



Árvores AVL

Introdução

- ❑ Árvores de **altura balanceada** ou de **altura equilibrada** foram introduzidas em 1962 por Adelson-Velskii e Landis, também conhecidas como **árvores AVL**
- ❑ Devido ao balanceamento da árvore, as operações de busca, inserção e remoção em uma árvore com **n** elementos podem ser efetuadas em $O(\log_2 n)$, mesmo no pior caso
- ❑ Um teorema provado por Adelson-Velskii e Landis garante que a árvore balanceada nunca será 45% mais alta que a correspondente árvore perfeitamente balanceada, independentemente do número de nós existentes

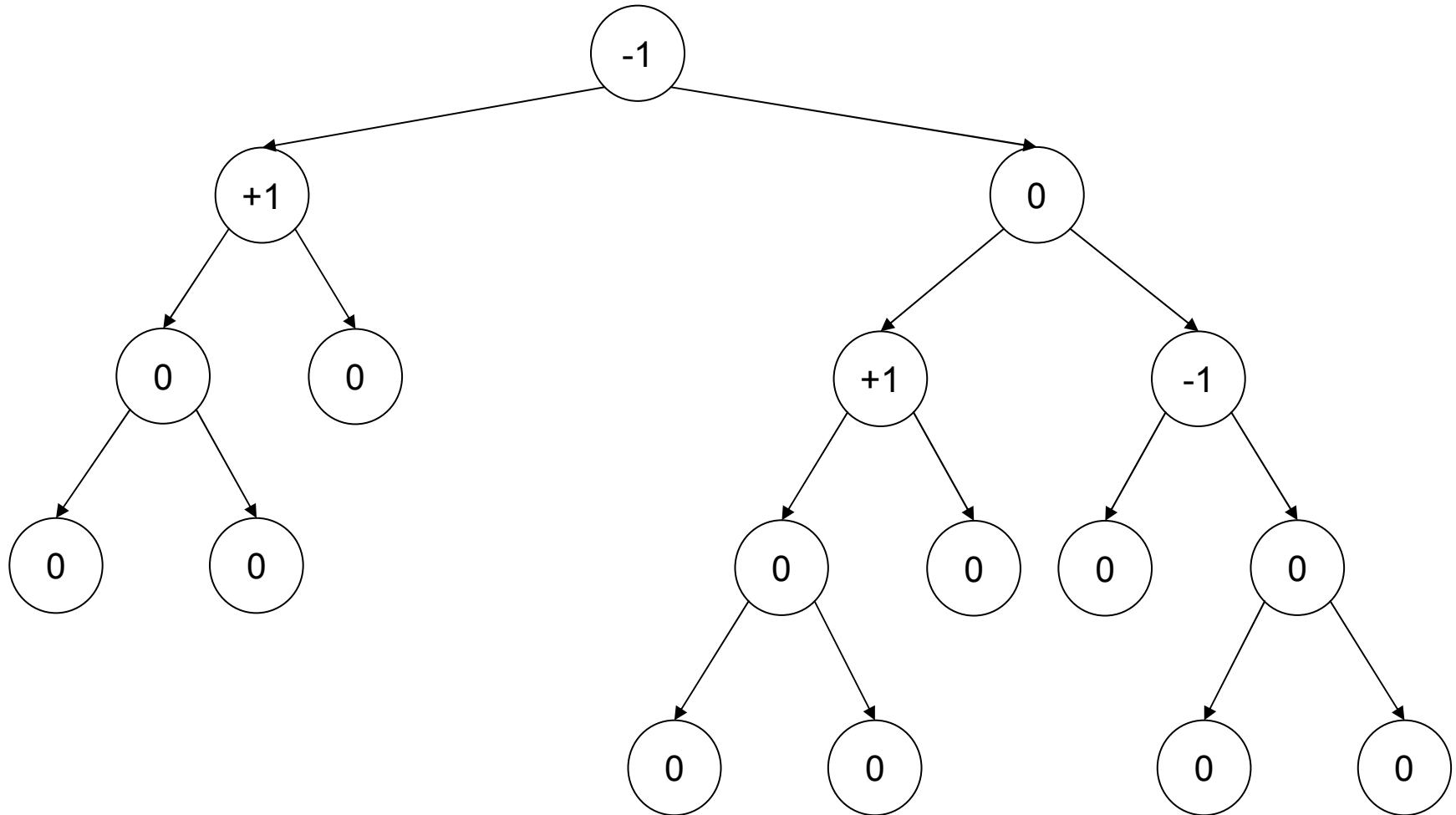
Árvore AVL

- Uma árvore AVL é definida como:
 - Uma árvore vazia é uma árvore AVL
 - Sendo **T** uma árvore binária de busca cujas subárvores esquerda e direita são **L** e **R**, respectivamente, **T** será uma árvore AVL contanto que:
 - ❖ **L** e **R** são árvores AVL
 - ❖ $|h_L - h_R| \leq 1$, onde h_L e h_R são as alturas das subárvores **L** e **R**, respectivamente
- A definição de uma árvore binária de altura equilibrada (AVL) requer que cada subárvore seja também de altura equilibrada

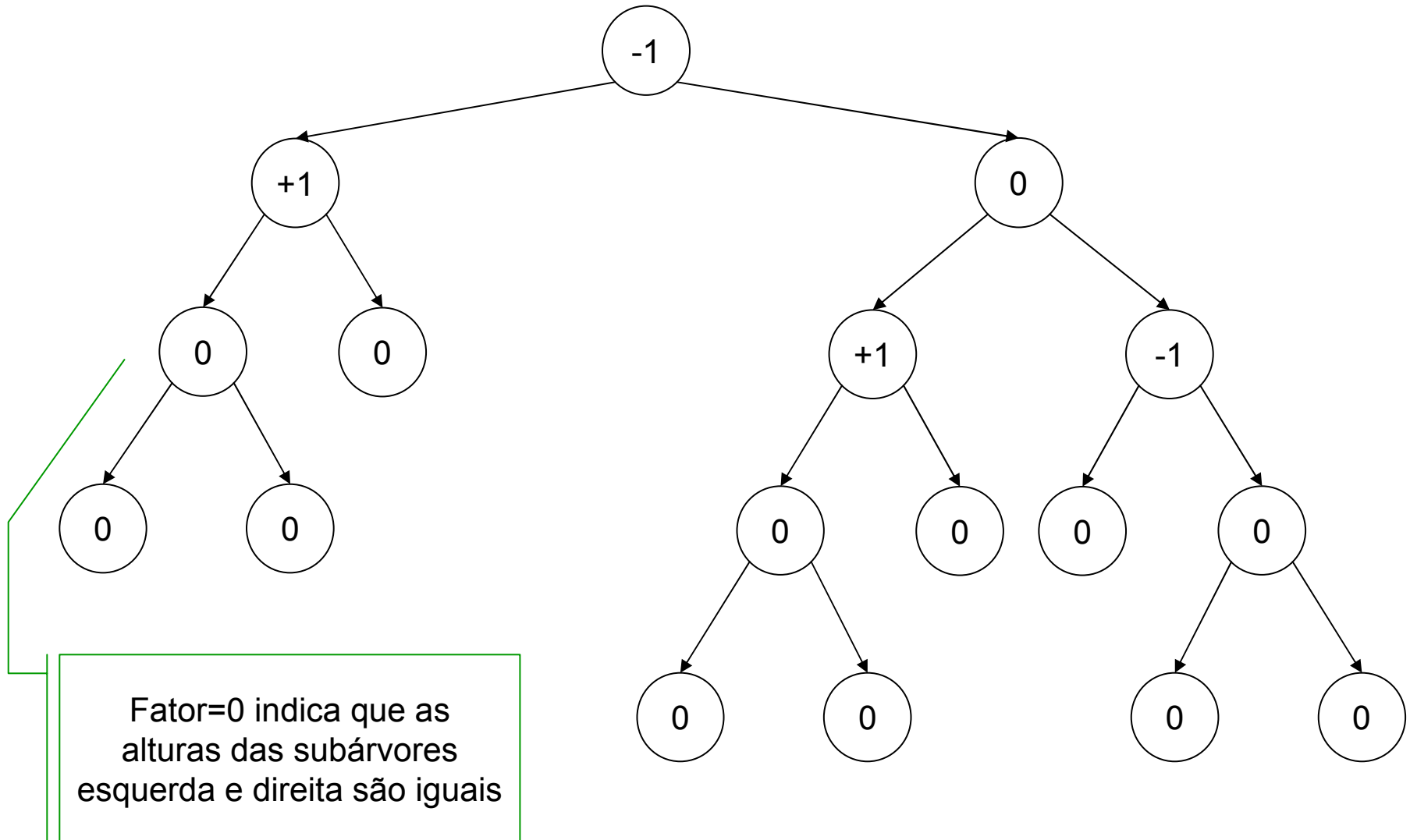
Fator de Balanceamento

- ❑ O **fator de balanceamento** ou **fator de equilíbrio** de um nó **T** em uma árvore binária é definido como sendo $h_L - h_R$ onde h_L e h_R são as alturas das subárvores esquerda e direita de **T**, respectivamente
- ❑ Para qualquer nó **T** numa árvore AVL, o fator de balanceamento assume o valor -1, 0 ou +1
 - O fator de balanceamento de uma folha é zero

