LE DIVERSE DEFINIZIONI

• La Definizione Classica

Jacob Bernoulli (Ars Conjectandi), Pier Simon de Laplace,
Blaise Pascal[1], Pierre Fermat, Cristiaan Huygens (De Ratiociniis in ludo aleae).

Se un esperimento casuale può dar luogo a n esiti che si escludono a vicenda e ugualmente possibili, e se, di questi, n_A risultano favorevoli all'evento A, allora la (misura della) probabilità di A è data dal rapporto n_A / n .

Ad esempio, supponiamo di estrarre una carta a caso da un mazzo di carte napoletane (complessivamente ci sono 40 carte e o ogni seme ne ha 10). La probabilità di estrarre una carte di bastoni vale 10/40 = 1/4, mentre la probabilità di estrarre una carta (di qualunque seme) con valore da 6 a 10, estremi inclusi, vale 20/40 = 1/2.

Non sempre, l'applicazione di questa definizione risulta così immediata ed ovvia. Bisogna prestare molta attenzione ai requisiti "si escludono a vicenda" e "ugualmente possibili".

LAPLACE: Theorie analytique des probabilités - troisième édition 1820

Il primo di questi principi è la definizione stessa della probabilità che, come si è visto, è il rapporto del numero dei casi favorevoli rispetto a tutti i casi possibili.

Ma ciò suppone i diversi casi ugualmente possibili. se essi non lo sono, si determineranno dapprima le loro rispettive possibilità, la cui esatta valutazione è uno dei più delicati della teoria dei giochi d'azzardo. Allora la probabilità sarà la somma di ogni caso favorevole. Chiariamo questo principio con un esempio.

Supponiamo che si lanci in aria una moneta larga e molto sottile le cui due grandi facce opposte, che chiamiamo *croce* e *testa*, siano perfettamente simili. Cerchiamo la probabilità di avere *croce* almeno una volta in due lanci. È chiaro che si possono avere quattro casi ugualmente possibili, cioè *croce* al primo e al secondo lancio; *croce* al primo e *testa* al secondo lancio; *testa* al primo e *croce* al secondo lancio; infine *testa* in entrambi i lanci. I primi tre casi sono favorevoli all'evento di cui si cerca la probabilità, che di conseguenza vale 3/4 in virtù del fatto che, a parità, ce ne sono tre contro uno che *croce* capiterà almeno una volta nei due lanci.

Si potrebbero considerare in questo gioco che ci sono solamente tre casi diversi, cioè *croce* al primo lancio e ciò dispensa dal fare il secondo lancio; *testa* al primo e *croce* al secondo lancio; infine testa in entrambi i lanci. Ciò ridurrebbe la probabiltà a 2/3 se si considerassero, seguendo D'Alambert, questi tre casi come ugualmente possibili. Ma è evidente che la probabilità di avere *croce* al primo colpo vale 1/2 mentre quella degli altri due casi vale 1/4; il primo caso essendo un evento semplice che corrisponde a due eventi composti, *croce* al primo e al secondo lancio, e *croce* al primo lancio e *testa* al secondo. Ora se, conformemente al secondo principio, si aggiunge la probabilità 1/2 di *croce* al primo colpo e la probabilità 1/4 che *testa* capiti al primo lancio e *croce* al secondo, si otterrà 3/4 per la probabilità cercata, ciò in accordo con quella che si trova nell'ipotesi in cui si effettuano in ogni caso i due lanci. Questa ipotesi non cambia il favore di colui che punta su questo evento, ma serve solo a ridurre i diversi casi a dei casi ugualmente possibili.

