Árvores

Introdução

- Como visto, listas podem ser convenientemente definidas da seguinte forma: Uma lista do tipo **T** é
  - Uma lista (estrutura) vazia ou
  - Uma concatenação (cadeia) de um elemento do tipo **T** com uma lista cujo tipo básico também seja **T**
- Nota-se que a recursão é utilizada como ferramenta de definição
- Um árvore é uma estrutura sofisticada cuja definição por meio de recursão é elegante e eficaz
- Uma árvore, com tipo **T**, pode ser definida recursivamente da seguinte forma:
  - Uma árvore (estrutura) vazia ou
  - Um nó do tipo **T** associado a um número finito de estruturas disjuntas de árvore do mesmo tipo **T**, denominadas **subárvores**

Introdução

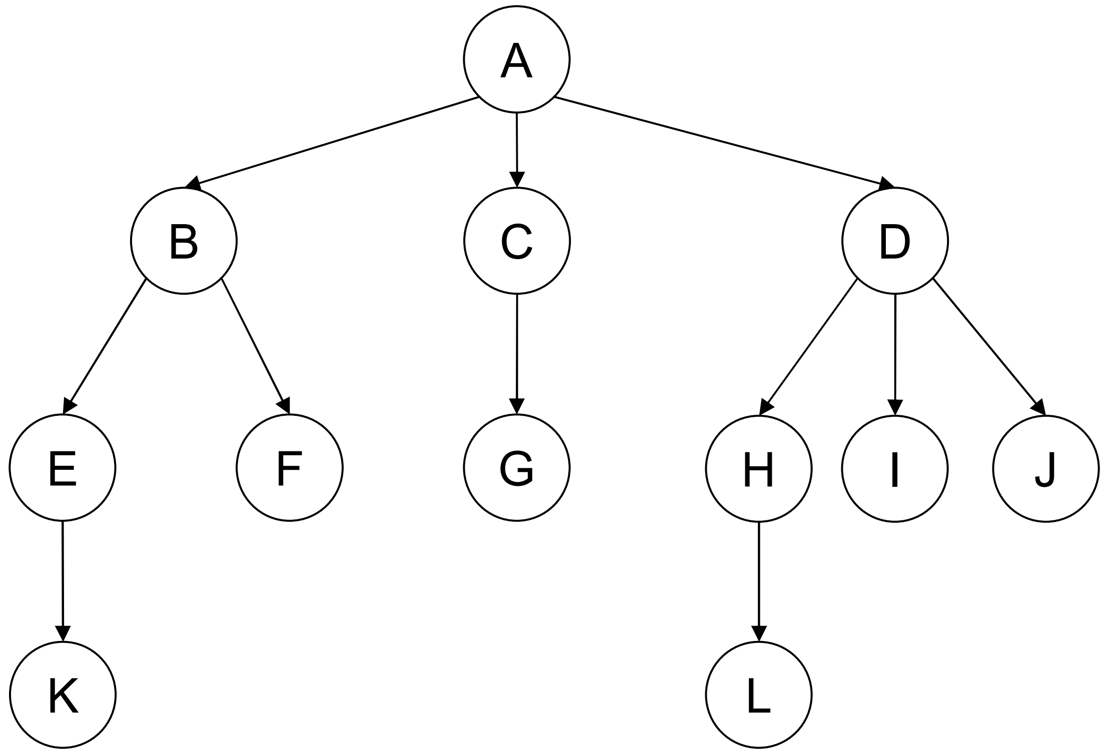
- Observando a similaridade das definições é evidente que uma lista possa ser considerada como uma árvore na qual cada nó tem, no máximo, uma única subárvore
- Por este motivo, uma **lista** é também denominada **árvore degenerada**

Definição

- Uma **árvore** é um conjunto finito de um ou mais nós (ou vértices) tais que
  - Existe um nó especial, denominado **raiz**
  - Os demais nós encontram-se desdobrados em $n \geq 0$ conjuntos disjuntos $T_1, ..., T_n$ sendo que cada conjunto se constitui numa árvore
  - $T_1, ..., T_n$ são denominadas subárvores da raiz
- Utilizaremos grafos para representar árvores
- Todavia, existem outras representações equivalentes para árvores: conjuntos aninhados (diagrama de inclusão), parênteses aninhados, paragrafação (*indentation*)

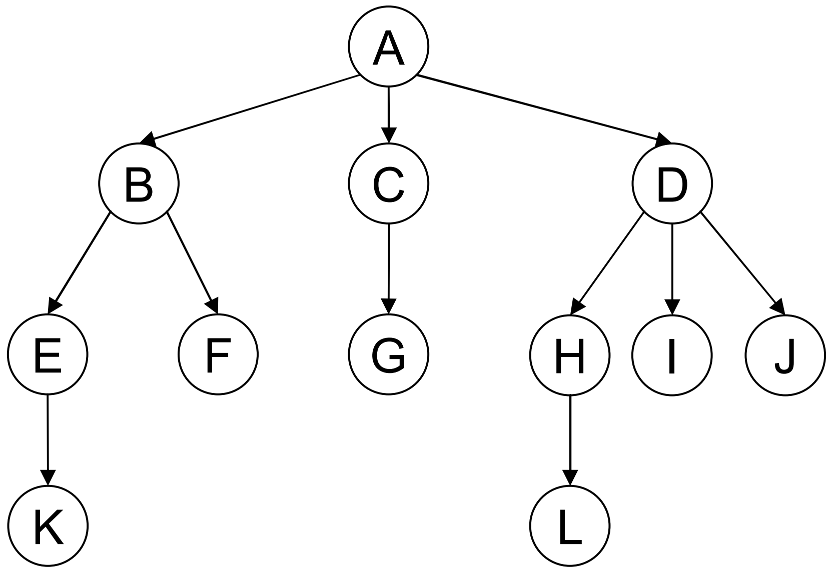
Representações

- Uma árvore é um grafo sem ciclos

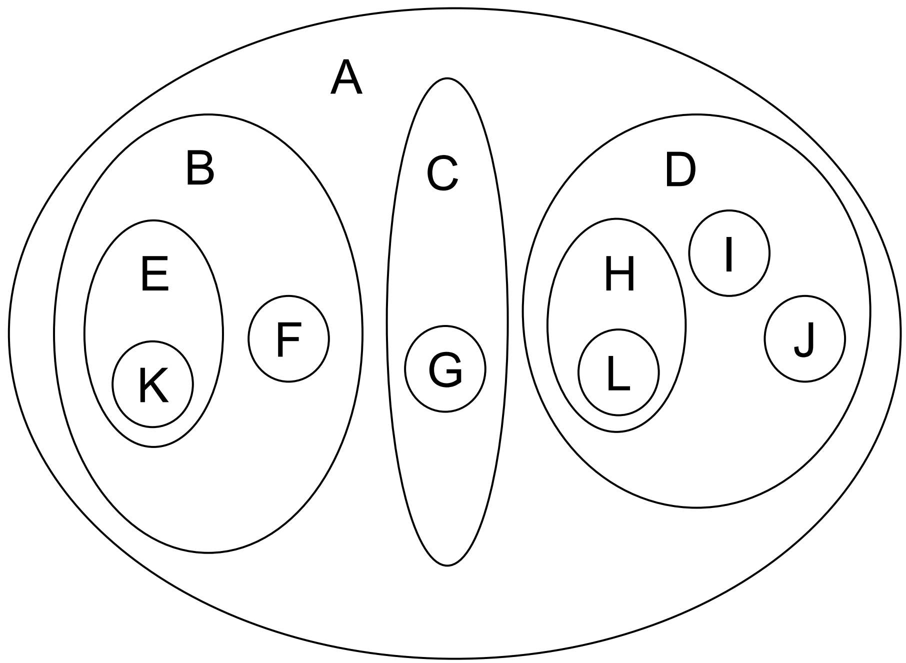


Representações

- Grafo

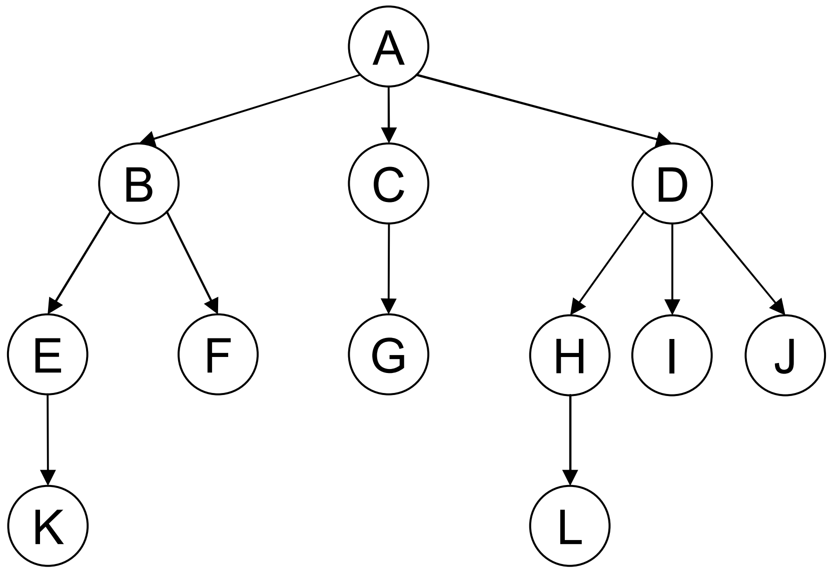


- Conjuntos aninhados



Representações

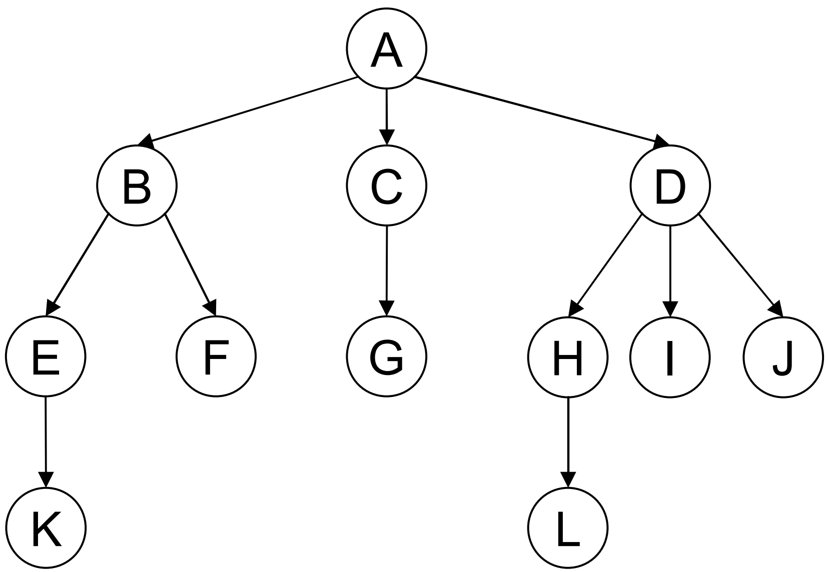
- Grafo



- Parênteses aninhados
  - ((A (B (E (K) (F)) C (G) D (H (L) (I) (J))))

