

Corso di Algebra per Ingegneria

Lezione 22: Esercizi

- (1) Siano a , b e c insiemi tali che $|a| = 2$, $|b| = 4$ e $|c| = 6$. Quante sono le applicazioni iniettive da c ad a ? E quelle suriettive? E quelle suriettive da c a b ?
- (2) Quante sono le applicazioni costanti da un insieme di ordine 100 ad uno di ordine 1004?

Sia s un insieme e t un sottoinsieme di s . La seguente applicazione

$$\chi_{t,s} : x \in s \mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin t \\ 1, & \text{se } x \in t \end{cases} \in \{0, 1\}$$

viene detta *funzione caratteristica* di t in s .

- (3) Rappresentare la funzione caratteristica dell'insieme $\{0, 4\}$ nell'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 20\}$
- (4) Sia $f : n \in \mathbb{N} \mapsto ((-1)^{n+1} + 1)/2 \in \{0, 1\}$. Di quale sottoinsieme di \mathbb{N} è funzione caratteristica f ?
- (5) Scrivere esplicitamente la funzione caratteristica in \mathbb{N} del sottoinsieme $\{n \in \mathbb{N} \mid 3|n\}$.
- (6) Calcolare $\binom{7}{3}$ usando il triangolo di Tartaglia-Pascal e $\binom{7}{4}$ senza usarlo.
- (7) Sia $a = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9\}$
- Qual è la cardinalità di $P_{11}(a)$?
 - Qual è la cardinalità di $P_{10}(a)$?
 - Quante sono le 3-parti di a ?
 - Qual è la cardinalità di $P_7(a)$?
 - Quanti sono i sottoinsiemi di a che contengono 0 e altri tre elementi distinti di a ?
- (8) Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\binom{n}{2}$. Confrontare il risultato con l'Esercizio 4 della Lezione 20
- (9) (Teorema binomiale o Formula di Newton) Sia s è un anello unitario e $a, b \in s$ tali che $ab = ba$. Dimostrare per induzione (prima forma) che

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$