Introduction – Combination Mathematics

介绍-组合数学

集合划分：

集合X的划分是X的非空子集的集合，使得每一个X的元素都只包含在这些子集的其中一个内。

等价的说，集合P是X的划分，如果：

(1) P的元素都是X的子集，且不是空集；

(2) P的元素的并集等于X；

(3) P的任意两个元素的交集为空集；

集合P中的元素也称为X的一个部分。例如$X=\{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分是$P=\{\{1\},\{2,6\},\{3,4\},\{5\}\}$，而$\{1\},\{2,6\},\{3,4\},\{5\}$都是$X$的一个部分。

加法原理：

集合X的元素数量等于X的所有部分的元素数量之和，即$|X|=|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_n|$。

乘法原理：

若集合X中的所有元素都是由两个数字组成的序列，即序偶(a,b)。其中第一个元素a来自拥有p个元素的集合A，第二个元素b来自拥有q个元素的集合B。则集合X的元素数量为$|X|=p\times q$。

减法原理：

设集合Y包含集合X，集合X在Y中的补集为X'，则$|X|=|Y|-|X'|$。

除法原理：

集合X被划分为p个部分，每个部分的元素数量都为q，则$|X|=p\times q$。

阶乘：

$$n!=\begin{cases}1 & n=0\\ 1\times 2\times 3\times\cdots\times n & \forall n>0\end{cases}$$

也可以写作：

$$n!=\begin{cases}1 & n=0\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}k & \forall n>0\end{cases}$$

阶乘的递归定义为：

$$n!=\begin{cases}1 & n=0\\ (n-1)!\times n & \forall n>0\end{cases}$$

组合：

在拥有n个不同元素（没有两两相同的元素）的集合A中，任意选出m个元素（$m\le n$，m和n都是自然数，即正整数）组成另一个集合B，称B为A的一个子集。集合没有顺序的概念，对于集合A中的任意元素（$\forall x\in A$），都有$x\in B$，同时集合B中的任意元素（$\forall y\in B$），都有$y\in A$，则集合A和B是相同的。比如集合$s_1=\{1,2,3\}$、$s_2=\{3,2,1\}$是相同的两个集合。

从n个元素的集合中任意取出m个元素能够组成的不同集合的数量为：

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

排列（线性排列）：

从n个不同的元素（没有两两相同的元素）中任意取m个元素（$m \le n$，m和n都是自然数，即正整数）排成一列，得到排列 s。排列$s_1 = [1,2,3]$、$s_2 = [3,2,1]$、$s_3 = [2,3]$两两各不相同，只有当两个排列长度相同，且相同位置的元素也相同时，才称这两个排列相同。

从n个元素中任意取出m个元素组成的所有排列的数量为：

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

也写作：$A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$，维基百科中特别提到中国大陆教材中写做$A_n^m$。特别的当$m = n$时，$P_m^n = 1\times2\times3\times\cdots\times n = n!$。

数学符号表：

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematical_symbols