

SOD333 - Filtrage Bayésien

Compte Rendu de Travaux Pratiques

Bouchniba Mehdi, Patarin Eric

Septembre - Novembre 2023



IP PARIS

Table des matières

1	Contexte	2
1.1	Introduction	2
1.2	Notations	2
2	Problème de Poursuite - Filtre de Kalman	3
2.1	Problématique	3
2.2	Filtre de Kalman	3
2.3	Filtre de Kalman étendu	5
3	Approximation du Calcul intégral - Méthode de Monte Carlo, Importance Sampling	7
3.1	Contexte et problématique	7
3.2	Fondements théoriques	7
3.3	Liens entre Monte Carlo et Importance Sampling	8
3.4	Méthodologie et Applications au problème défini	8
4	Optimisation de manoeuvres - Borne de Cramer Rao	14
4.1	Contexte	14
4.2	Simulation de la trajectoire de l'observateur	14
4.3	Etude de l'évolution de l'erreur	15
4.4	Conclusion	17
5	Filtrage Particulaire	18
5.1	Principes théoriques	18
5.2	Application à la navigation d'un avion	18

1 Contexte

1.1 Introduction

Le filtrage bayésien, également connu sous le nom de filtrage statistique, constitue une approche puissante dans le domaine du traitement des données séquentielles. Ce concept repose sur les principes fondamentaux de la probabilité bayésienne, offrant ainsi une méthodologie robuste pour la catégorisation et la séparation de l'information réelle de sa mesure bruitée.

Ce rapport de laboratoire se penchera sur les mécanismes sous-jacents du filtrage bayésien, explorant ses fondements théoriques, son application pratique et son impact sur la gestion de dynamiques bruitées. Au cours de cette étude, nous examinerons les algorithmes essentiels qui alimentent le filtrage bayésien, en mettant l'accent sur leur fonctionnement et leur capacité à s'adapter aux évolutions constantes des données. De plus, nous évaluerons les performances de ces méthodes dans des scénarios réels, en mettant en lumière leurs forces et leurs éventuelles limitations.

Ce rapport vise à fournir une compréhension approfondie du filtrage bayésien en tant qu'outil fondamental dans le traitement des informations, offrant ainsi une perspective claire sur son rôle crucial dans le domaine de la sécurité informatique et de la gestion des communications électroniques.

1.2 Notations

Nous empruntons exhaustivement les notations vues dans les planches des Travaux Pratiques.

2 Problème de Poursuite - Filtre de Kalman

2.1 Problématique

Nous nous intéressons ici à un problème de poursuite. Nous allons simuler une dynamique relativement simple, y ajouter un bruit de mesure et tenter d'appliquer un filtre de Kalman afin de retrouver la position réelle, affranchie de son bruit, grâce à des étapes successives de prédictions et de corrections bayésiennes. C'est volontairement que nous ne reformulons pas les fondements mathématiques du filtrage de Kalman dans une volonté de ne pas alourdir le rapport.

Nous utilisons ici $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = 30$ désignant les écarts types respectifs des bruits gaussiens centrés ajoutés sur la mesure de la position en x et en y.

2.2 Filtre de Kalman

2.2.1 Trajectoire et mesure de position

Voici nos résultats concernant la position comparée à sa mesure bruitée :

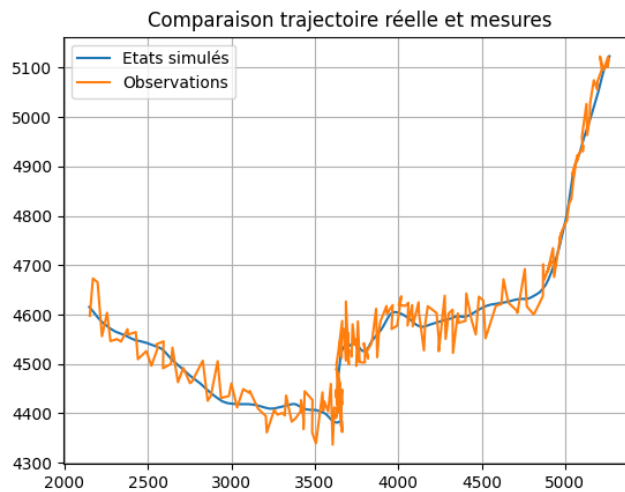


FIGURE 1 – Comparaison entre position réelle et mesure bruitée

2.2.2 Filtre de Kalman et intervalles de confiance

Nous souhaitons appliquer un filtre de Kalman au signal bruité afin de reconstruire la véritable dynamique :

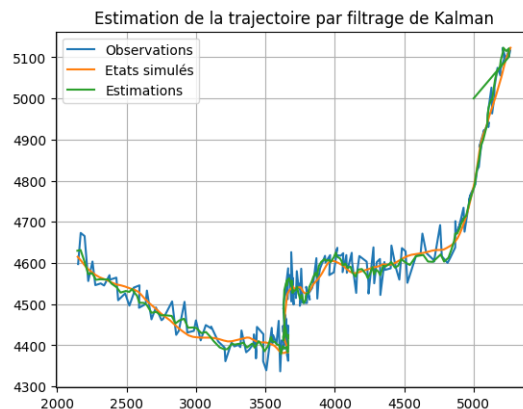


FIGURE 2 – Estimation par le filtre de Kalman en vert

Nous constatons que le premier point est évidemment une mauvaise estimation car il fait une prédiction mais sa correction est difficile. La correction s'effectue rapidement par la suite. La reconstitution du signal est satisfaisante. Mais nous voulons quantifier l'erreur de nous réalisons. Ainsi nous poursuivons notre résolution du problème de poursuite par un tracé d'intervalles de confiance sur nos prédictions :

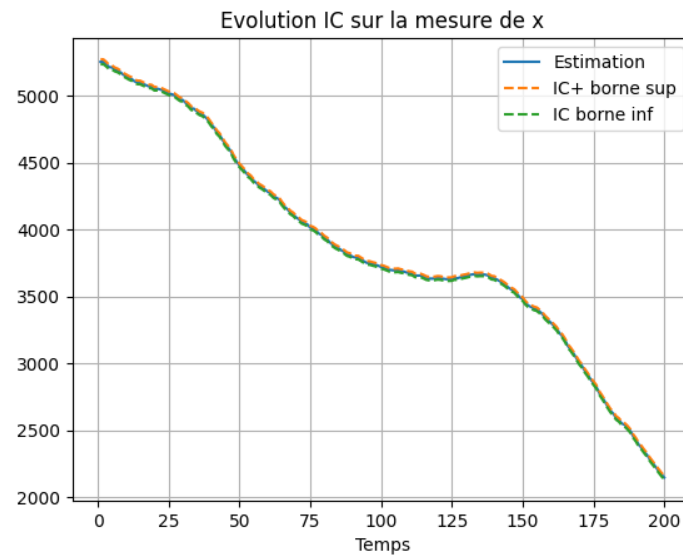


FIGURE 3 – Intervalle de confiance sur la position x sur le Kalman

L'écart type en x étant trois fois plus faible qu'en y les résultats obtenus sont cohérents. Nous commettons une erreur plus grande, et avons plus d'incertitude sur notre prédiction en y.

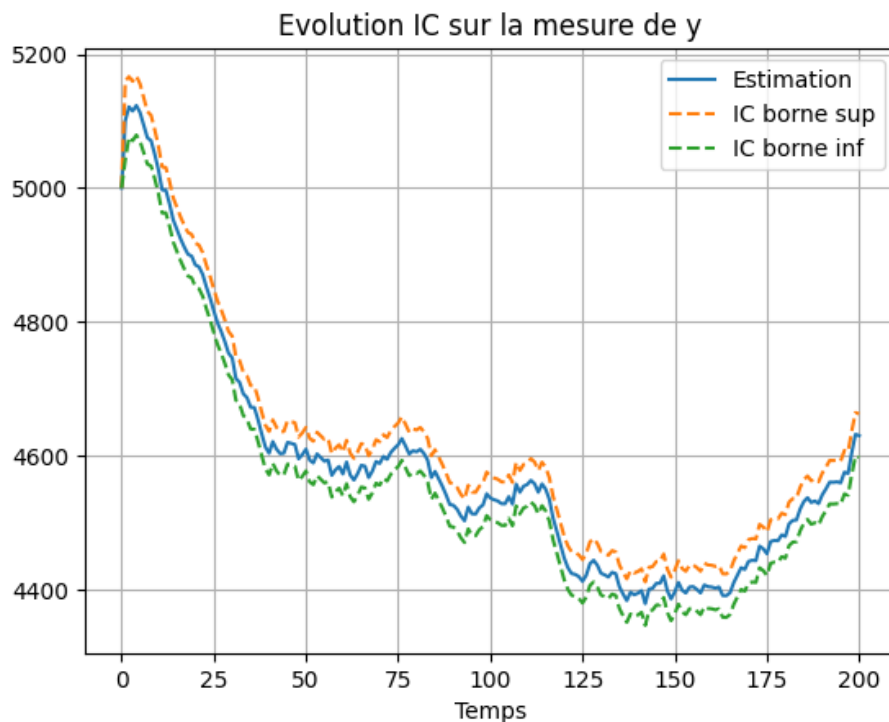


FIGURE 4 – Intervalle de confiance sur la position y sur le Kalman

2.3 Filtre de Kalman étendu

Nous compliquons le problème. Nous mesurons désormais une distance et un angle à la place du couple x et y . Nous nous munissons de $\sigma_\theta = 0.5, \sigma_r = 10$ où θ est en degrés et r en mètres.