---

[1] Qualcuno contesta la paternità così assegnata a Pascal. In effetti, come si è visto, non fu il primo in assoluto, e i suoi contributi non si elevano al di sopra degli altri, per esempio di Fermat. Sembra però che proprio lui ad intraprendere e stimolare uno studio meno sporadico dei problemi di probabilità. D'altra parte questo corrisponde alla sua concezione filosofica, in particolare nei confronti di Cartesio, che lo precedeva di poche decine di anni. Come in filosofia alle idee "chiare e distinte di Cartesio" egli contrapponeva "le ragioni del cuore, che la ragione non comprende", così, in contrasto con la perfetta e stabile sistemazione della geometria cartesiana, egli dava inizio, certo non coscientemente, al processo dirompente del calcolo delle probabilità.
(Giorgio Dall'Aglio)

La critica più frequente alla definizione classica è che essa utilizza il concetto di "ugualmente possibile" che è sinonimo di "ugualmente probabile" e quindi, che essa può essere considerata, in qualche misura, circolare.
Inoltre, c'è da osservare la limitatezza dell'ambito in cui una tale definizione può valere: i casi possibili devono essere in numero finito, e devono avere la stessa probabilità. Ma una difficoltà del genere può essere superata con adeguati accorgimenti, per esempio passaggi al limite. Ad esempio, si potrebbe cercare la probabilità che un numero intero estratto a caso dagli interi positivi sia pari. Supponendo di limitarsi ai primi 20 interi, 10 di questi sono pari, per cui il rapporto tra gli esiti favorevoli e il numero totale vale 10/20 = 1/2. Ancora, se si considerano i primi 200 interi, 100 di essi sono pari, e il rapporto è ancora 1/2. In generale, i primi 2n interi contengono n interi pari; se prendiamo il rapporto n/2n e facciamo tendere n all'infinito così da considerare tutto l'insieme degli interi positivi, il rapporto rimane 1/2 che è la probabilita cercata.
Un'altra difficoltà che si incontra con la definizione classica sorge quando cerchiamo di rispondere a domande del tipo: qual è la probabilità di vittoria di un atleta in una particolare gara? Oppure qual è la probabilità che un individuo di 40 anni viva per almeno altri 20 anni?

In conclusione la validità generale di questa definizione resta discutibile. D'altra parte è facile constatare che essa, nei casi dove è lecito ipotizzare una insita simmetria, si dimostra di una grande utilità pratica. Ad esempio nei giochi di carte, dadi e simili, le regole individuano con precisione le diverse alternative, e si può ragionevolmente supporre che esse siano ugualmente possibili. Si tratta allora di calcolare il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli, e in ciò gioca un ruolo importante il calcolo combinatorio. Si parla a volta, in casi simili, di *probabilità combinatorie*.

Inoltre essa risponde al requisito di essere operativa; implica cioè alcune regole per l'elaborazione matematica delle probabilità. Infatti, indicati con A e B due eventi si ha immediatamente:

$$\begin{aligned} &P(A) \geq 0 \\ &P(A) = 1, \text{ se A è l'evento certo} \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ se A e B sono incompatibili} \end{aligned} \qquad (1)$$

intendendo con *incompatibili* due eventi che non si possono presentare insieme, e con *certo* l'evento che si presenta in ogni prova.

▷ **ESERCIZIO 1**

Un'urna contiene 8 biglie bianche, 6 rosse e 9 verdi. Scegliendo una biglia a caso, qual è la probabilità che essa sia bianca?

Soluzione

La probabilità P richiesta può calcolarsi come rapporto tra il numero di casi favorevoli all'estrazione di una biglia bianca (8) ed il numero totale di casi $(8+6+9=23)$:

$$P=\frac{8}{23}=0.3478.$$

▷ **ESERCIZIO 11**

Lanciando tre dadi simultaneamente è maggiore la probabilità di ottenere in totale 9 punti o 10 punti?

Soluzione

Indichiamo con A l'evento "totale 9" e con B l'evento "totale 10". L'evento A si realizza se e solo se i punteggi (x,y,z) relativi rispettivamente al primo, al secondo e al terzo dado soddisfano la condizione $x+y+z=9$; l'evento B si realizza invece allorché risulta $x+y+z=10$. Esaminiamo separatamente i due casi.

a) $x+y+z=9.$

Ciò accade quando e solo quando i punteggi dei tre dadi sono le

$3!$ permutazioni dei numeri 1, 2, 6 oppure le
$3!$ permutazioni dei numeri 1, 3, 5 oppure le
$3!/2$ permutazioni dei numeri 1, 4, 4 oppure le
$3!/2$ permutazioni dei numeri 2, 2, 5 oppure le

