

Diferenciação Numérica (ou Derivação Numérica)

Com as regras do cálculo diferencial

Qual é a função derivada da função $f(x) = x^3$?

Aplicando as regras do cálculo diferencial, obtemos $f'(x) = 3x^2$

Qual é a derivada desta função $f(x)$ no ponto $x = 5$?

$$f'(5) = 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$$

Sem as regras do cálculo diferencial

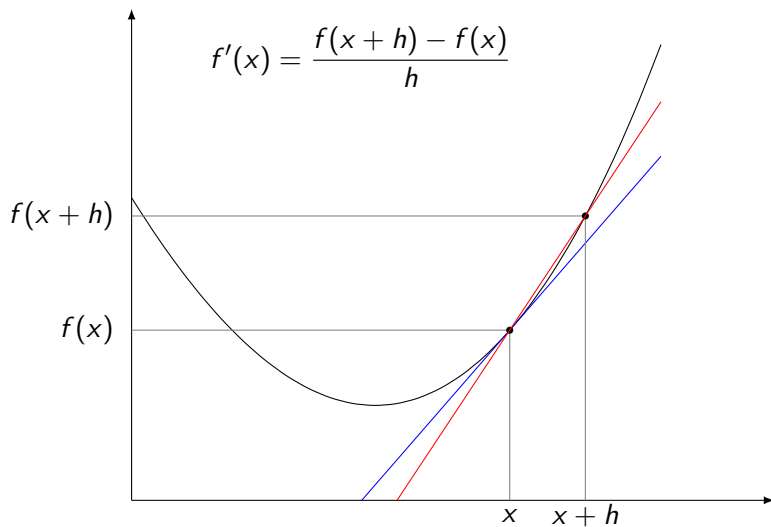
Como calcular a derivada de uma função sem utilizar as regras do cálculo diferencial?

Partimos da definição de derivada.

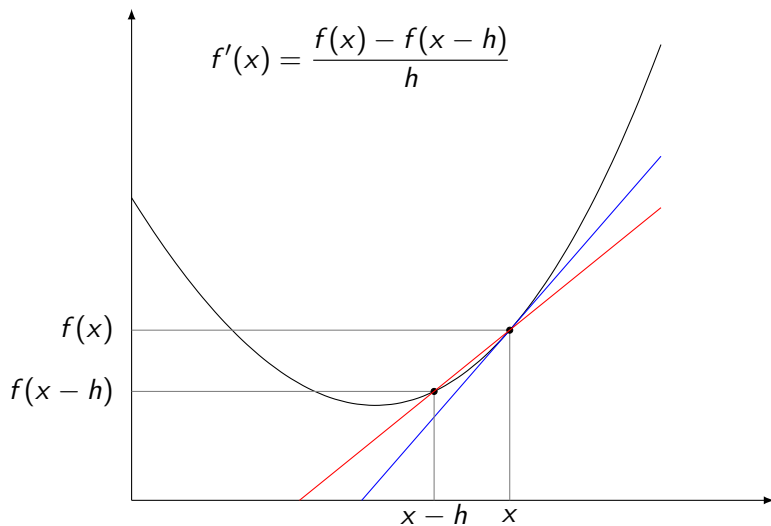
Dada uma função contínua e suave $f(x)$, a sua derivada $f'(x)$ é definida como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

