Multiple Tree DP

多叉树动规

问题：

与<Binary Tree DP>类似，对于拥有n个节点的多叉树，其节点下标范围为$[0,n)$，节点i的权值为v_i（$v_i > 0$），整个多叉树的权值为所有节点的权值之和。现在要求只保留m个节点（$0 < m < n$），剪裁掉$n-m$个节点，要求剩余部分仍然是一个多叉树，而不能是多个树。

对于拥有n个节点的多叉树，求出保留m个节点的多叉树的最大权值。

解法：

与<Binary Tree DP>思路类似，仍然设$f(i,j)$表示以节点i为根节点的树上，保留j个节点（包括节点i自己）的最大权值。其转移方程如下：

$$f(i,j) = \begin{cases} v_i & \text{（初始化）} i,j \in [0,n) \text{且} i = j \\ max\{\sum_1^j f(child_j, k_j) + v_i\} & i,j,k \in [0,n) \text{且} i \neq j \text{且} \sum_1^j k_j = m-1 \end{cases}$$

(1) 节点数量为 1 的二叉树，其最大权值即为节点自己的权值，即$f(i,i) = v_i$；

(2) 对于以i为根节点的多叉树，假设它拥有j个子树，每个子树的根节点分别为$child_j$。子树j保留k_j个节点，那么所有子树的节点之和即为$\sum_1^j k_j = m-1$（加上根节点i自己一共m个节点）。因此在所有可能中选取最大的权值之和即可；

最终在$f(i,m)$中选择权值最大的作为最终的最大权值（其中$i \in [0,n)$）。该算法的时间复杂度是$O(n \times n)$。