Representações

- Grafo

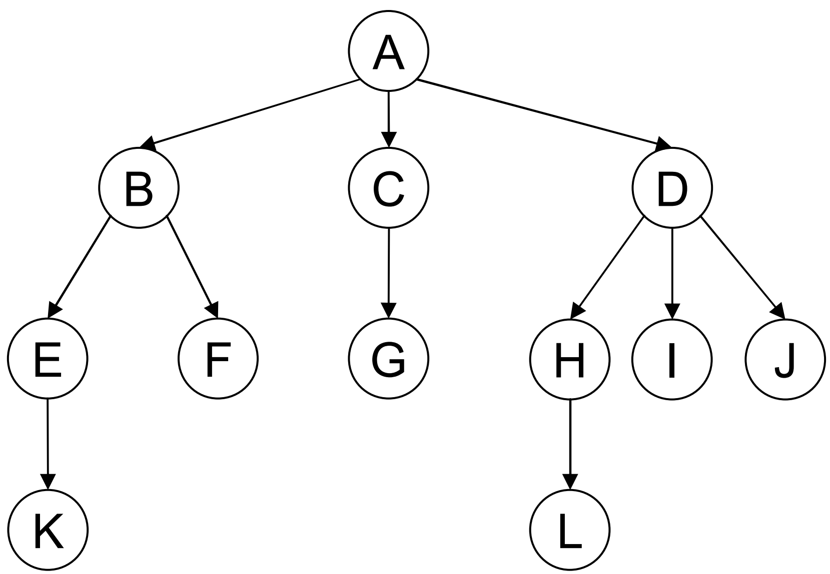


- Paragrafação

- A
    - B
        - E
            - K
        - F
    - C
        - G
    - D
        - H
            - L
        - I
        - J

Representações

- Grafo

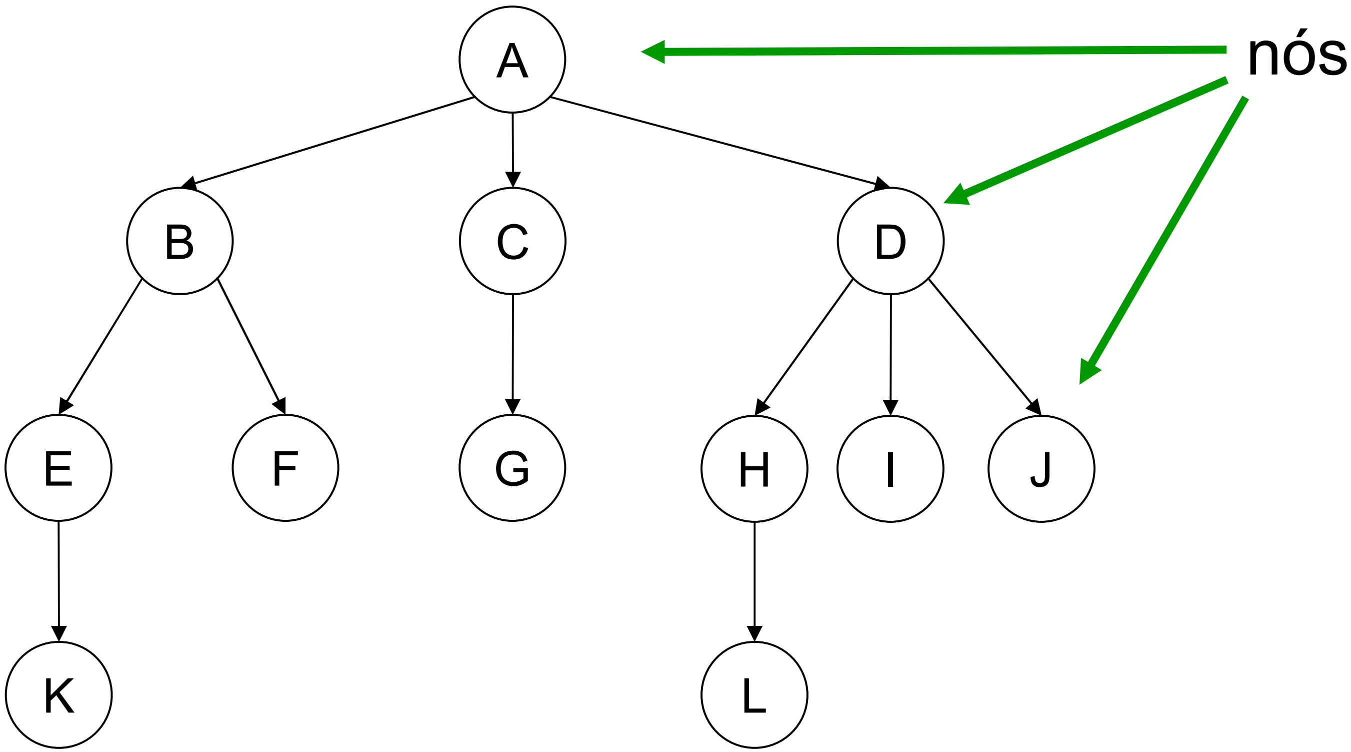


- Paragrafação

```
A
..B
....E
......K
....F
..C
....G
..D
....H
......L
....I
....J
```

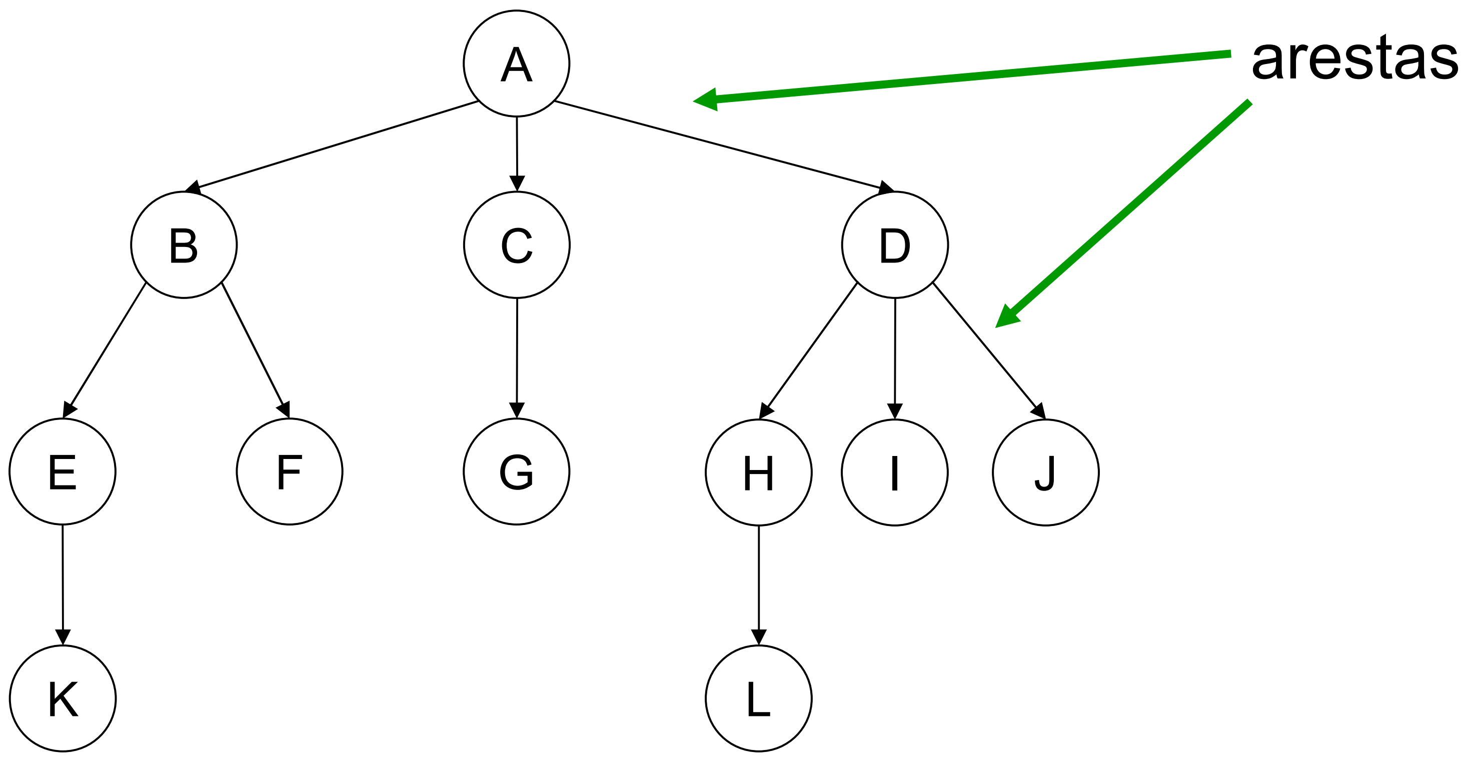
Nós (Vértices)

- Esta árvore possui 12 **nós** (ou **vértices**)