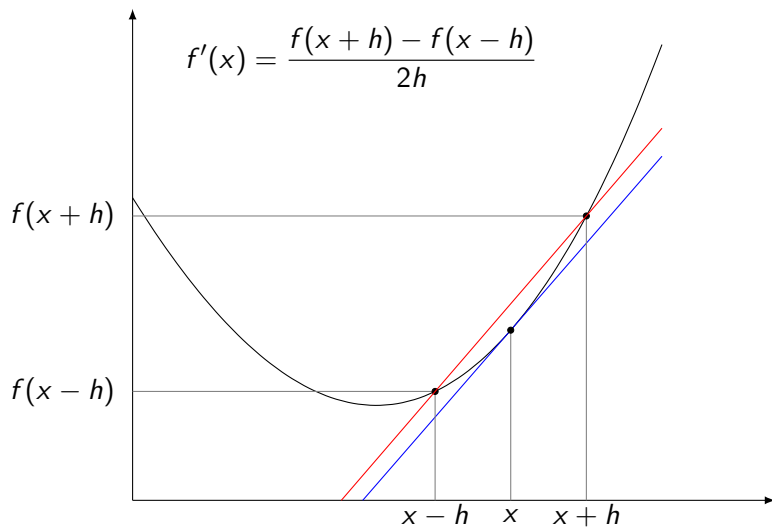
Diferença progressiva



Diferença regressiva



Diferença central



Resumindo

Método	Fórmula	Erro
Analítico	Regras de derivação	não há erro
Diferença progressiva	$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$O(h)$
Diferença regressiva	$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$	$O(h)$
Diferença central	$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$O(h^2)$

Exercício

Calcule a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto $x = 5$, utilizando os métodos numéricos (diferença progressiva, diferença regressiva e diferença central) para $h = 0,1$.

Resolução do exercício

Diferença progressiva

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(5+0,1) - f(5)}{0,1} = \frac{5,1^3 - 5^3}{0,1} \\&= \frac{132,651 - 125}{0,1} = \frac{7,651}{0,1} = 76,51\end{aligned}$$

Diferença regressiva

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(5) - f(5-0,1)}{0,1} = \frac{5^3 - 4,9^3}{0,1} \\&= \frac{117,649 - 125}{0,1} = \frac{7,351}{0,1} = 73,51\end{aligned}$$

Diferença central

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(5+0,1) - f(5-0,1)}{2 \cdot 0,1} = \frac{5,1^3 - 4,9^3}{0,2} \\&= \frac{132,651 - 125}{0,2} = \frac{15,002}{0,2} = 75,01\end{aligned}$$

Exercício

Calcule a derivada da função $f(x) = \sin x$ no ponto $x = 1$, utilizando o método analítico e os métodos numéricos (diferença progressiva e diferença central) para $h = 0,1$ e $h = 0,01$. Calcule os erros associados a cada resultado dos métodos numéricos.

► Método analítico

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x = 0,540\,302\,306$$

► Diferença progressiva ($h = 0,1$)

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(1+0,1)-f(1)}{0,1} = \frac{\sin(1,1)-\sin(1)}{0,1}$$

$$f'(x) = \frac{0,891\,207\,360 - 0,841\,470\,985}{0,1} = 0,497\,363\,753$$

$$\text{erro} = 0,497\,363\,753 - 0,540\,302\,306 = -0,042\,938\,553$$

► Diferença progressiva ($h = 0,01$)

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(1+0,01)-f(1)}{0,01} = \frac{\sin(1,01)-\sin(1)}{0,01}$$

$$f'(x) = \frac{0,846\,831\,845 - 0,841\,470\,985}{0,01} = 0,536\,085\,981$$

$$\text{erro} = 0,536\,085\,981 - 0,540\,302\,306 = -0,004\,216\,325$$

► Diferença central ($h = 0,1$)

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(1+0,1)-f(1-0,1)}{2 \times 0,1} = \frac{\text{sen}(1,1)-\text{sen}(0,9)}{0,2}$$

$$f'(x) = \frac{0,891\,207\,360 - 0,783\,326\,910}{0,2} = 0,539\,402\,252$$

$$\text{erro} = 0,539\,402\,252 - 0,540\,302\,306 = -0,000\,900\,054$$

► Diferença central ($h = 0,01$)

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(1+0,01)-f(1-0,01)}{2 \times 0,01} = \frac{\text{sen}(1,01)-\text{sen}(0,99)}{0,02}$$

$$f'(x) = \frac{0,846\,831\,845 - 0,836\,025\,979}{0,02} = 0,540\,293\,301$$

$$\text{erro} = 0,540\,293\,301 - 0,540\,302\,306 = -0,000\,009\,005$$

Resumo dos erros:

h	progressiva	central
0,1	-0,042 938 553	-0,000 900 054
0,01	-0,004 216 325	-0,000 009 005