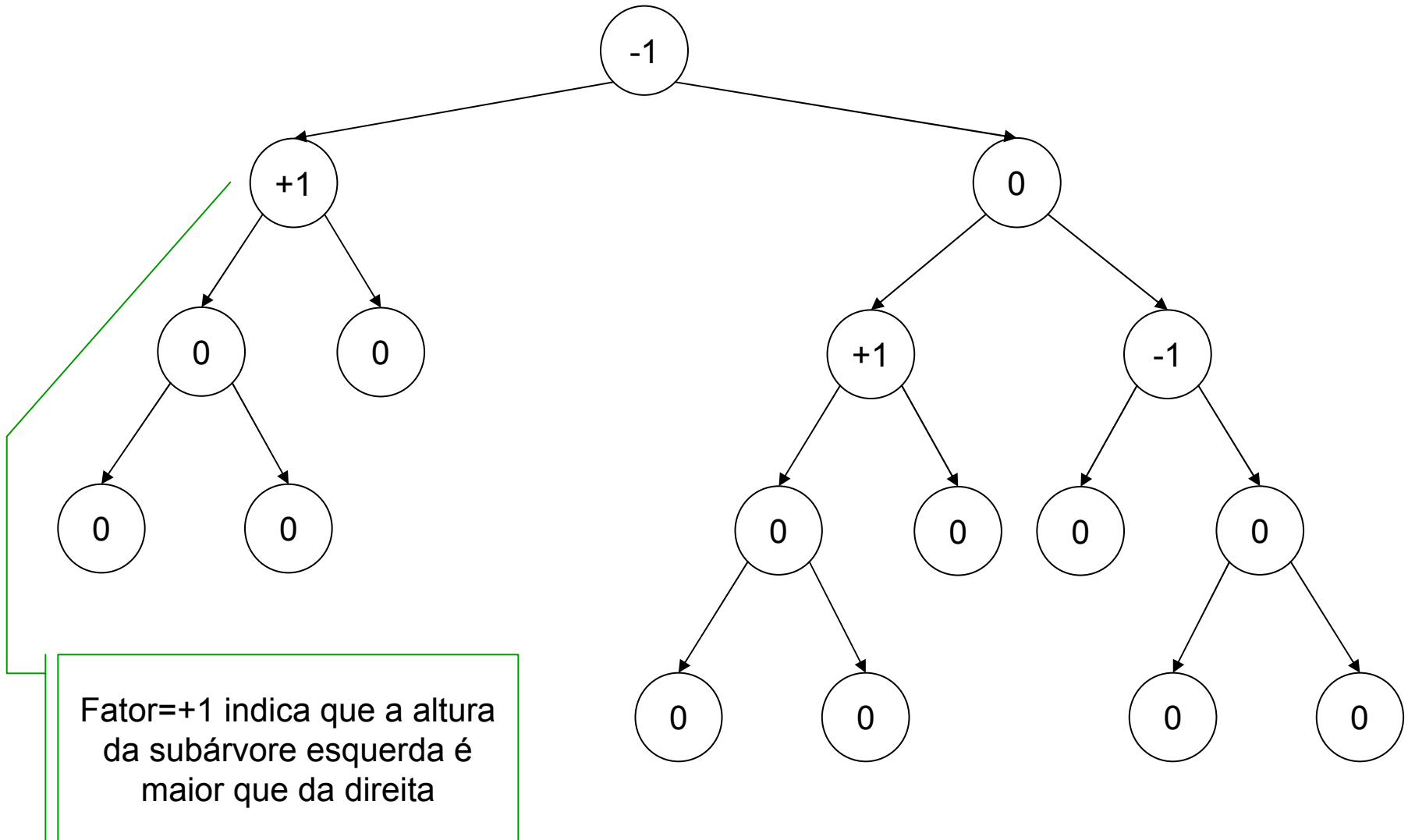
Fator de Balanceamento



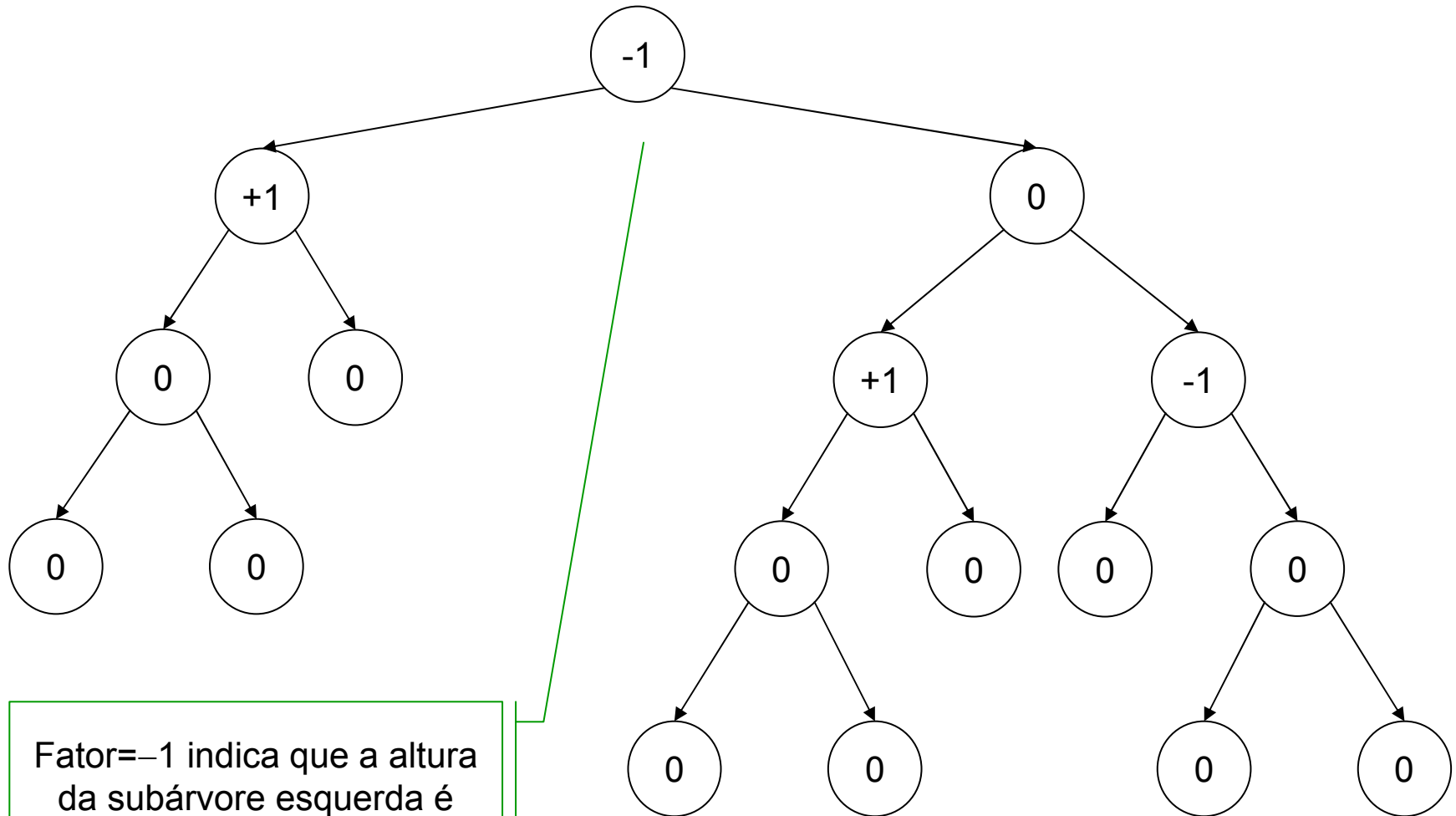
Fator de Balanceamento



Fator de Balanceamento

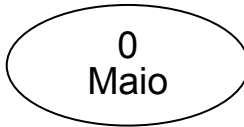


Fator de Balanceamento



Inserção Maio

Depois da inserção

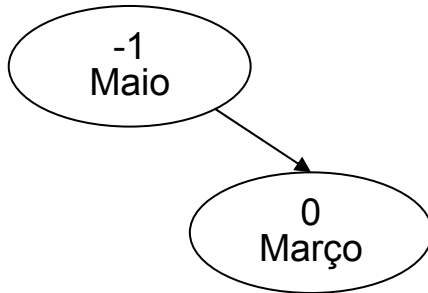


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Março

Depois da inserção

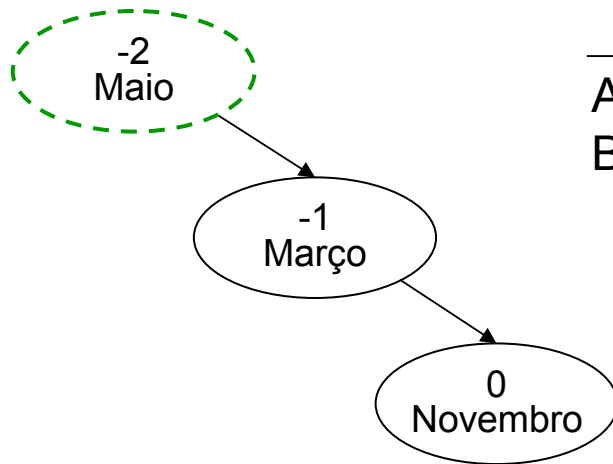


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

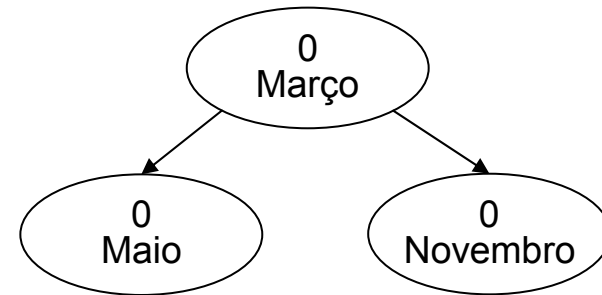
Inserção Novembro

Depois da inserção



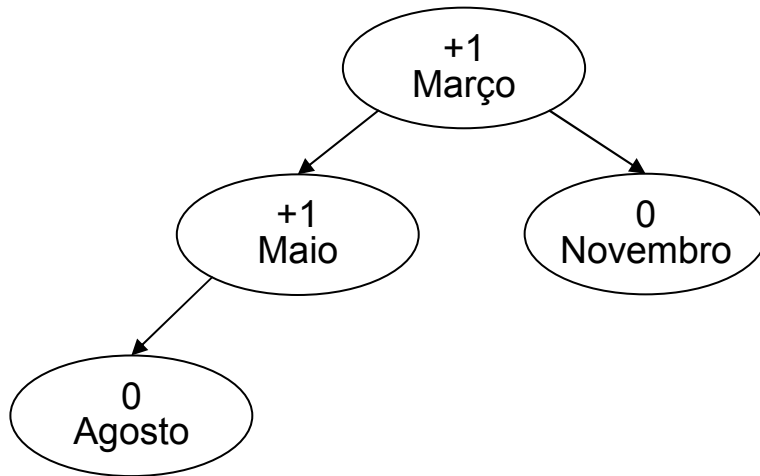
RR
A = -2
B = -1

Depois do rebalanceamento



Inserção Agosto

Depois da inserção

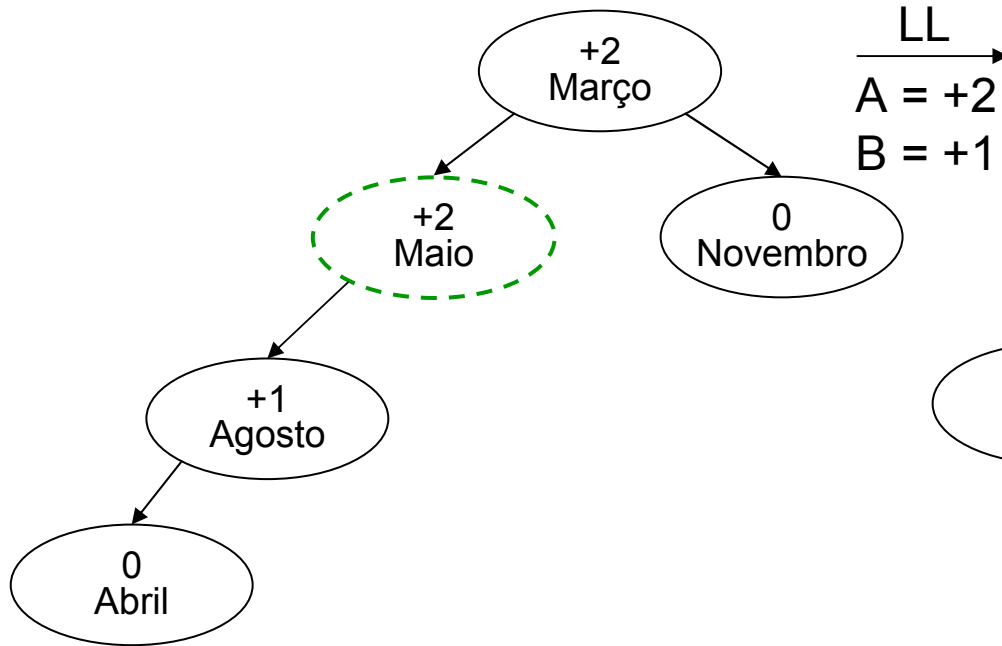


Depois do rebalanceamento

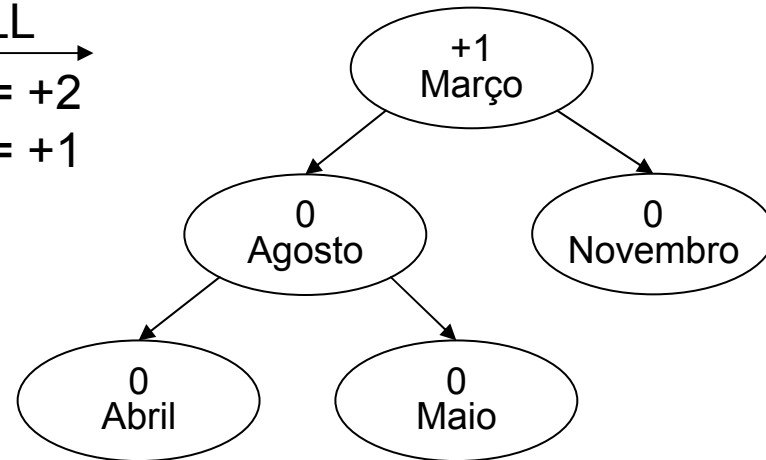
*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Abril

