

Raízes de funções

Raízes de funções

Como resolver a equação abaixo?

$$x^2 - 64 \cdot x + 448 = 0$$

Raízes de funções

Como resolver a equação abaixo?

$$x^2 - 64 \cdot x + 448 = 0$$

Solução: fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

Raízes de funções

Como resolver a equação abaixo sem utilizar a fórmula de Bhaskara?

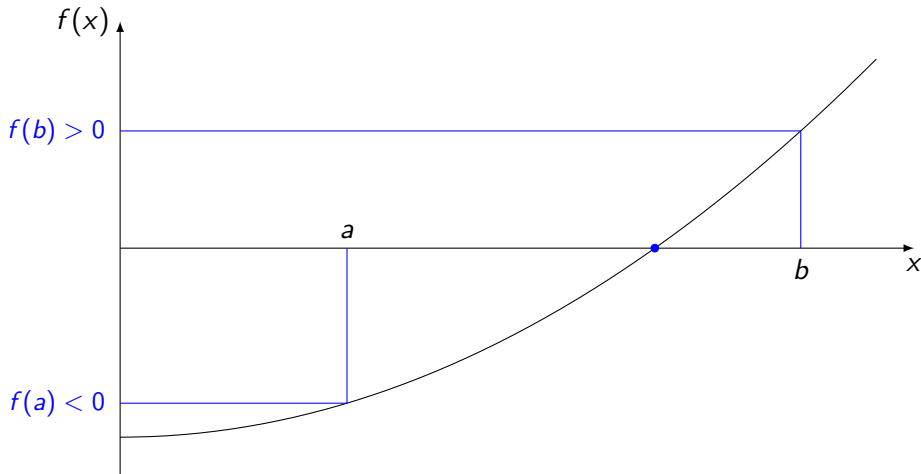
$$x^2 - 64 \cdot x + 448 = 0$$

Método da bissecção

Quantas tentativas são necessárias para descobrir um número inteiro escolhido aleatoriamente entre 0 e 1000?

Método da bissecção

Se $f(x)$ é uma função contínua e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então $f(x)$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[a; b]$.



Método da bissecção

1. Calcule ponto médio m do intervalo $[a; b]$.

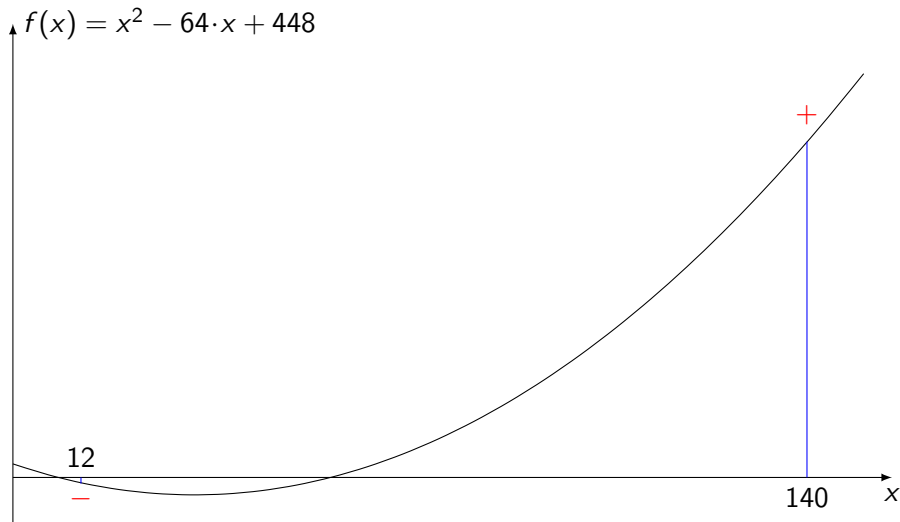
$$m = \frac{a + b}{2}$$

2. Calcule o valor de $f(m)$.
 - 2.1 Se $f(m) = 0$, então a raiz é igual a m . Pare os cálculos.
 - 2.2 Se $f(m)$ tiver sinal oposto a $f(a)$, então a raiz está no intervalo $[a, m]$, ou seja, à esquerda de m .
 - 2.3 Se $f(m)$ tiver sinal oposto a $f(b)$, então a raiz está no intervalo $[m, b]$, ou seja, à direita de m .
3. Repita o procedimento com o subintervalo que contém a raiz.