Nous appliquons exactement la même démarche que dans la sous section précédente.

2.3.1 Trajectoire et mesure de position

Notre position est très bruitée. Nous nous attendons à ce que la reconstruction du signal ne soit pas aisée.

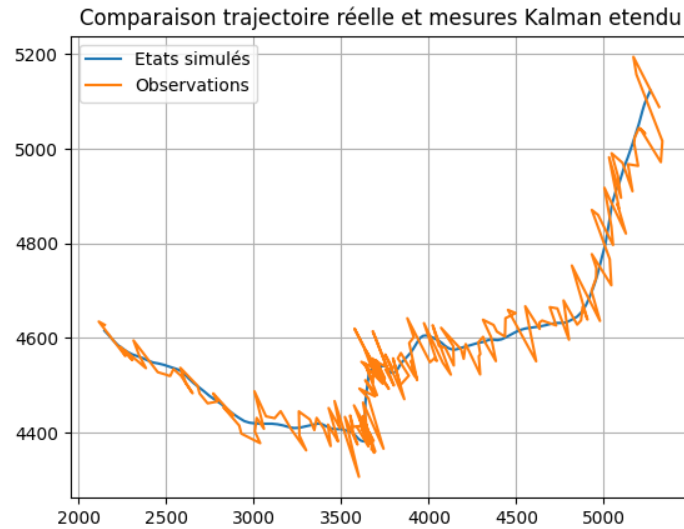


FIGURE 5 – Comparaison trajectoire réelle et mesurée sur le Kalman étendu

2.3.2 Filtre de Kalman étendu et intervalles de confiance

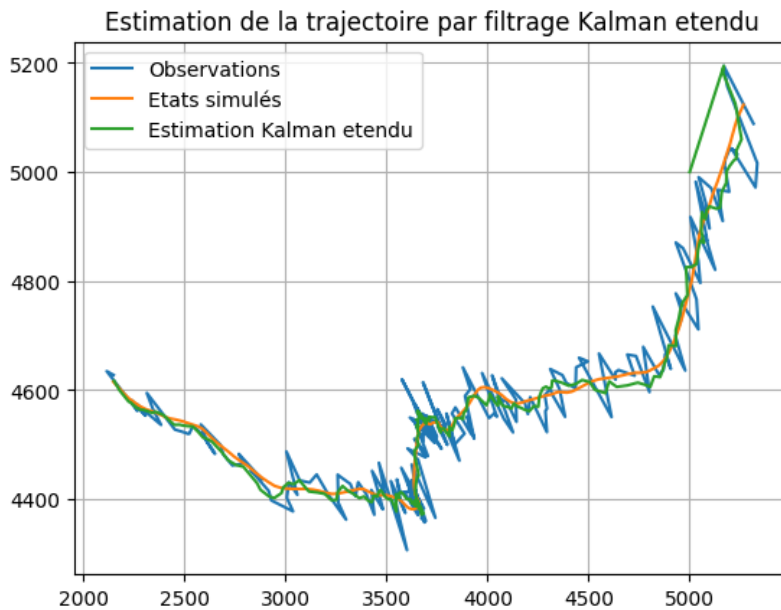


FIGURE 6 – Estimation par le filtre de Kalman en vert

Notre estimation utilisant le filtre de Kalman étendu présente un bruit fort et de nombreuses prédictions "outliers". Le signal reconstitué semble peu qualitatif.

Nous pouvons finaliser l'étude du Kalman étendu par à nouveau un tracé des intervalles de confiance respectifs, afin d'en savoir plus sur l'erreur commise à chaque étape :

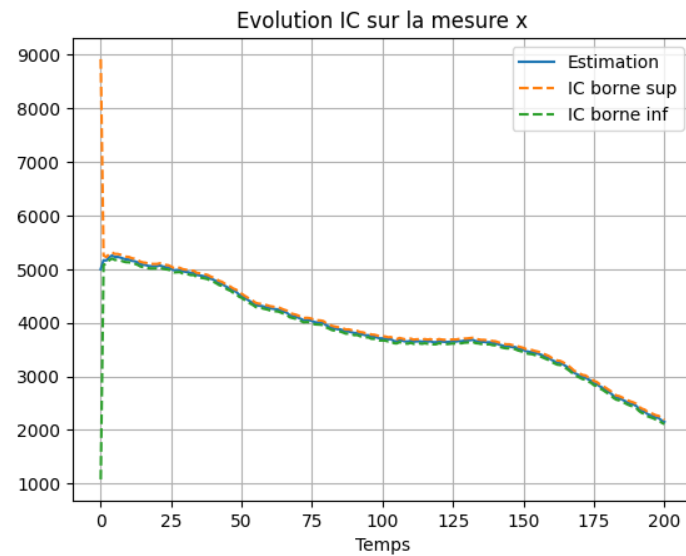


FIGURE 7 – Intervalle de confiance sur x sur le Kalman étendu

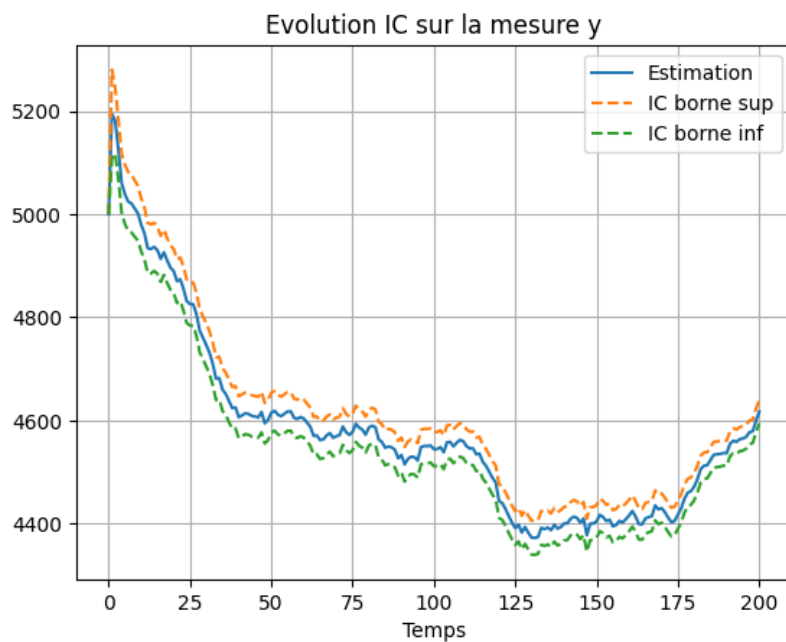


FIGURE 8 – Intervalle de confiance sur y sur le Kalman étendu

A nouveau l'erreur en y est bien supérieure, nous observons une confirmation de ce qui était attendu.

Pour conclure, nous constatons que la correction met plus de temps à devenir qualitative. Le filtrage est plus difficile. Il a également fallu linéariser. L'extension du problème est coûteuse.

3 Approximation du Calcul intégral - Méthode de Monte Carlo, Importance Sampling

3.1 Contexte et problématique

Le problème que nous souhaitons traiter dans cette partie est l'approximation de la valeur d'une intégrale - que nous confondrons avec l'espérance d'une variable aléatoire bien définie - par différentes méthodes d'approximation numérique - ici la méthode de Monte-Carlo classique et l'usage de l'importance sampling - et en comparer leur comportement asymptotique - la précision de chacun, liée à l'erreur commise, soit la variance de chacune desdites méthodes -.

Pour ce faire, nous allons donc expliciter une intégrale dont nous connaissons la valeur exacte et comparer cette valeur aux différentes approximations obtenues par les méthodes que nous définirons.

3.2 Fondements théoriques

3.2.1 Approximation par la Méthode de Monte-Carlo

Principes de base : La méthode de Monte-Carlo est une méthode d'approximation du calcul d'intégrale, calcul d'intégrale qui va s'apparenter l'espérance d'une variable aléatoire - ici dans le cas continu -.

En posant donc le problème comme suit : Soit une variable aléatoire X suivant une loi sous la mesure de probabilité en un point x : $d\mathbb{P}_x$, et qui admet une densité de probabilité q telle que $d\mathbb{P}_x = q(x)dx$, nous avons pour une fonction g donnée dont nous souhaiterions estimer l'intégrale :

$$\int g(x)q(x) dx = \int g(x) d\mathbb{P}_x = \mathbb{E}(g(X)) \quad (1)$$

Il faudra donc avoir l'existence du moment d'ordre 1 de $g(X)$.

Le principe de la méthode est d'utiliser l'estimateur empirique de la moyenne pour approcher cette intégrale, soit donc N un entier, nous avons pour un échantillon assez grand et par loi des grands nombres on a \mathbb{P} -presque sûrement :

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \approx \mathbb{E}(g(X)) \quad (2)$$

Génération de nombres aléatoires : Les X_i pour i allant de 1 à N ci-dessus correspondent à des variables aléatoires suivant la même loi que X . Nous allons donc générer aléatoirement dans l'intervalle donné des échantillons $X_i(\omega) = x_i$ pour ω dans les réalisations possibles.

