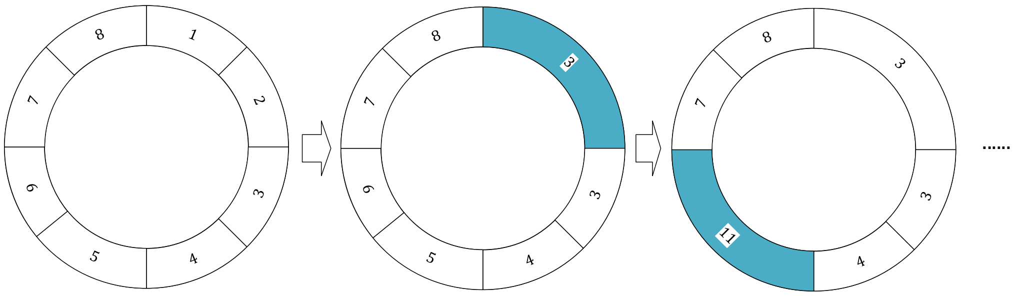
Minimum Merge Cost Extension

最小合并代价问题扩展

问题：

在<Minimum Merge Cost>问题的基础上进行变化，序列 s 是头尾相接的，仍然求最小合并代价。合并过程如图：



解法：

本问题与<Minimum Merge Cost>问题的核心区别在于序列是首尾相接的，取巧的办法就是把长度为 n 的序列 s 扩展为原始的 2 倍长度，多出的部分用s再填充一遍，则有$s[j] = s[i]$，其中$i \in [1, n]$，$j \in [n+1, 2n]$且$j = i + n$，在$s[n]$和$s[n+1]$两个相邻元素的位置可以模拟出首尾相接的效果。而状态转移方程完全不变，只需要把算法的范围调整为$[0, 2n]$即可。

设$sum(i, j)$为序列中区域$s[i, j]$的所有元素之和，设$f(i, j)$为合并区域$s[i, j]$产生的最小代价，其中$i, j \in [1, 2n]$且$i \le j$。因此有如下状态转移方程：

$$f(i, j) =$$

$$\begin{cases} 0 & （初始化）i, j \in [0, 2n]，\ i = j \\ +\infty & （初始化）i, j \in [0, 2n]，\ i \neq j \\ min\{f(i, k) + f(k+1, j) + sum(i, k) + sum(k+1, j)\} & i, j \in [0, 2n]，\ i \le k \le j \end{cases}$$

(1) $s[i, i]$不需要合并，因此$f(i, i) = 0$；
(2) $s[i, j]$需要合并，我们的最终目标是获取合并最小代价，因此设未知的$f(i, j) = +\infty$；
(3) 假设将$s[i, k]$和$s[k+1, j]$这两个区域的元素合并。合并$s[i, k]$和$s[k+1, j]$的过程中，已知$s[i, k]$范围的总和为$sum(i, k)$，消耗的代价为$f(i, k)$，$s[k+1, j]$范围的总和为$sum(k+1, j)$，消耗的代价为$f(k+1, j)$。因为$k \in [i, j]$，因此$f(i, j) = min\{f(i, k) + f(k+1, j) + sum(i, k) + sum(k+1, j)\}$，选择该范围中所有结果的最小值即可；

$f(0, 2n)$即为序列s的最小合并代价。该算法的时间复杂度是$O(n \times n)$。