Corso di Algebra per Ingegneria

Lezione 08: Esercizi

(1) Se a e b sono due insiemi, quando è vero che $a \times b = \emptyset$?

(2) È vero che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? E

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}?$$

(3) Scrivi esplicitamente il grafico della corrispondenza ρ da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$ così definita: $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \,\rho\, n \longleftrightarrow (m + 1 \leq n \wedge n^2 \leq 5))$. ρ è un'applicazione?

(4) Sia $\rho = (P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}), \subseteq)$ la relazione di inclusione su $P(\mathbb{N})$. Descrivere ρ^2.

(5) Verificare se le seguenti corrispondenze sono funzioni (se a è un insieme, qui indichiamo con $P_n(a)$ l'insieme delle parti di a che hanno esattamente n elementi (dette anche le n-parti di a)):

   (i) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \,\rho\, n \longleftrightarrow ((m + 1 \leq n) \wedge (n^2 \leq 5)))$;
   (ii) $\rho = (\mathbb{N} \times P(\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall m, p)(m \in \mathbb{N} \wedge p \in P(\mathbb{N}) \wedge (m \,\rho\, p \longleftrightarrow p = \{m\}))$;
   (iii) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})((m, n) \in g \longleftrightarrow m + n \in \mathbb{N})$;
   (iv) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l, m, n \in \mathbb{N})((l, m, n) \in g \longleftrightarrow l + m = n)$;
   (v) $\rho = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l, m, n \in \mathbb{N})((l, m, n) \in g \longleftrightarrow l + m = n)$;
   (vi) $\rho = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l \in \mathbb{Z})(\forall m, n \in \mathbb{N})((l, m) \,\rho\, n \longleftrightarrow l + m = n)$;
   (vii) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l, m, n \in \mathbb{N})((l, m, n) \in g \longleftrightarrow l^m = n)$;
   (viii) $\rho = (P_2(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall \{a, b\} \in P_2(\mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((\{a, b\}, n) \in g \longleftrightarrow a^b = n)$;
   (ix) $\rho = (P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall x, y \in P(\mathbb{N})(x \,\rho\, y \longleftrightarrow y = \mathbb{N} \setminus x)$;
   (x) $\rho = (P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall x, y \in P(\mathbb{N})(x \,\rho\, y \longleftrightarrow y = x \Delta \mathbb{N})$.

(6) Sia ρ_x la corrispondenza definita all'esercizio 4(x). Descrivere ρ_{iii}^2, ρ_{ix}^2, ρ_x^2, $\rho_i \rho_{viii}$, $\rho_{ii} \rho_{ix}$, $\rho_{iii} \rho_{ii}$, .

(7) Siano a e b due insiemi. In che caso $(a \times b, \emptyset)$ è una funzione?