Estimation d'intégrale : En conclusion, à partir des nombres aléatoires générés et de l'estimateur empirique de la variance nous obtenons le principe d'approximation par la méthode de Monte-Carlo - avec q suivant une loi uniforme sur l'intervalle choisi - tel que :

$$\int g(x)q(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (3)$$

3.2.2 Importance Sampling

Principe : Pour l'importance sampling, il s'agira de procéder à un changement de probabilité donnant une variance sous cette loi est plus faible pour notre variable aléatoire, et ce afin d'avoir une estimation de notre intégrale avec une erreur amoindrie.

Ce changement de probabilité se fait via l'introduction d'une nouvelle fonction d'importance. En notant ladite nouvelle mesure de probabilité en un point x telle que $d\tilde{\mathbb{P}}_x$, et qui admet une densité de probabilité \tilde{q} telle

que $d\tilde{\mathbb{P}}_x = \tilde{q}(x)dx$, nous obtenons :

$$\mu = \mathbb{E}_q(g(X)) = \int_a^b g(x) d\mathbb{P}_x = \int_a^b g(x) \frac{q(x)}{\tilde{q}(x)} \tilde{q}(x) dx \quad (4)$$

il vient donc :

$$\mu = \mathbb{E}_q(g(X)) = \mathbb{E}_{\tilde{q}}(g(X) \frac{q(X)}{\tilde{q}(X)}) \quad (5)$$

Application à l'estimation d'intégrales : En utilisant ce qui précède et les mêmes arguments que pour l'approximation de Monte-Carlo via la loi des grands nombres, pour un entier N donné et X_i pour i allant de 1 à N correspondant à des variables aléatoires suivant la même loi que X – sous $\tilde{q} - \tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement :

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} \approx \mathbb{E}(g(X)) \quad (6)$$

3.3 Liens entre Monte Carlo et Importance Sampling

En reprenant les notations précédemment introduites, nous calculons la variance de $\hat{\mu}_N$ comme suit :

$$\mathbb{V}(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N} \left(\int g^2(x) \frac{q^2(x)}{\tilde{q}(x)} dx - \mu^2 \right) \quad (7)$$

Nous notons que d'après la valeur de la variance ci-dessus, en choisissant la bonne densité \tilde{q} nous pouvons obtenir une variance nulle. Il vient donc par résolution qu'en posant pour un x donné dans l'espace d'état :

$$\tilde{q}(x) = \frac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x) dx} \quad (8)$$

Alors d'une part, \tilde{q} est bien d'intégrale égale à 1 par construction - il faudra vérifier toutefois que \tilde{q} est bien positive -.

Puis d'autre part,

$$\int g^2(x) \frac{q^2(x)}{\tilde{q}(x)} dx = \int g(x)q(x) \left(\int g(u)q(u) du \right) dx = \left(\int g(u)q(u) du \right) \left(\int g(x)q(x) dx \right) = \mu^2 \quad (9)$$

On en conclut pour ce choix de \tilde{q} : $\mathbb{V}(\hat{\mu}_N) = 0$

Comme précisé antérieurement, il est possible d'avoir des valeurs négatives qui rendent incompatible l'expression établie pour \tilde{q} et le fait qu'elle soit une densité de probabilité. Il s'agira donc plutôt d'explicitier une fonction d'importance qui s'en approche, qui sera plus aisée à simuler et évaluer.

L'importance sampling va se baser sur la connaissance de notre fonction d'importance qui permet de discriminer les zones dans lesquelles les valeurs sont "utiles". Ceci s'effectue en ne prenant les valeurs générées sous un certain seuil.

Le principal inconvénient de cette méthode est la nécessité de connaître au préalable notre distribution, afin de trouver un seuil adapté à notre problème. En outre, la zone de rejet représente la probabilité que notre variable aléatoire se trouve dans ladite zone choisie, si elle est trop faible, nous nécessiterions trop d'itérations afin d'obtenir l'échantillon voulu.

3.4 Méthodologie et Applications au problème défini

3.4.1 Définition de l'intégrale à approcher

Nous prenons pour exemple ici l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 g(x)q(x) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \mu = \frac{2}{\pi} \quad (10)$$

3.4.2 Résolution par l'Algorithme de Monte Carlo usuel

Pour la résolution par la méthode de Monte-Carlo nous utilisons directement les valeurs de l'échantillon des X_i sous la loi uniforme.

Nous commençons d'abord par générer un échantillon pour un entier N donné, des X_i pour i allant de 1 à N .

Les X_i pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ sont générés tels que $\tilde{q} = \mathbb{U}[0, 1]$

Pour le problème que nous traitons, il vient que notre estimateur empirique se définit comme suit :

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{\pi x_i}{2}\right) \approx \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \quad (11)$$

Nous avons d'une part - sous la loi uniforme - la variance théorique telle que :

$$\mathbb{V}(g(X)) = \mathbb{E}(g^2(X)) - \mu^2 \quad (12)$$

Or, nous avons :

$$\mathbb{E}(g^2(X)) = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos(\pi x)) dx = \frac{1}{2} (1 + [\frac{\sin(\pi x)}{\pi}]_0^1) = \frac{1}{2}$$

D'où,

$$\mathbb{V}(g(X)) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$$

Nous obtenons par la variance empirique définie plus haut :

Variance Théorique	Variance Estimée
$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$	0.09497957682516908

Nous notons que nous obtenons une variance proche de la valeur théorique pour un entier N bien choisi ici à 5000 et un nombre de simulations à 50 - pour chaque estimation -.

Enfin, nous profitons de l'estimation répétée de notre paramètre pour mettre en évidence le théorème central limite. Nous comparons notre estimateur avec un échantillon normal d'espérance μ et d'écart type égal à la racine carrée de notre variance empirique pour la fonction g :

Pour nous amuser nous essayons d'ajouter à notre estimation Monte Carlo une technique de réduction de variance appelée variables antithétiques. Au lieu de considérer un simple échantillon uniforme nous en considérons deux de covariance négative. Ceci fonctionne avec u et $1-u$. Voici l'histogramme résultant :

D'une façon assez surprenante, la réduction de variance est assez négligeable, bien que réelle.

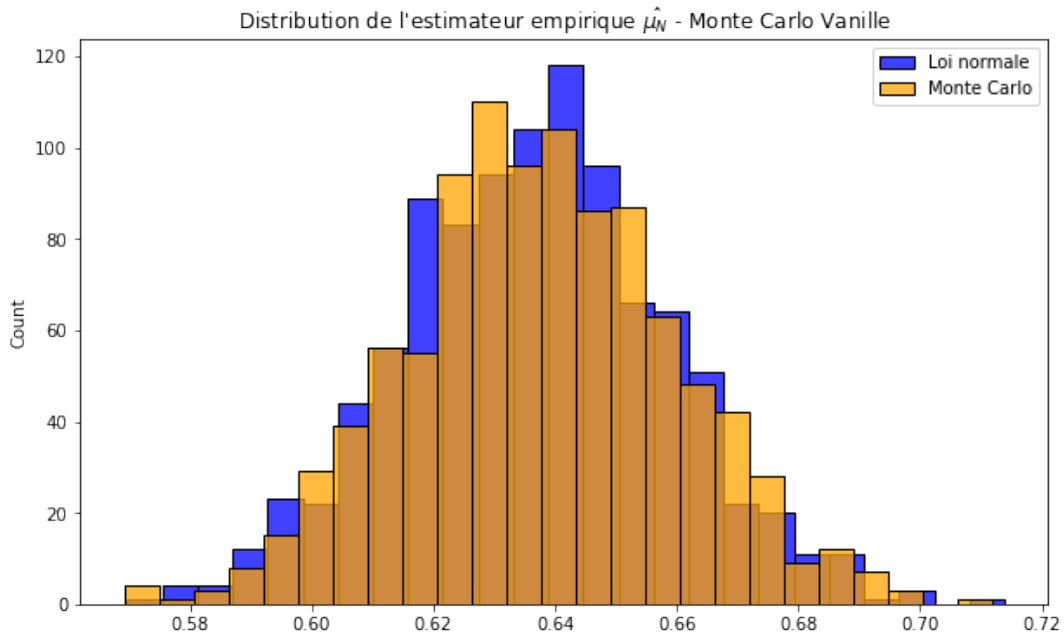


FIGURE 9 – Monte Carlo Vanille

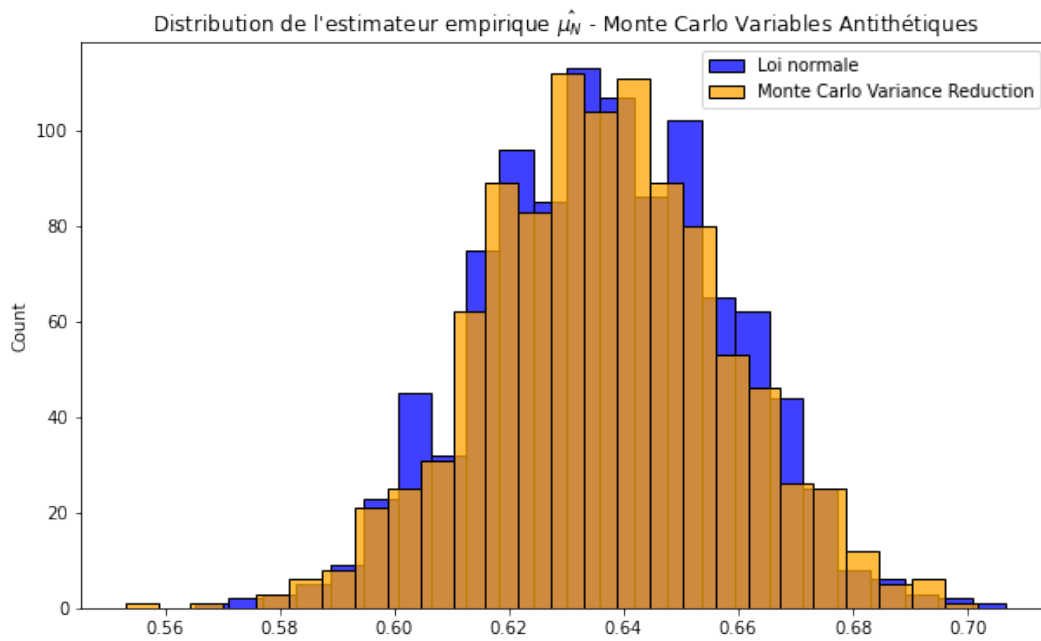


FIGURE 10 – Monte Carlo Réduction de Variance - Variables antithétiques

3.4.3 Résolution par l'Utilisation de l'importance sampling

On commence par chercher un premier \tilde{q} qui se rapproche un peu plus de l'intégrale à approximer. Nous pensons donc d'abord au développement limité à l'ordre 2 de notre fonction g , qui s'écrit comme suit :