$3!$ permutazioni dei numeri 2, 3, 4,

oppure la terna (3,3,3), per un totale di 25 casi distinti. Poiché il numero di casi possibili è $6^3=216$ si ha:

$$P(A)=\frac{25}{216}.$$

b) $x+y+z=10.$

Ragionando in maniera analoga, ci si convince che la condizione b) è soddisfatta se e solo se i punteggi dei tre dadi sono le

$3!$ permutazioni dei numeri 1, 5, 4 oppure le
$3!/2$ permutazioni dei numeri 2, 4, 4 oppure le
$3!/2$ permutazioni dei numeri 3, 3, 4 oppure le
$3!/2$ permutazioni dei numeri 6, 2, 2 oppure le
$3!$ permutazioni dei numeri 6, 3, 1 oppure le
$3!$ permutazioni dei numeri 5, 3, 2,

per un totale di 27 casi distinti. Si ha dunque:

$$P(B)=\frac{27}{216}.$$

Si conclude che lanciando tre dadi simultaneamente la probabilità di totalizzare 10 punti è maggiore della probabilità di totalizzarne 9.

▷ **ESERCIZIO 2**

Calcolare la probabilità che su sette lanci di un dado il numero 1 esca due volte e i rimanenti numeri escano una volta ciascuno.

Soluzione

La probabilità P richiesta può essere valutata come rapporto fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili. Questi ultimi sono 6^7, cioè tanti quante sono le sequenze distinte in cui i 6 possibili risultati del singolo lancio possono succedersi in 7 lanci consecutivi. Il numero dei casi favorevoli è dato dal coefficiente multinomiale

$$\binom{7}{2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}$$

che rappresenta il numero di modi distinti in cui nei sette lanci il numero 1 si verifica due volte e ciascuno dei numeri da due a sei si verifica una ed una sola volta. Si ha dunque:

$$P = \frac{\binom{7}{2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}}{6^7} = \frac{35}{3\,888} \doteq 9 \cdot 10^{-3}.$$

▷ **ESERCIZIO 17**

Se quattro uomini ed una donna si dispongono casualmente in riga per una foto, qual è la probabilità che la donna risulti al centro?

Soluzione

Essendo unica la donna, la probabilità P richiesta è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli, pari al numero delle permutazioni dei quattro uomini avendo fissato al centro la donna, ed il numero di casi possibili, costituito dal numero di permutazioni delle cinque persone. Pertanto la probabilità richiesta è:

$$P = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

▷ **ESERCIZIO 31**

Una sequenza di tre lettere viene formata a caso utilizzando l'alfabeto italiano. Nell'ipotesi che una qualsiasi sequenza di tre lettere sia una parola, qual è la probabilità che la parola formata contenga solo lettere tutte distinte e comprese tra la A e la L, estremi inclusi?

Soluzione

La valutazione di detta probabilità può essere effettuata determinando il numero dei raggruppamenti possibili dei 21 elementi (lettere dell'alfabeto) a 3 a 3 (casi possibili) ed il numero di quelli che risultano favorevoli all'evento desiderato. Si hanno dunque $\binom{21}{3}$ casi possibili e $\binom{10}{3}$ casi favorevoli di modo che la probabilità P richiesta vale

$$P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{12}{133} = 0.0902.$$

• La Definizione Frequentista

R. Von Mises

Se un esperimento casuale può essere riprodotto indefinitamente in circostanze identiche, allora la (misura della) probabilità di un evento A è data dal limite rapporto n_A/n dove n_A rappresenta il numero delle prove nelle quali A si è presentato e n è il numero totale delle prove. Il rapporto è la frequenza relativa dell'evento A.

