Corso di Algebra per Informatica

Lezione 15: Esercizi

(1) Dimostrare che un anello booleano con almeno tre elementi non è un dominio di integrità.

(2) Consideriamo l'anello non commutativo $(a, +, \cdot) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \circ)$, dove $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc)$.

- (i) L'anello $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \circ)$ è unitario? Quanti elementi neutri destri e quanti elementi neutri sinistri contiene il semigruppo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$?
- (ii) Decidere quali sono gli elementi cancellabili e quali divisori dello zero tra i seguenti: $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$.
- (iii) Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello.
- (iv) Sia $s = \mathbb{Z} \times \{0\}$. s è una parte stabile di $(a, +, \cdot)$? Se sì, con le operazioni indotte da a, s è un anello unitario? E un dominio di integrità?
- (v) Costruire un isomorfismo di anelli tra s e $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(3) Studiare le seguenti relazioni binarie e verificare quali delle prorpietà studiate a lezione soddisfano.

- (i) Le relazioni binarie 6(i), 6(iii), 6(ix) e 6(x) degli esercizi per la Lezione 7;
- (ii) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})((m, n) \in g \longleftrightarrow ((\exists k \in \mathbb{N})(m + n = 2k)))$;
- (iii) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})((m, n) \in g \longleftrightarrow ((\exists k \in \mathbb{N})(m = kn)))$;
- (iv) $\rho = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})((m, n) \in g \longleftrightarrow m^2 \leq n^2)$;
- (v) $\rho = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})((m, n) \in g \longleftrightarrow m^2 < n^2)$;
- (vi) $\rho = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})((m, n) \in g \longleftrightarrow (m^2 < n^2 \vee m = n))$;
- (vii) $\rho = (P(\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall x, y \in P(\mathbb{N}))(x \rho y \longleftrightarrow (x \Delta y = \emptyset))$.

(4) Dimostrare che $Ker f$ è la relazione di uguaglianza su a se e solo se $f : a \to b$ è iniettiva.

(5) Dimostrare che $Ker f$ è la relazione universale su a (il grafico di $Ker f$ coincide con $a \times a$) se e solo se $f : a \to b$ è costante.