Depois da inserção

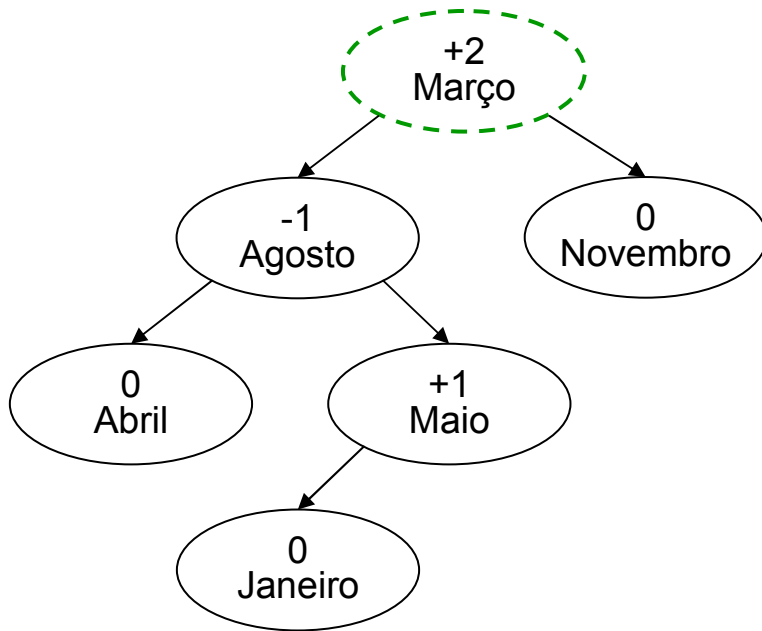


Depois do rebalanceamento



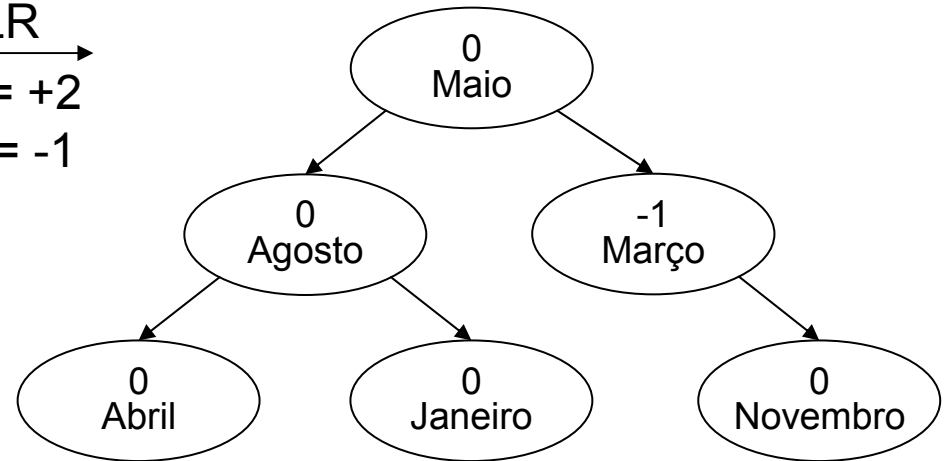
Inserção Janeiro

Depois da inserção



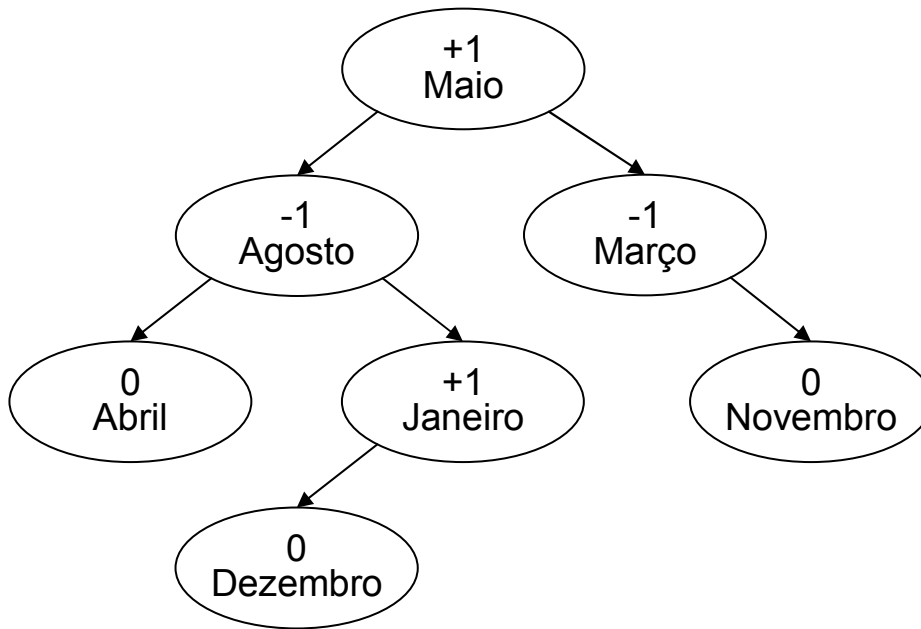
Depois do rebalanceamento

LR
A = +2
B = -1



Inserção Dezembro

Depois da inserção

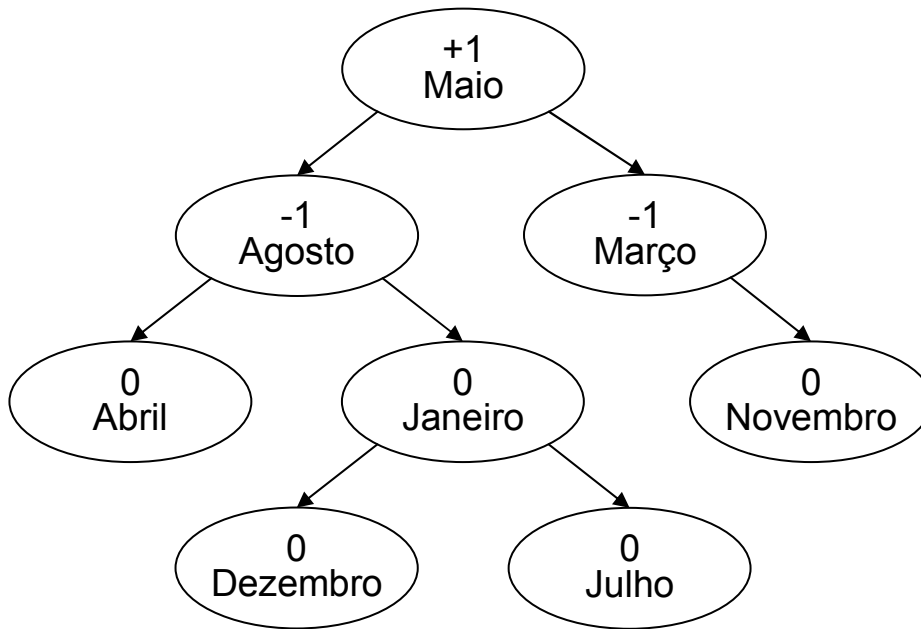


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Julho

Depois da inserção

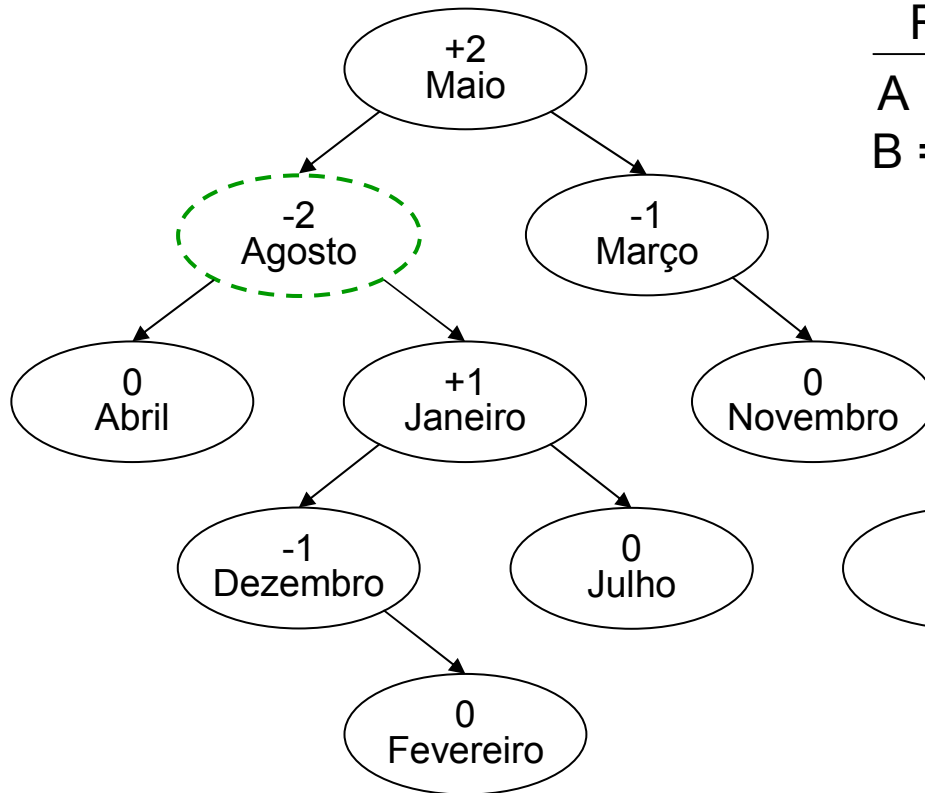


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

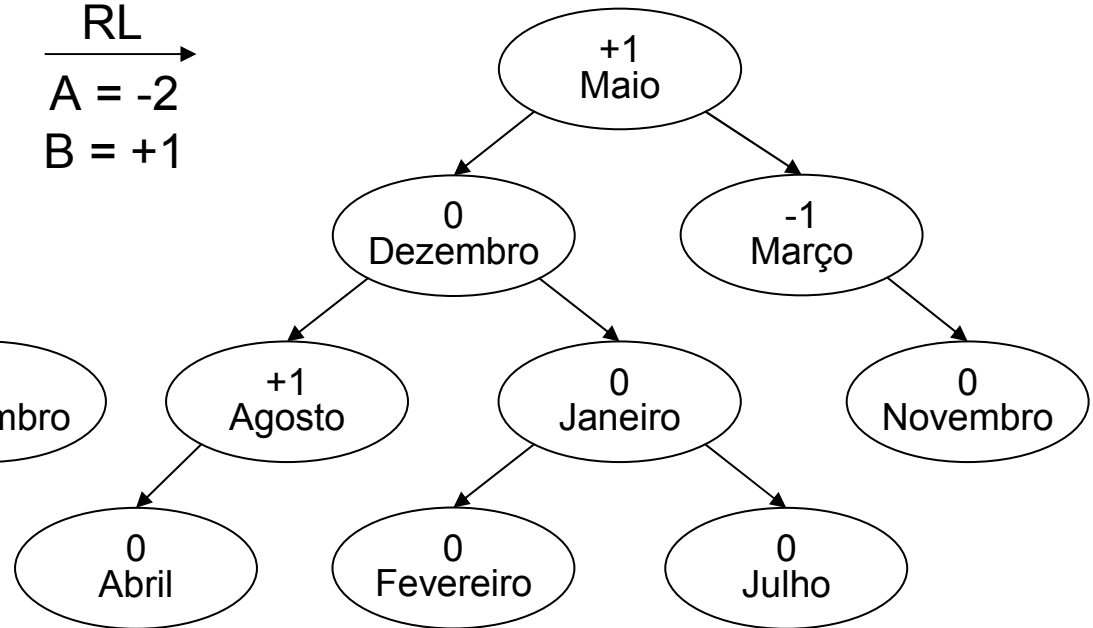
Inserção Fevereiro

Depois da inserção



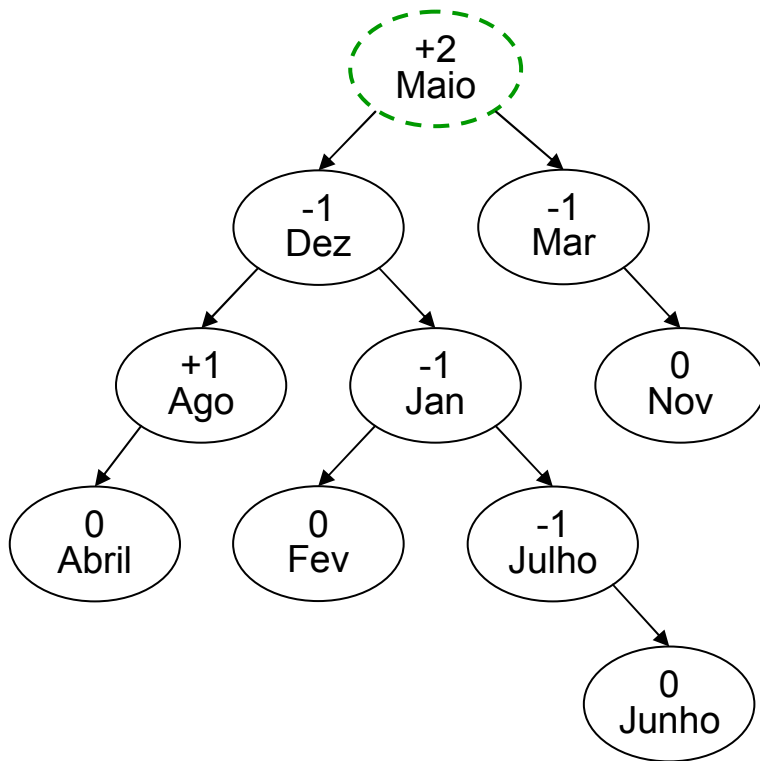
RL
A = -2
B = +1

Depois do rebalanceamento



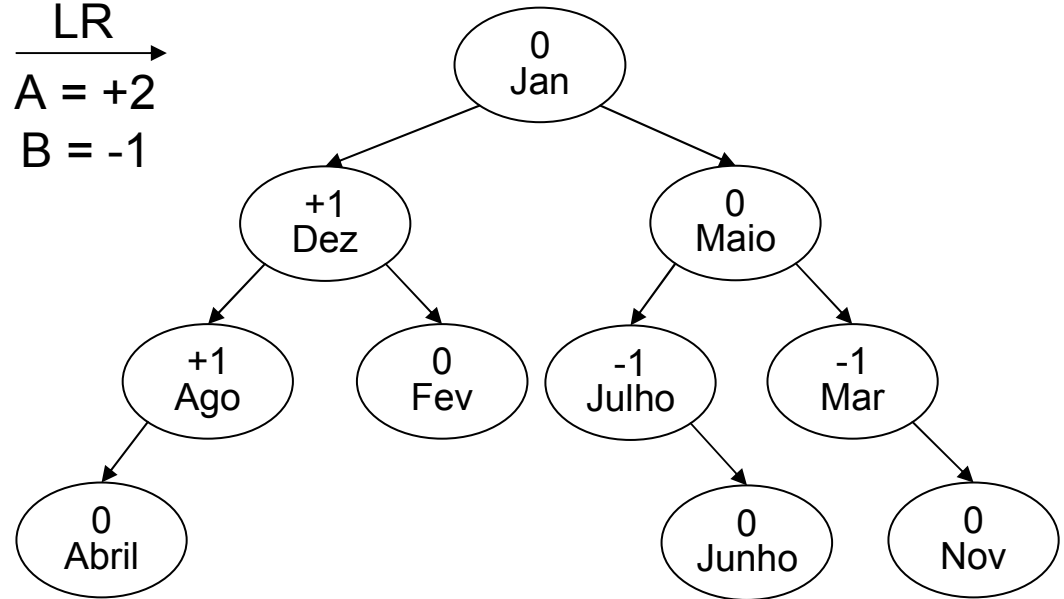
Inserção Junho

Depois da inserção



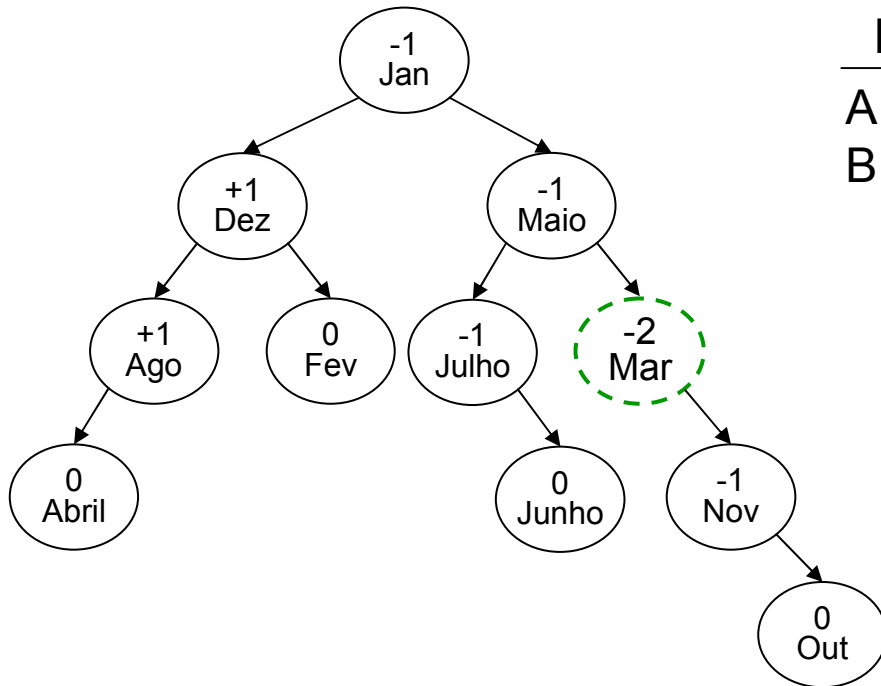
Depois do rebalanceamento

LR
A = +2
B = -1



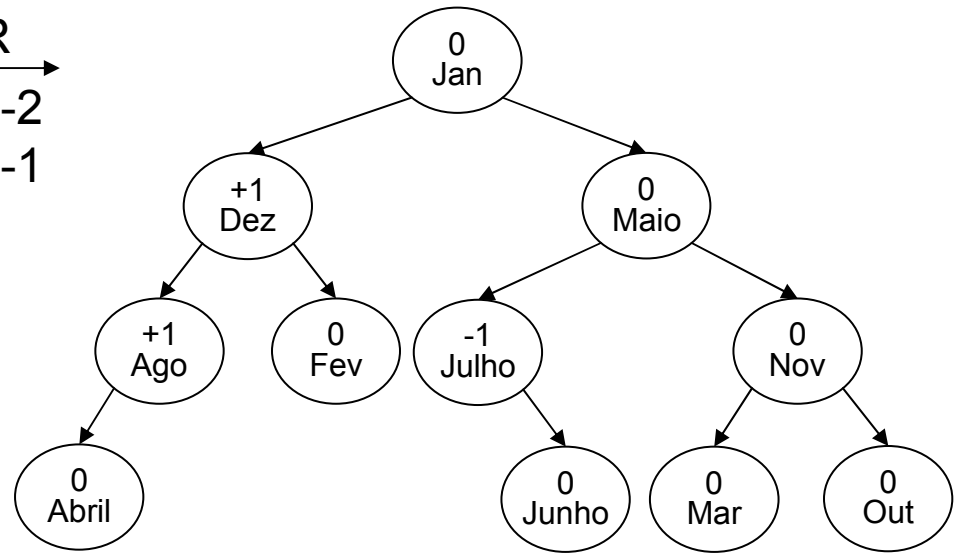
Inserção Outubro

Depois da inserção



RR
A = -2
B = -1

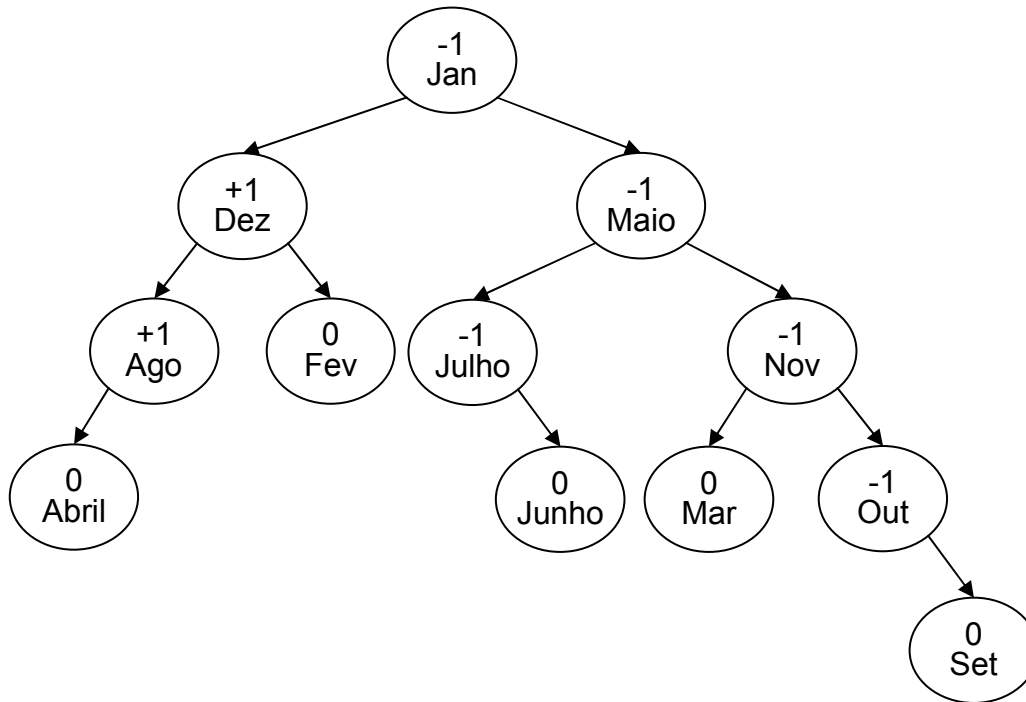
Depois do rebalanceamento



Inserção Setembro

Depois da inserção

Depois do rebalanceamento



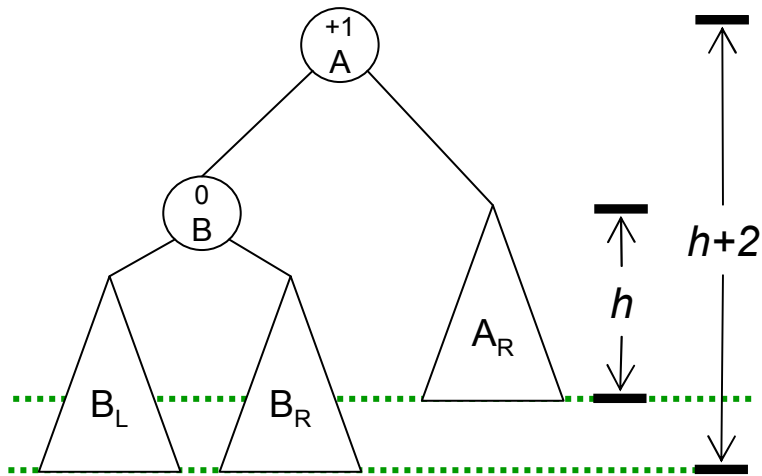
*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Rotações

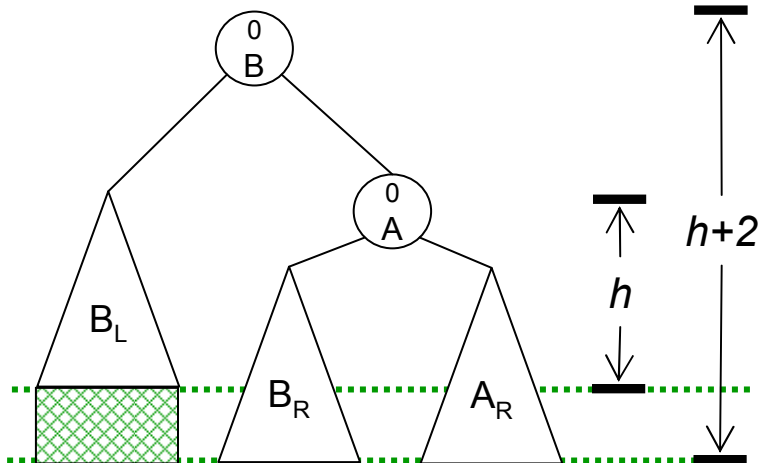
- ❑ O processo de rebalanceamento é conduzido utilizando 4 tipos de rotações: LL, RR, LR, RL
 - LL e RR são simétricas entre si assim como LR e RL