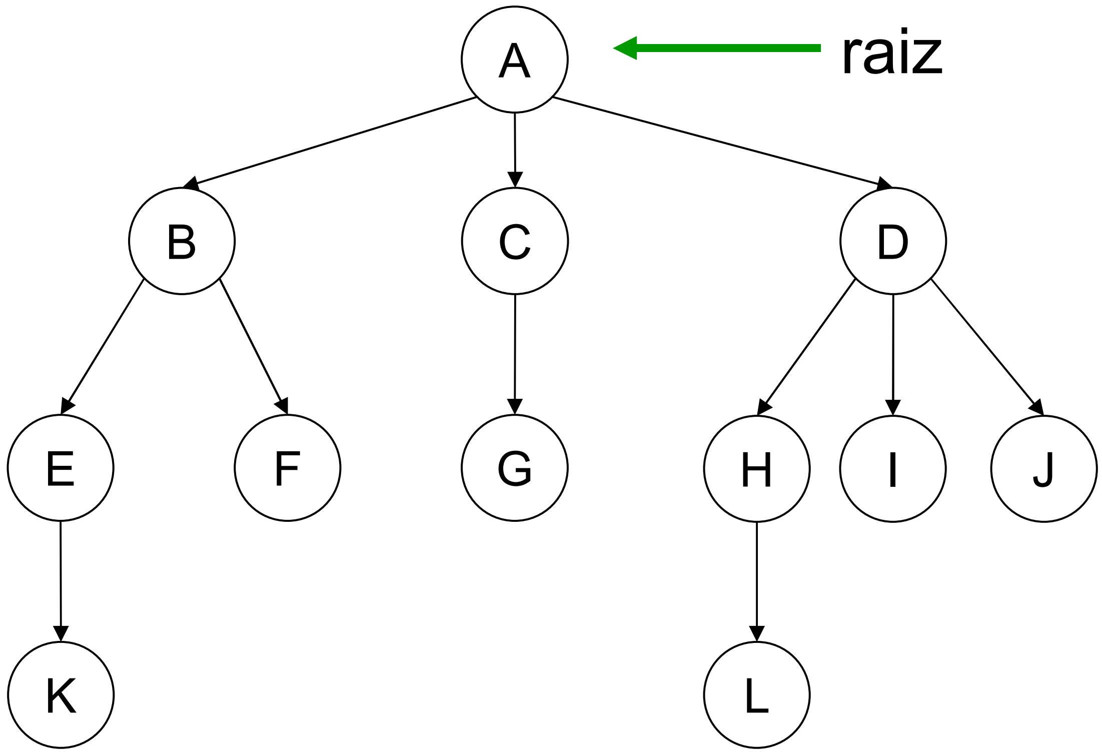
Arestas (Arcos)

- Uma **aresta** (**arco**) liga um nó a outro



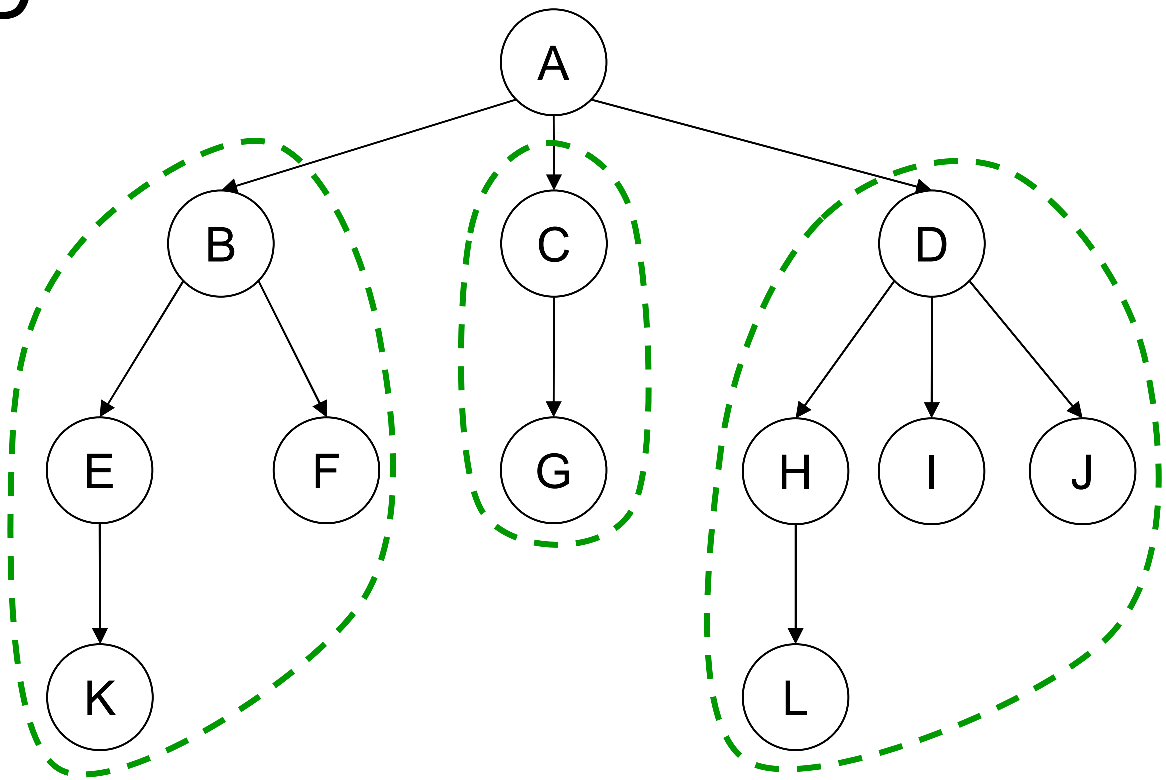
Raiz

- Normalmente as árvores são desenhadas de forma invertida, com a raiz em cima



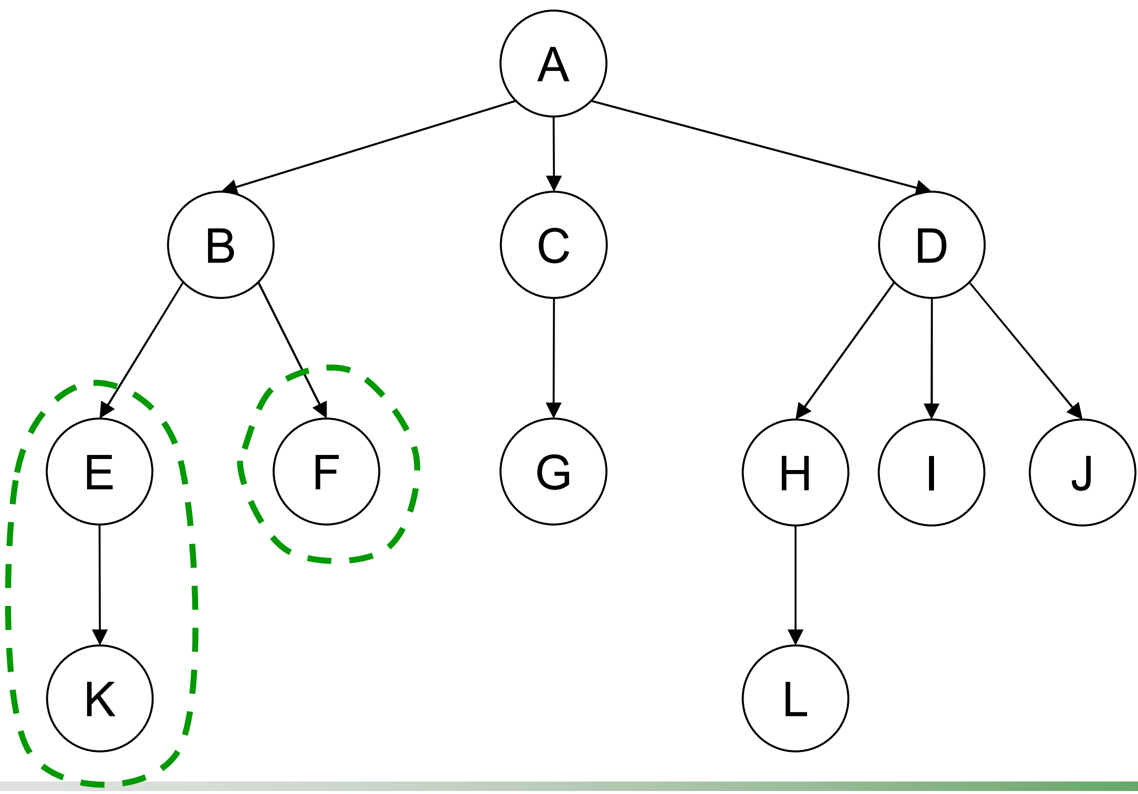
Subárvores

- No exemplo, o nó A possui três **subárvores** (*ramos*) cujas raízes são B, C e D