$$g(x) \approx 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8}$$

Toutefois cette fonction peut prendre des valeurs négatives donc nous considérerons plutôt $\tilde{q}(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)$ qui est bien positive et d'intégrale 1 sur l'intervalle considéré - donc une densité de probabilité licite -.

La variance de l'estimateur pour cette nouvelle fonction d'importance suit théoriquement selon ce qui a été

défini plus haut, la formule suivante :

$$\mathbb{V}_{\tilde{q}}(g(X)) = \left(\int_0^1 g^2(x) \frac{q^2(x)}{\tilde{q}(x)} dx - \mu^2 \right) = \left(\int_0^1 \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{\frac{3}{2}(1-x^2)} dx - \mu^2 \right)$$

Calculons dès lors la probabilité de se trouver dans la zone de rejet avec une telle fonction d'importance :

$$\mathbb{P}_a = \frac{2}{3} \int_0^1 g(x) \frac{3}{2}(1-x^2) dx = 0.774037 * \frac{2}{3}$$

Pour l'estimation de la variance par la méthode du rejet avec une fonction d'importance comme définie plus haut, et avec le même nombre de simulations effectuées - nous ne calculerons pas une valeur numérique approchée de la variance théorique ici car les simulateurs, du fait de la divergence du dénominateur, ne donnent pas de résultats concluants voire interprétables - :

Variance Théorique	Variance Estimée
$\left(\int_0^1 \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{\frac{3}{2}(1-x^2)} dx - \mu^2 \right)$	0.00012725732571138007

Comparons dès lors les variances simulées des deux méthodes que nous avons appliquées :

$$\frac{\mathbb{V}_{Rejet}}{\mathbb{V}_{Monte-Carlo}} \approx 0.0013398365$$

Nous notons qu'en utilisant une fonction d'importance plus proche de la fonction intégrale à estimer, nous avons une variance plus faible : donc une estimations plus précise pour un nombre de simulation égal.

Nous poursuivons nos histogrammes avec cette fois ci des estimations utilisant différentes fonctions dans la procédure d'importance sampling (ces fonctions ont été définies précédemment comme des \tilde{q} :

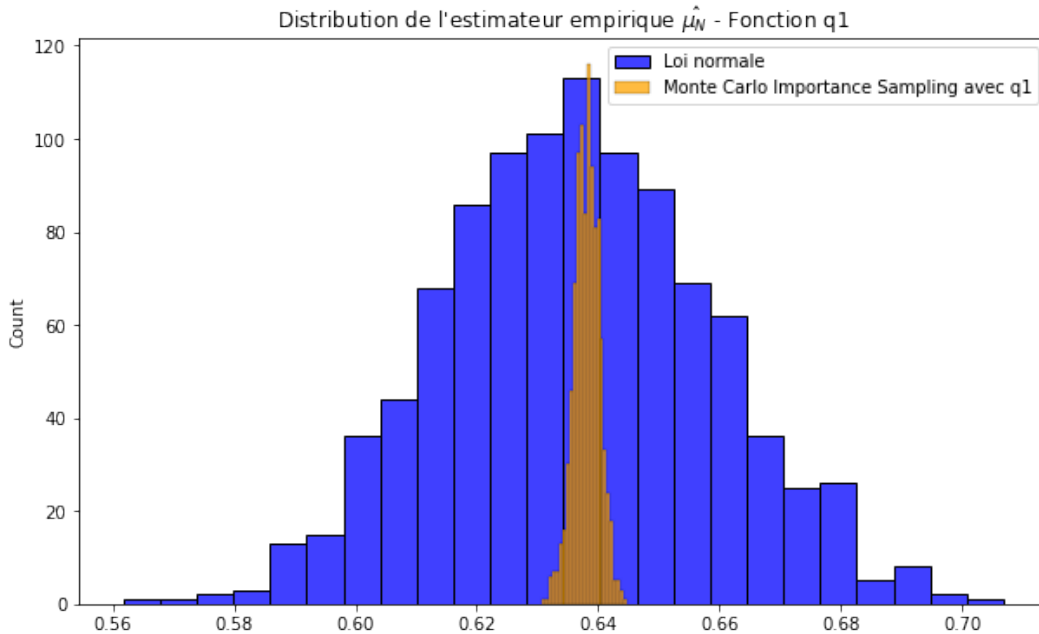


FIGURE 11 – Monte Carlo Réduction de Variance - Importance Sampling $\tilde{q}(x) = \frac{3}{2}(1-x)$

Il est fort intéressant de constater que nous diminuons la variance de l'estimateur, sans avoir à diminuer le biais : ceci étant dû au fait que la méthode du rejet est selon la distribution de la fonction d'importance. Qui plus est, la fonction d'importance overlap bien avec le support de la distribution précédente ce qui garantit que nous avons une densité similaire pour l'acceptation. L'étude pratique est concluante, en accord avec la théorie développée plus haut.

Considérons désormais la fonction d'importance suivante :

$$\tilde{q}(x) = 2(1 - x)$$

Qui est bien d'intégrale 1 et positive sur l'intervalle qui nous intéresse dans notre cas d'application.

Nous procédons à la même étude avec la méthode du rejet pour cette fonction d'importance, la probabilité de rejet est donc :

$$\mathbb{P}_a = \frac{1}{2} \int_0^1 g(x) 2(1 - x) dx = 0.810569 * \frac{1}{2}$$

Par suite, nous obtenons comme valeurs pour les variances théorique et simulée :

Variance Théorique	Variance Estimée
$(\int_0^1 \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{2(1-x)} dx - \mu^2)$	0.0009595474

Comparons désormais les variances simulées de la méthode de Monte-Carlo et de la méthode du rejet avec la nouvelle fonction d'importance que nous avons utilisée :

$$\frac{\mathbb{V}_{Rejet}}{\mathbb{V}_{Monte-Carlo}} \approx 0.0098235803$$

Nous notons qu'en utilisant cette nouvelle fonction d'importance, nous avons une estimation encore moins proche de la fonction intégrale à estimer, car la variance est plus élevée : donc une estimations moins précise. Par ailleurs la probabilité de se trouver dans la zone de rejet est elle aussi moins grande.

Les figures exhibées - ci-dessus et ci-après - montrent les distributions des différentes fonctions d'importance définies dans cette section. Nous remarquons que la fonction d'importance précédente a un overlap plus grand que celle là avec la loi normale, ce qui est en cohérence avec les probabilités des zones explicitées. Par conséquent, cette étude prouve bien la dépendance de la méthode de l'importance sampling à la fonction d'importance choisie - en ceci qu'elle doit être proche de notre densité initiale -.

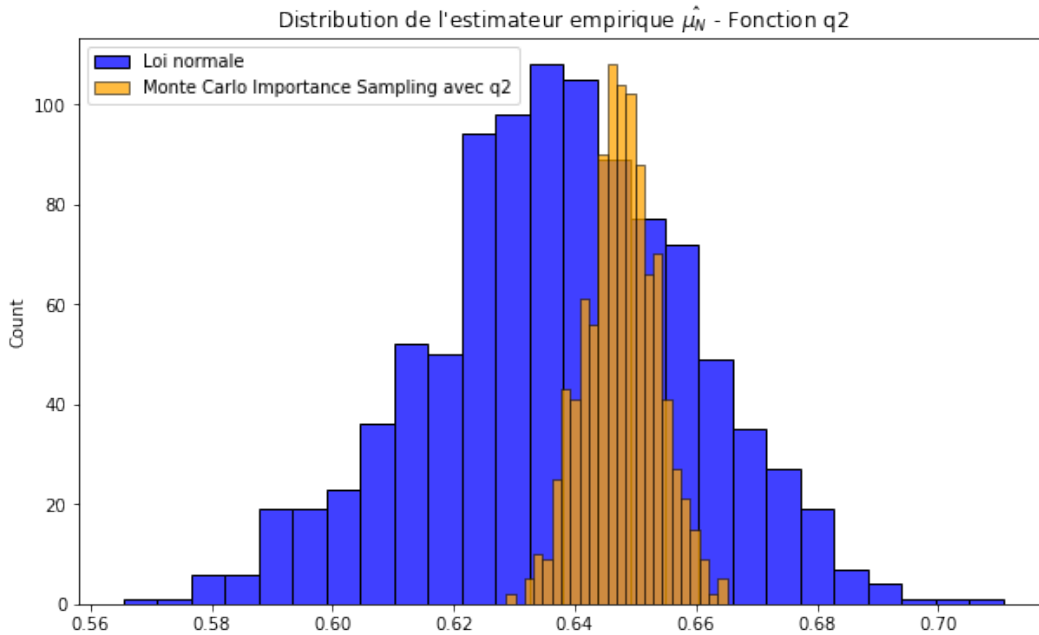


FIGURE 12 – Monte Carlo Réduction de Variance - Importance Sampling $\tilde{q}(x) = 2(1 - x)$

D'après l'étude théorique menée plus haut - pour q uniforme - nous pouvons expliciter la fonction d'importance qui rend la variance de l'estimateur nulle :

$$\tilde{q}(x) = \frac{g(x)}{\int_0^1 g(x) dx}$$

Encore une fois cette fonction est bien d'intégrale 1 et positive sur $[0,1]$.

