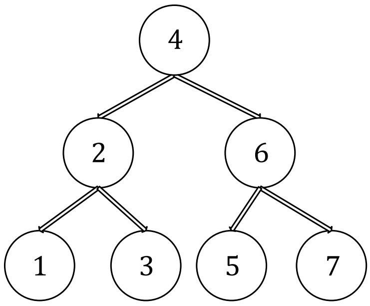
Maximum Tree Merge

最大二叉树合并

问题：

拥有n个节点的二叉树，按照中序遍历将所有节点标记为$[1,n]$，如图：



节点i拥有价值v_i，将子树进行合并，产生的代价的计算方法是$v_{tree} = v_{leftChild} \times v_{rightChild} + v_{root}$，即其左子树的合并代价乘以右子树的合并代价，再加根节点自身的价值，特别的我们规定空子树的合并代价为 1。合并顺序的不同会使最终整个树的合并代价不同，求该二叉树的最大合并代价。

本问题的原型为“加分二叉树”。

解法：

将二叉树中的所有节点按照中序遍历依次编号为$[1,n]$，根据中序遍历的性质，可知连续节点$[i,j]$刚好属于 1 个子树，且在$[i,j]$中选取节点k作为根节点（$i < k < j$），则其左子树为$[i,k-1]$，右子树范围为$[k+1,j]$。例如上图中，$[1,3]$属于子树 2（以 2 为根节点的子树），$[5,7]$属于子树 6。设$f(i,j)$为以节点$[i,j]$组成的子树的最大合并代价，其中$i,j \in [1,n]$且$j \le i$，其转移方程如下：

$$f(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{（初始化）} i,j \in [0,n] \\ 1 \times 1 + v_i & \text{（初始化）} i,j \in [1,n] \text{且} i = j \\ max\{f(i,k-1) \times f(k+1,j)\} + v_k & i,j,k \in [1,n]，i < k < j \end{cases}$$

(1) 将所有可能情况都初始化为最小的合并代价，即 1；
(2) 对于只有一个节点的子树来说，其合并代价为自身根节点的价值加 1，即$f(i,i) = 1 + v_i$，因为左右子树都是空子树，其合并代价为 1；
(3) 将$f(i,j)$分为 $f(i,k-1)$和$f(k+1,j)$左右两个子树，则$f(i,j) = f(i,k-1) \times f(k+1,j) + v_k$，其中$i < k < j$。在$[i,j]$范围内遍历所有情况，选取最大的即可；

$f(1,n)$即为二叉树的最大合并价值。该算法的时间复杂度是$O(n \times n)$。

加分二叉树：

http://codevs.cn/problem/1090/