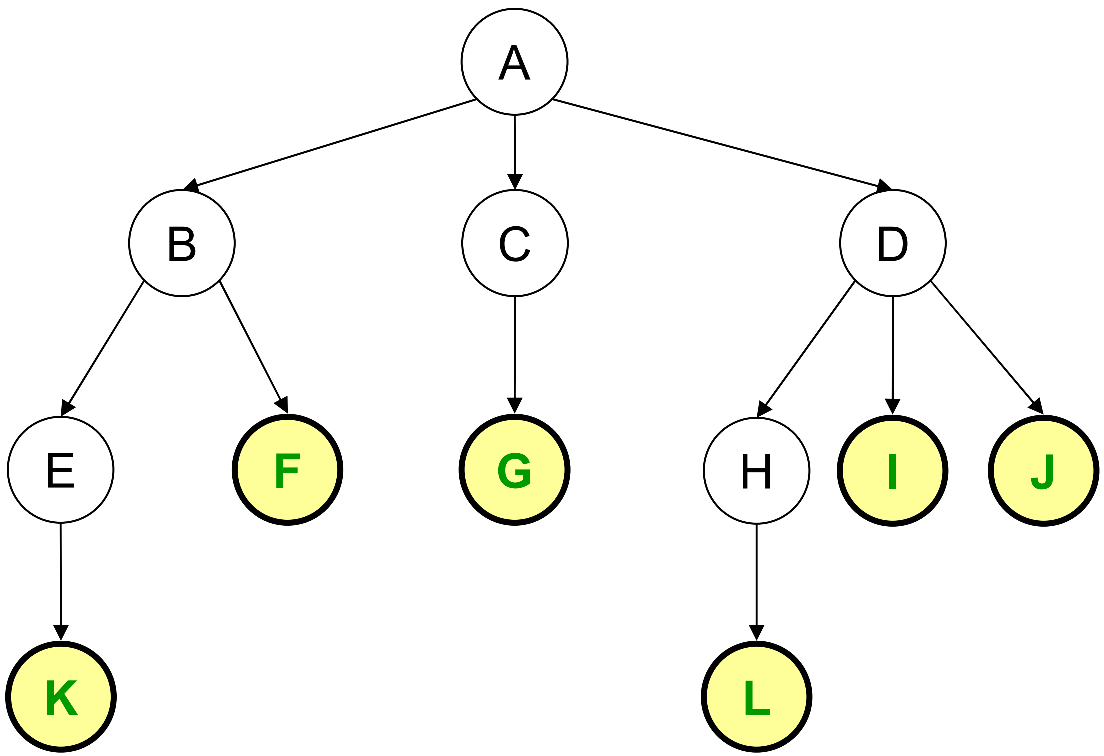
Subárvores

- No exemplo, o nó B possui duas **subárvores** (*ramos*) cujas raízes são E e F



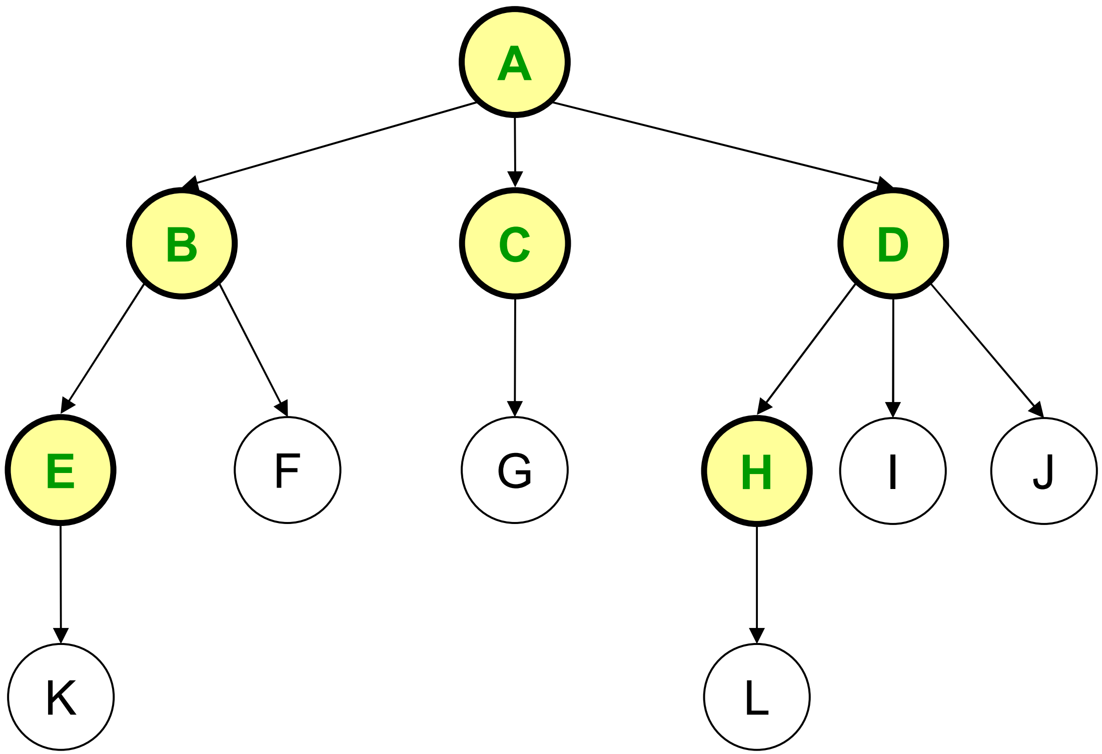
Folha

- Um **nó** sem *descendentes* (sem *filhos* ou sem *sucessores*) é denominado **terminal** ou **folha**



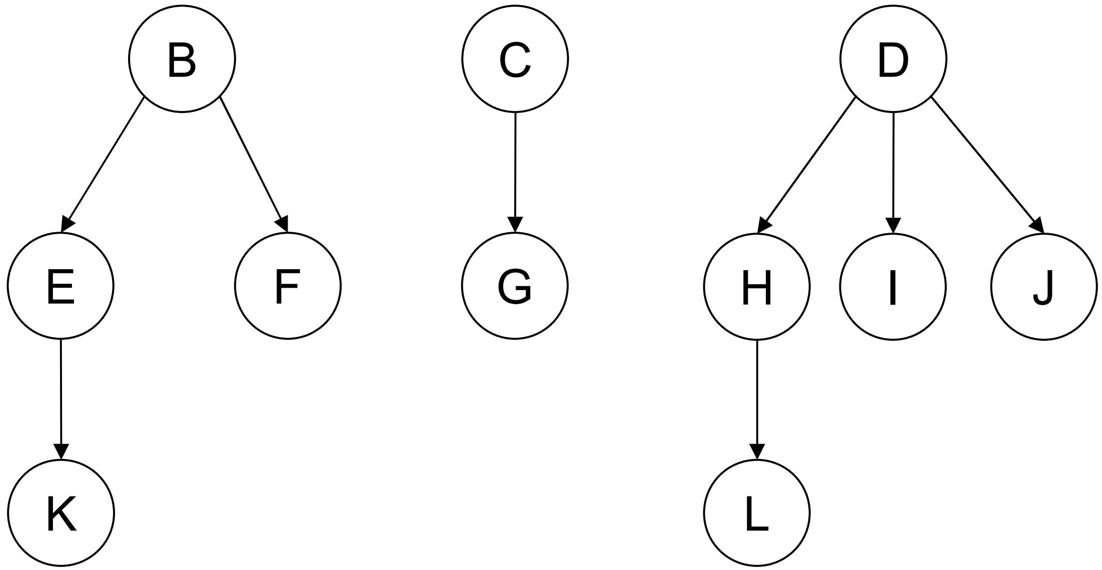
Não-Folha

- Um **nó** com *descendentes* (com *filhos* ou com *sucessores*) é denominado **não-terminal** ou **não-folha** ou **interior**



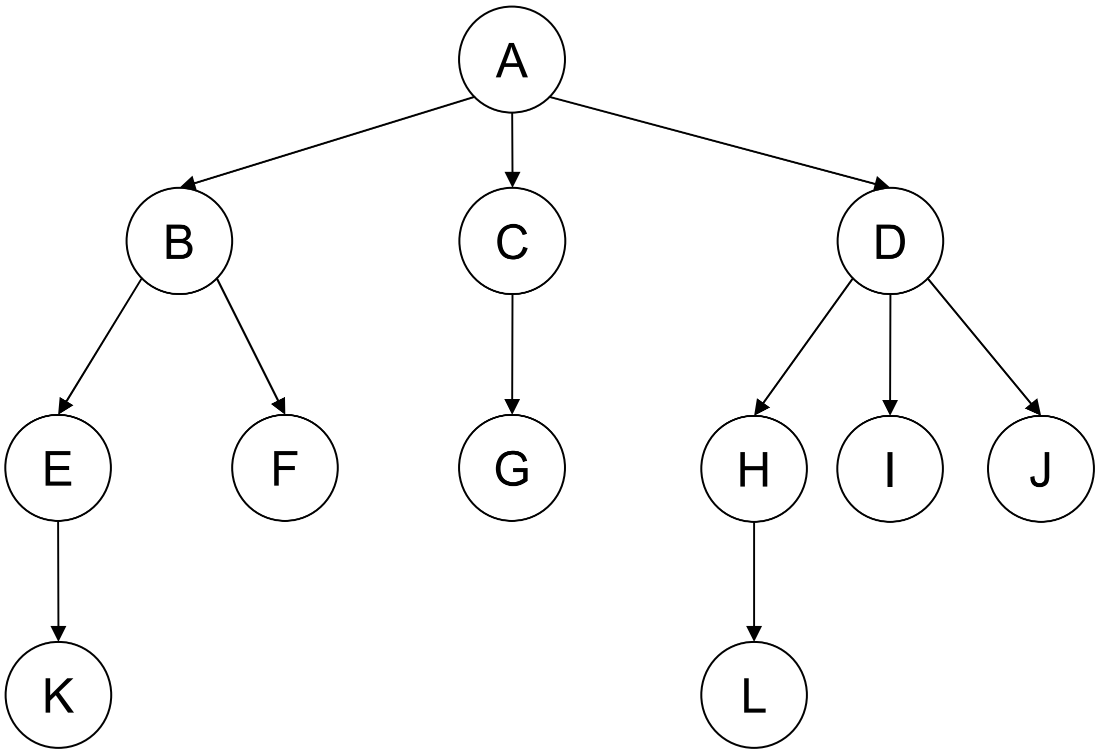
Floresta

- Uma **floresta** é um conjunto de zero ou mais árvores
- No exemplo, temos 3 árvores que compõem uma floresta