- ❑ As rotações são caracterizadas pelo ancestral mais próximo **A** do novo nó inserido **Y** cujo fator de balanceamento passa a ser +2 ou -2
 - LL: **Y** inserido na subárvore esquerda da subárvore esquerda de **A**
 - LR: **Y** inserido na subárvore direita da subárvore esquerda de **A**
 - RR: **Y** inserido na subárvore direita da subárvore direita de **A**
 - RL: **Y** inserido na subárvore esquerda da subárvore direita de **A**
- ❑ Seja **B** o filho de **A** no qual ocorreu a inserção de **Y**
 - LL ($A = +2$; $B = +1$) RR ($A = -2$; $B = -1$)
 - LR ($A = +2$; $B = -1$) RL ($A = -2$; $B = +1$)
- ❑ **C** é o filho de **B** no qual ocorreu a inserção de **Y**

Rotação LL

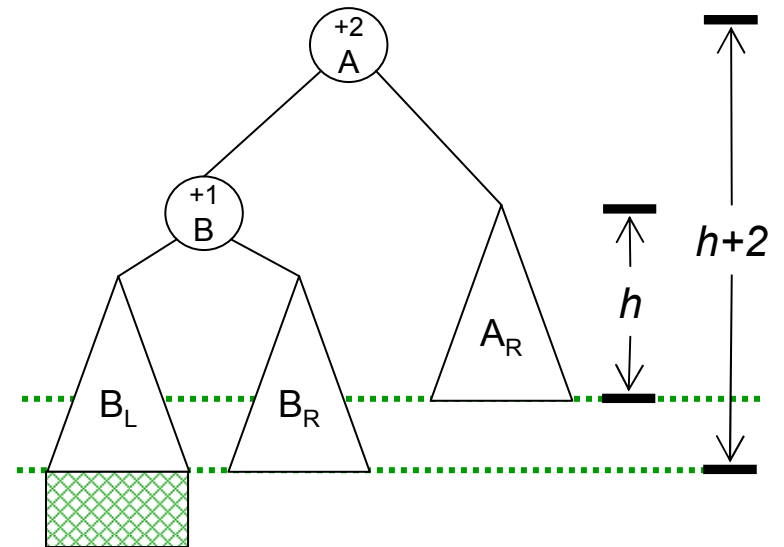
Subárvore balanceada



Subárvore rebalanceada

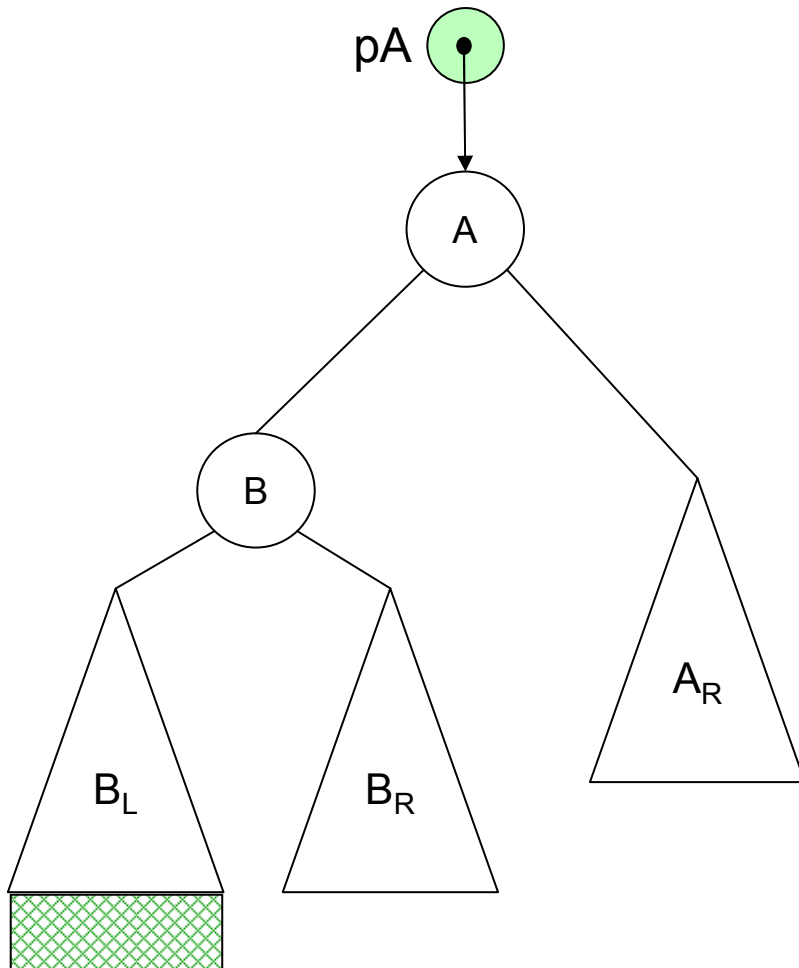


Subárvore desbalanceada após inserção



Altura de B_L aumenta para $h+1$

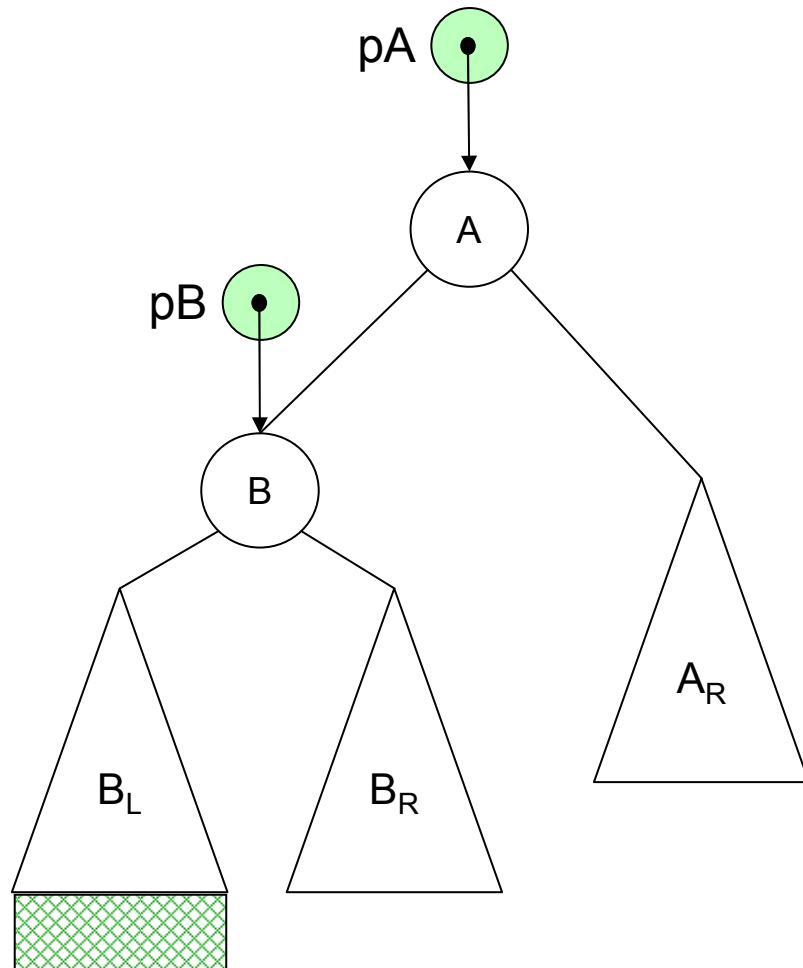
Rotação LL



□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B :

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode}$;
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode}$;
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pA$;
- $pA = pB$;

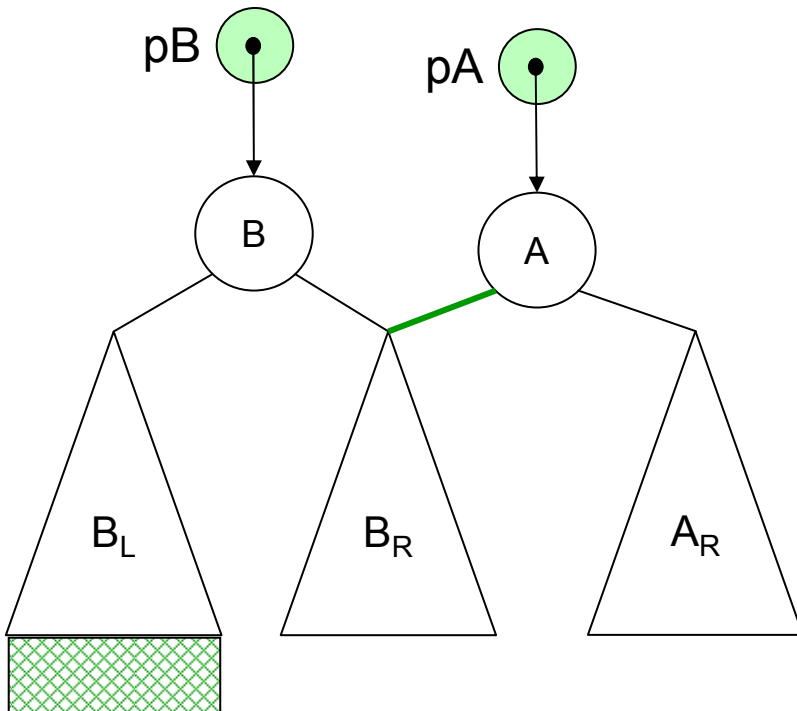
Rotação LL



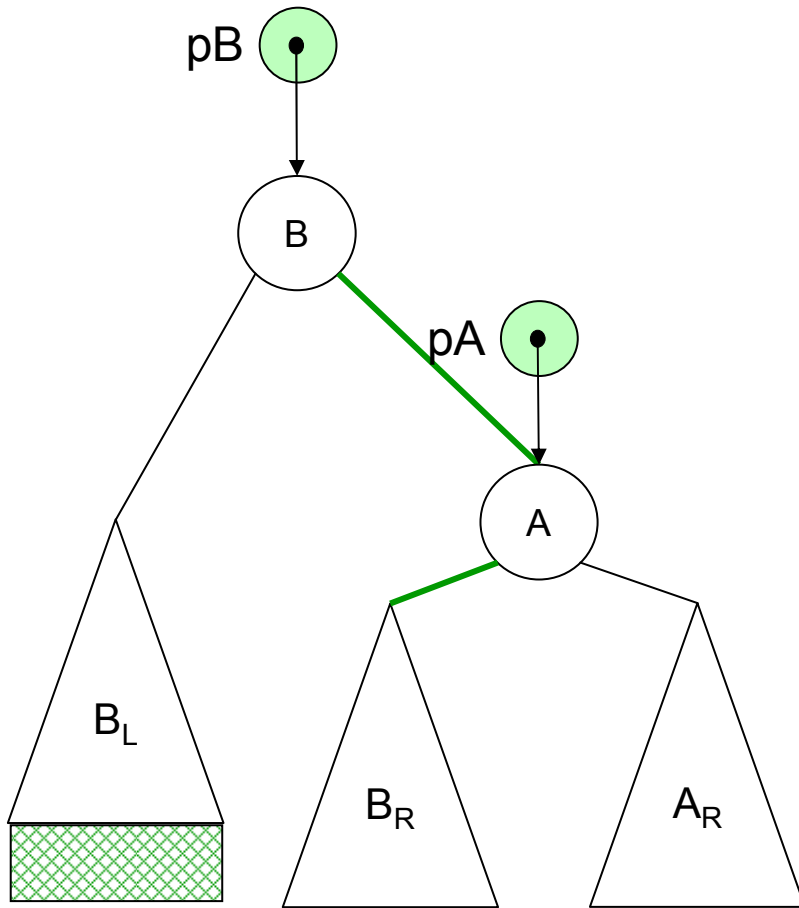
- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:
 - **pB = pA->LeftNode;**
 - pA->LeftNode = pB->RightNode;
 - pB->RightNode = pA;
 - pA = pB;