La variance théorique estimée est bel est bien nulle par construction et nous obtenons ainsi :

Variance Théorique	Variance Estimée
$(\int_0^1 \frac{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}{\int_0^1 g(x) dx} dx - \mu^2) = 0$	0.0

Et la probabilité de se trouver dans la région de rejet est immédiatement la valeur de notre intégrale, soit :

$$\mathbb{P}_a = \frac{\pi}{2} \int_0^1 g(x) * \frac{2}{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2}$$

4 Optimisation de manoeuvres - Borne de Cramer Rao

4.1 Contexte

Dans ce TP nous nous intéressons à l'optimisation de manoeuvres par mesure d'angle. Le but de ce projet est d'exploiter la borne de Cramer-Rao. Celle-ci nous donne en effet une précieuse borne inférieure sur la variance de notre estimateur.

4.1.1 Borne de Cramer-Rao

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur sans biais d'un paramètre θ .

Ce paramètre est estimé à l'aide des données observées X ayant pour vraisemblance $L(x; \theta)$.

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \mathcal{I}(\theta)^{-1} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X; \theta) \right)^2 \right]^{-1}$$

Si le modèle est régulier, la borne de Cramer-Rao peut s'écrire : $\mathcal{I}(\theta)^{-1} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(X; \theta) \right]^{-1}$.

Les distributions atteignant la borne sont les familles exponentielles. Dans certains cas, aucun estimateur non biaisé n'atteint la borne inférieure. Cependant, il est bon de noter que certains estimateurs **biaisés** peuvent présenter une variance inférieure à la borne de Cramer-Rao.

4.1.2 Problème

Posons maintenant notre problème. Un observateur en mouvement réalise des mesures sur un objet également en mouvement. L'observateur doit tourner d'un angle Φ donné à un instant donné lors de la prise de mesures. **Nous recherchons l'angle Φ qui minimisera l'erreur finale sur la mesure de position.**

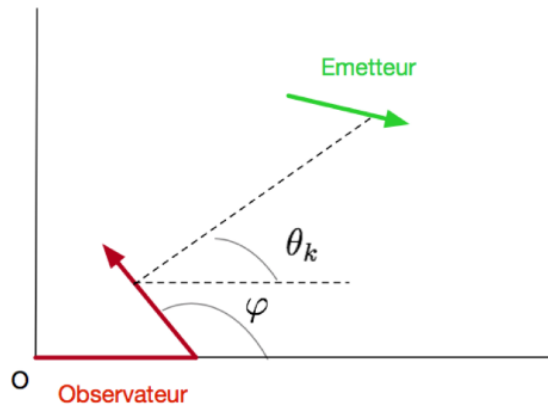


FIGURE 13 – Illustration du problème : quel angle le virage de l'observateur doit-il prendre ?

4.2 Simulation de la trajectoire de l'observateur

L'idée du filtrage est d'améliorer continuellement la prédiction et la correction du signal. Or dans ce TP nous allons modifier la trajectoire à partir de la 51ème mesure pour bien mettre en évidence le fait que cela perturbera l'amélioration continue de l'erreur commise sur la mesure filtrée de position et vitesse. Commençons par expliciter la dynamique de l'état X ainsi que le bruit de mesure :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Phi(k, k+1)X_k \\ y_k = h_k(X_k) + \epsilon_k \end{cases}$$

$$X_0 \sim N(X_v, P_0)$$

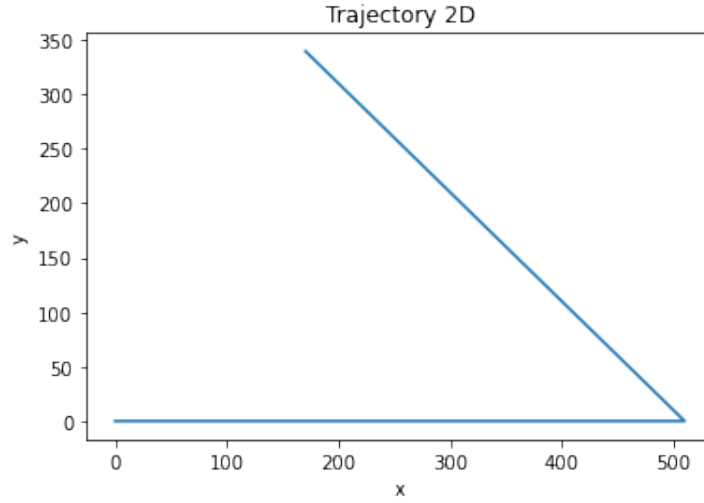


FIGURE 14 – Trajectoire de l’observateur avec virage net en $x=500$.

4.3 Etude de l’évolution de l’erreur

Lorsque nous reconstruisons le signal, nous parvenons à affiner notre prédiction après chaque mesure car nous estimons de mieux en mieux la distribution de probabilité du bruit sous jacent.

Nous nous intéressons dans cette étude à l’erreur commise *ie* la variance :

Considérons la matrice d’information relative à l’état à l’instant (k).

$$J_k = \frac{1}{\sigma_k^2} \left(\frac{\partial h_k}{\partial X_k} \right) \left(\frac{\partial h_k}{\partial X_k} \right)^T + \left(\frac{\partial X_{k-1}}{\partial X_k} \right)^T J_{k-1} \left(\frac{\partial X_{k-1}}{\partial X_k} \right)$$

$$J_0 = P_0^{-1}$$

$$\Phi(k, k+1) = \frac{\partial X_{k+1}}{\partial X_k}$$

$$BCR_k = J_k^{-1}$$

Les termes diagonaux sont les variances des composantes de l’état à l’instant (k) : ce sont les quantités que nous traçons ici afin de connaître l’erreur commise sur la mesure de l’état (position x,y et vitesse x,y). Nous calculons à l’aide Python cette matrice et nous traçons ses coefficients au cours des différentes mesures :

Nous constatons bel et bien que l’erreur commise sur la position (Figure 3) est assez stable, puis augmente nettement après le changement de trajectoire. Elle diminue ensuite nettement au cours des mesures suivantes. Ceci est cohérent.

Concernant l’erreur en vitesse (Figure 4), le phénomène est assez similaire mais c’est surtout selon y que l’on constate une augmentation assez élevée de l’erreur : cela est du au fait que la trajectoire devient brutalement concentrée selon y ! Par la suite on observe une stricte décroissance de l’erreur commise.

Pour illustrer l’importance de l’angle Φ nous comparons ensuite (Figure 5) deux erreurs en fonction du temps pour 2 angles différents, l’un ayant pour valeur 2.3 radian l’autre 0.2 radian.