VON MISES: Probability, Statistics and Truth - 1939

Dopo la nostra precedente discussione, non dovrebbe essere difficile giungere ad una cruda forma di definizione di probabilità. Noi possiamo considerare un gioco con due dadi. L'attributo di un singolo lancio è la somma dei punti mostrati dalla faccia superiore di ciascuno dei due dadi. Cosa si può dire circa l'attributo *dodici*, cioè ogni dado mostrante sei punti? Quando noi lanciamo i dadi un gran numero di volte, diciamo 200, e annotiamo i risultati, noi troviamo che *dodici* si è presentato un certo numero di volte, forse 5. Il rapport 5:200 = 1/40 è chiamato la frequenza, o più accuratamente, la frequenza relativa, dell'attributo *dodici* nei 200 lanci. Se noi continuiamo il gioco per altri 200 lanci, noi possiamo trovare la corrispondente frequenza relativa per 400 lanci e così via. Il rapporto in tal modo ottenuto differirà dal primo, 1/40. Se i rapporti continuano a manifestare evidenti variazioni dopo che il gioco è stato ripetuto 2000, 4000 o un numero ancora più grande di volte, allora la questione dell'esistenza di una definita probabilità del risultato *dodici* non potrebbe porsi del tutto. È essenziale per la teoria delle probabilità, che nel gioco dei dadi, così come nell'altra massa di fenomeni prima menzionati, la frequenza relativa di certi attributi dovrebbe diventare, via via, più stabile all'aumentare del numero delle osservazioni. Noi discuteremo l'idea del *valore limite della frequenza relativa* più avanti; nel frattempo la consideremo come la probabilità dell'attributo in questione, cioè la probabilità del risultato *dodici* nel gioco dei dadi. È ovvio che, definendo la probabilità in questo modo, essa sarà un numero minore di 1 e conseguentemente una frazione propria.

Tale definizione si fonda sulla *legge empirica del caso*: la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso e l'approssimazione tende a migliorare con l'aumentare del numero delle prove.

Anche questa definizione si presta a critiche. Anzitutto le frequenze non costituiscono una successione numerica data mediante una legge, ma dei numeri rilevati sperimentalmente, per i quali il concetto di limite non è chiaro. Sono stati fatti alcuni tentativi di superare questa difficoltà, in particolare da parte di Von Mises, che però sposta l'attenzione dalle frequenze effettivamente rilevate ad un collettivo astratto. Ma la difficoltà più grave si incontra quando si pensa all'ambito di validità di questa definizione. Si deve prendere in considerazione, evidentemente, una successione di prove fatte nelle stesse condizioni, di prove ripetute, come si dice, e ciò restringe l'applicabilità della definizione a situazioni ben delimitate, come i lanci successivi di un dado. Ma a ben guardare anche una situazione tipicamente ripetitiva come questa non lo è sufficientemente per dare una validità assoluta alla definizione: da un lancio ad una altro cambia, sia pure di poco, la situazione ambientale (temperatura, umidità, ecc.) che influisce sul risultato; cambia il dado stesso, per l'urto che riceve cadendo. Resterà costante la probabilità dell'evento considerato? Si, entro limiti di approssimazione largamente sufficienti in pratica; no, se si richiede una costanza valida rigorosamente, che possa dare una solida base alla definizione.

Lasciando da parte le carenze della definizione frequentista, osserviamo che anch'essa, come quella classica è operativa. La frequenza delle prove in cui l'evento si verifica ha le stesse caratteristiche matematiche del rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili. Si ricavano, quindi per le frequenze le stesse relazioni (1), che si mantengono nel passaggio al limite.

• La Nozione Soggettiva

Blaise. Pascal, Daniele Bernoulli, Bruno de Finetti, L. Jimmy Savage.

La probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (e 0 se l'evento non si verifica). Le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

L'impostazione soggettiva si basa sul *principio della scommessa equa*.. Sia A un evento sulla cui realizzazione scommettono due giocatori, di cui uno è il banco e l'altro e lo scommettitore. Supponiamo che spetti ad uno di essi, fissare la probabilità di A. Allora la scommessa è equa se al secondo giocatore è lasciata la possibilità di stabilire se fare il banco oppure se fare lo scommettitore.

Infatti, è evidente nella definizione, l'aspetto di *equità* del prezzo (non permette a nessuno dei due scommettitori una vincita certa) e di coerenza (non solo nel fissare le probabilità non si deve permettere ad un altro di avvantagiarsi, ma se si giudica equo il prezzo bisogna essere disposti ad accettare l'una o l'altra delle posizioni contrapposte nella scommessa di un evento).

