Un po' di Calcolo Combinatorio

24 settembre 2023

1 Il fattoriale di un numero intero

Sia n un intero positivo. Il prodotto dei primi n interi positivi è detto *fattoriale di n* e si pone:

$$n! = \Pi_{i=1}^{n} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1. \tag{1}$$

Si completa la definizione ponendo:

$$0! = 1 \tag{2}$$

Esempi 1.

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

Esempi 2.

$\dfrac{13!}{11!} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = 13 \cdot 12 = 156$

$\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

Esercizi 1. *Calcolare*

$7! =$

$8! =$

$\dfrac{16!}{14!} =$

$\dfrac{8!}{10!} =$

Esercizi 2. *Calcolare*

$\dfrac{(n+2)!}{n!} =$

$\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!} =$

$\dfrac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} =$

2 Il coefficiente binomiale

Siano n e k due numeri naturali tali che $k \leq n$. Il simbolo $\binom{n}{k}$ definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3}$$

è detto coefficiente binomiale n su k.

Osservazione 1. *Non bisogna confondere* $\binom{n}{k}$ *con* $\frac{n}{k}$. *Il professore D. Knuth, autore del programma di composizione di testi (matematici)* $\TeX$ *ha definito come control sequence* $\{n \backslash chose\ k\}$ *per produrre* $\binom{n}{k}$ *(nel seguito sarà chiarito il vocabolo choose) e una control sequence* $\{n \backslash overk\}$ *per produrre* $\frac{n}{k}$.

Osservazione 2. *Il coefficiente binomiale,* $\binom{n}{k}$, *fornisce il numero dei sottoinsiemi con* k *elementi di un insieme finito costituito da* n *elementi.*

Esempi 3.

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15;$$
$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10;$$
$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = 28.$$

Esercizi 3.

- *Calcolare*

  $\binom{16}{3} =$ $\qquad$ $\binom{16}{13} =$ $\qquad$ $\binom{12}{4} =$ $\qquad$ $\binom{12}{8} =$

- *Dimostrare (algebricamente e tramite l'interpretazione insiemistica) che per ogni* $k \leq n$ *risulta*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- *Calcolare*

  $\binom{7}{3} =$

  $\binom{6}{3} + \binom{6}{2} =$

  $\binom{8}{4} =$

  $\binom{7}{4} + \binom{7}{3} =$

- *Dimostrare (algebricamente e tramite l'interpretazione insiemistica) che per ogni* $1 \leq k \leq n-1$ *risulta*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Si noti che, disponendo opportunamente i coefficienti binomili $\binom{n}{k}$ al crescere di n, è possibile ricostruire il triangolo di Pascal (o di Tartaglia):

k n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	1								$\cdots$
1	1	1							$\cdots$
2	1	2	1						$\cdots$
3	1	3	3	1					$\cdots$
4	1	4	6	4	1				$\cdots$
5	1	5	10	10	5	1			$\cdots$
6	1	6	15	20	15	6	1		$\cdots$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$\cdots$
$\vdots$									$\cdots$

Osservazione 3. *Ogni elemento nel triangolo di Pascal verifica la proprietà asserita nell'ultimo esercizio.*

Osservazione 4. *Ogni riga del triangolo di Pascal contiene i coefficienti dello sviluppo della potenza (corrispondente) del binomio:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Esercizi 4.

- *Sviluppare le seguenti potenze di binomio:*

  $\left(2x+y^2\right)^5 =$

  $\left(x^2-2y\right)^6 =$

- *Dimostrare che la somma degli elementi della riga n-esima del triangolo di Pascal vale 2^n.*

- *Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha*

  $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$

  come si evince anche dall'osservazione diretta delle righe del triangolo di Pascal.

3 Il problema del contare

Il calcolo combinatorio è il termine con cui si denota tradizionalmente la branca della matematica che studia i modi per raggruppare ed eventualmente ordinare secondo date regole gli elementi di un insieme finito di oggetti. Esso si occupa soprattutto di contare tali modi, ovvero le configurazioni (sequenze di oggetti) e solitamente risponde a domande quali "Quanti sono…", "In quanti modi…", "Quante possibili selezioni …".

