Traverse Binary Tree DP

遍历二叉树动规

问题：

在一个二叉树上，从任意节点到达另一个任意节点的路线是唯一的。假设该二叉树上的每个节点都是一个牧场，而每个牧场中都有一只奶牛，节点的奶牛拥有一个权值，为，奶牛会在二叉树上游荡，但它游荡的位置不超过一个距离，为。节点的牧场上拥有的奶牛数量并不固定，可能拥有0只奶牛，那么节点拥有的权值为0；可能拥有只奶牛，那么节点拥有的权值为这只奶牛的权值之和，即（其中）。求出所有节点中权值最大的节点的权值。

对于下图中的二叉树，每个节点的标号为上面的数字，权值为下面的数字。但奶牛游荡的距离为1时，会拥有最大权值的节点为节点5，最大权值为，即节点3、5、16、17的权值之和：



本问题的原型为USACO Mar 2008 “Cow Travelling”（游荡的奶牛）。

解法：

问题中的示例是一种最简单的情况，即游荡距离为1，这时节点的最大权值即为该节点与所有相邻节点的权值之和。当游荡距离增大，节点的最大权值为所有到该节点的距离不超过的节点的权值之和，即（其中为所有节点的数量，节点的权值为）。

节点可以到达二叉树的向上和向下层的所有节点，如图：





对于节点4的奶牛，当其，则向上可以到达节点2、1；向下可以到达7、8、20、21、22、23。

(1)向上可达的所有节点的权值和：

设为游荡距离为的节点，向上可以到达的所有节点的权值之和，则有，即游荡距离为的节点，其向上可达的权值和，等于游荡距离为的父节点的向上可达的权值和与父节点自己的权值之和。在上图中可以看出，游荡距离为2的节点4，其向上权值和，恰好等于游荡距离为1的节点2的向上权值和与节点2的权值之和，即。

对于游荡距离为0的节点，其向上权值和为。

(2)向下可达的所有节点的权值和：

设为游荡距离为j的节点i，向下可以到达的所有节点的权值之和，则有，即游荡距离为的节点，其向下可达的权值和，等于游荡距离为的左右孩子节点和的向下可达权值和，与左右孩子节点自己的权值的总和。在上图中可以看出，游荡距离为2的节点4，其向下权值和，恰好等于游荡距离为1的节点7、8的向下权值和，与节点7、8的权值的总和，即。

对于游荡距离为0的节点，其向下权值和为。

根据(1)和(2)两个部分，可以得出游荡距离为的节点的最大权值。

最终在所有中选择最大值作为返回结果（其中）。该算法的时间复杂度是。

USACO Mar 2008 “Cow Travelling”（游荡的奶牛）：

<http://train.usaco.org/TESTDATA/MAR08.ctravel.htm>