Corso di Algebra per Informatica

Lezione 18: Esercizi

(1) Trovare l'insieme di tutti gli elementi di che coprono 0, 1 o 2 nei seguenti insiemi ordinati: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$.

(2) Sia s un insieme. Descrivere l'insieme $Minor_{(P(s),\subseteq)}(\emptyset)$.

(3) Se (s, ρ) è un insieme ordinato, dimostrare che $inf_{(s,\rho)}(\{a\}) = a$ per ogni $a \in s$. Dimostrare inoltre che $(\forall x, y \in s)(x\rho y \rightarrow ((x \wedge y = x) \wedge (x \vee y = y)))$

(4) Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \leq)$ è un reticolo non completo.

(5) Trovare il più piccolo esempio di insieme ordinato che non è un reticolo

(6) Verificare se i seguenti sottoinsiemi di $(\mathbb{N}, |)$ sono reticoli completi (relativamente all'ordine indotto da $(\mathbb{N}, |)$):

  (a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
  (b) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  (c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n|2048\}$
  (d) $\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(n = 2k)\}$.

(7) Sia ρ una relazione binaria su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ così definita

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{N})((a, b)\rho(c, d) \leftrightarrow (a \leq c \wedge b|d)).$$

  (a) Verificare che ρ è un ordine largo su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
  (b) Trovare massimi, minimi, elementi massimali e minimali di $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \rho)$
  (c) Detto $s = \{(2, 14), (5, 21)\}$, trovare, se possibile, estremi inferiore e superiore di X in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \rho)$;
  (d) Trovare una parte totalmente ordinata di $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \rho)$;
  (e) Detto $t = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 60), (2, 0), (2, 5)\}$ e detta σ la restrizione di ρ a t, disegnare il diagramma di Hasse di (t, σ) e verificare se si tratta di un reticolo.

(8) Sia $s = \{1, 3, 4, 12, 30, 31\}$ e sia ρ la relazione duale di $|$. Trovare, se possibile, massimo, minimo, elementi massimali e minimali di (s, ρ)

(9) Sia s un insieme e sia t una parte non vuota di $P(s)$. Dimostrare che $sup(t)_{(P(S),\subseteq)} = \bigcup t$ e che $inf_{(P(S),\subseteq)}(t) = \bigcap t$.