

Corso di Algebra per Informatica

Lezione 29: Esercizi

- (1) Elencare tutti gli elementi dell'insieme $[41]_5 \cap \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leq 20\}$.
- (2) Definire un'operazione binaria interna $\overline{+}$ a \mathbb{Z}_0 tale che sia possibile costruire un'isomorfismo tra $(\mathbb{Z}_0, \overline{+})$ e $(\mathbb{Z}, +)$.
- (3) Calcolare $101 \bmod 10$, $101 \% (-1)$ e $30093 \bmod 3$.
- (4) Verificare se $\mathbb{Z}_3 = \{[30]_3, [2]_3, [11]_3, [-8]_3\}$.
- (5) Verificare se $\mathbb{Z}_5 = \{[30]_5, [2]_5, [11]_5, [-8]_5, [3]_5\}$.
- (6) Calcolare $484289374098279340! \bmod 3879374$.
- (7) Sia $*$ l'operazione binaria di \mathbb{Z} definita da $(\forall a, b \in \mathbb{Z})((2 \nmid b \rightarrow a * b = a + b) \wedge (2 \mid b \rightarrow a * b = a + b/2))$. Dimostrare che \equiv_2 non è una congruenza rispetto a $*$.
- (8) Sia $*$ l'operazione binaria di \mathbb{Z} definita da $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a * b = 2ab)$. Dimostrare che \equiv_2 è una congruenza rispetto a $*$.
- (9) Sia $*$ l'operazione binaria di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z})((a, b) * (c, d) = (a + b, c + d))$ e sia \sim una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z})((a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow (2 \mid ab - cd))$. Dimostrare che \sim è una relazione di equivalenza che non è una congruenza rispetto a $*$.
- (10) La relazione di equivalenza \sim in $P(\mathbb{Z})$ definita da $(\forall x, y \in P(\mathbb{Z}))(x \sim y \leftrightarrow x \cap \mathbb{N} = y \cap \mathbb{N})$ è una congruenza in $(P(\mathbb{N}), \cap, \cup)$? E quella definita da $(\forall x, y \in P(\mathbb{Z}))(x \sim y \leftrightarrow x \cup \mathbb{N} = y \cup \mathbb{N})$?
- (11) Elencare i divisori dello zero e gli invertibili di \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_8 e \mathbb{Z}_9 .