Corso di Algebra per Ingegneria
Lezione 19: Esercizi

(1) Una relazione binaria ρ su un insieme a si dice *antisimmetrica* se $(\forall x, y \in a)(x\rho y \to \neg(y\rho x))$. Dimostrare che una relazione transitiva è antisimmetrica se e solo se è antiriflessiva.

(2) Sia $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \in)$. Quali delle proprietà enunciate (riflessività, antiriflessività, simmetria, ecc.) soddisfa ρ?

(3) Disegnare i diagrammi di Hasse di $(P(P(\emptyset), \subseteq)$, di $(P(P(\emptyset), \in)$ e di $(P(P(P(\emptyset))), \subseteq)$.

(4) Verificare che $\rho^{\wedge}$ e $\rho^{\vee}$ definite a lezione sono rispettivamente di ordine stretto e largo.

(5) Sia $s = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 2 \leq n\} \cup \{-1\}$ e sia $(s, |)$ un sottoinsieme ordinato di $(\mathbb{Z}, |)$. Mostrare che $(s, |)$ è un insieme ben ordinato ma non totalmente ordinato.

(6) Trovare (se ci sono) minimo e massimo dell'insieme ordinato $(\mathbb{N}, |)$.

(7) Sia ρ la relazione binaria su $\mathbb{Z}$ così definita: $m\rho n \iff (m|n \wedge mn \geq 0)$.

- Verificare che ρ è una relazione d'ordine.
- $(\mathbb{Z}, \rho)$ è bene ordinato? E totalmente ordinato?
- Trovare, se possibile, minimo e massimo in $(\mathbb{Z}, \rho)$.
- Descrivere l'insieme degli elementi confrontabili con -1 e quello degli elementi confrontabili con 2.

(8) Sia $s = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Dimostrare che l'applicazione $n \in \mathbb{N} \mapsto 2^n \in s$ è un isomorfismo tra $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(s, \leq)$.

(9) Con la notazione dell'esercizio precedente, trovare un isomorfismo tra $(\mathbb{N}, \leq)$ and $(s, |)$.