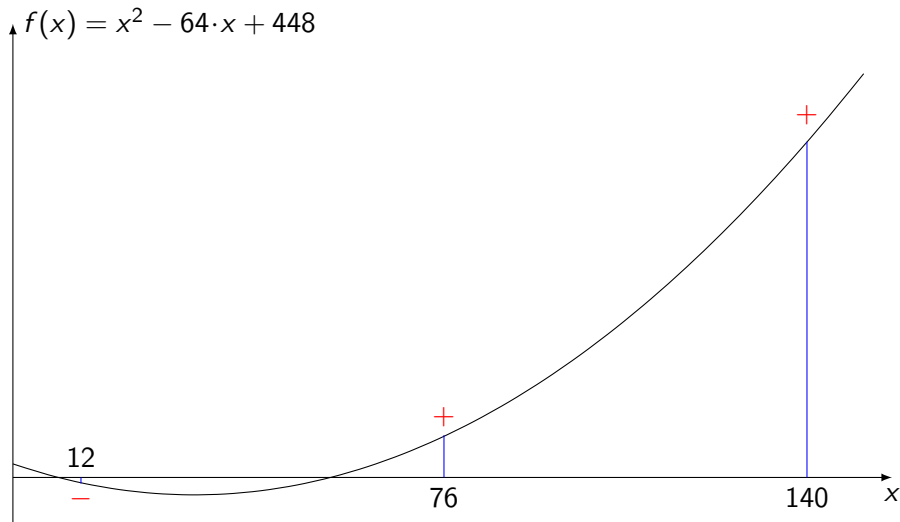
Exercício

Sabendo que a função $f(x) = x^2 - 64 \cdot x + 448$ possui uma raiz real no intervalo $[12; 140]$, encontre esta raiz pelo método da bissecção.

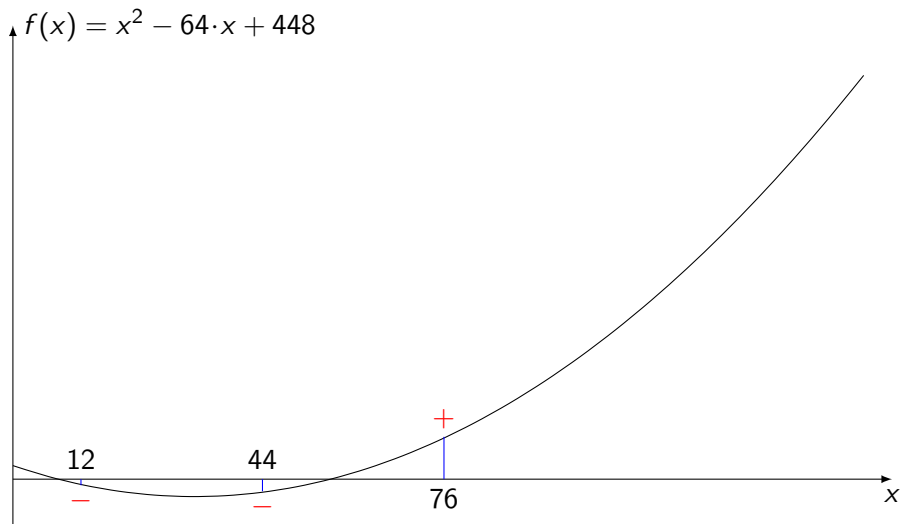
Resolução do exercício – intervalo inicial