Il miglior modo di chiarire la condizione di coerenza è di mostrare come da essa derivano le (1). Sia A l'evento certo, e P(A) la sua probabilità. Dall'essere certo l'evento, si riceverà certamente 1 pagando P(A), per cui il guadagno certo sarà 1-P(A). Se fosse P(A)<1 si avrebbe un guadagno positivo, se invece fosse P(A)>1 allora si avrebbe una perdita certa. Entrambi questi casi sono esclusi per la condizione di coerenza, e quindi deve essere P(A)=1 , ossia la seconda delle (1). Analogamente si dimostra la prima delle (1). Prendiamo ora in considerazione un insieme A_i di n eventi necessari (almeno uno di essi si deve presentare) e incompatibili, aventi ciascuno probabilità $P(A_i)$, e mostriamo che la somma di esse vale 1. A tal scopo consideriamo n scommesse, una su ciascuna degli eventi. Paghiamo $P(A_i)$ per ricevere 1 se A_i si verifica (o 0 se A_i non si verifica). In totale paghiamo $P(A_1)+ P(A_2)+ \dots + P(A_n)$. Poiché certamente uno, ed uno solo, degli eventi si verifica, riceveremo 1 sulla scommessa relativa a quell'evento e 0 sulle altre scommesse. In conclusione dall'insieme di scommesse riceveremo certamente 1. Per la condizione di coerenza quello che paghiamo deve essere uguale a quello che riceviamo, altrimenti si avrebbe o una perdita certa o una vincita certa: quindi $P(A_1)+ P(A_2)+ \dots + P(A_n)=1$. Se adesso indichiamo con A e B due eventi incompatibili, l'evento che esaurisce i rimanenti possibili risultati è l'evento C che è la negazione dell'unione dei due precedenti eventi. Dal risultato appena trovato si P(A)+P(B)+P(C)=1. D'altra parte un'altra coppia di eventi necessari e incompatibili è formata da C e da (A U B) per cui P(C)+P(A U B) =1. Confrontando le due ultime uguaglianze si ottiene la terza delle (1).

Naturalmente anche la definizione soggettiva non va esente da critiche. Lo schema di scommesse adottato è contestabile, perché l'individuo non è indifferente di fronte al rischio; in alcuni casi lo cerca (vedi lotterie e giochi d'azzardo) pagando un prezzo che non è equo; in altri casi (assicurazioni) paga proprio per evitare il rischio. Ciò rende poco chiara il concetto di equità. Vi sono modi per attenuare queste critiche, in particolare ricorrendo al concetto di *utilità* . Per ulteriori dettagli si rimanda a Daboni o de Finetti. Ma la critica più diffusa a questa definizione è proprio del essere soggettiva., cioè di fondare la probabilità sull'opinione dei singoli, ovviamente variabile da persona a persona, ed anche per una stessa persona a seconda delle circostanze in cui si trova. Si è sviluppata una lunga discussione, spesso polemica, con gli oggettivisti che accusano l'impostazione soggettiva di rendere impossibile la comunicazione tra persone con diverse valutazioni di probabilità, e quindi di minare alla base lo sviluppo della scienza; e con i soggettivisti che denunciano l'illusorietà della pretesa oggettività delle altre impostazioni.

<u>ESEMPIO</u>: campo di partenza e quote degli allibratori per il G.P. delle Nazioni di trotto del 1982

	q'	p'	p		q'	p'	p
Plumona	6	0,143	0,086	Solce Island	20	0,048	0,029
Ghenderò	4	0,200	0,119	Toujours	30	0,032	0,019
Ideal du Gazeau	3/5	0,625	0,374	Snack Bar	6	0,143	0,086
Our Dream of Nite	20	0,048	0,029	Ex Lee	10	0,091	0,054
Fedone	10	0,091	0,054	Chat	30	0,032	0,019
Wildwood Brook	20	0,048	0,029	Dimma	15	0,062	0,037
Speed Circuit	50	0,020	0,012	Demon Renvaeu	50	0,020	0,012
Prize Regal	50	0,020	0,012	Ianthin	20	0,048	0,029
						1,671	1

q: quota del cavallo su cui si punta
a: somma puntata
p: probabilità di vittoria del cavallo su cui si punta

$\Rightarrow$ $a : a(1+q) = p : 1$ ovvero $p = \frac{1}{1+q}$ o $q = \frac{1}{p} - 1$

La quota q' in realtà pagata dall'allibrato è minore di q, per cui risulta $p' = \frac{1}{1+q'} > p$. L'UNIRE pone delle limitazioni sulle quote fissate dagli allibratori; infatti la sommatoria delle p', per le corse con più di 9 cavalli non <u>dovrebbe</u> superare 1,60.