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la selezione occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata **con o senza rimpiazzamento** (ripetizioni). Si può, inoltre, porre o meno l'attenzione sull'**ordine** con cui gli elementi di S si presentano nella selezione.

Sia, inoltre k un intero (in alcune situazioni risulterà necessariamente $k \leq n$), una selezione di k elementi di S verrà nel seguito denominata in maniera del tutto equivalente:

- k-selezione di S;
- selezione di S di ordine k;
- selezione di S di classe k;
- selezione degli n elementi di S su k posti;
- selezione degli n elementi di S presi k a k.

Principio Fondamentale del calcolo combinatorio
Supponiamo che una assegnata procedura possa essere scomposta mediante r sottoprocedure. Indicato con n_i il numero dei diversi modi di realizzazione della sottoprocedura i-esima ($i = 1, 2, \ldots, r$), il numero dei diversi modi di realizzazione dell'intera procedura è dato da:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r.$$

Esempi 4.

- *Il menù di una trattoria prevede 5 antipasti, 8 primi, 6 secondi, 3 contorni e 3 dolci. Un cliente decide di provare tutti i possibili pranzi completi (con cinque portate) che la trattoria può offrire. Allora il numero di volte che il cliente si dovrà recare presso la trattoria è:*
$$5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 2160.$$
- *Nel gioco denominato Corsa Tris bisognava pronosticare, su un totale di nove cavalli sulla linea di partenza numerati da 1 a 9, il numero del cavallo vincente, il numero del cavallo secondo piazzato e il numero del cavallo terzo piazzato.*
  Il numero totale di terne che si possono pronosticare è:
$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$
- *Nel gioco del totocalcio (almeno nella sua forma originaria) bisogna pronosticare l'esito in colonna di 14 partite diverse dove i possibili esiti di ciascuna partita sono individuati dai simboli: 1 (vince la prima squadra, quella che gioca in casa), X (vi è un pareggio), 2 (vince la seconda squadra, quella che gioca fuori casa).*
  Il numero totale di colonne differenti che si possono pronosticare è pari a:
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3^{14} = 4782969.$$

3.1 Disposizioni

Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento dall'insieme S è influente allora ogni selezione di elementi di S è detta essere una $d$isposizione.

Definizione 1. Disposizioni semplici
*Sia $k \leq n$. Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento di S è influente allora ogni k-selezione di S costituita da elementi tutti distinti tra loro è detta essere una k-**disposizione semplice di** S.*

Teorema 1. *Il numero $D_{n,k}$ di tutte le k-disposizioni senza ripetizione (semplici) di S è dato da:*
$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definizione 2. Disposizioni con ripetizione
*Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento di S è influente allora ogni k-selezione (con k qualsiasi) di S è detta essere una k-**disposizione con ripetizione di** S.*

Teorema 2. *Il numero $D^{(r)}_{n,k}$ di tutte le k-disposizioni con ripetizione di S è dato da:*
$$D^{(r)}_{n,k} = n^k.$$

Esercizi 5.

- *$S = \{a, b, c\}$. Determinare il numero di tutte le 2-disposizioni semplici procedendo per enumerazione. Lo stesso per le 3-disposizioni semplici.*
- *Risolvere l'esercizio precedente applicando il Teorema 1.*
- *$S = \{a, b, c\}$. Determinare il numero di tutte le 2-disposizioni con ripetizione procedendo per enumerazione. Lo stesso per le 3-disposizioni semplici.*
- *Risolvere l'esercizio precedente applicando il Teorema 2.*
- *Verificare la seguente identità*
$$(n-k)D_{n,k} = nD_{n-1,k}.$$
- *Determinare il numero massimo di veicoli targabili in una determinata provincia con il sistema delle targhe precedentemente in uso (Per una data provincia, supponiamo Napoli, la targa era composta da due posizioni con l'indicazione della provincia, nel caso in esempio NA, seguita da sei posizioni da riempire scegliendo da S={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}).*

3.2 Permutazioni

Definizione 3. *Ogni n-disposizione semplice è detta essere una* ***permutazione*** *(semplice) degli n elementi di S.*

Corollario 1. ***al Teorema 1*** *Il numero P_n di tutte le permutazioni semplici di S è ottenuto ponendo $k = n$ nella formula per il calcolo di $D_{n,k}$ e, quindi,*

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Gli anagrammi delle parole aventi lettere tutte distinte tra loro forniscono un'applicazione del concetto di permutazione.

