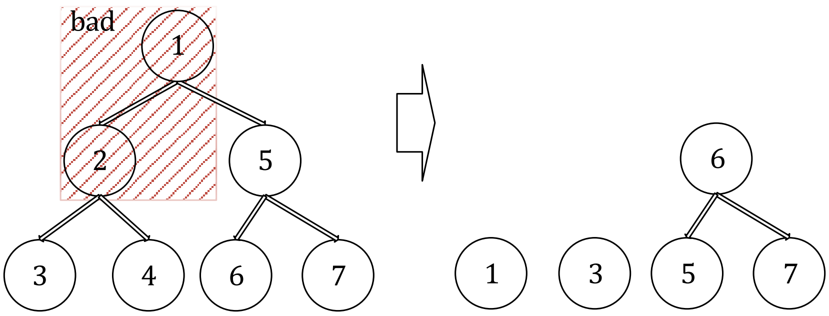
拥有n个节点的二叉树，节点下标范围为$[1,n]$，节点i的权值为v_i（$v_i > 0$），整个二叉树的权值为所有节点的权值之和。现在要求只保留 m 个节点（$0 < m < n$），剪裁掉$n-m$个节点，要求剩余部分仍然是一个二叉树，而不能是多个二叉树。如图：



（1）正确剪裁



（2）正确剪裁



（3）错误剪裁

图（1）和（2）剪裁后的剩余部分仍然是二叉树，图（3）剪裁后的剩余部分分为了 3 个部分。对于拥有n个节点的二叉树，求出保留m个节点的二叉树的最大权值。

解法：

设$f(i,j)$表示以节点i为根节点的树上，保留j个节点（包括节点i自己）的最大权值。其转移方程如下：

$$f(i,j)=\begin{cases} v_i & \text{（初始化）} i,j\in[1,n]\text{且}i=j \\ f\left(i_{leftChild},k\right)+f\left(i_{rightChild},j-1-k\right)+v_i & i,j\in[1,n]\text{且}i\neq j \end{cases}$$

(1) 节点数量为 1 的二叉树，其最大权值即为节点自己的权值，即$f(i,i)=v_i$；

(2) 对于该二叉树的左右子树，其根节点分别为$i_{leftChild}$和$i_{rightChild}$，若左子树包含k个节点（其中$0<k<j-1$），最大权值为$f(i_{leftChild},k)$，则右子树包含$j-1-k$个节点，最大权值为$f(i_{rightChild},j-1-k)$。因此$f(i,j)$的最大权值为其左右子树的最大权值之和，与根节点自己的权值之和，即$f(i,j)=f\left(i_{leftChild},k\right)+f\left(i_{rightChild},j-1-k\right)+v_i$；

最终在$f(i,m)$中选择权值最大的作为最终的最大权值（其中$i\in[1,n]$）。该算法的时间复杂度是$O(n\times n)$。