Ideal du Gazeau ; $p = 0{,}374$; $p' = p \cdot 1{,}671 = 0{,}625$; $q' = \frac{1}{p'} - 1 = 0{,}6$

Dimma ; $p = 0{,}037$; $p' = p \cdot 1{,}671 = 0{,}062$; $q' = \frac{1}{p'} - 1 = 15$

ESEMPIO: Per la fase finale dei campionati del mondo di calcio 1982, i giornali riferirono che gli allibratori (clandestini) a Milano davano l'Italia a 2, la Germania a 2, la Francia a 3,5 e la Polonia a 3,5.

$$p'(\text{Italia}) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = 0,333 \Rightarrow p = \frac{0,333}{1,110} = 0,3$$

$$p'(\text{Germania}) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = 0,333 \Rightarrow p = \frac{0,333}{,110} = 0,3$$

$$p'(\text{Francia}) = \frac{1}{1+3,5} = \frac{1}{4,5} = 0,222 \Rightarrow p = \frac{0,222}{1,110} = 0,2$$

$$p'(\text{Polonia}) = \frac{1}{1+3,5} = \frac{1}{4,5} = \frac{0,222}{1,110} \Rightarrow p = \frac{0,222}{1,110} = 0,2$$

COMMENTI ALLE DIVERSE IMPOSTAZIONI

L'aspetto alla base della impostazione soggettiva di probabilità, deriva dal considerare eventi unici, non ripetibili, che d'altra parte non si possono ricollegare ad alternative equiprobabili. Di fronte ad un evento del genere può solo prendersi in considerazione l'aspettativa, più o meno grande, cioè il grado di fiducia nel verificarsi dell'evento stesso. Gli oggettivisti negano che a tale evento possa essere attribuita una probabilità; i soggettivisti sostengono che tutti gli eventi sono irripetibili: in alcune circostanze un evento si trova immerso in un gran numero di eventi consimili, ed allora la frequenza osservata nell'insieme serve di base per la valutazione della probabilità del singolo evento, senza però che la si possa porre a fondamento della definizione di probabilità. Per quanto riguarda la definizione classica, secondo i soggettivisti l'equiprobabilità di certe alternative è una scelta soggettiva, e il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili serve solo a valutare di conseguenza la probabilità degli eventi.

La differenza tra l'impostazione soggettiva e frequentista può essere bene illustrata nei confronti delle *tavole di mortalità* , così importanti nel campo attuariale. Il fatto che una persona muoia entro un anno da una certa data è senz'altro un evento irripetibile, non solo dal punto di vista umano, ma anche come valutazione di probabilità. Se si considera un insieme di persone omogeneo (per età, per condizioni di salute, ecc.) si può ritenere che le loro probabilità di morte siano abbastanza simili, e quindi le frequenze osservate nel passato sono una buona base per per valutare la probabilità relativa ad un individuo, ma non forniscono un indicazione assoluta: la conoscenza personale dell'individuo può far variare anche di parecchio, la valutazione di probabilità.

A prescindere dalla valutazione numerica, è il contenuto concettuale che differenzia le due impostazioni. In certe condizioni l'impostazione frequentista è sufficiente alla comprensione e alla valutazione del fenomeno che si sta considerando: per chi partecipa al gioco del lotto l'impostazione frequentista può essere soddisfacente: quello che gli interessa è la frequenza dei risultati a lunga scadenza. Ben diversa è la situazione di un paziente che deve affrontare un'operazione chirurgica, sapendo che nel passato ha avuto il 95% di risultati positivi e il 5% di risultati negativi. Si può ragionevolmente ipotizzare che queste frequenze si mantengono anche nel futuro; ma ciò dice ben poco al soggetto, al quale interessa il suo caso personale, e per il quale ha senso soltanto quel che da tale frequenza si può trarre a proposito del suo intervento, cioè l'aspettativa o il grado di fiducia, con un'interpretazione inevitabilmente di tipo soggettivo.