Rotação LL

- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:
 - pB = pA->LeftNode;
 - pA->LeftNode = pB->RightNode;**
 - pB->RightNode = pA;
 - pA = pB;



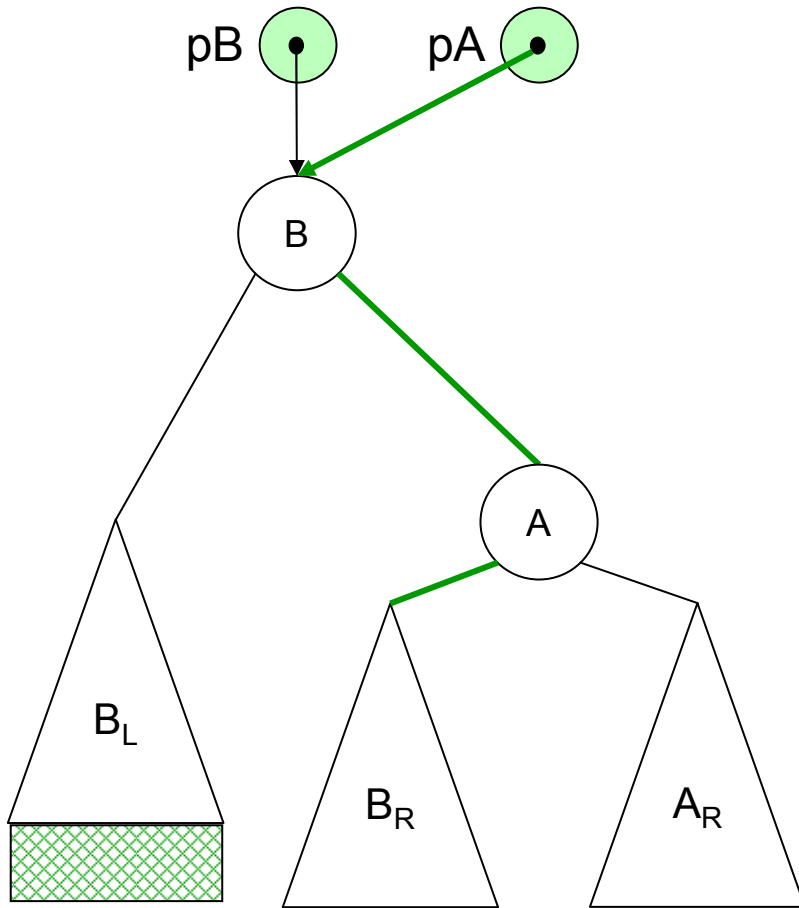
Rotação LL



□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- **$pB \rightarrow \text{RightNode} = pA;$**
- $pA = pB;$

Rotação LL

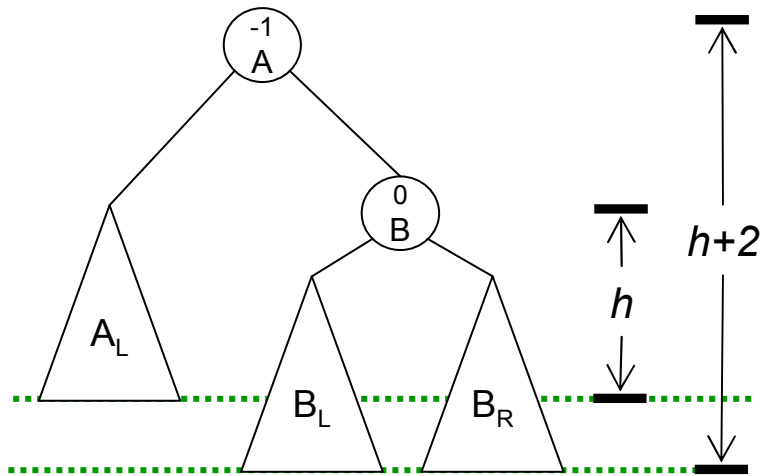


□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B :

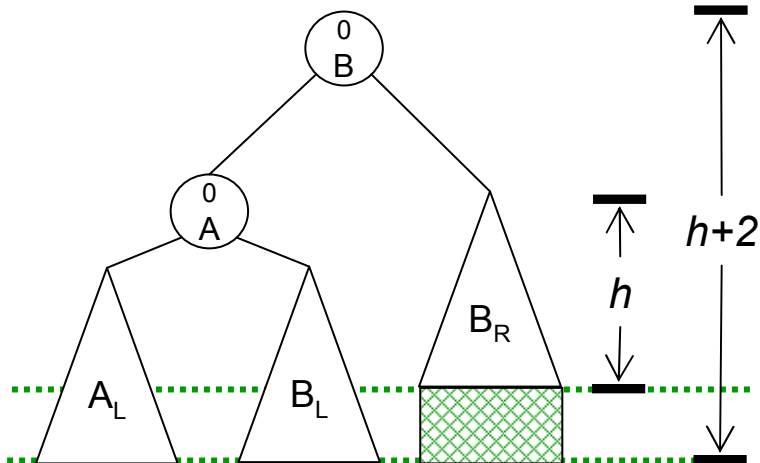
- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- **$pA = pB;$**

Rotação RR

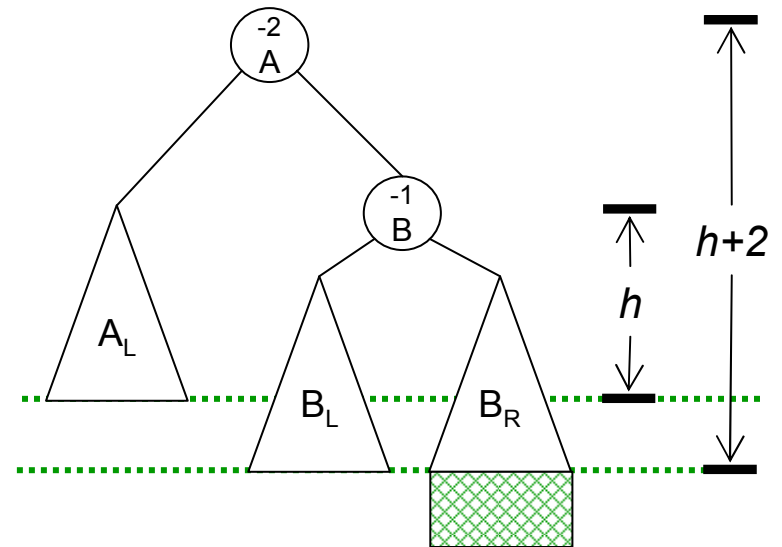
Subárvore balanceada



Subárvore rebalanceada

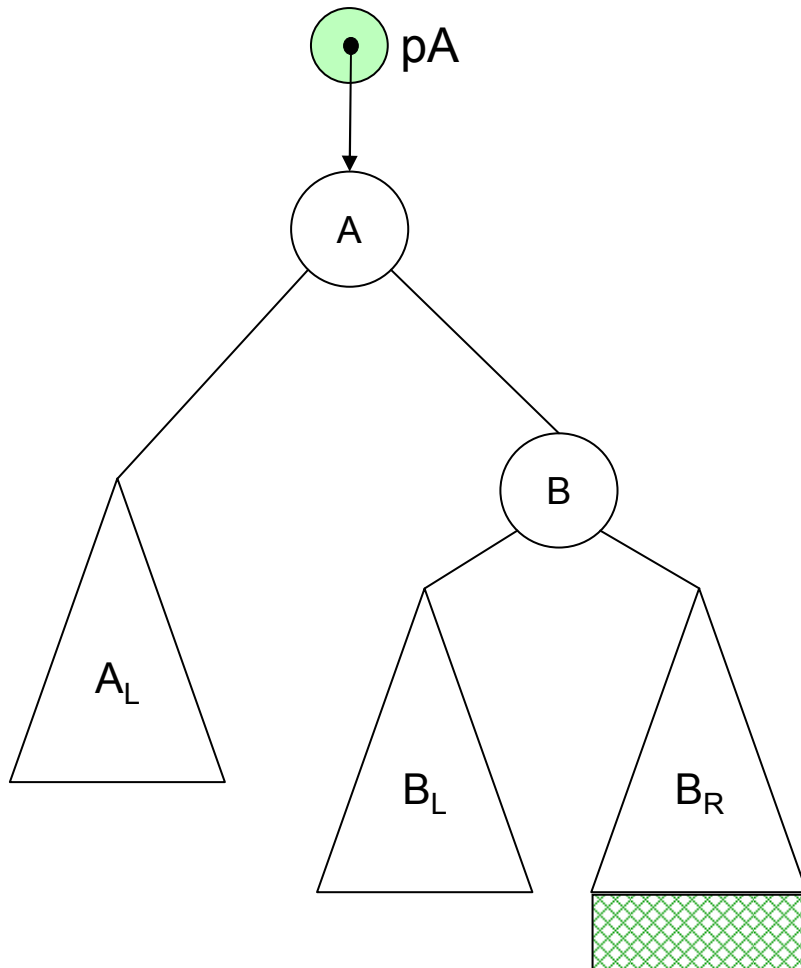


Subárvore desbalanceada após inserção



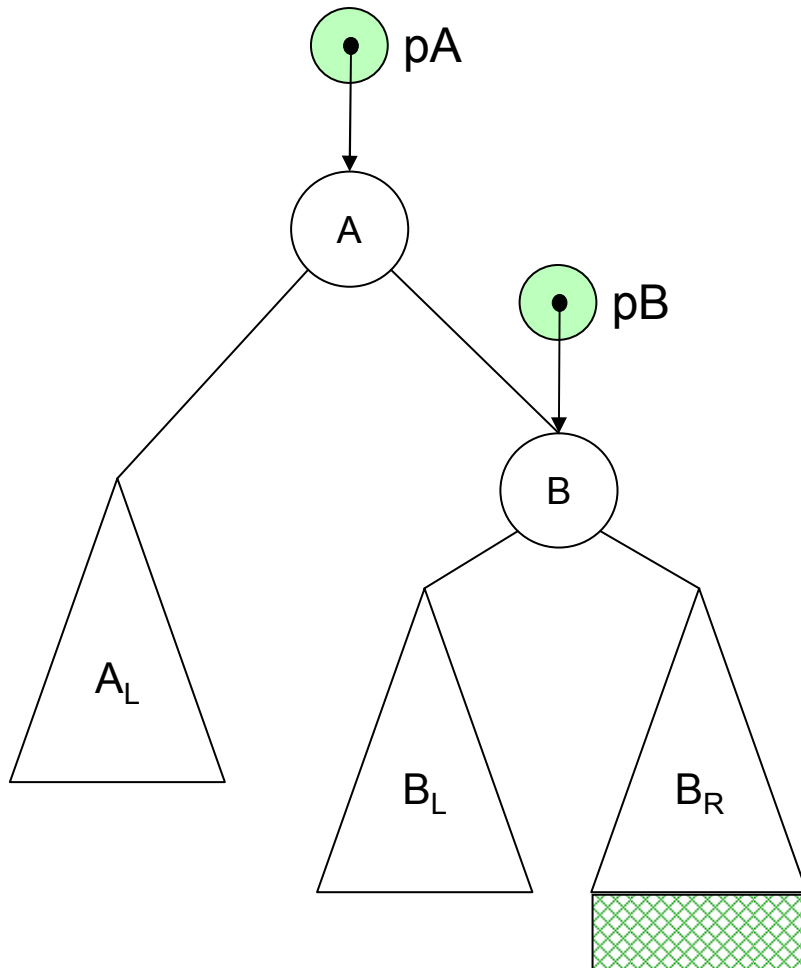
Altura de B_R aumenta para $h+1$

Rotação RR



- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B :
 - $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
 - $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
 - $pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$
 - $pA = pB;$