Grau de um Nó

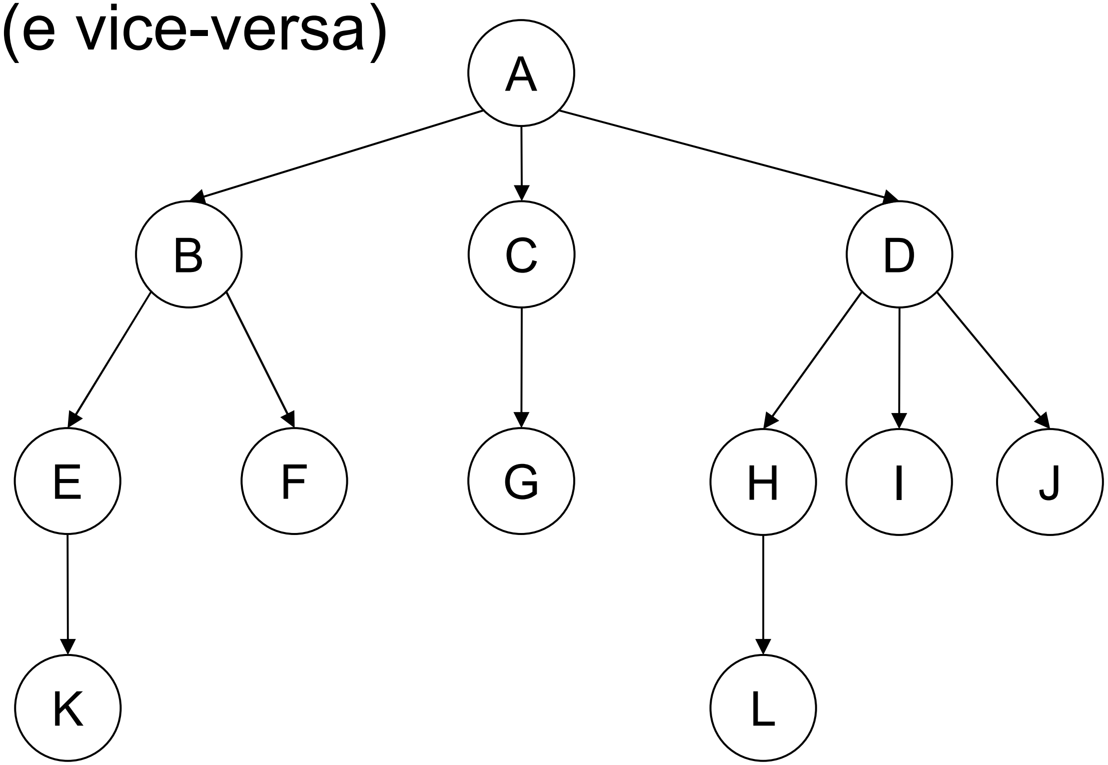
- O número de descendentes (imediatos) de um nó é denominado **grau** deste nó



Nó	Grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
L	

Grau de um Nó

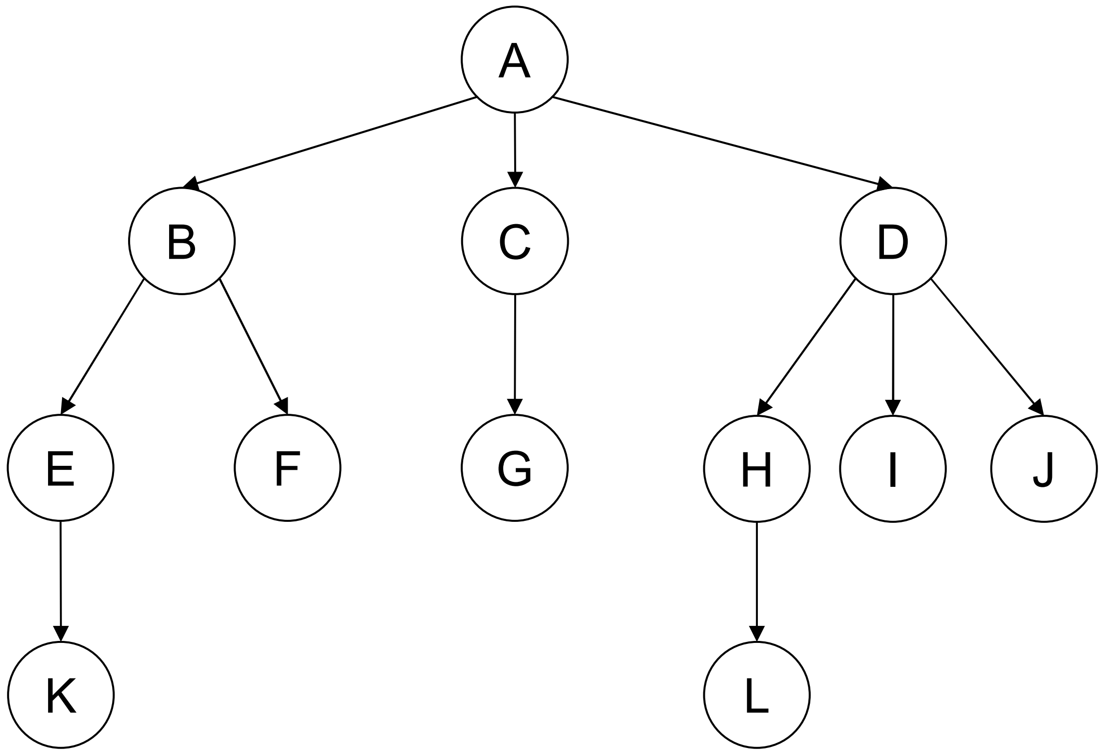
- O número de descendentes (imediatos) de um nó é denominado **grau** deste nó
- Portanto, o grau de uma folha é zero (e vice-versa)



Nó	Grau
A	3
B	2
C	1
D	3
E	1
F	0
G	0
H	1
I	0
J	0
K	0
L	0

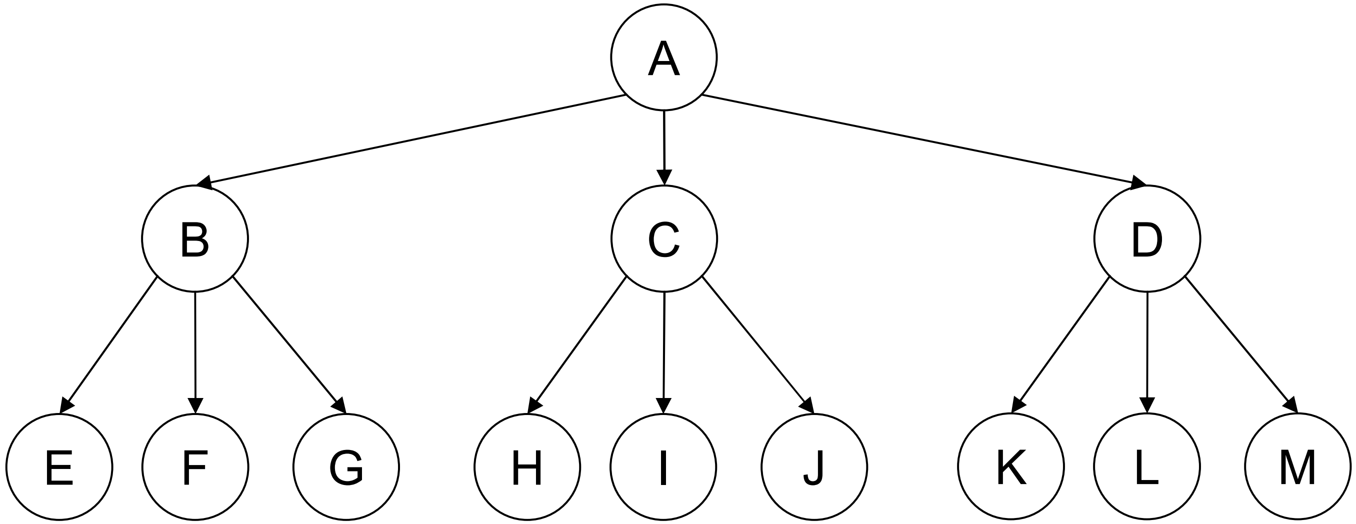
Grau de uma Árvore

- O grau máximo atingido pelos nós de uma árvore é denominado **grau** desta árvore
- No exemplo, o grau da árvore é 3



Árvore Completa

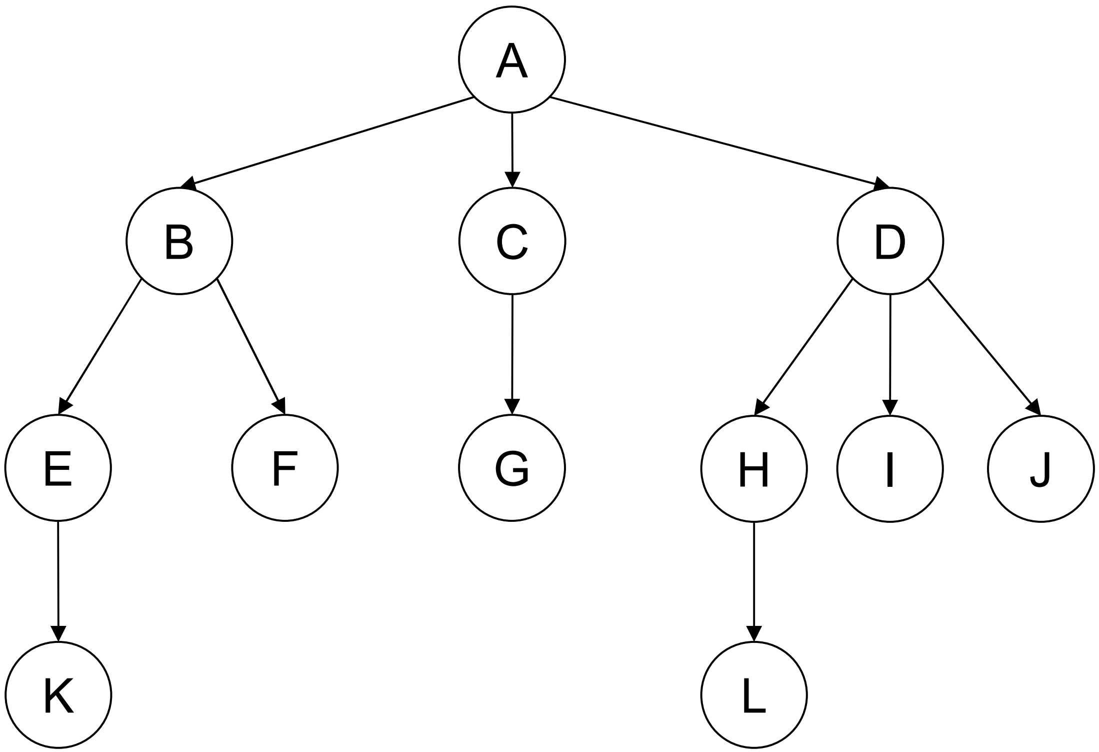
- Uma árvore de grau **d** é uma árvore **completa** (cheia) se
  - Todos os nós tem exatamente **d** filhos, exceto as folhas e
  - Todas as folhas estão na mesma altura
- No exemplo, a árvore de grau **d**=3 é completa