D'altra parte, il contrasto di fondo tra le diverse impostazioni si rivela in pieno, ed impone una scelta, solo in una fase avanzata delle applicazioni del calcolo delle probabilità. Più esattamente la grossa differenza che si prospetta subito è data dal fatto, già messo in evidenza, che la definizione soggettiva si applica ad un gran numero di situazioni in cui invece, secondo gli oggettivisti, non si può parlare di probabilità; ma nel campo comune alle varie definizioni non vi è sostanziale differenza nelle valutazioni concrete delle probabilità degli eventi. Gli oggettivisti, pur postulando l'esistenza di una probabilità assoluta per un evento, nella stima concreta di tale probabilità non possono prescindere da elementi soggettivi. I soggettivisti, pur non dando ad esse validità automatica, devono tenere conto delle frequenze o di considerazioni di simmetria ogni qual volta le circostanze lo permettono.

Inoltre un elemento di unificazione è costituito dall'aspetto matematico. Abbiamo già visto che le tre norme fondamentali espresse dalle (1) sono comuni alle diverse impostazioni, e il patrimonio matematico non si esaurisce in esse. La teoria matematica si può quindi sviluppare a partire da certe relazioni, tra cui in particolare le (1), assunte come assiomi, senza precisare la definizione di probabilità da cui provengono. Noi adotteremo questa linea di azione, ottenendo una costruzione matematica che non esclude chi si sente di aderire ad una particolare impostazione. Ricordiamo però che il collegamento del modello matematico con la realtà va comunque fatto, per non rimanere nell'ambito di una pura speculazione astratta.

CONCETTI BASILARI DELLA TEORIA DELLA PROBABILITÀ

ESPERIMENTO

Si definisce **esperimento** l'insieme delle azioni e delle condizioni ambientali che conducono al determinarsi di un fatto.
Si osservi che non necessariamente la procedura che definisce l'esperimento prevede una partecipazione attiva dello sperimentatore, come accade per una prova di laboratorio o per il lancio di un dado. Anche la semplice osservazione di un fenomeno che si manifesta spontaneamente in natura può essere considerata un esperimento.
Un esperimento è **deterministico** quando, anche prima della sua effettiva esecuzione, le conoscenze dell'osservatore sono tali da consentirgli di ritenere certo il risultato. Ad esempio, l'esperimento "lancio di una moneta" rispetto agli effetti A = {o si presenta *testa* o si presenta *croce*}, e B = {non si presentano né *testa* né *croce*} ci permette di dichiarare **certo** il primo ed **impossibile** il secondo.
Viceversa, un esperimento è **aleatorio** se prima della sua realizzazione, le conoscenze dell'osservatore lo conducono a ritenere possibili una pluralità di esiti. Ad esempio, l'esperimento "lancio di una moneta" rispetto all'effetto F = {faccia che si presenta osservabile} ha due possibili esiti T = {si osserva la faccia *testa*} e C = {si osserva la faccia *croce*}. Altri esempi sono forniti dal "sesso di un nascituro", il colore degli occhi di un nascituro, il numero di particelle radioattive che raggiungono un bersaglio, il tempo di vita di una lampadina accesa.

PROVA

La prova è ogni singola effettuazione dell'esperimento. Quando si esce dall'ambito di casi semplici, il concetto di prova si arricchisce di una molteplicità di sfumature dipendenti dalla definizione di misura della probabilità che si intende adottare.

EVENTO

Nell'ambito di una prova di un esperimento si possono prendere in considerazione innumerevoli aspetti,. ma in genere sono solo alcuni di essi che vengono fatti oggetto di attenzione. Ad esempio nel lancio di un dado è difficile che interessi la distanza che il dado percorre rotolando, oppure il numero dei rimbalzi sul pavimento che esso effettua. Inoltre bisogna definire con chiarezza l'aspetto che è sotto studio (o con linguaggio statistico il **carattere** in esame). Nell'esempio del dado si potrebbe essere interessati al risultato numerico della faccia superiore oppure al pari o dispari. Dopo di ciò si definisce **evento** una **parte** dei possibili risultati della prova (gli inglesi dicono **outcome** ovvero ciò che viene fuori).

