Corso di Algebra per Ingegneria

Lezione 11: Esercizi

(1) Studiare le seguenti operazioni binarie, stabilendo per ciascuna di esse se è commutativa, se è associativa e se è dotata di elementi neutri a sinistra, a destra o neutri:

- $\alpha : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto x + y + 1 \in \mathbb{Z}$;
- $\beta : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto -xy \in \mathbb{Z}$;
- $\gamma : (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto (x + y)/2 \in \mathbb{Q}$;
- $\delta : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto 2xy \in \mathbb{Z}$;
- $\varepsilon : (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto 2xy \in \mathbb{Q}$;
- $\zeta : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x10^y \in \mathbb{N}$;
- $\eta : (x, y) \in P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \mapsto x \cup y \cup \{1\} \in P(\mathbb{Z})$;
- $\theta : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x(y^x + 3xy^2) + 1 \in \mathbb{N}$;

(2) Studiare associatività, commutatività ed elementi neutri della struttura $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, /)$, dove l'operazione $/$ è la divisione in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ovvero $(\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})(/(a, b) = a/b)$;

(3) Trovare un'operazione binaria su $\mathbb{Z}$ per la quale esista un unico elemento neutro sinistro e nessun elemento neutro destro.

Sia (s, α) una struttura algebrica ad una operazione binaria. L'operazione $\overline{\alpha} : (x, y) \in s \times s \mapsto \alpha(y, x) \in s$ si dice *operazione opposta* ad α.

---

(4) Sia (S, α) una struttura algebrica e sia α^* l'operazione opposta di α. Dimostrare le seguenti:

(i) $\alpha = \overline{\alpha}$ se e solo se α è commutativa

(ii) α è l'operazione opposta di $\overline{\alpha}$;

(iii) $\overline{\alpha}$ è associativa se e solo se lo è α;

(iv) per ogni elemento $x \in S$, x è neutro a sinistra in (S, α) se e solo se x è neutro a destra in $(S, \overline{\alpha})$;

(v) per ogni elemento $x \in S$, x è neutro a destra in (S, α) se e solo se x è neutro a sinistra in $(S, \overline{\alpha})$;