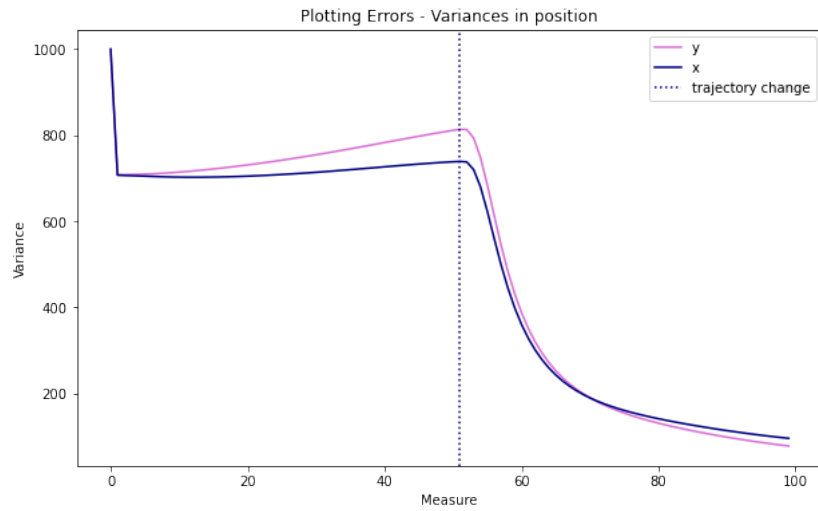


FIGURE 15 – Erreur en position au cours des différentes mesures

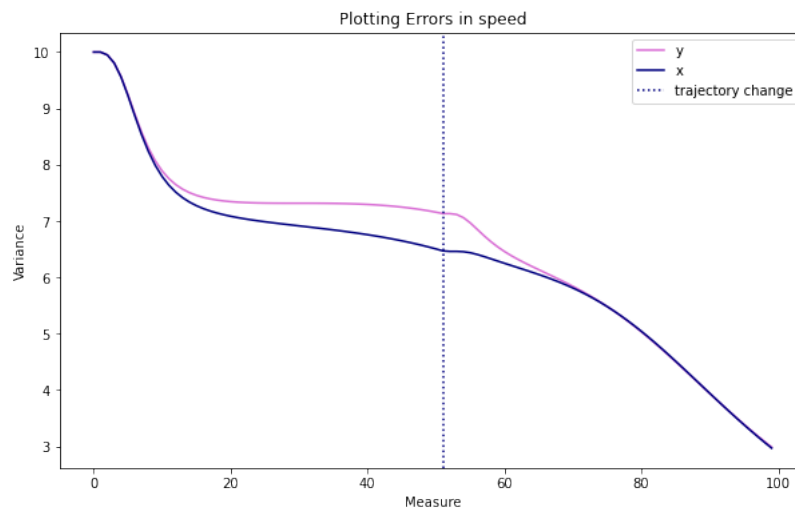


FIGURE 16 – Erreur en vitesse au cours des différentes mesures

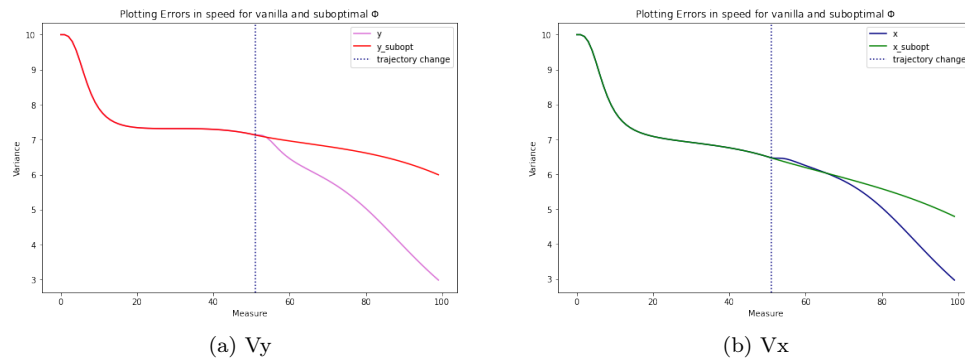


FIGURE 17 – Evolution des erreurs en vitesse pour deux angles différents

4.4 Conclusion

Nous parvenons à optimiser le paramètre Φ en minimisant la fonction d'erreur finale en position. Nous obtenons une valeur minimale de 2.01 radian soit environ 115.26° . L'erreur commise sur la position finale serait pour un tel angle de 119 mètres. Ceci est raisonnable car nous savons que notre cible s'est déplacée sur 60 kilomètres. Il aurait été intéressant de tracer un estimateur du maximum de vraisemblance en comparaison.

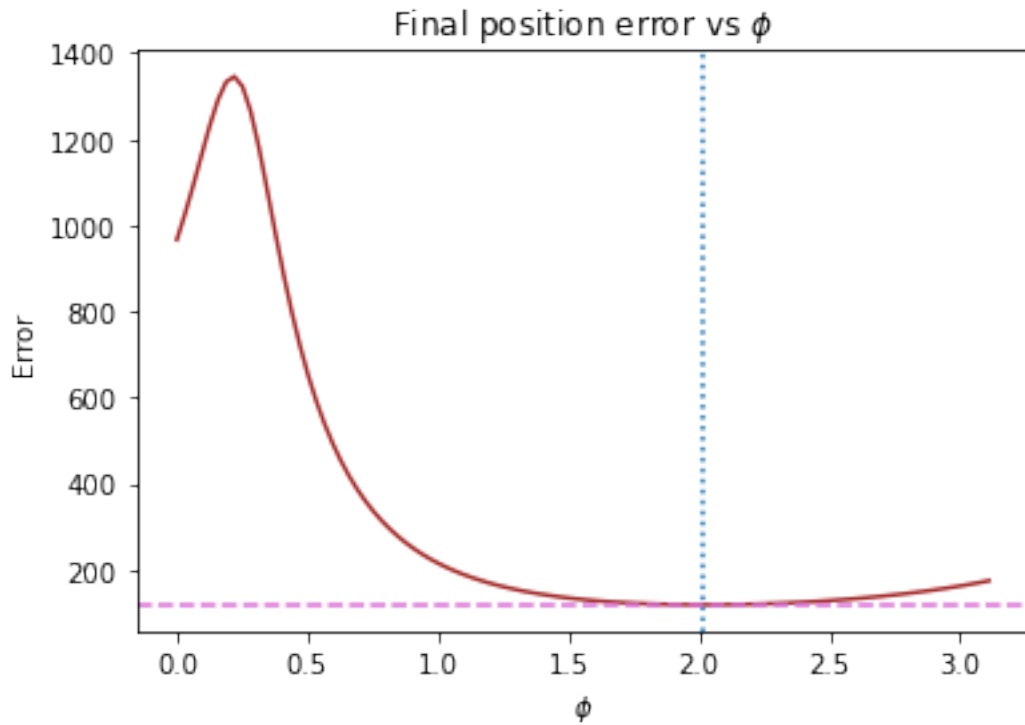


FIGURE 18 – ϕ est en radian

5 Filtrage Particulaire

5.1 Principes théoriques

Les filtres particulaires, constituent une approche pour estimer l'état caché d'un système dynamique à partir de mesures bruitées. La structure du filtre particulaire présente des similitudes avec celle du filtre de Kalman, mais elle repose sur des principes d'échantillonnage stochastique et de simulation pour estimer la distribution de l'état.

Les filtres particulaires offrent une approche flexible pour traiter des systèmes non linéaires, non gaussiens, et présentent des avantages dans des cas où les méthodes de filtrage classiques telles que le filtre de Kalman ne sont pas applicables. Leur structure est similaire à celle du filtre de Kalman :

- Prédiction : suivant la dynamique $(X_{k|k-1}^1, \dots, X_{k|k-1}^N)$
- Correction : suivant la mesure/le poids : $w_k^i \propto w_{k-1}^i p(y_k | X_{k|k-1}^i)$
- Mise à jour de la densité : $\hat{p}_k^N = \sum_{j=1}^N w_j^k \delta(x = X_{k|k-1}^j)$
- Ré-échantillonnage : les poids étant multipliés à chaque itération, la variance empirique des poids augmente. Dès qu'elle est supérieure à un certain seuil, on peut redistribuer les particules en dupliquant celles de poids le plus fort en éliminant celles de poids plus faible.

La redistribution présente néanmoins des inconvénients majeurs. En effet, elle entraîne de la perte d'information et on peut alors perdre des modes dans les contextes fortement multimodaux. Elle est par ailleurs insuffisante si on a trop peu de recouvrement entre la prédiction et la réalité. Enfin, si le bruit d'état est faible, alors on ne peut pas étendre notre espace d'exploration de manière satisfaisante.

Afin de pallier à ces inconvénients, on choisit de lisser la mesure empirique $\hat{p}(x) = \sum_{i=1}^N w^i \delta_{x=X^i}$ à l'aide d'un noyau (qui sera gaussien dans le cadre de notre étude) :

$$\hat{p}(x) \propto \sum_{i=1}^N w^i K\left(\frac{x - X^i}{h}\right)$$

$$\text{de pas gaussien} \quad h_{opt} = A(K) N^{-\frac{1}{d+4}} \quad \text{avec} \quad A(k) = \left(\frac{4}{d+2}\right)^{1/(d+4)}$$

Ainsi, on peut générer un nouvel échantillon de particules en suivant des étapes :

- Générer $I \in 1, \dots, N$, avec $P(I=j) = w_k^j$
- Générer $\epsilon \sim K$, noyau gaussien
- $X_{k|k}^i = X_{k|k-1}^I + h_{opt} \Gamma_k^T \epsilon$ où $\Gamma_k^T \Gamma_k = \text{cov}(X_{k|k-1}^i)$

5.2 Application à la navigation d'un avion

5.2.1 Mise en contexte de la problématique

Nous considérons ici le déplacement d'un avion à une certaine altitude absolue donnée et fixe. Notre sujet est dès lors la mesure de l'altitude relative dudit avion tout au long de son trajet.

Nous allons donc nous atteler à appliquer un filtre particulaire à la navigation par corrélation de terrain.

