

Corso di Algebra per Informatica

Lezione 07: Esercizi

(1) Scrivere esplicitamente $\{0, 1\} \times \{0, 2\}$, $\{0, 2\} \times \{0, 1\}$ e $(\{0, 1\} \times \{0, 2\}) \cap (\{0, 2\} \times \{0, 1\})$.

(2) \times è commutativa? E associativa?

(3) Se a e b sono due insiemi, quando è vero che $a \times b = \emptyset$?

(4) È vero che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? E

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(5) Scrivere esplicitamente il grafico della corrispondenza ρ da \mathbb{N} ad \mathbb{N} così definita: $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \rho n \iff (m + 1 \leq n \wedge n^2 \leq 5))$. ρ è un'applicazione?

(6) Verificare se le seguenti corrispondenze sono funzioni (se a è un insieme, qui indichiamo con $P_n(a)$ l'insieme delle parti di a che hanno esattamente n elementi (dette anche le n -parti di a)):

(i) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \rho n \iff ((m + 1 \leq n) \wedge (n^2 \leq 5)))$;

(ii) $\rho = (\mathbb{N} \times P(\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall m, p)(m \in \mathbb{N} \wedge p \in P(\mathbb{N}) \wedge (m \rho p \iff p = \{m\}))$;

(iii) $\rho = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n) \in g \iff m + n \in \mathbb{N}$;

(iv) $\rho = ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l, m, n \in \mathbb{N})((l, m, n) \in g \iff l + m = n)$;

(v) $\rho = ((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l, m, n \in \mathbb{N})((l, m, n) \in g \iff l + m = n)$;

(vi) $\rho = ((\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l \in \mathbb{Z})(\forall m, n \in \mathbb{N})((l, m) \rho n \iff l + m = n)$;

(vii) $\rho = ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall l, m, n \in \mathbb{N})((l, m, n) \in g \iff l^m = n)$;

(viii) $\rho = (P_2(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}, g)$, dove $(\forall \{a, b\} \in P_2(\mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((\{a, b\}, n) \in g \iff a^b = n))$;

(ix) $\rho = (P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall x, y \in P(\mathbb{N}))(x \rho y \iff y = \mathbb{N} \setminus x)$;

(x) $\rho = (P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}), g)$, dove $(\forall x, y \in P(\mathbb{N}))(x \rho y \iff y = x \Delta \mathbb{N})$.

(7) Sia ρ_x la corrispondenza definita all'esercizio 6(x). Descrivere $\rho_{iii}^2, \rho_{ix}^2, \rho_x^2, \rho_i \rho_{viii}, \rho_{ii} \rho_{ix}, \rho_{iii} \rho_{ii}$.

(8) Siano a e b due insiemi. In che caso $(a \times b, \emptyset)$ è una funzione?