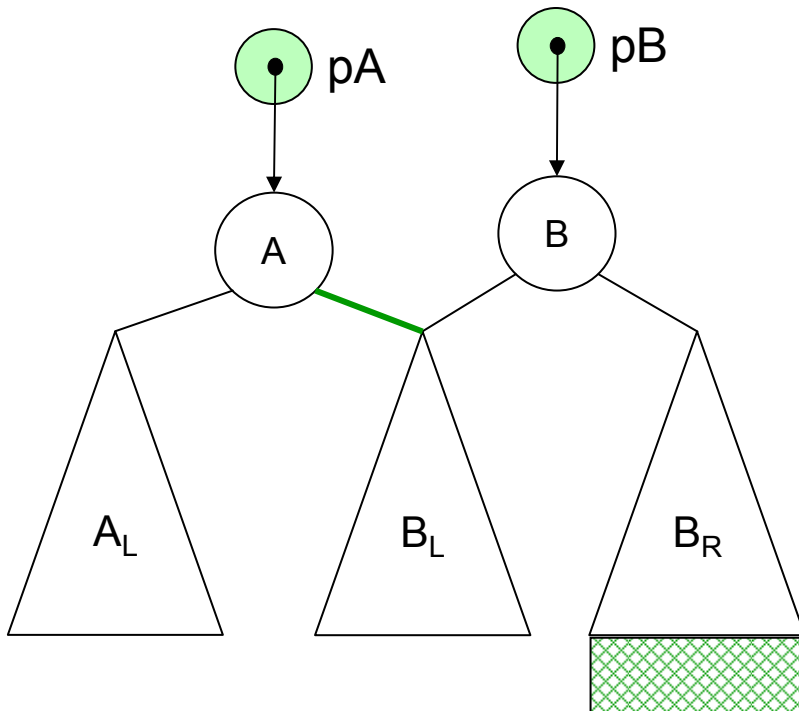
Rotação RR



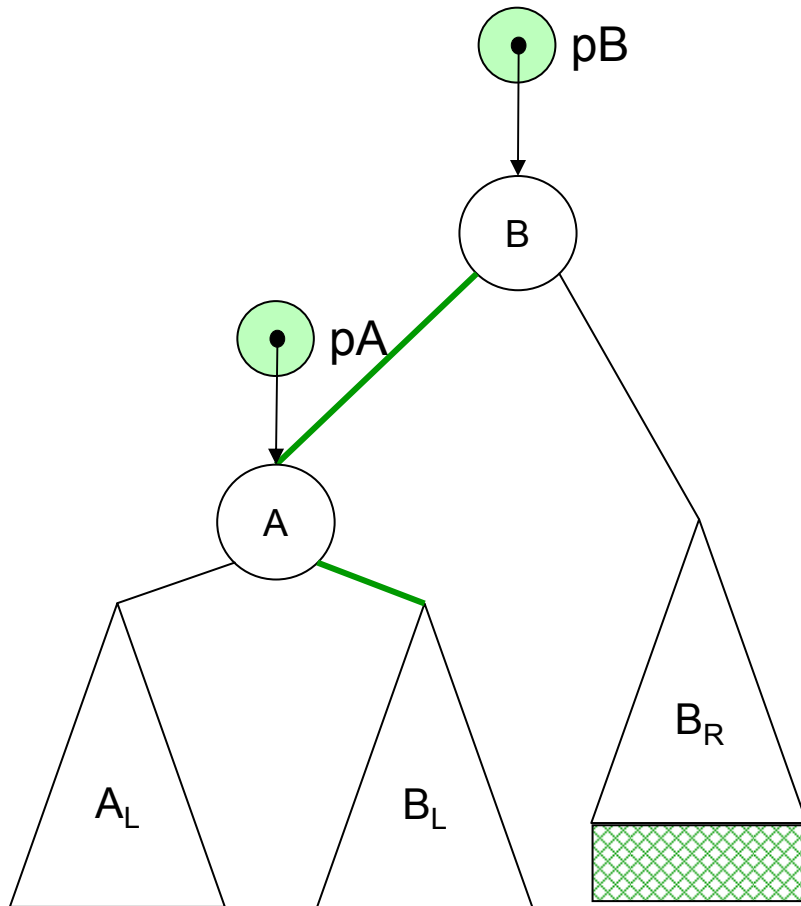
- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:
 - **pB = pA->RightNode;**
 - pA->RightNode = pB->LeftNode;
 - pB->LeftNode = pA;
 - pA = pB;

Rotação RR

- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:
 - pB = pA->RightNode;
 - pA->RightNode = pB->LeftNode;**
 - pB->LeftNode = pA;
 - pA = pB;

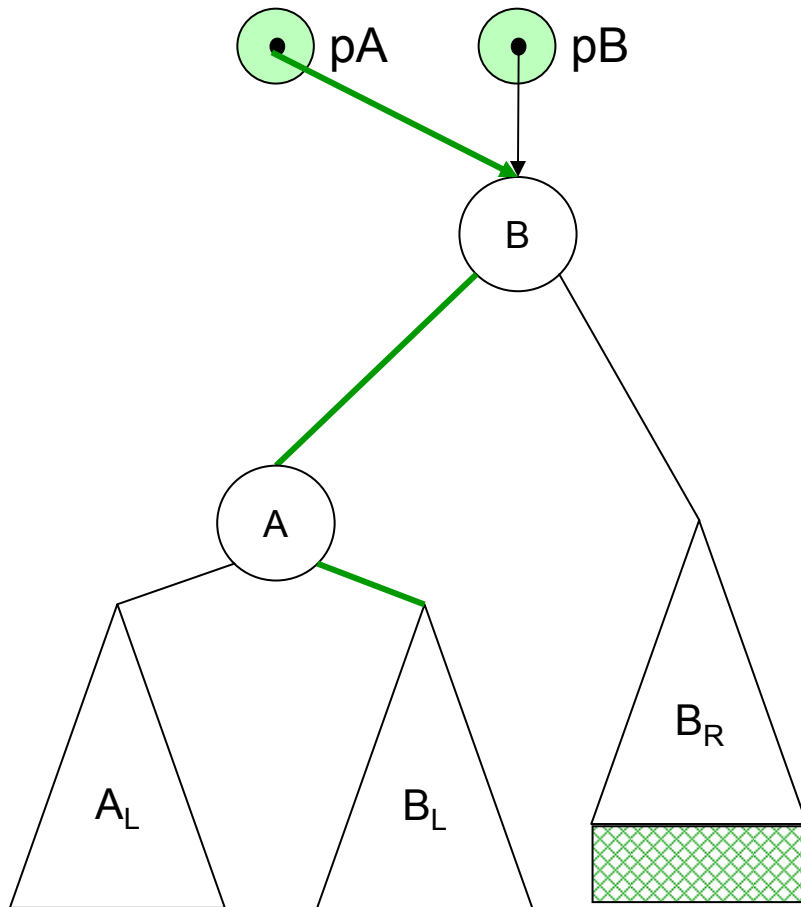


Rotação RR



- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:
 - $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
 - $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
 - **$pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$**
 - $pA = pB;$

Rotação RR

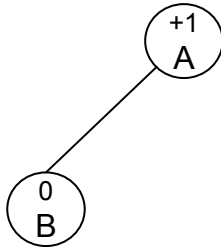


□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B :

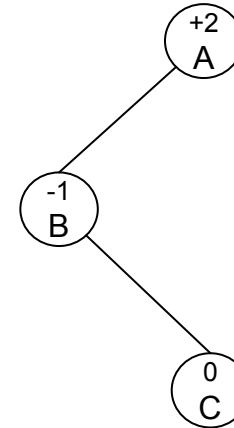
- $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
- $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$
- **$pA = pB;$**

Rotação LR(a)

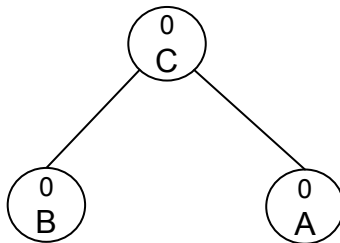
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

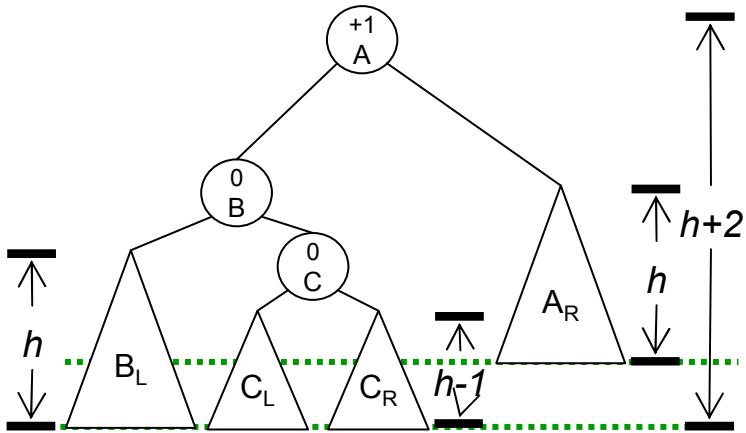


Subárvore rebalanceada

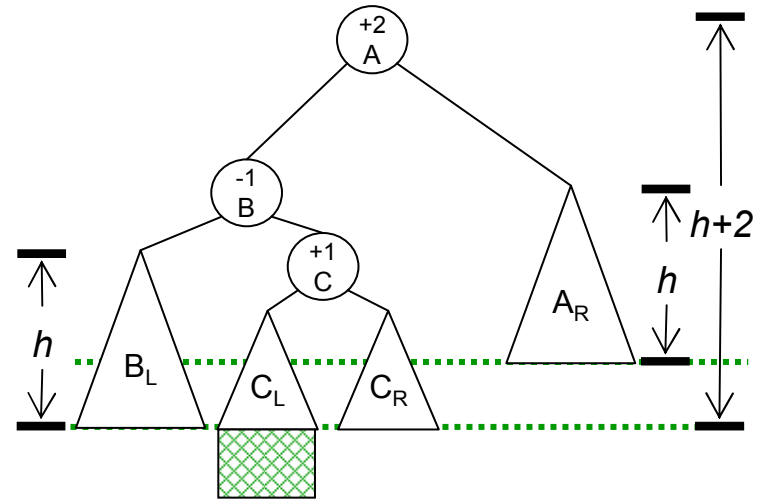


Rotação LR(b)

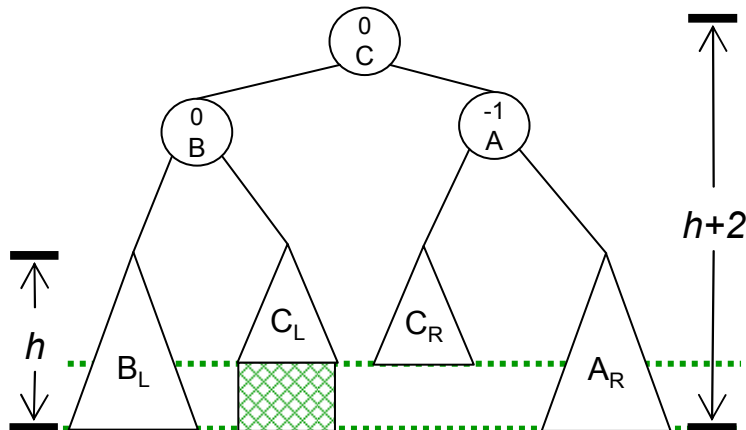
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

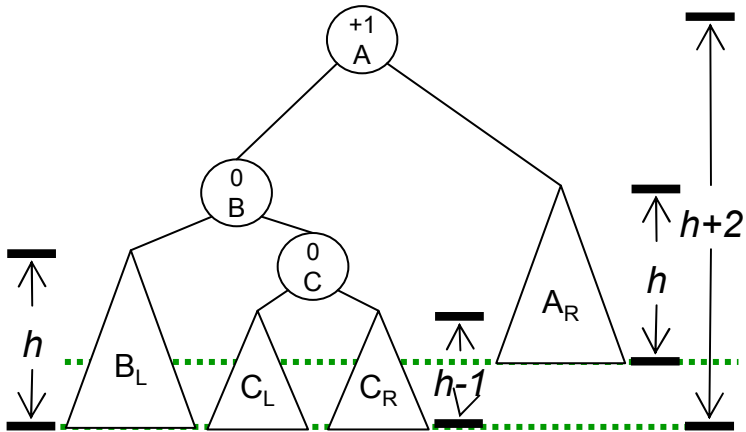


Subárvore rebalanceada

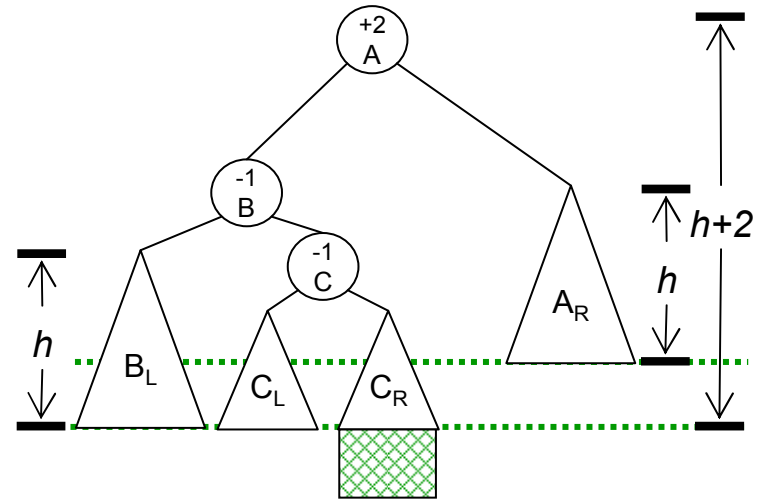


Rotação LR(c)

