

# Corso di Algebra per Ingegneria

## Lezione 17: Esercizi

- (1) Dimostrare che  $\text{Ker} f$  è la relazione di uguaglianza su  $a$  se e solo se  $f : a \rightarrow b$  è iniettiva;
- (2) Dimostrare che  $\text{Ker} f$  è la relazione universale su  $a$  (il grafico di  $\text{Ker} f$  coincide con  $a \times a$ ) se e solo se  $f : a \rightarrow b$  è costante;
- (3) Elencare tutti gli elementi di  $[0]_{\text{Ker} f}$  dove  $f$  è una delle seguenti funzioni
  - (i)  $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n + 1 \in \mathbb{Z}$ ;
  - (ii)  $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$ ;
  - (iii)
$$f : n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \in \mathbb{Z}$$
- (4) Scrivere esplicitamente  $\mathbb{Z}/\text{Ker} f$  dove  $f$  è una delle funzioni definite all'esercizio 3.
- (5) Detta  $f : x \in P(\mathbb{Z}) \mapsto x \cap \mathbb{N} \in P(\mathbb{N})$ , descrivere  $[\{-1\}]_{\text{Ker} f}$ ,  $[\{0\}]_{\text{Ker} f}$  e  $[\emptyset]_{\text{Ker} f}$ .
- (6) Data  $f : n \in \mathbb{N} \mapsto \{n\} \in P(\mathbb{N})$ , descrivere  $\text{Ker} f$ .
- (7) Data  $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto (-1)^n \in \mathbb{Z}$ , descrivere  $\text{Ker} f$ .
- (8) Sia  $G$  un gruppo abeliano con elemento neutro  $u$  e sia  $f : x \in G \mapsto x^{-1} \in G$ . Mostrare che  $\text{Ker} f$  è la relazione di uguaglianza su  $G$ .