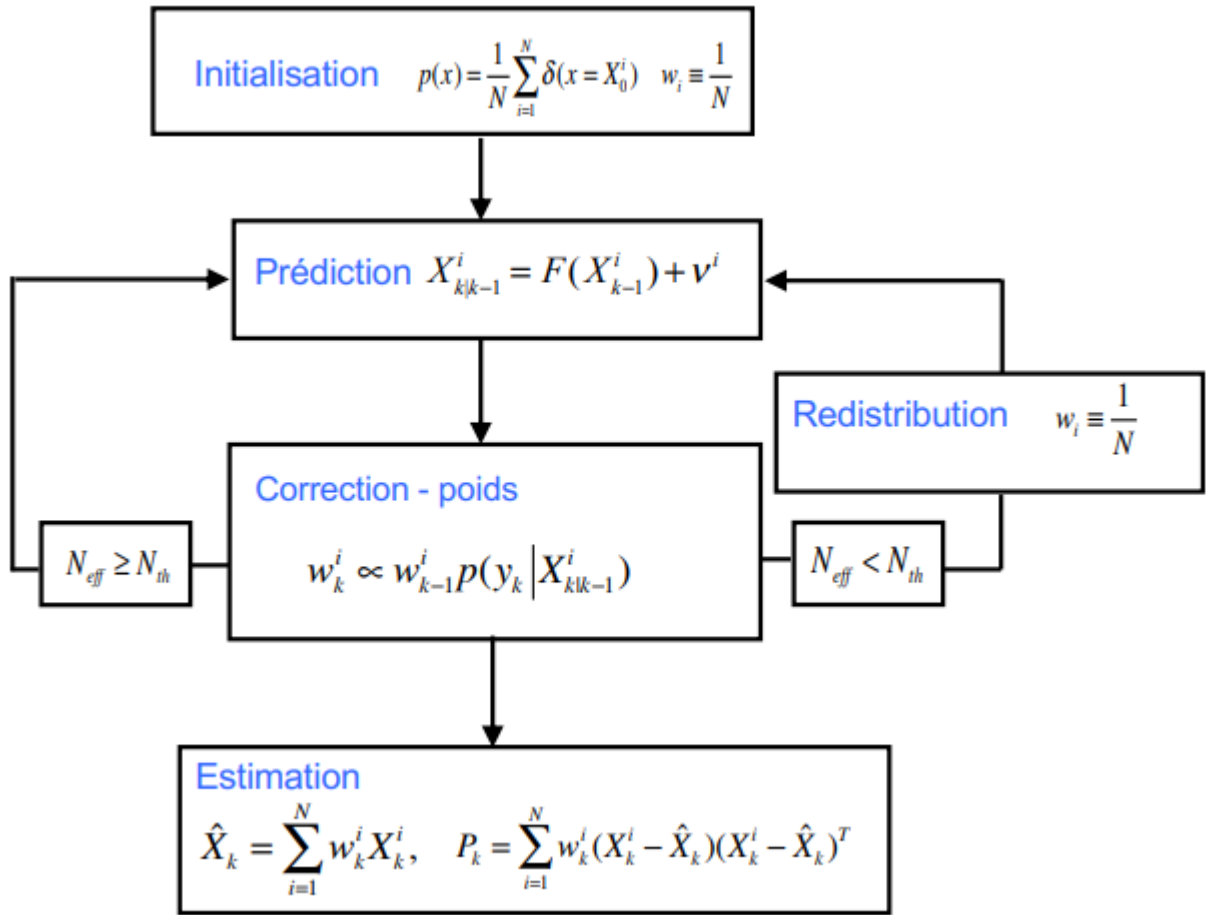


FIGURE 19 – Filtre particulaire

Comme antérieurement, nous commençons par expliciter la dynamique de l'état X ainsi que le bruit de mesure au temps k y_k , où les ϵ_k suivent une loi normale et h_{MNT} la fonction qui détermine la hauteur relative de l'avion - par rapport au relief - :

$$\begin{cases} X_k = \Phi(k-1, k)X_{k-1} \\ y_k = h_k(X_k) + \epsilon_k = z_k - h_{MNT}(x_k, y_k) + \epsilon_k \end{cases}$$

$$X_k = (x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)$$

Voici une figure illustrant la trajectoire empruntée par notre mobile. La droite en rouge la représente sur cette belle carte :

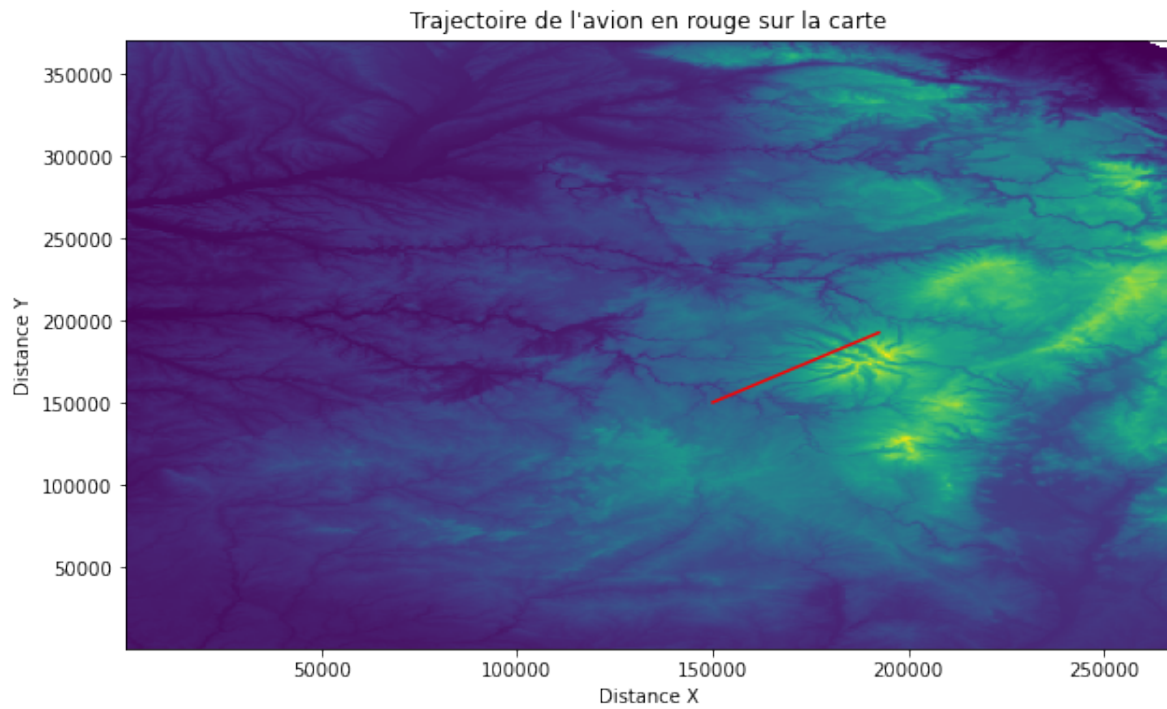


FIGURE 20 – Cartographie du problème

Subséquentement, nous représentons la hauteur relative réelle de l'avion que nous comparons à la mesure direct afin de mettre en exergue le mouvement que nous étudions :

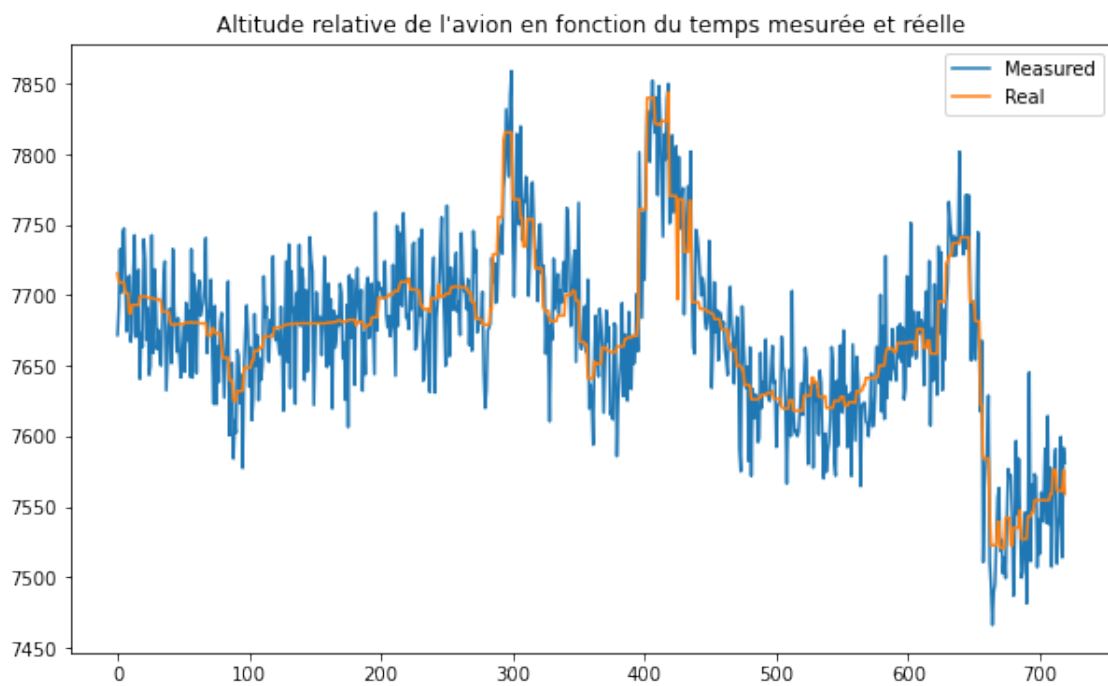


FIGURE 21 – Altitude Relative de l'avion. x temps (s), y altitude (m)

5.2.2 Trajectoire des particules et redistributions

Maintenant que le problème a été présenté, le principe de l'approximation particulaire étant le suivi de la trajectoire de particules, nous exhibons cette trajectoire pour l'approximation de la trajectoire de l'avion :