PROBABILITÀ

La probabilità è un numero associato al presentarsi di un evento. Il concetto di probabilità (non la sua misura) è un concetto primitivo; infatti, ciascuno di noi sa cosa intende quando afferma "è più probabile un *ambo* anziché un *terno* in una estrazione del gioco del lotto", pur non conoscendo necessariamente o con esattezza quel numero associato al presentarsi degli eventi *ambo* e *terno*.

I concetti esposti e la loro reciproca relazione, sono ben illustrati dalla frase di G. Pompilj:

la prova genera l'evento con una certa probabilità.

CONSIDERAZIONI SUL CONCETTO DI EVENTO

La gran parte degli aspetti diversi che interessano l'effettuazione di una prova di un esperimento possiede una naturale struttura insiemistica. Così, nel lancio di un dado, abbiamo un insieme di possibili alternative {1,2,3,4,5,6}, ciascuna delle quali può essere presa come evento; esse formano un insieme di eventi necessari ed incompatibili. Ogni altro evento si presenta come un insieme di tali eventi elementari: {pari}={2,4,6}, {numero □ 4} = {4,5,6}. Gli eventi si presentano quindi in questo caso come sottoinsiemi di un insieme dato e questa situazione è molto frequente nelle applicazioni della probabilità.

È importante a questo proposito un'osservazione. La rappresentazione degli eventi come insiemi è un comodo strumento matematico e non un'affermazione sulla natura degli eventi: il concetto di evento ha un suo contenuto intuitivo che non può essere espresso compiutamente con una struttura matematica così articolata e precisata come una classe additiva di insiemi. Se si tiene presente ciò, e a questa struttura si dà solo il significato di strumento utile per lo studo matematico, si riduce il rischio di darle un valore assoluto e necessario, e si sdrammatizzano le polemiche sul suo uso.

Un aspetto degli eventi da prendere in considerazione è che, per poter svolgere i calcoli delle probabilità degli eventi, è necessario avere una struttura di calcolo per gli eventi stessi. La legge delle probabilità totali richiede, anche per la sola enunciazione, il concetto di unione. Inoltre per ricavarla nell'ambito soggettivo, è stato necessario introdurre la negazione di un evento. In quella occasione, anzi, si può osservare un'altra importante circostanza: non eravamo interessati all'evento C ma lo abbiamo utilizzato perché attraverso di esso siamo arrivati alla relazione tra la probabilità degli eventi A, B, A U B che interessavano. E questo nel calcolo delle probabilità succede spesso: se siamo interessa ti a certi eventi non possiamo limitarci soltanto ad essi, ma per i nostri calcoli potremmo avere bisogno di altri eventi collegati ai primi.
Appare quindi chiara l'esigenza che l'insieme degli eventi da considerare non solo sia dotato di alcune operazioni come l'unione e la negazione, ma sia anche chiuso rispetto ad esse, nel senso che se ci sono gli eventi A e B ci sia anche l'evento A U B; in altre parole che se A e B sono due eventi anche la loro unione è un evento. E così anche per la negazione.
Un insieme di oggetti con tali caratteristiche viene chiamato *algebra di Boole* .
Definiremo quindi gli eventi come sottoinsiemi di uno spazio Ω, e richiederemo che essi costituiscono una famiglia $\mathcal{A}$ non vuota, chiusa rispetto all'unione e alla negazione. Aggiungeremo la condizione che la classe $\mathcal{A}$ sia chiusa rispetto all'unione infinita. Una tale famiglia viene detta *classe additiva* (o *σ-additiva*) o *σ-algebra* , o *algebra di Boole completa* , o *tribù* .

L'ulteriore condizione aggiunta, che $\mathcal{A}$ sia chiusa rispetto all'unione infinita, è una condizione di comodo, suggerita dall'opportunità di avere una maggiore possibilità di operare sugli insiemi, e viene contestata da alcuni probabilisti perchè non deriva dall'intuizione. Vale anche qui l'osservazione già fatta a proposito degli insiemi.