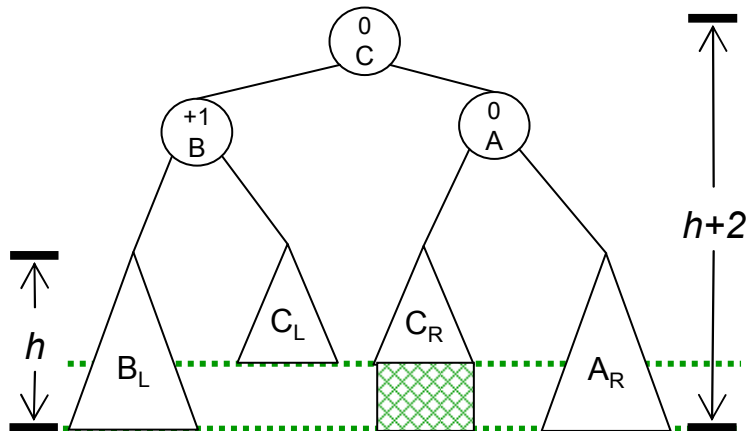
Subárvore balanceada



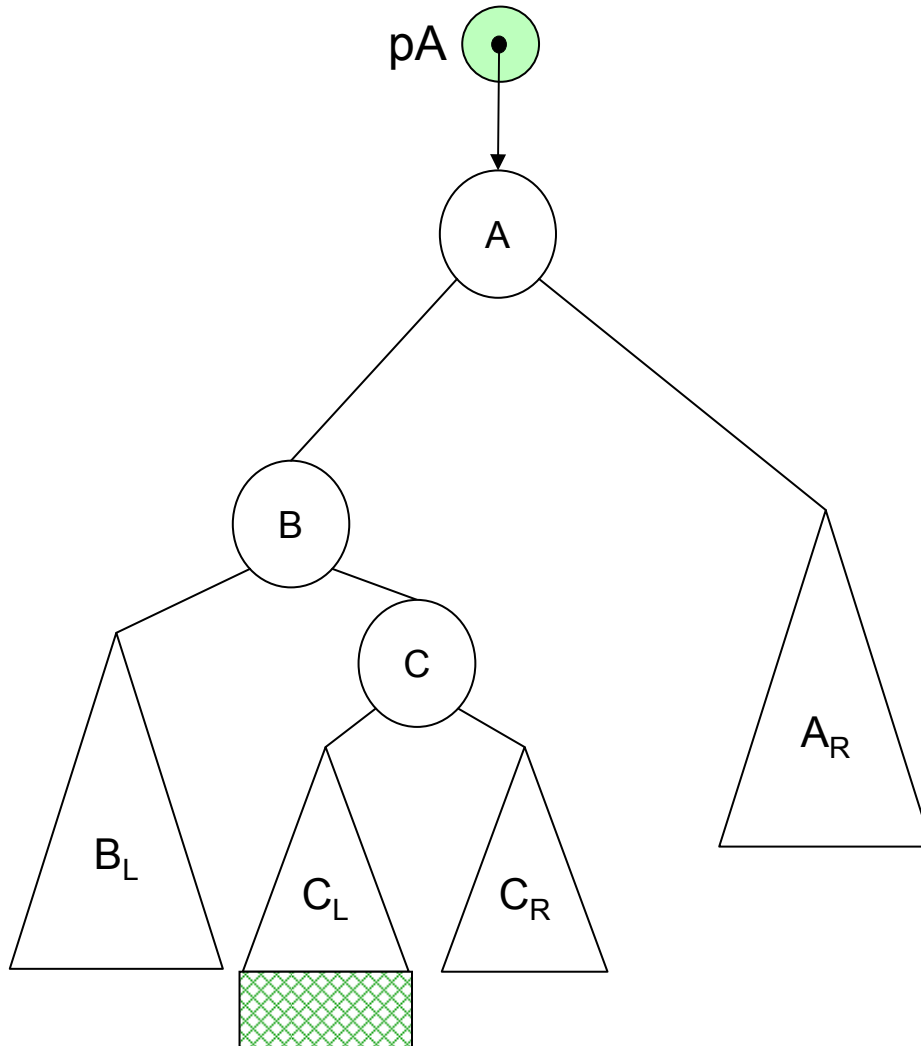
Subárvore desbalanceada após inserção



Subárvore rebalanceada



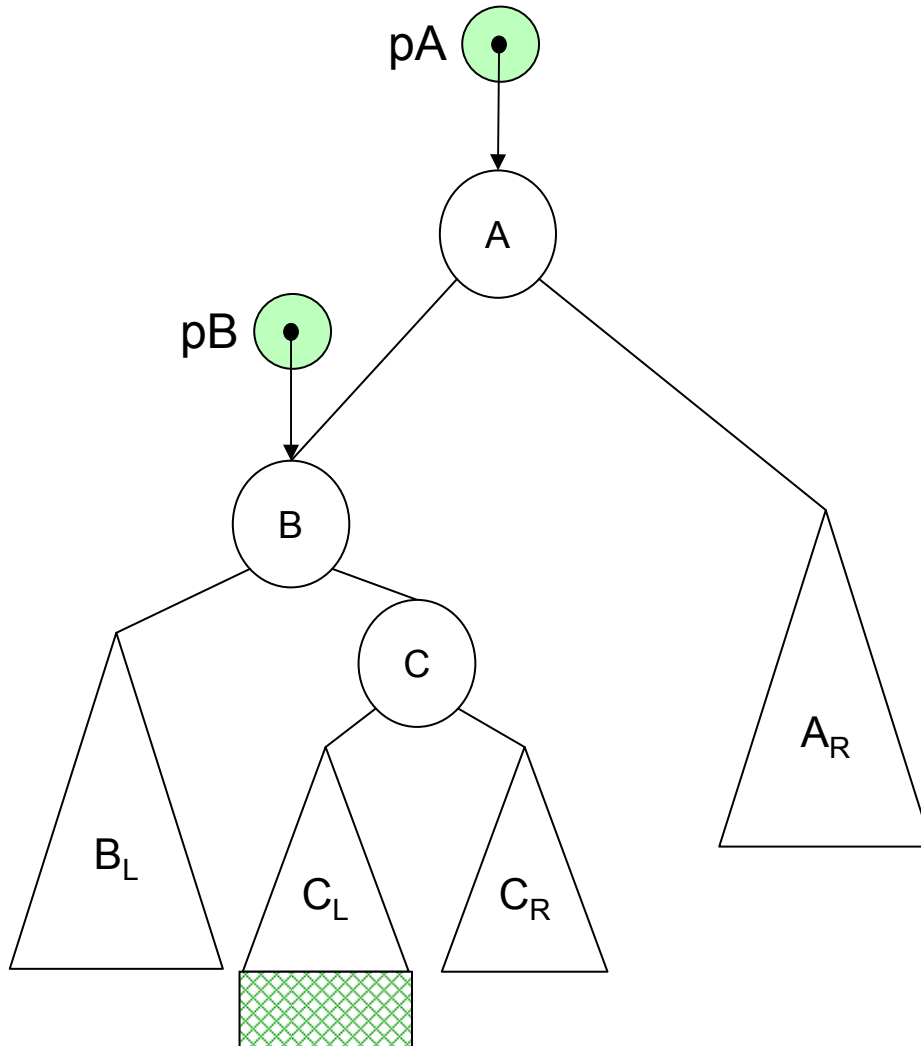
Rotação LR



□ Assumindo pA , pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A , B e C :

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

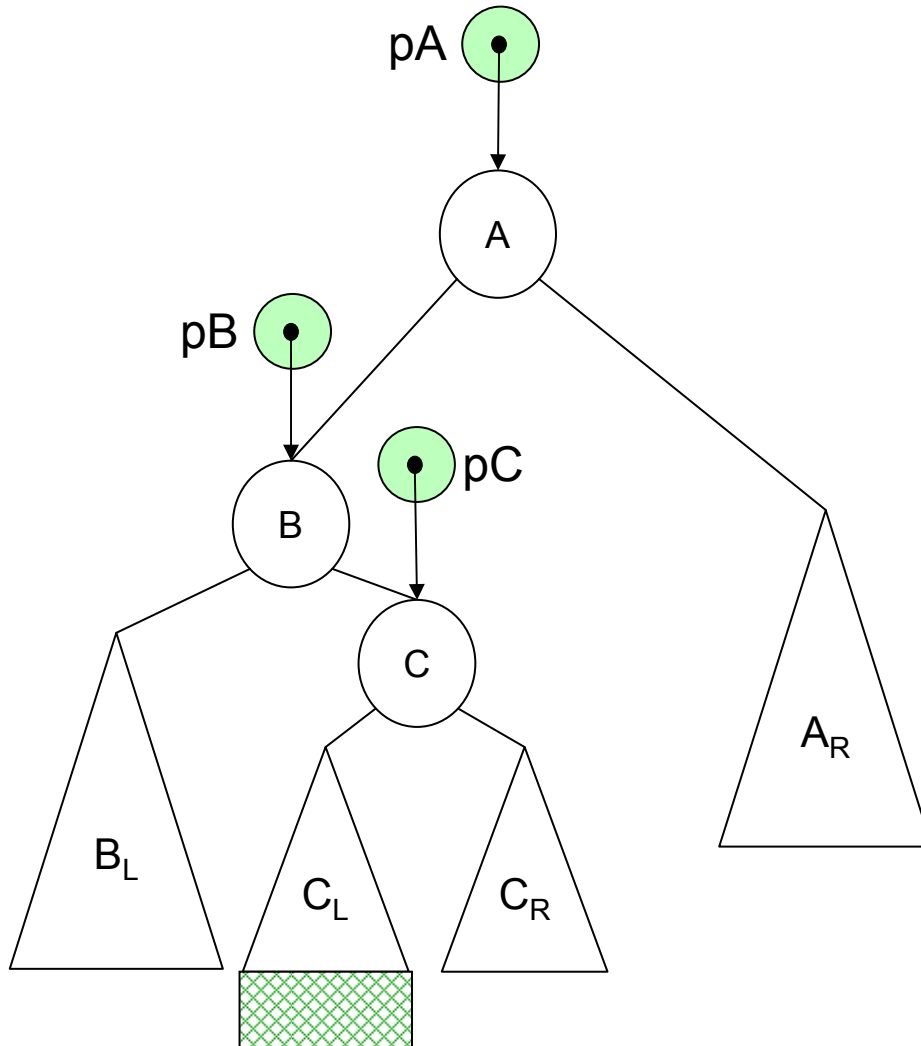
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- **pB = pA->LeftNode;**
- pC = pB->RightNode;
- pB->RightNode = pC->LeftNode;
- pC->LeftNode = pB;
- pA->LeftNode = pC->RightNode;
- pC->RightNode = pA;
- pA = pC;

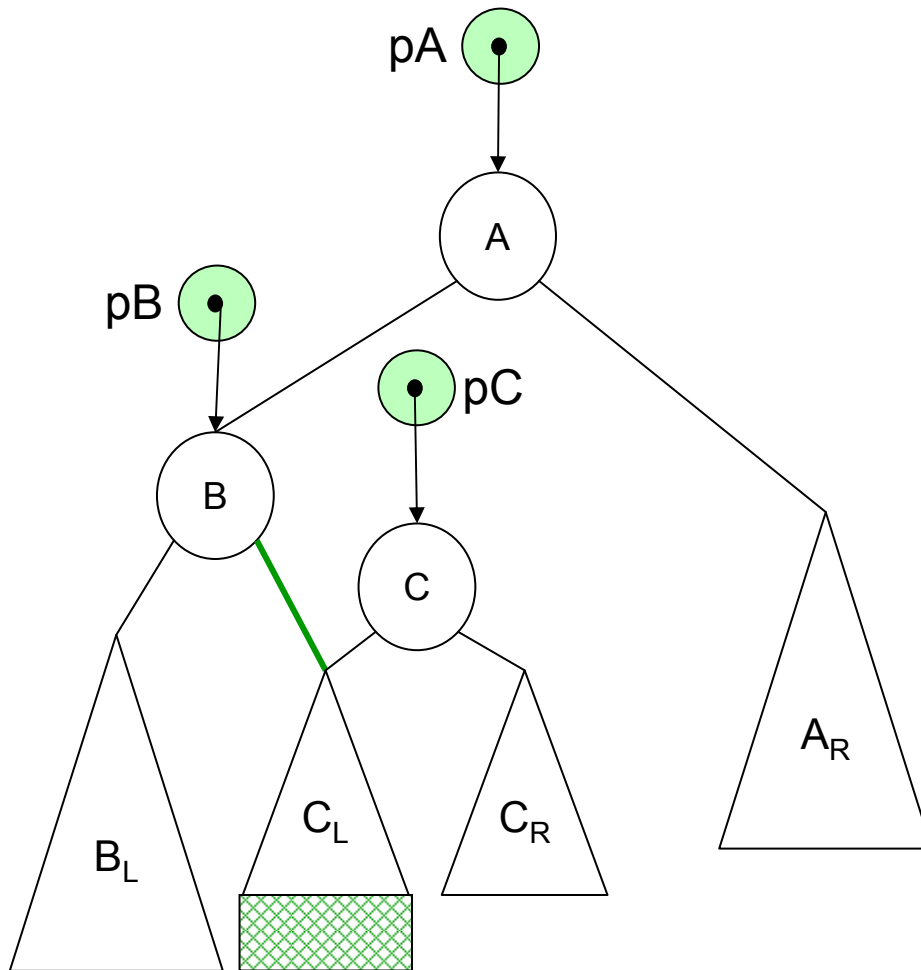
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- **$pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$**
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

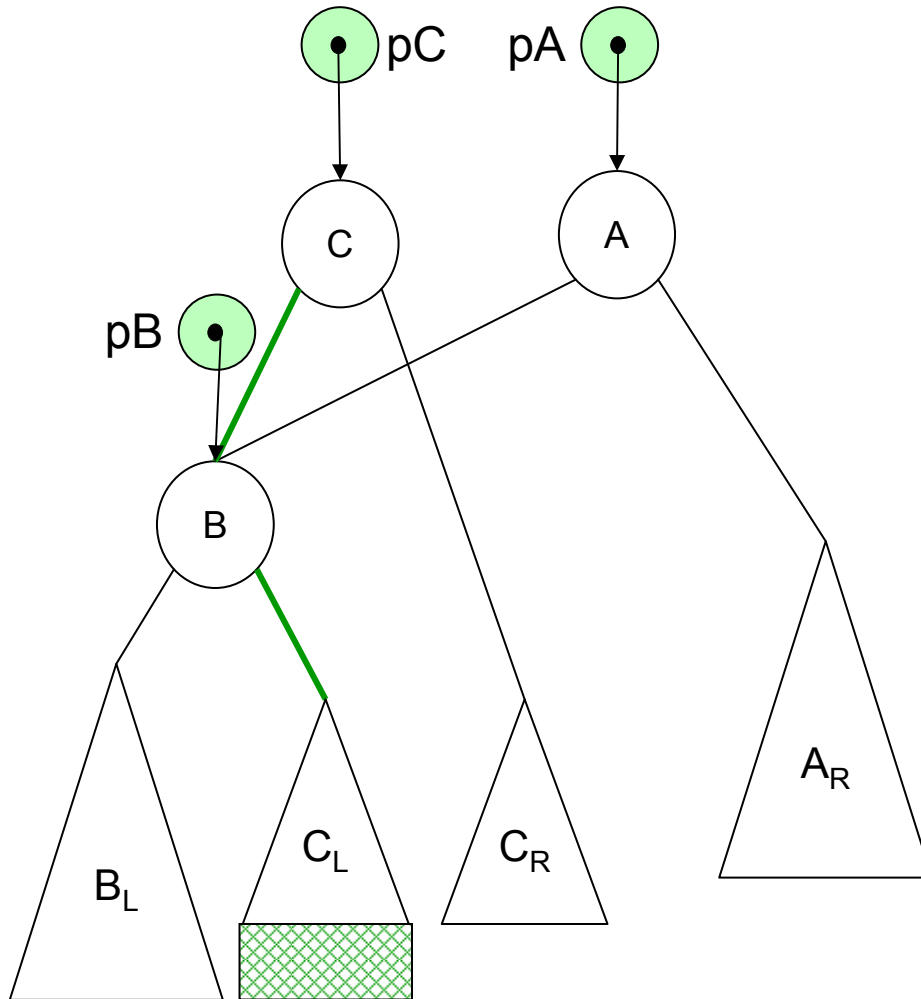
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- **$pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$**
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

