Corso di Algebra per Ingegneria

Lezione 20: Esercizi

(1) Provare che se a è totalmente ordinato, un elemento di a è massimo se e solo se è massimale.

(2) Trovare, quando possibile, massimo, minimo, elementi massimali e minimali dei seguenti insiemi: $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$, $(P(\mathbb{Z}), \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, |)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{1\}, |)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}, |)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$, $(s, \subseteq)$ dove $s = \{x \in P(\mathbb{N}) \mid x \text{ è un singleton}\}$.

(3) Costruire, se possibile, un insieme ordinato dotato di massimo m in cui ci sia un solo elemento massimale distinto da m.

(4) Dimostrare per induzione (prima forma) che la somma dei primi n numeri naturali è $n(n-1)/2$.

(5) Dimostrare per induzione (seconda forma) che $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 12 \to (\exists a, b \in \mathbb{Z})(n = 4a + 5b))$ (Suggerimento: cominciamo notando come la proprietà sia vera per $n = 12, 13, 14, 15$ e partiamo da $n > 15$).

(6) Dimostrare per induzione (prima forma) che $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(2^{n-1} \leq n!)$

(7) Tornando alla Lezione 15, dimostrare per induzione le seguenti regole valide in un semigruppo $(S, \cdot)$.

- $(\forall m, n \in \mathbb{Z})((x^m \in S \wedge x^n \in S) \to x^m x^n = x^{m+n})$
- $(\forall m, n \in \mathbb{Z})((x^m \in S \wedge x^n \in S) \to (x^m)^n = x^{mn})$

(8) Quante scomposizioni in fattori primi ha il numero 12?