Corso di Algebra per Ingegneria

Lezione 14: Esercizi

(1) È vero che l'insieme degli elementi cancellabili a sinistra è una parte chiusa di ogni gruppo abeliano?

(2) $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo ciclico?

(3) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un gruppo?

(4) Sia $a = \{w, x, y, z\}$ un insieme di quattro elementi, sia $f \in Sym(a)$ tale che $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$ e $f(d) = a$ e sia $S = \{f^4, f, f^2, f^3\}$. Mostrare che $(S, \circ)$ è un sottogruppo abeliano di $(Sym(a), \circ)$. Dimostrare che $(S, *)$ è un gruppo abeliano.

(5) Sia $*$ un'operazione associativa su un insieme S. Allora $\sigma_{a*b} = \sigma_a \circ \sigma_b$ e $\delta_{a*b} = \delta_b \circ \delta_a$.

(6) Dimostrare che l'insieme degli elementi cancellabili a sinistra è una parte chiusa di ogni monoide e che lo stesso vale per l'insieme degli elementi cancellabili a destra. (Suggerimento: usare l'Esercizio 5).

(7) Scrivere le tavole di Cayley di $U(\mathbb{Z}, \cdot)$, di $(P(P(\emptyset)), \Delta)$ e di $Sym(\{0,1\}, \circ)$ e confrontarle.

(8) Scrivere le tavole di Cayley di $(P(\{0,1\}), \cap)$ e di $(P(\{0,1\}), \cup)$ e confrontarle.

(9) Sia $S = \{u, x, y\}$ un insieme di tre elementi e sia $*$ l'operazione in S definita dalla seguente tavola di Cayley

*	u	x	y
u	u	x	y
x	x	u	x
y	y	y	u

Determinare l'elemento neutro di $(S, *)$, i simmetrici destri e sinistri e con queste sole informazioni dimostrare che la struttura non può essere un monoide.

(10) Sia $S = \{u, x, y\}$ un insieme di tre elementi e sia $*$ l'operazione in S definita dalla seguente tavola di Cayley

*	u	x	y
u	u	x	y
x	x	y	u
y	y	u	x

Mostrare che $(S, *)$ è un gruppo ciclico (abeliano) diverso da $(\mathbb{Z}, +)$

(11) Sia $S = \{u, x, y, z\}$ un insieme di quattro elementi e sia $*$ l'operazione in S definita dalla seguente tavola di Cayley

*	u	x	y	z
u	u	x	y	z
x	x	u	z	y
y	y	z	u	x
z	z	y	x	u

Dimostrare che $(S, *)$ è un gruppo abeliano non ciclico. ($(S, *)$ viene detto "gruppo di Klein").

(12) Sia $S = \{u, x, y, z\}$ un insieme di quattro elementi e sia $*$ l'operazione in S definita dalla seguente tavola di Cayley

*	u	x	y	z
u	u	x	y	z
x	x	y	z	u
y	y	z	u	x
z	z	u	x	y

Dimostrare che $(S, *)$ è un gruppo ciclico.