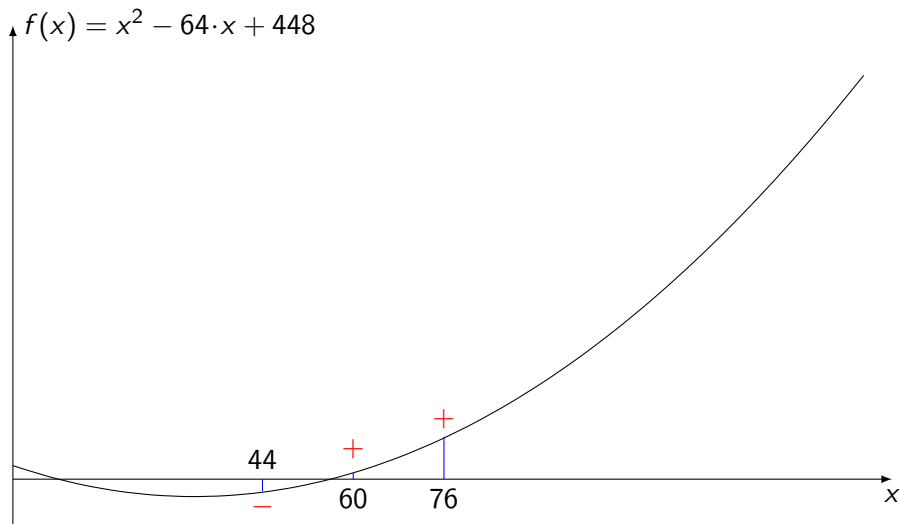
Resolução do exercício – 1ª iteração



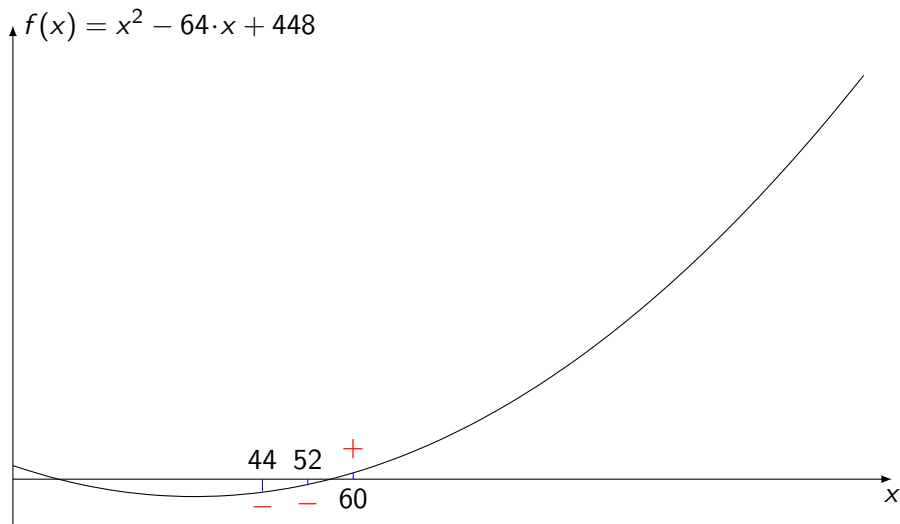
Resolução do exercício – 2ª iteração



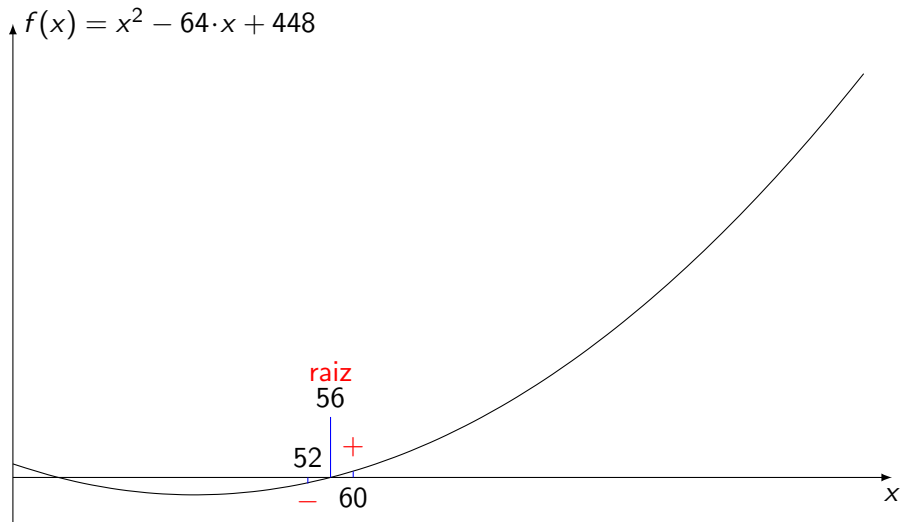
Resolução do exercício – 3ª iteração



Resolução do exercício – 4ª iteração



Resolução do exercício – 5ª iteração



Resolução do exercício – resumo

Sabendo que a função $f(x) = x^2 - 64 \cdot x + 448$ possui uma raiz real no intervalo $[12; 140]$, encontre esta raiz pelo método da bissecção.

$$f(12) = 12^2 - 64 \cdot 12 + 448 = -176$$

$$f(140) = 140^2 - 64 \cdot 140 + 448 = +11088$$

Iteração	a	m	b	$f(m)$
1	12 −	76 +	140 +	+1360
2	12 −	44 −	76 +	−432
3	44 −	60 +	76 +	+208
4	44 −	52 −	60 +	−176
5	52 −	56 raiz	60 +	0

Exercício

Sabendo que a função $f(x) = x - \cos x$ possui uma raiz real no intervalo $[0; 1]$, encontre esta raiz pelo método da bissecção (calcule até a 5ª iteração).

Resolução do exercício

Sabendo que a função $f(x) = x - \cos x$ possui uma raiz real no intervalo $[0; 1]$, encontre esta raiz pelo método da bissecção (calcule até a 5ª iteração).

