Introduction – Combination Mathematics

介绍-组合数学

集合划分：

集合的划分是的非空子集的集合，使得每一个的元素都只包含在这些子集的其中一个内。

等价的说，集合是的划分，如果：

1. 的元素都是的子集，且不是空集；
2. 的元素的并集等于；
3. 的任意两个元素的交集为空集；

集合中的元素也称为的一个部分。例如的一个划分是，而都是的一个部分。

加法原理：

集合的元素数量等于的所有部分的元素数量之和，即。

乘法原理：

若集合中的所有元素都是由两个数字组成的序列，即序偶。其中第一个元素来自拥有个元素的集合，第二个元素来自拥有个元素的集合。则集合的元素数量为。

减法原理：

设集合包含集合，集合在中的补集为，则。

除法原理：

集合被划分为个部分，每个部分的元素数量都为，则。

阶乘：

线性排列：

将拥有个元素的集合中的个元素进行有序的摆放，得到的排列称作排列。排列的数量计算方式如下：

特别的当时，，即的阶乘。

循环排列：

将拥有n个元素的集合X中的r个元素首尾相接，形成有序的环状摆放，得到的排列称作循环r-排列。排列的数量计算方式如下：

拥有个节点的二叉树，节点下标范围为，节点的权值为（），整个二叉树的权值为所有节点的权值之和。现在要求只保留个节点（），剪裁掉的节点数量为，要求剩余部分仍然是一个二叉树，而不能是多个二叉树。如图：



（1）正确剪裁



（2）正确剪裁



（3）错误剪裁

图（1）和（2）剪裁后的剩余部分仍然是二叉树，图（3）剪裁后的剩余部分分为了3个部分。对于拥有个节点的二叉树，求出保留个节点的二叉树的最大权值。

解法：

设表示以节点为根节点的树上，保留个节点（包括节点自己）的最大权值。其转移方程如下：

1. 节点数量为1的二叉树，其最大权值即为节点自己的权值，即；
2. 对于该二叉树的左右子树，其根节点分别为和，若左子树包含个节点（其中），最大权值为，则右子树包含个节点，最大权值为。因此选取所有的选择中最大的权值即可，即；

最终在中选择权值最大的作为最终的最大权值（其中）。该算法的时间复杂度是。