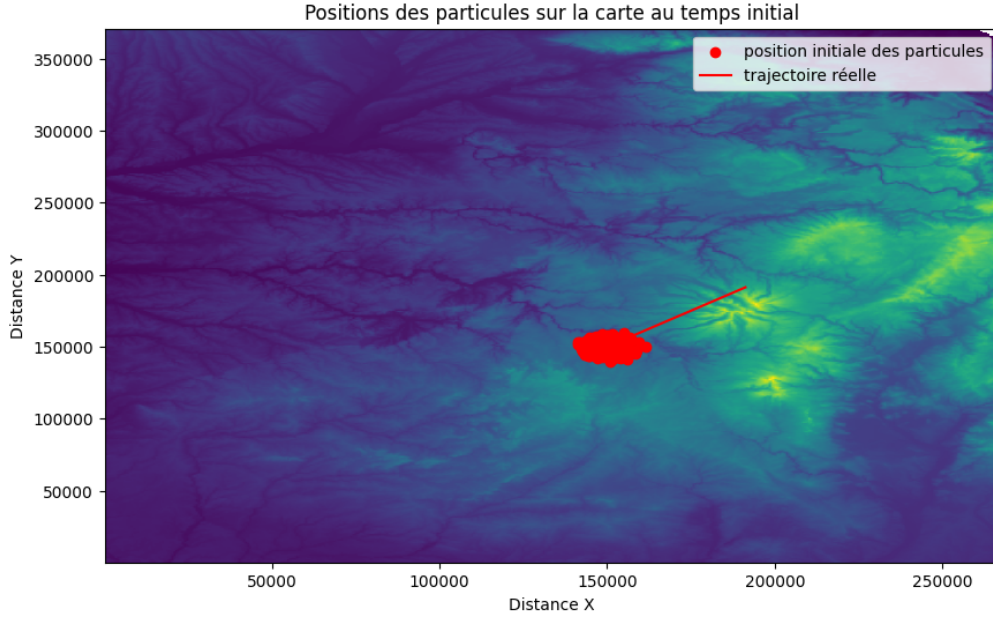


FIGURE 22 – Position à $t = 0$ de nos particules

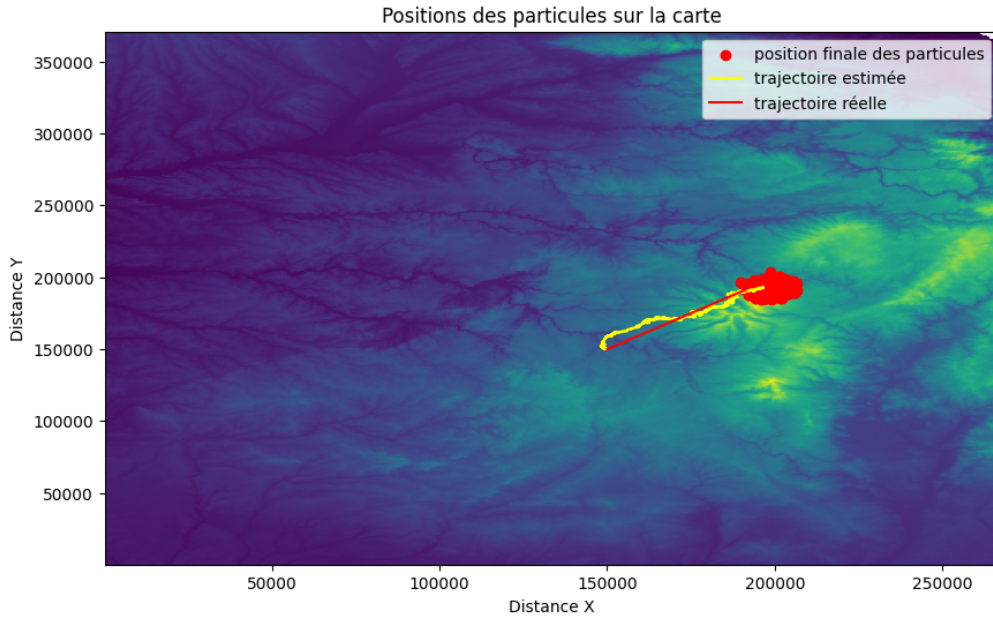


FIGURE 23 – Position à $t = 700$ de nos particules

Nous observons qu'effectivement nos particules convergent approximativement vers la trajectoire réelle de l'avion dont nous souhaitons mesurer le mouvement - pour une question de temps de calcul sur nos machines considéré et utilisé 1000 particules - l'intervalle de temps est ici bien conforme à notre problème après la pléthore d'essais. Qui plus est la trajectoire estimée (en jaune sur la figure) correspond à la trajectoire de l'estimateur de la trajectoire \hat{X} tel que :

$$\hat{X}_k = \sum_{i=1}^N w_k^i X_k^i$$

En outre, l'un des points clefs qui est intéressant à étudier pour représenter les choix de particules - selon

leur poids et leur vraisemblance - est la carte des temps de redistribution des poids :

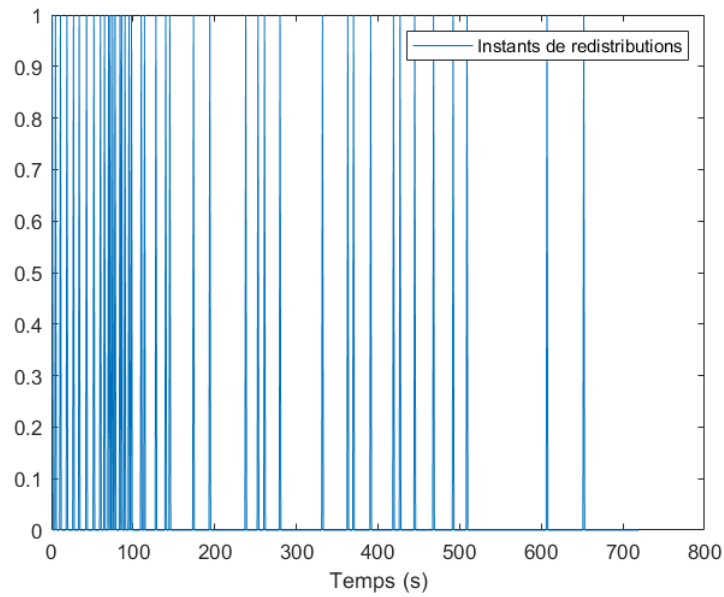


FIGURE 24 – Index de temps de redistribution

Il est cohérent que les poids soient fréquemment redistribués au début de la trajectoire, à cause de la dispersion spatiale initiale des particules qui font que leur vraisemblance autour de l'avion que l'on piste. Par suite les particules sont assez proches de notre objet mobile et la condition de redistribution n'est pas vérifiée : ce qui démontre la bonne convergence de notre méthode.

5.2.3 Conclusion : erreur relative de parcours

Pour conclure : Le principe même du filtre particulaire étant la bonne approximation de notre objet mobile, nous souhaitons donc confirmer que l'erreur en position entre le mouvement réel et la trajectoire de notre estimateur diminue bien comme souhaité - ce qui est le cas d'après les figures obtenues - :

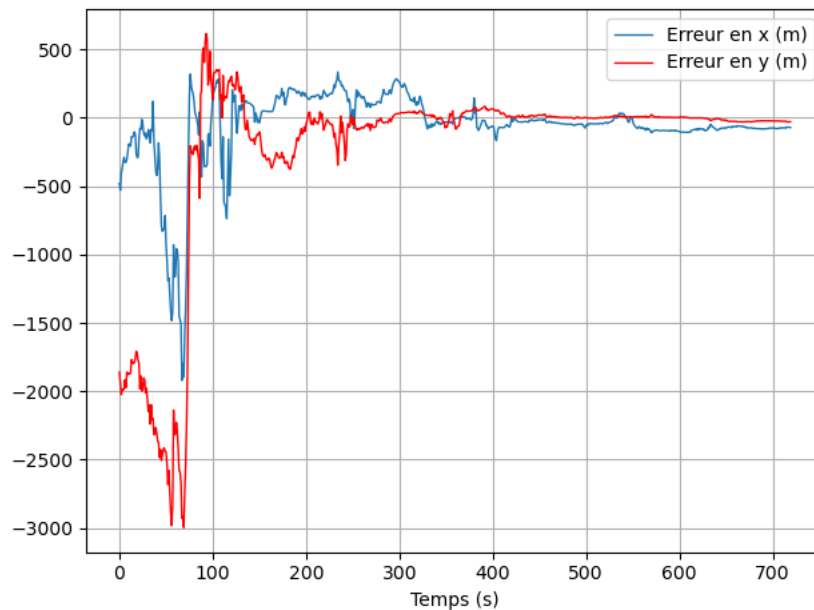
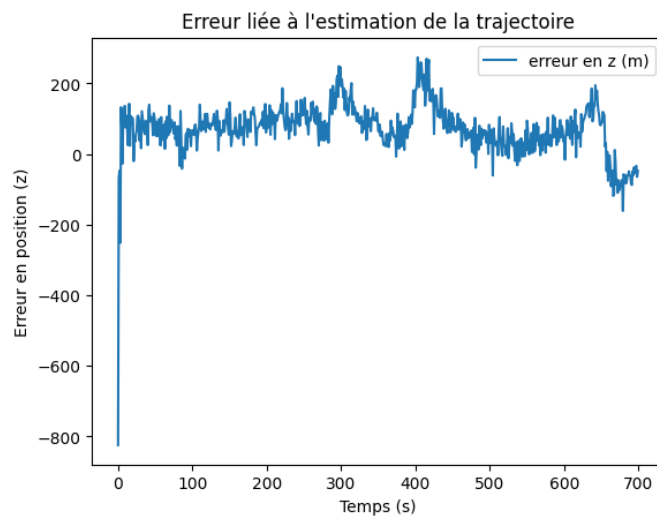


FIGURE 25 – Erreurs en x et y en fonction du temps

FIGURE 26 – Erreur en z en fonction du temps