Pai

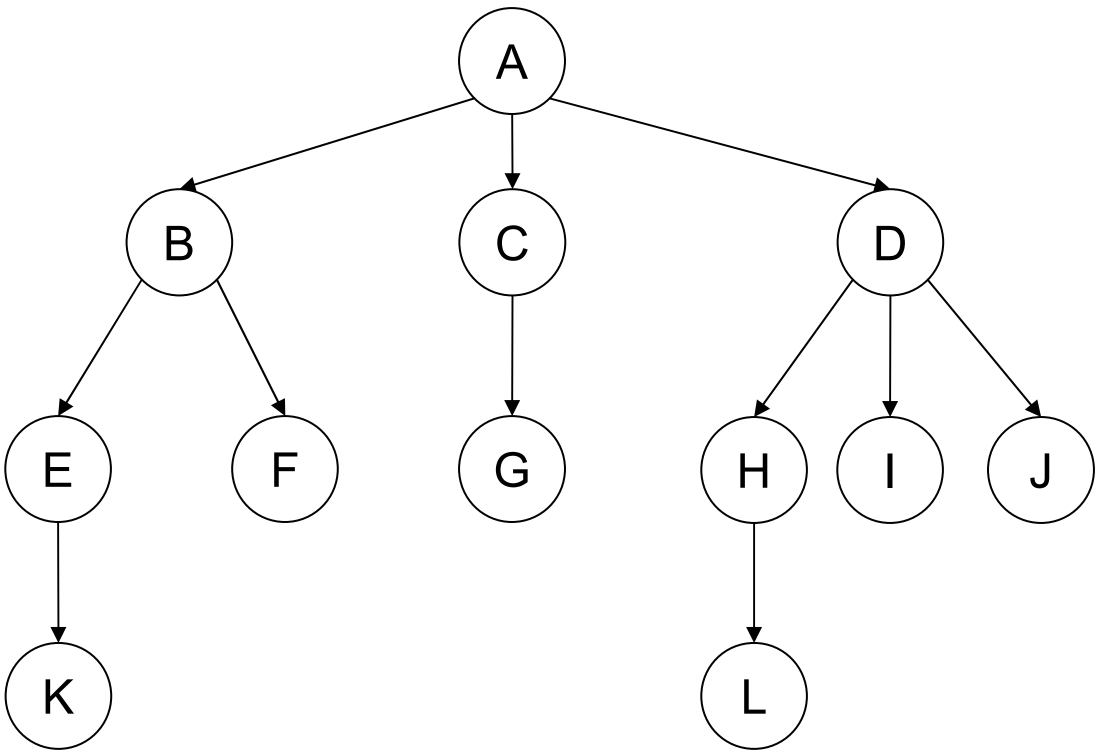
- As raízes das subárvores de um nó **X** são os **filhos** de **X**; **X** é o **pai** dos **filhos**

Nó Pai	Nós Filhos
A	B, C, D
B	E, F
C	G
D	H, I, J
E	K
F	-
G	-
H	L
I	-
J	-
K	-
L	-



Irmão

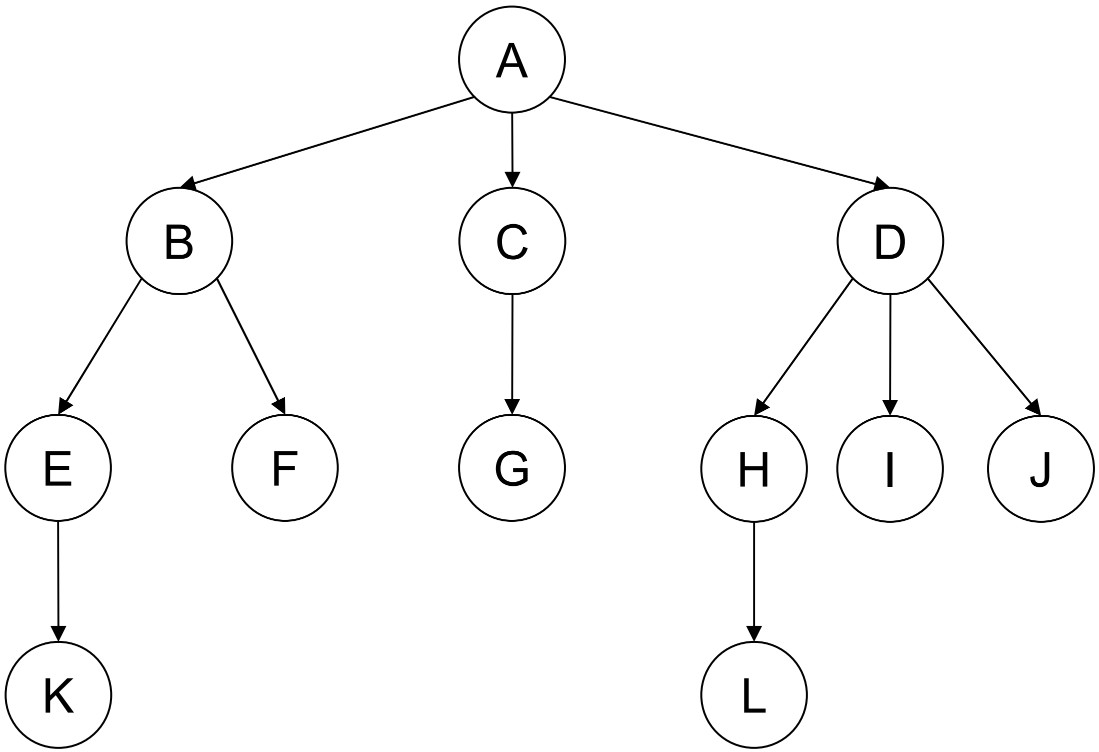
- Os filhos (descendentes) de um mesmo nó pai (antecessor) são denominados **irmãos**



Irmãos
B, C, D
E, F
H, I, J

Avô & Demais Parentes

- Podemos estender essa terminologia para **avô**, **bisavô**, e demais parentes



Nós	Avô
E,F,G,H,I,J	A
K	B
L	D

Nós	Bisavô
K, L	A

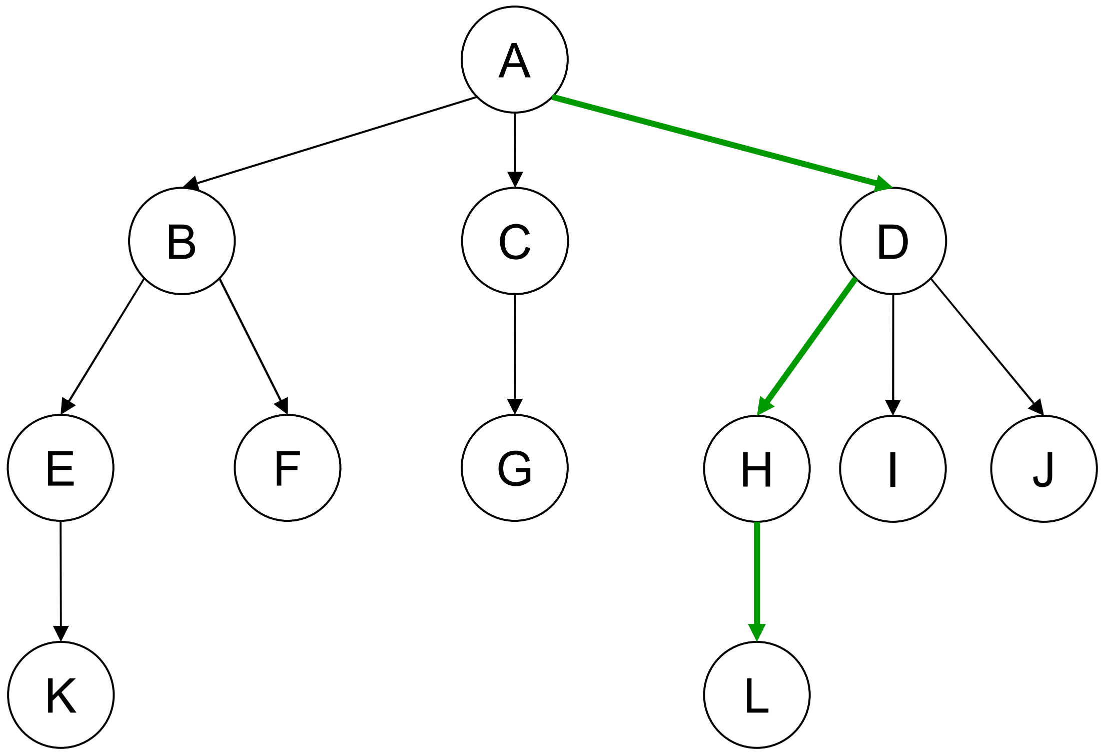
Caminho

- Uma seqüência de nós distintos v_1, v_2, ..., v_k tal que sempre existe a relação
  - “v_i é filho de v_{i+1}” ou “v_i é pai de v_{i+1}”, $1 \leq i < k$

  é denominada um **caminho** entre v_1 e v_k
- Diz-se que v_1 **alcança** v_k ou que v_k é **alcançado** por v_1
- Um caminho de *k* vértices v_1, v_2, ..., v_k é formado pela seqüência de *k*-1 pares de nós (v_1,v_2), (v_2,v_3), ..., (v_{k-2},v_{k-1}), (v_{k-1},v_k)
  - *k*-1 é o **comprimento** do caminho
  - Cada par (v_i, v_{i+1}) é uma **aresta** ou **arco**, $1 \leq i < k$

