Corso di Algebra per Informatica

Lezione 16: Esercizi

(1) Elencare tutti gli elementi di $[0]_{Kerf}$ dove f è una delle seguenti funzioni

(i) $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n+1 \in \mathbb{Z}$;

(ii) $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$;

(iii)
$$f : n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \in \mathbb{Z}$$

(2) Scrivere esplcitamente $\mathbb{Z}/Kerf$ dove f è una delle funzioni definite all'esercizio 1.

(3) Detta $f : x \in P(\mathbb{Z}) \mapsto x \cap \mathbb{N} \in P(\mathbb{N})$, descrivere $[\{-1\}]_{Kerf}$, $[\{0\}]_{Kerf}$ e $[\emptyset]_{Kerf}$.

(4) Data $f : n \in \mathbb{N} \mapsto \{n\} \in P(\mathbb{N})$, descrivere $Kerf$.

(5) Data $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto (-1)^n \in \mathbb{Z}$, descrivere $Kerf$.

(6) Sia G un gruppo abeliano con elemento neutro u e sia $f : x \in G \mapsto x^{-1} \in G$. Mostrare che $Kerf$ è la relazione di uguaglianza su G.

(7) Utilizzando il teorema fondamentale di omomorfismo per insiemi scrivere la funzione $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2 \in \mathbb{Z}$ come composizione di una funzione iniettiva e di una suriettiva.

(8) Trovare, se possibile, un insieme a e una relazione di equivalenza su a tale che $a/\sim$ non sia una partizione di a.

(9) Scrivere tutte le partizioni dell'insieme $\{0, 1, 2\}$.

(10) Scriviamo $\mathbb{Z} = p \cup d$ dove p è l'insieme dei numeri interi pari e d è quello dei numeri interi dispari. Trovare una funzione f tale che $\mathbb{Z}/Kerf = \{p, d\}$.

(11) Trovare, se possibile, due diverse relazioni di equivalenza $\sim_1$ e $\sim_2$ tali che $\mathbb{Z}/\sim_1 = \{p, d\} = \mathbb{Z}/\sim_2$ con le notazioni dell'esercizio precedente.

(12) Quante relazioni di equivalenza è possibile definire su $P(\emptyset)$?

(13) Siano a, b, c, d insiemi a due a due distinti. Determinare tutte le relazioni di equivalenza $\sim$ dell'insieme $\{a, b, c, d\}$ tali che $[a]_\sim = [b]_\sim = [c]_\sim$ e tutte quelle tali che $[a]_\sim = [b]_\sim$.

(14) Sia $a = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 7\}$. Determinare tutte le relazioni di equivalenza $\rho = (a \times a, g)$ tali che $0\rho7$, $(1, 4) \in g$, $\{3, 4, 5, 7\} \subseteq [2]_\rho$ e $0\rho6$.