Esercizi 6.

- *Ad una gara di atletica leggera partecipano cinque concorrenti. Quante sono le possibili classifiche?*

- *In quanti modi un gruppo di sette persone si può disporre su sette sedie allineate.*

Definizione 4. *Sia $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ e sia, inoltre $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$. Una n-selezione di S avente k_1 elementi uguali al prmo elemento di S, k_2 elementi uguali al secondo elemento di S e così via fino a k_s è detta essere una $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$-permutazione con ripetizione di S.*

Corollario 2. ***al Teorema 1*** *Il numero $P^{(r)}_{n;k_1,k_2,\ldots,k_s}$ (o ${}_{k_1,k_2,\ldots,k_s}P^{(r)}_n$) di tutte le $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$-* ***permutazioni con ripetizione*** *di S è dato da*

$$P^{(r)}_{n;k_1,k_2,\ldots,k_s} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}.$$

Si osservi che nel caso $s = n$ e $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$ si ottengono le permutazioni semplici. Risulta, inoltre,

$$P^{(r)}_{n;1,1,\ldots,1} = \frac{n!}{1!1!\ldots 1!} = P_n.$$

Gli anagrammi delle parole aventi alcune lettere che si ripetono più volte costituiscono un valido esempio del concetto di permutazione con ripetizione. Ad esempio, la parola STATISTICA è una $(2, 3, 2, 2, 1)$-permutazione dell'insieme $S = \{$S,T,A,I,C$\}$. Il numero delle permutazioni ottenibili con le lettere della parola STATISTICA è pari a:

$$P^{(r)}_{5;2,3,2,2,1} = \frac{5!}{2!3!2!2!1!}.$$

Esercizi 7.

- *Quanti segnali distinti, ognuno formato da 6 bandiere allineate verticalmente, si possono ottenere da 4 identiche bandiere rosse e da 2 identiche bandiere bianche?*

- *Quante permutazioni distinte si possono fprmare con tutte le lettere di ognuna delle seguenti parole:*

  a) erba;

  b) mietere;

  c) tratteggiare.

3.3 Combinazioni

Definizione 5. **Combinazioni semplici**
Sia $k \leq n$. Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento di S è ininfluente allora ogni k-selezione di S costituita da elementi tutti distinti tra loro è detta essere una k- ***combinazione semplice di*** *S. Una k-combinazione semplice di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni semplici di S aventi i medesimi elementi posti in differente ordine.*

Teorema 3. *Il numero $C_{n,k}$ di tutte le k-combinazioni senza ripetizione (semplici) di S è dato da:*

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Esempi 5. SUPER ENALOTTO *In tale concorso a premi bisogna pronosticare una sequenza di sei numeri (da 1 a 90) che sono identificati con il primo estratto di sei diverse città (indipendentemente dall'ordine). Nel caso di un primo estratto uguale ad un altro esso viene sostituito dal secondo estratto (in tale cambio vige l'ordine alfabetico delle città).*

Esercizi 8.