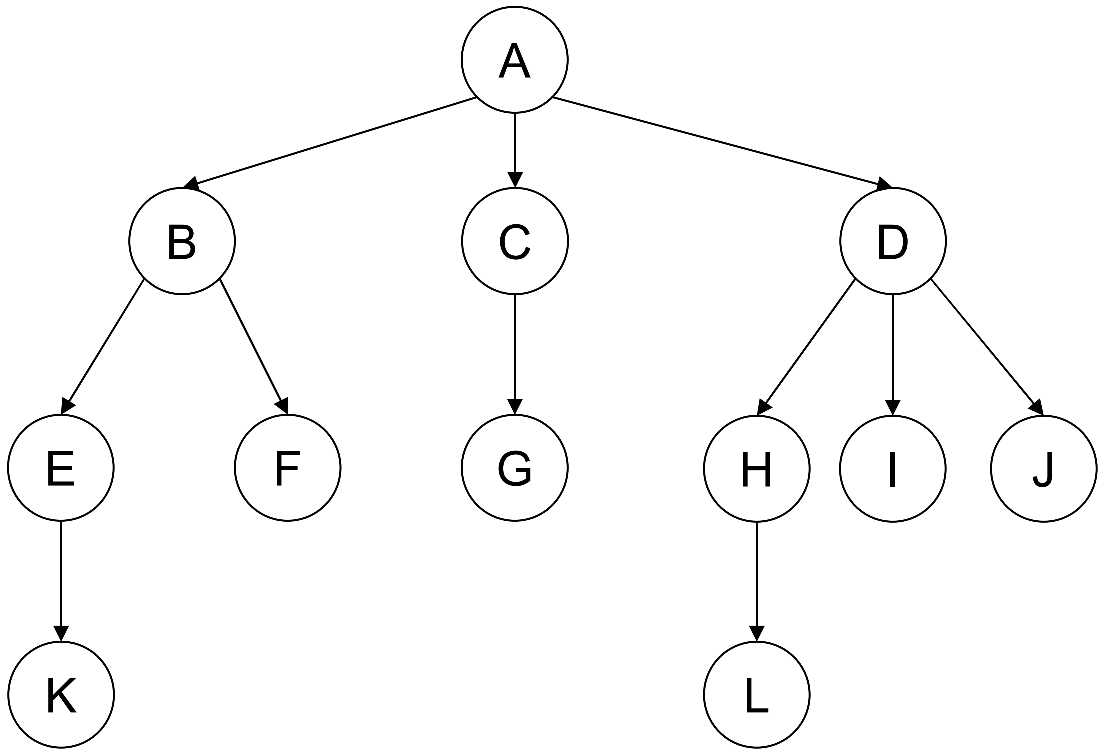
Caminho

- No Exemplo:
  - A, D, H, L é um caminho entre A e L, formando pela seqüência de arestas (A,D), (D,H), (H,L)
  - O comprimento do caminho entre A e L é 3



Antecessores

- Os **antecessores** (**antepassados**) de um nó são todos os nós no caminho entre a raiz e o respectivo nó
- No exemplo, os antecessores de L são A, D e H

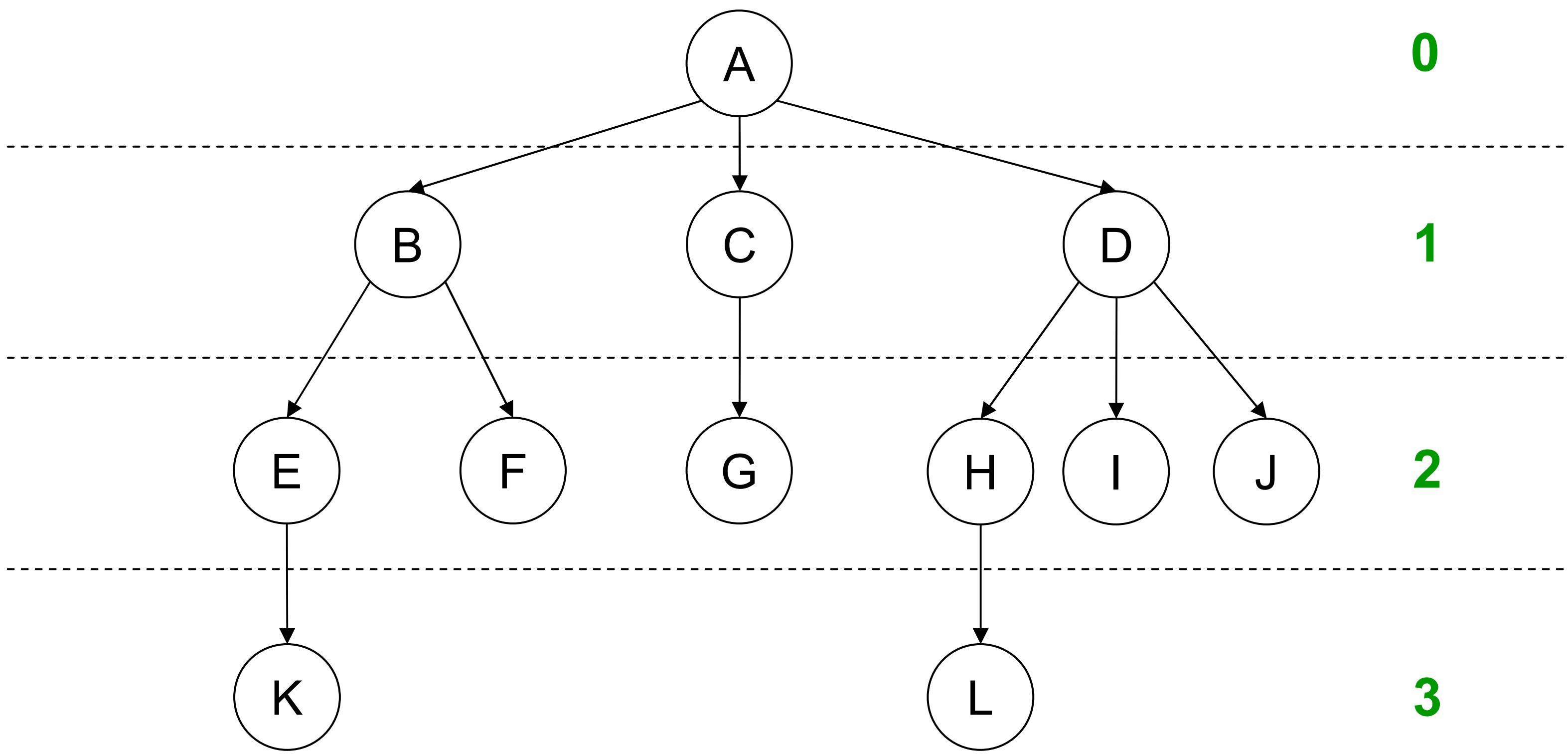


Nível

- O **nível** (ou **profundidade**) de um nó é definido admitindo-se que a raiz está no nível zero (nível um)
- Estando um nó no **nível i**, seus filhos estarão no **nível i+1**
- Não existe um padrão quanto ao nível adotado para a raiz, que determina o nível dos demais nós
- Assim, a raiz pode ser admitida como estando
  - No **nível zero**
  - Alternativamente, no **nível um**
- No restante desta apresentação, vamos adotar a raiz no nível zero
  - A adequação das fórmulas e algoritmos caso a raiz seja considerada no nível um é deixada como exercício

