

Introduction – Combinatorial Mathematics

介绍-组合数学

集合划分：

集合 X 的划分是 X 的非空子集的集合，使得每一个 X 的元素都只包含在这些子集的其中一个内。

等价的说，集合 P 是 X 的划分，如果：

- (1) P 的元素都是 X 的子集，且不是空集；
- (2) P 的元素的并集等于 X ；
- (3) P 的任意两个元素的交集为空集；

集合 P 中的元素也称为 X 的一个部分。例如 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个划分是 $P = \{\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ ，而 $\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{5\}$ 都是 X 的一个部分。

加法原理：

集合 X 的元素数量等于 X 的所有部分的元素数量之和，即 $|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ 。

乘法原理：

若集合 X 中的所有元素都是由两个数字组成的序列，即序偶 (a, b) 。其中第一个元素 a 来自拥有 p 个元素的集合 A ，第二个元素 b 来自拥有 q 个元素的集合 B 。则集合 X 的元素数量为 $|X| = p \times q$ 。

减法原理：

设集合 Y 包含集合 X ，集合 X 在 Y 中的补集为 X' ，则 $|X| = |Y| - |X'|$ 。

除法原理：

集合 X 被划分为 p 个部分，每个部分的元素数量都为 q ，则 $|X| = p \times q$ 。

阶乘：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n & \forall n > 0 \end{cases}$$

也可以写作：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{k=1}^n k & \forall n > 0 \end{cases}$$

阶乘的递归定义为：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (n-1)! \times n & \forall n > 0 \end{cases}$$

组合：

在拥有 n 个不同元素（没有两两相同的元素）的集合 A 中，任意选出 m 个元素（ $m \leq n$ ， m 和 n 都是自然数，即正整数）组成另一个集合 B ，称 B 为 A 的一个子集。集合没有顺序的概念，对于集合 A 中的任意元素（ $\forall x \in A$ ），都有 $x \in B$ ，同时集合 B 中的任意元素（ $\forall y \in B$ ），都有 $y \in A$ ，则集合 A 和 B 是相同的。比如集合 $s_1 = \{1, 2, 3\}$ 、 $s_2 = \{3, 2, 1\}$ 是相同的两个集合。

从 n 个元素的集合中任意取出 m 个元素能够组成的不同集合的数量为：

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

在二项式定理 (https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient) 中，二项式幂 $(1+x)^n$ 的多项式展开中 x^k (其中 $k \in [0, n]$) 的系数即为 $\binom{n}{k}$ ，等同于组合学中从 n 个元素中选出 k 个元素组成集合的所有组合数量。

例如对于 $(x+1)^2 = 1x^0 + 2x^1 + x^2$ ，从 2 个元素中选取 1 个的组合数量为 2；选取 2 个的组合数量为 1。

对于 $(x+1)^3 = 1x^0 + 3x^1 + 3x^2 + x^3$ ，从 3 个元素中选取 1 个的组合数量为 3；选取 2 个的组合数量为 3；选取 3 个的组合数量为 1。

排列：

从 n 个不同的元素（没有两两相同的元素）中任意取 m 个元素（ $m \leq n$ ， m 和 n 都是自然数，即正整数）排成一列，得到排列 s 。排列 $s_1 = [1, 2, 3]$ 、 $s_2 = [3, 2, 1]$ 、 $s_3 = [2, 3]$ 两两各不相同，只有当两个排列长度相同，且相同位置的元素也相同时，才称这两个排列相同。

从 n 个元素中任意取出 m 个元素组成的所有排列的数量为：

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

也写作： $A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$ ，维基百科中特别提到中国大陆教材中写做 A_n^m 。特别的当 $m = n$ 时，

P_m^n 称为全排列， $P_m^n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = n!$ 。

数学符号表：

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematical_symbols