$$f(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 1 - 0,540302306 = 0,459697694$$

Iteração	a	m	b	$f(m)$
1	0 -	0,5 -	1 +	-0,377582562
2	0,5 -	0,75 -	1 +	+0,018311131
3	0,5 -	0,625 +	0,75 +	-0,185963119
4	0,625 -	0,6875 -	0,75 +	-0,085334946
5	0,6875 -	0,71875 -	0,75 +	-0,033879372

Exercício

Escreva um programa que encontre a raiz da função $f(x) = \sin x - \ln x$, utilizando o método da bissecção a partir do intervalo $[1; 5]$. Utilize $|f(m)| < 0,001$ como condição de parada.

Implementação computacional do método da bissecção

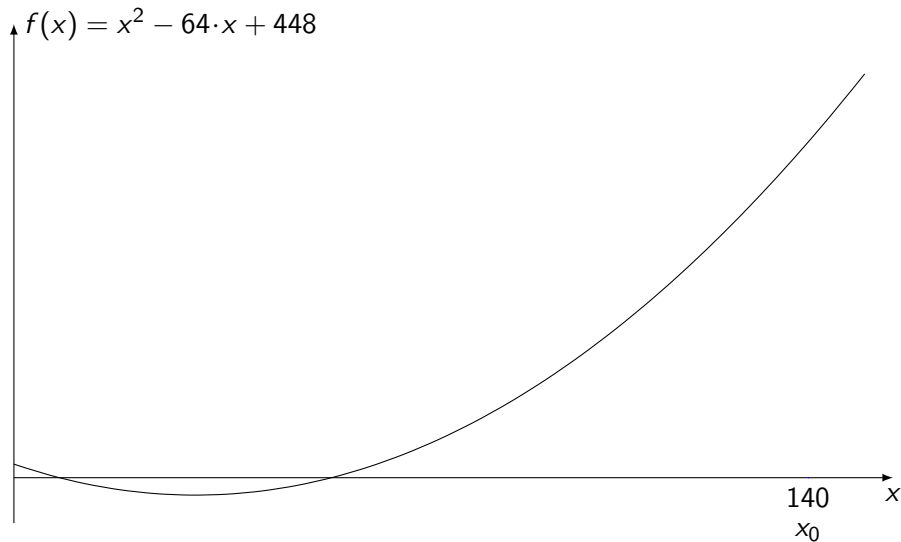
```
1  double f(double x){
2      return sin(x)-log(x);
3  }
4
5  int main(){
6      double a, b, m, fm;
7      a = 1;
8      b = 5;
9      while(1){
10         m = (a+b)/2;
11         fm = f(m);
12         if(fabs(fm) < 0.001){
13             printf("%lf\n", m);
14             return 0;
15         }
16         if(fm*f(a) > 0){
17             a = m;
18         }else{
19             b = m;
20         }
21     }
22 }
```

