

Corso di Algebra per Informatica

Lezione 10: Esercizi

(1) Studiare le seguenti operazioni binarie, stabilendo per ciascuna di esse se è commutativa, se è associativa e se è dotata di elementi neutri a sinistra, a destra o neutri:

- $\alpha : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto x + y + 1 \in \mathbb{Z};$
- $\beta : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto -xy \in \mathbb{Z};$
- $\gamma : (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto (x + y)/2 \in \mathbb{Q};$
- $\delta : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto 2xy \in \mathbb{Z};$
- $\varepsilon : (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto 2xy \in \mathbb{Q};$
- $\zeta : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x10^y \in \mathbb{N};$
- $\eta : (x, y) \in P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \mapsto x \cup y \cup \{1\} \in P(\mathbb{Z});$
- $\theta : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x(y^x + 3xy^2) + 1 \in \mathbb{N}.$

(2) Studiare associatività, commutatività ed elementi neutri della struttura $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, /)$, dove l'operazione $/$ è la divisione in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ovvero $(\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(/(a, b) = a/b)$.

(3) Trovare un'operazione binaria su \mathbb{Z} per la quale esista un unico elemento neutro sinistro e nessun elemento neutro destro.

(4) Sia (S, α) una struttura algebrica e sia $\bar{\alpha}$ l'operazione opposta di α . Dimostrare le seguenti:

- (i) $\alpha = \bar{\alpha}$ se e solo se α è commutativa;
- (ii) α è l'operazione opposta di $\bar{\alpha}$;
- (iii) $\bar{\alpha}$ è associativa se e solo se lo è α ;
- (iv) per ogni elemento $x \in S$, x è neutro a sinistra in (S, α) se e solo se x è neutro a destra in $(S, \bar{\alpha})$;
- (v) per ogni elemento $x \in S$, x è neutro a destra in (S, α) se e solo se x è neutro a sinistra in $(S, \bar{\alpha})$;
- (vi) la funzione $\bar{} : \alpha \in \text{Map}(s \times s, s) \mapsto \bar{\alpha} \in \text{Map}(s \times s, s)$ è biettiva.