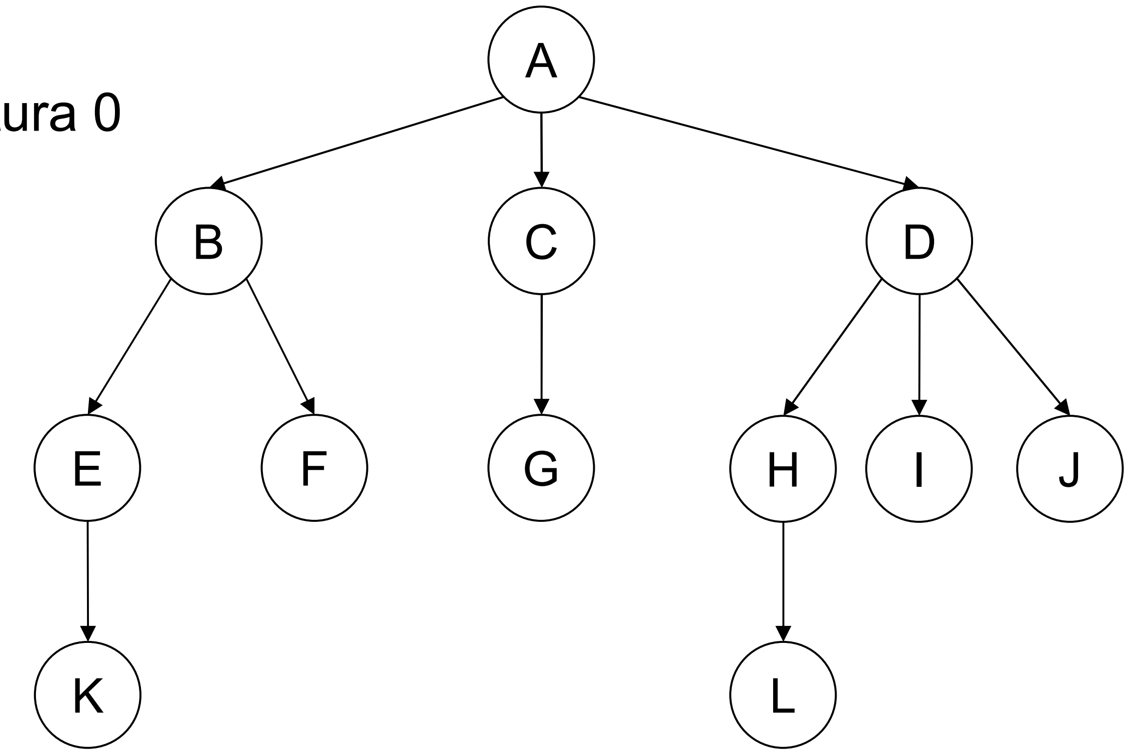
Nível

- No exemplo, os nós:
  - B, C e D estão no nível 1
  - K e L estão no nível 3



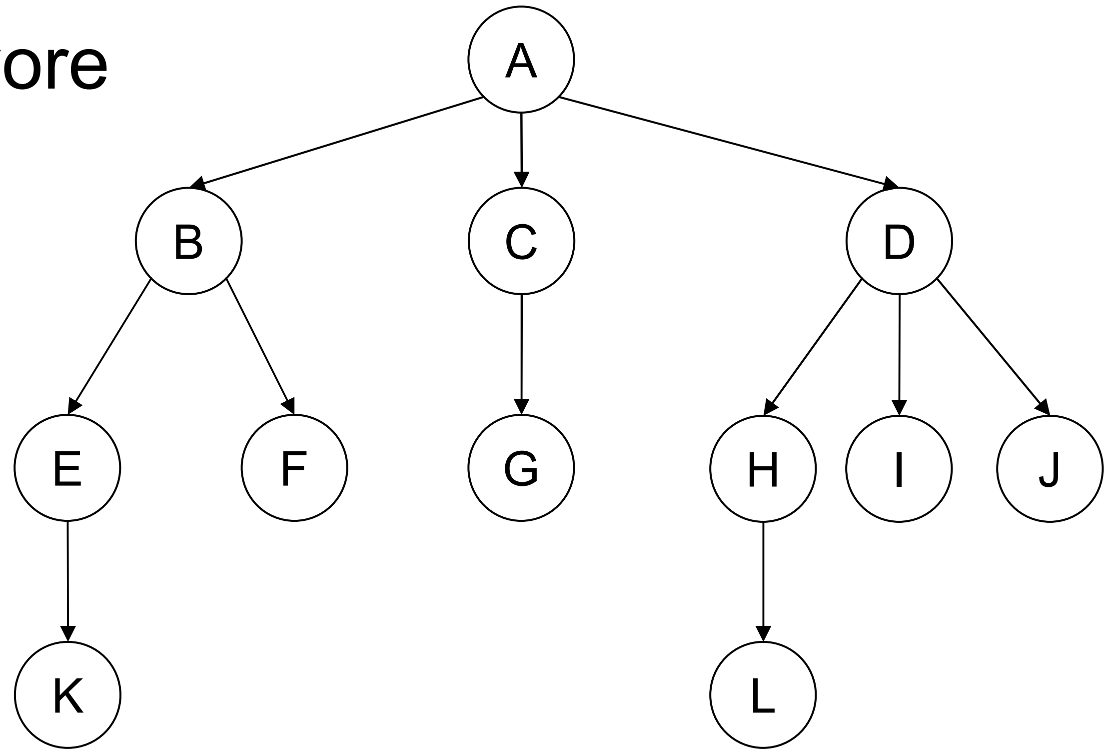
Altura de um Nó

- A **altura de um nó** é o número de arestas no maior caminho desde o nó até um de seus descendentes
- Portanto, as folhas têm altura zero
- No exemplo, os nós:
  - K, F, G, L, I, J têm altura 0
  - E, C e H têm altura 1
  - B e D têm altura 2
  - A tem altura 3



Altura de uma Árvore

- A **altura** (ou **profundidade**) **de uma árvore** é o nível máximo entre todos os nós da árvore ou, equivalentemente, é a altura da raiz
- No exemplo, a árvore possui altura 3

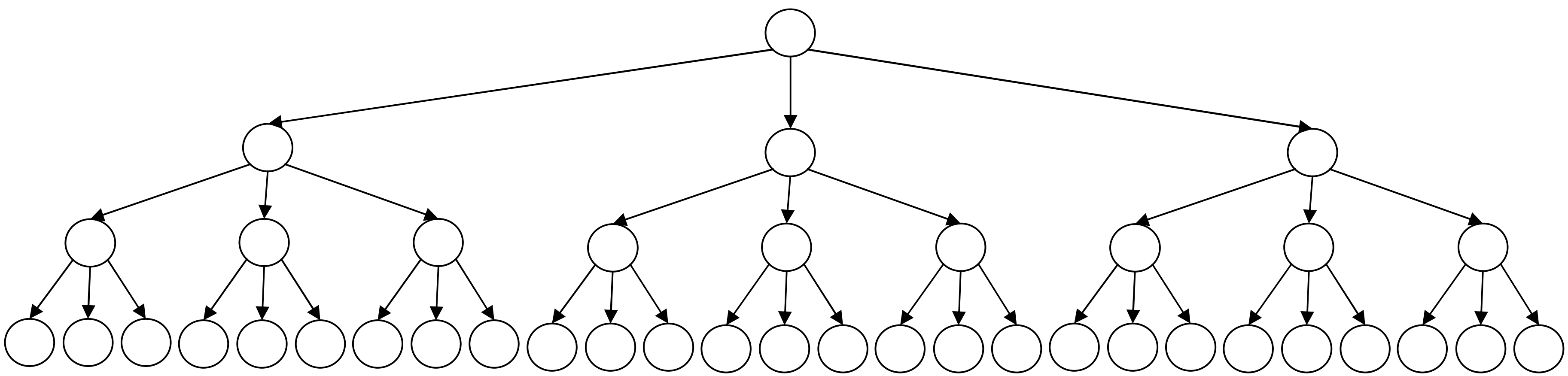


Número Máximo de Nós

- O número máximo de nós **$n(h,d)$** em uma árvore de altura **h** é atingido quando todos os nós possuírem **d** subárvores, exceto os de nível **h**, que não possuem subárvores
- Para uma árvore de grau **d**
  - Nível 0 contém **d^0** (um) nó (raiz)
  - Nível 1 contém **d^1** descendentes da raiz
  - Nível 2 contém **d^2** descendentes
  - ...
  - Nível i contém **d^i** descendentes

Número Máximo de Nós

- Assumindo **d**=3
  - Nível 0: 1 nó (raiz)
  - Nível 1: 3 nós
  - Nível 2: 3^2 = 9 nós
  - Nível 3: 3^3 = 27 nós
- n(3,3)= 1 + 3 + 9 + 27 = 40 nós



Número Máximo de Nós

- Portanto, o número máximo de nós **n=n(h,d)** é soma do número de nós em cada nível, ou seja:

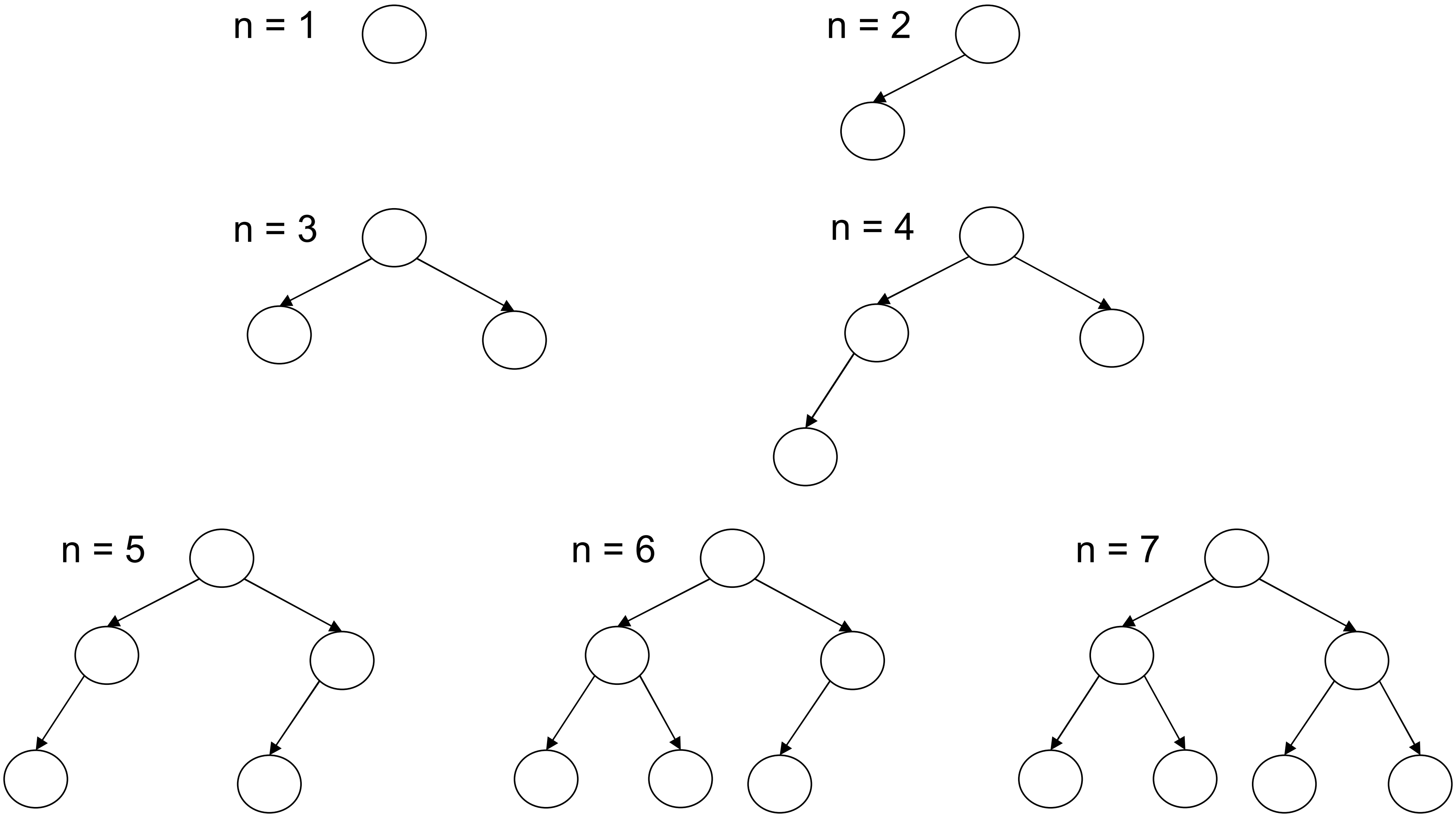
$$n = n(h,d) = \sum_{i=0}^{h} d^i = d^0 + d^1 + d^2 + \cdots + d^h$$

$$\sum_{i=0}^{h} d^i = \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1},\ d > 1$$

Árvores (Perfeitamente) Balanceadas

- Uma árvore é **balanceada** se, para cada nó, a ***altura*** de suas subárvores diferem, no máximo, de uma unidade
- Uma árvore é **perfeitamente balanceada** se, para cada nó, os ***números de nós*** em suas subárvores diferem, no máximo, de uma unidade
- Todas as árvores perfeitamente balanceadas também são árvores balanceadas

Árvores Perfeitamente Balanceadas de Grau 2



Árvores Balanceadas de Grau 2