Método de Newton-Raphson

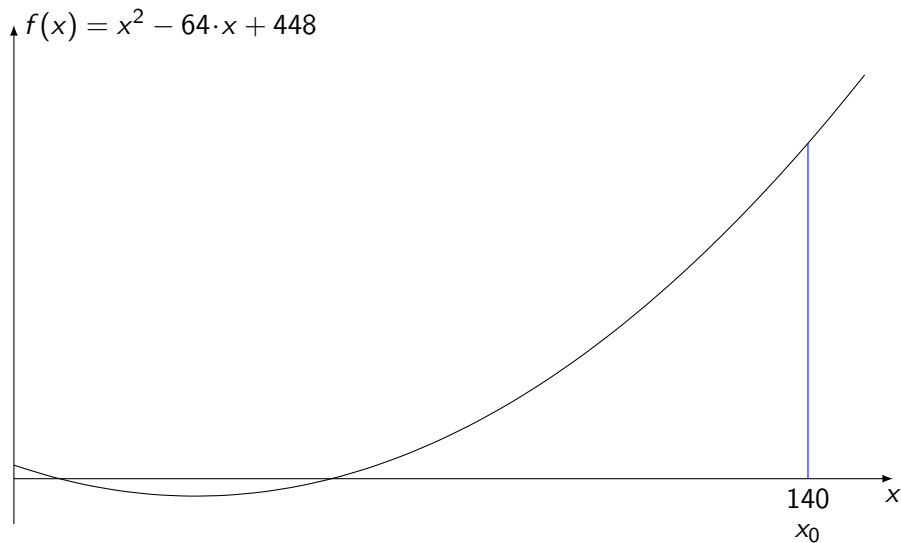
Exercício

Encontre esta raiz da função $f(x) = x^2 - 64 \cdot x + 448$ pelo método de Newton, utilizando $x = 140$ como valor inicial.