- *Calcolare il numero dei possibili ambi, terni, quaterne e cinquine che possono verificarsi sulla ruota di una data città.*

- *Quante sono le sestine giocabili al SUPER ENALOTTO?*

- *Uno studente che sostiene un esame deve rispondere a otto domande su 10. Quante scelte ha?*

Definizione 6. Combinazioni con ripetizione
*Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento di S è ininfluente allora ogni k-selezione (con k qualsiasi) di S è detta essere una k-**combinazione con ripetizione di** S. In particolare, una k-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le k-disposizioni con ripetizione di S aventi i medesimi elementi posti in un differente ordine.*

Teorema 4. *Il numero $C^{(r)}_{n,k}$ di tutte le k-combinazioni con ripetizione di S è dato da:*

$$C^{(r)}_{n,k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

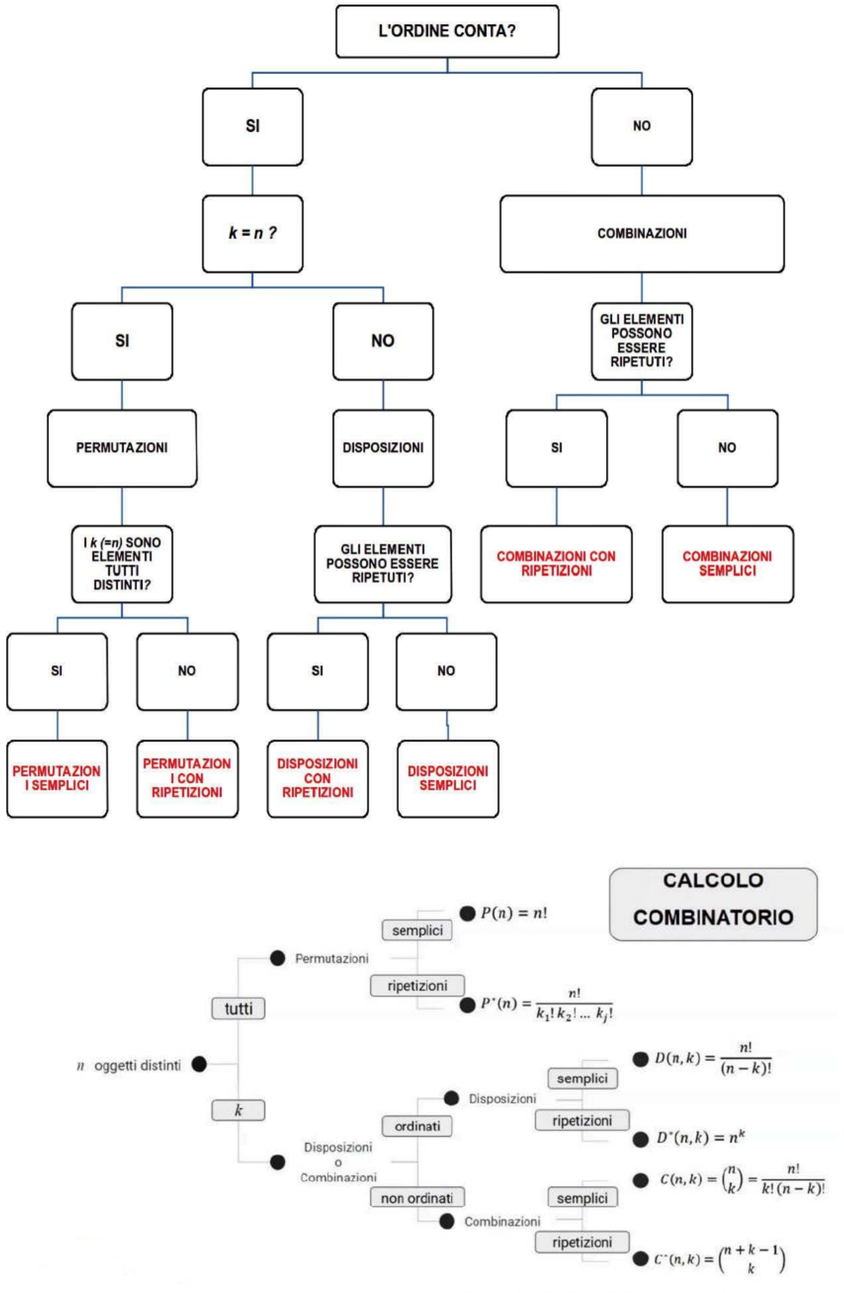

Figura 1: Rappresentazione schematica tratta dal web