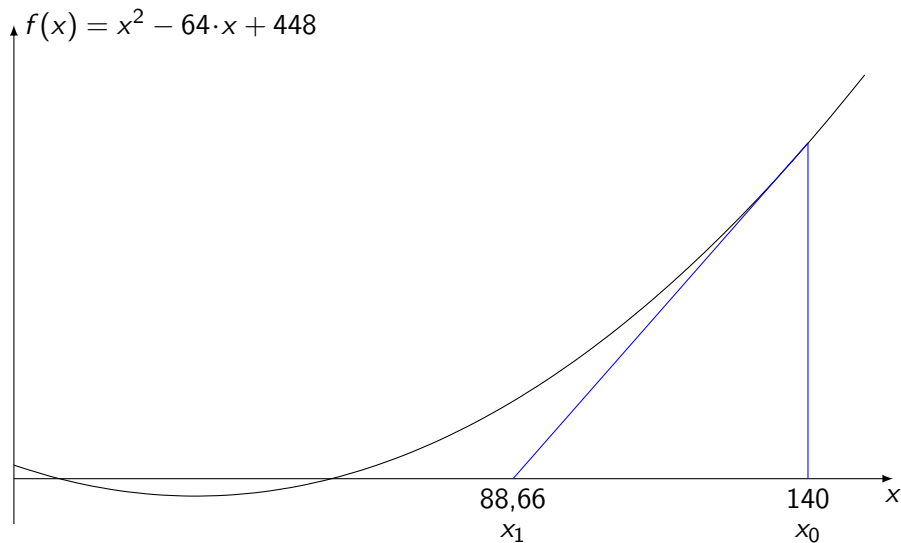
Resolução do exercício – valor inicial



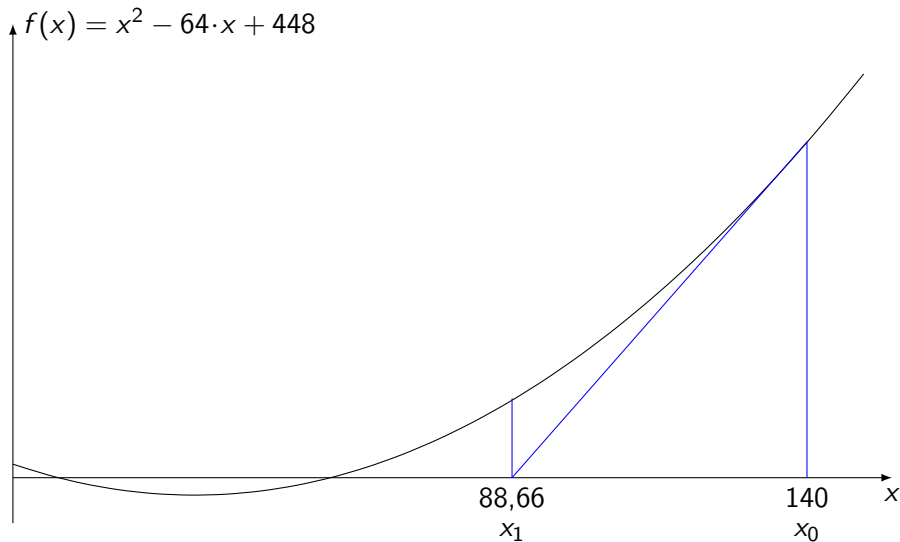
Resolução do exercício – valor inicial



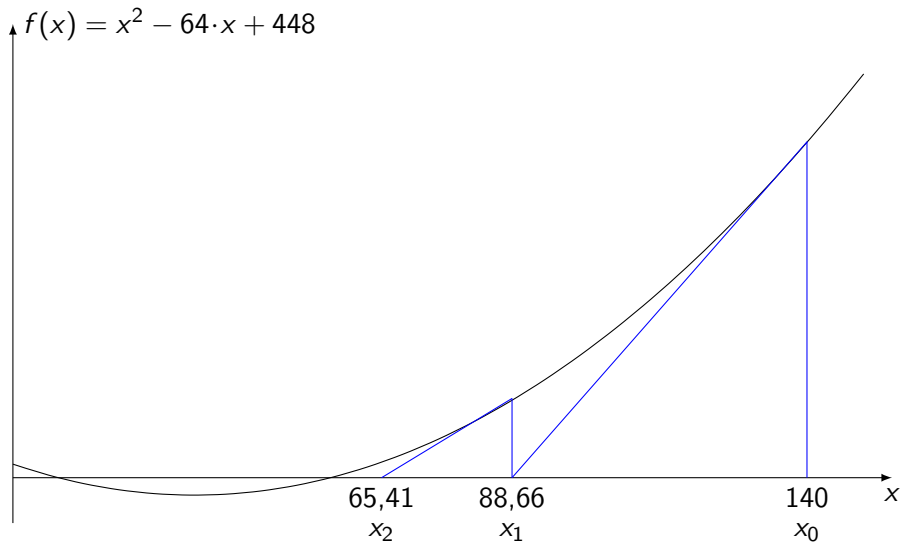
Resolução do exercício – 1ª iteração



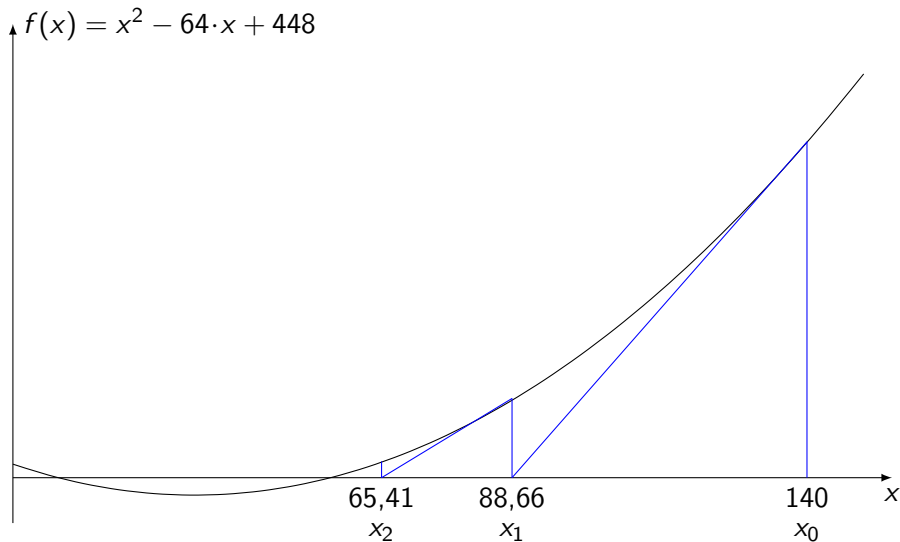
Resolução do exercício – 1ª iteração



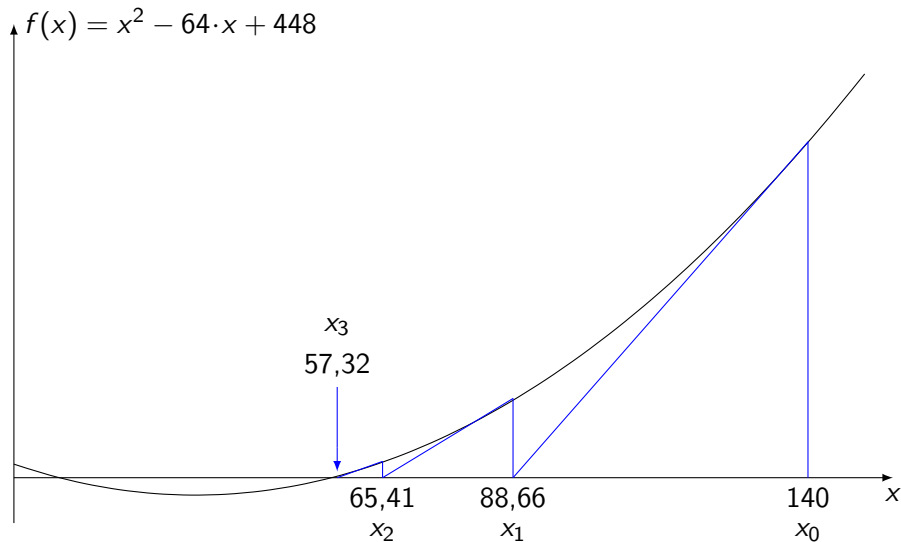
Resolução do exercício – 2ª iteração



Resolução do exercício – 2ª iteração



Resolução do exercício – 3ª iteração



Método de Newton-Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Exercício

Encontre esta raiz da função $f(x) = x^2 - 64 \cdot x + 448$ pelo método de Newton, utilizando $x = 140$ como valor inicial (calcule até a 5ª iteração).

Exercício – resolução

Encontre esta raiz da função $f(x) = x^2 - 64 \cdot x + 448$ pelo método de Newton, utilizando $x = 140$ como valor inicial (calcule até a 5ª iteração).

A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 2 \cdot x - 64$.

Iteração	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	140	11088	216
1	88,66666667	2635,111111	113,3333333
2	65,41568627	540,6080892	66,83137255
3	57,32654986	65,4341279	50,65309972
4	56,03474091	1,66877038	48,06948181
5	56,00002511	0,001205187	48,00005022

Exercício

Encontre esta raiz da função $f(x) = x - \cos x$ pelo método de Newton, utilizando $x = 0$ como valor inicial (calcule até a 5ª iteração).

Exercício

Escreva um programa que encontre a raiz da função $f(x) = x - \cos x$ pelo método de Newton, utilizando $x = 0$ como valor inicial. Utilize $|f(m)| < 0,001$ como condição de parada.