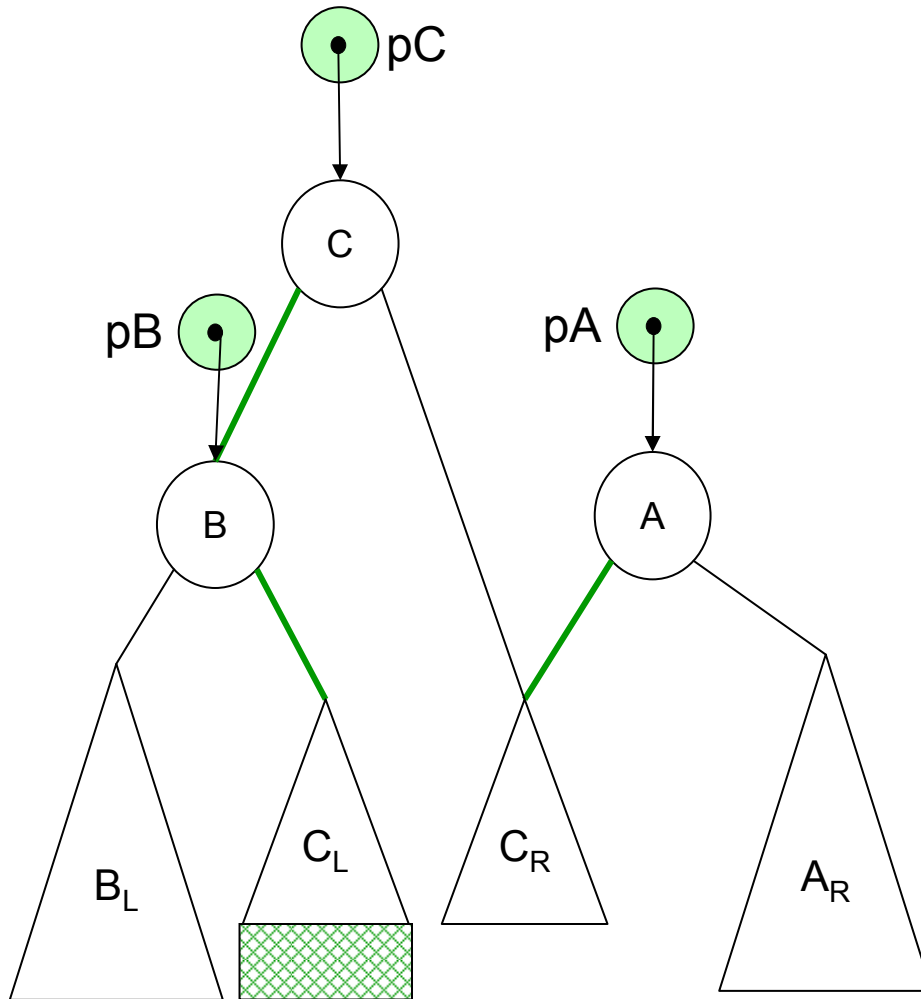
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- **$pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$**
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

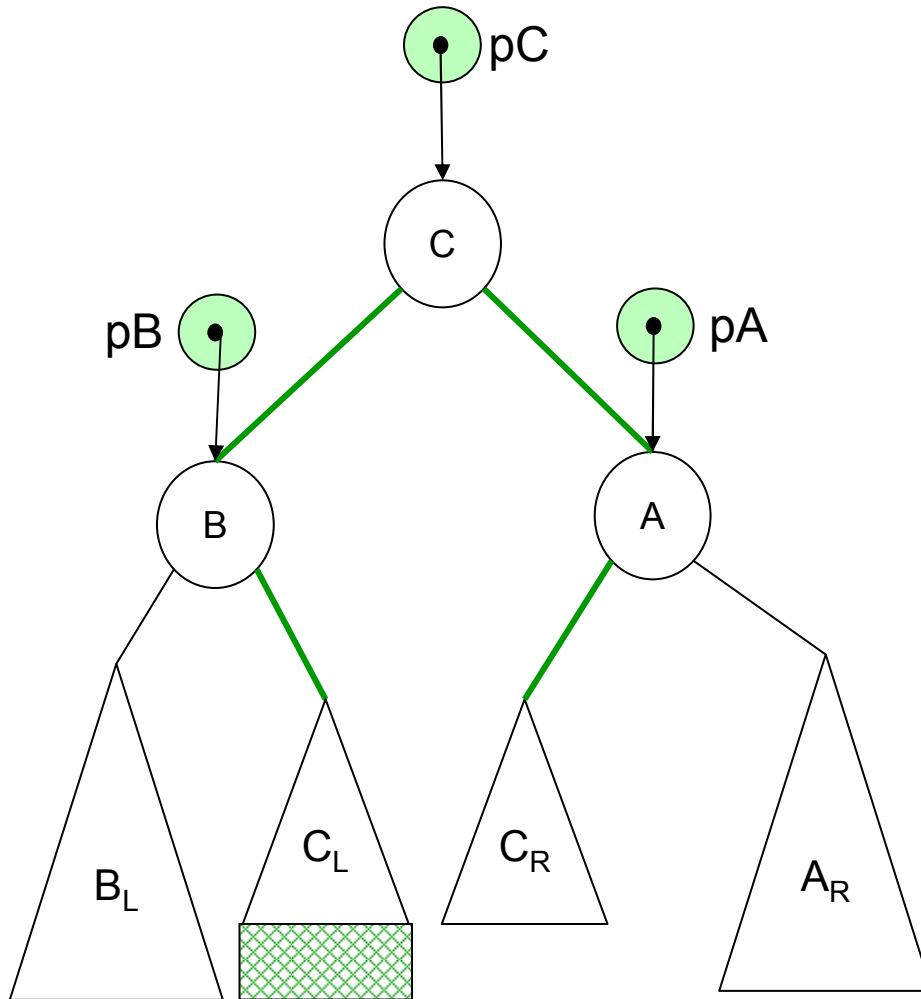
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- **$pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$**
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

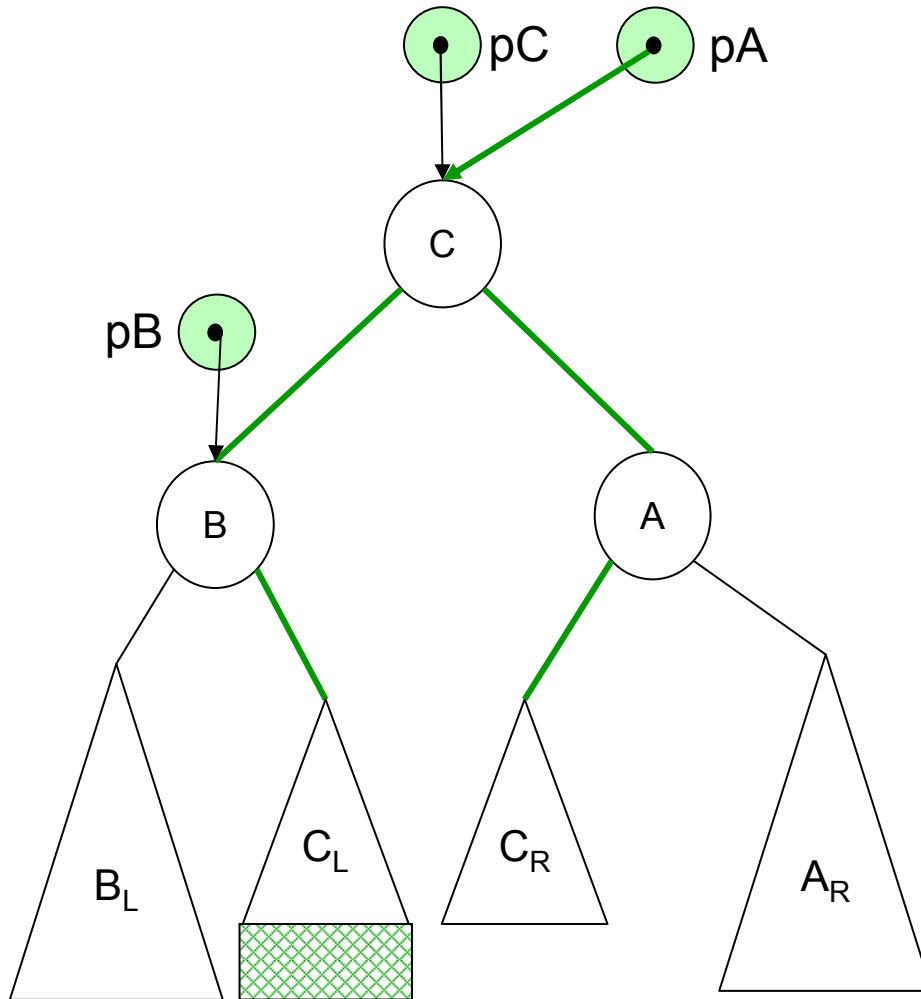
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- **$pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$**
- $pA = pC;$

Rotação LR

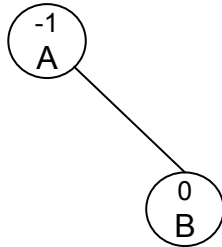


□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

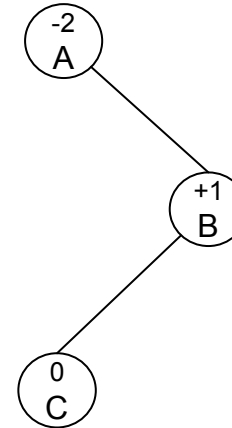
- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- **$pA = pC;$**

Rotação RL(a)

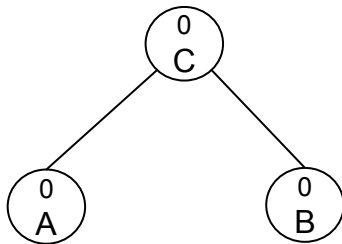
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

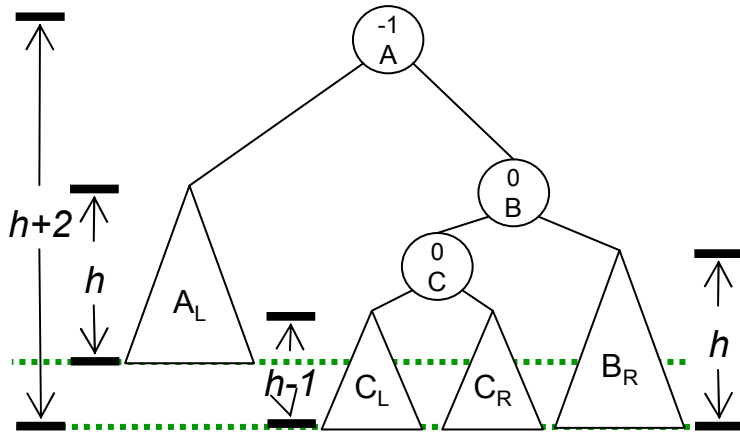


Subárvore rebalanceada

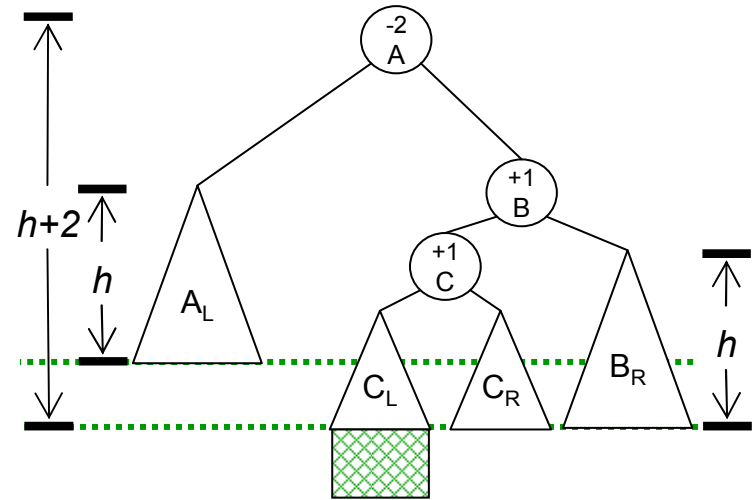


Rotação RL(b)

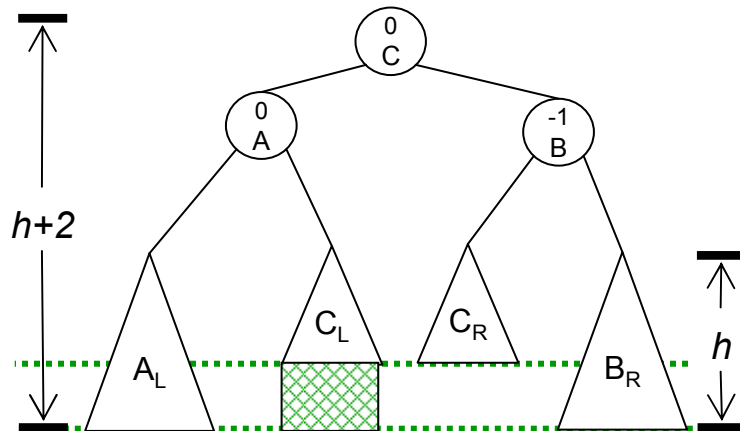
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

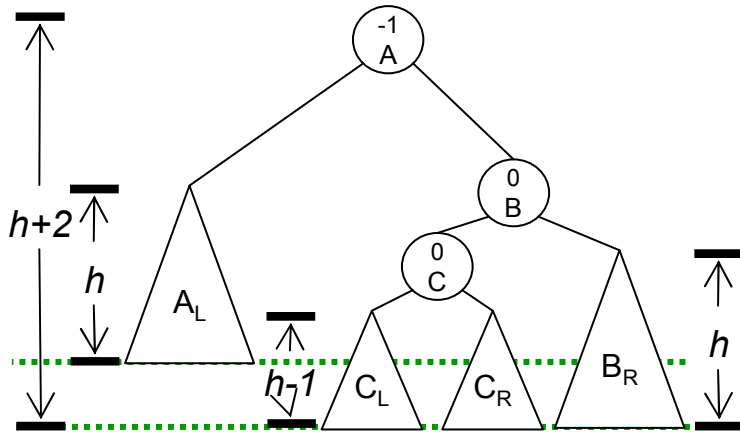


Subárvore rebalanceada

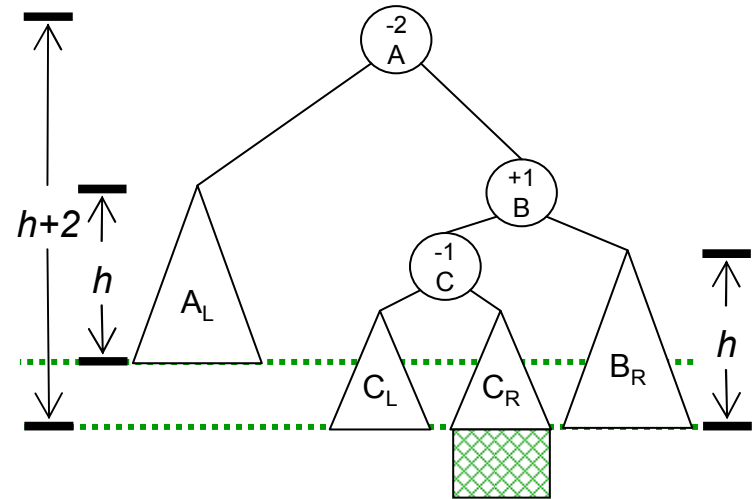


Rotação RL(c)

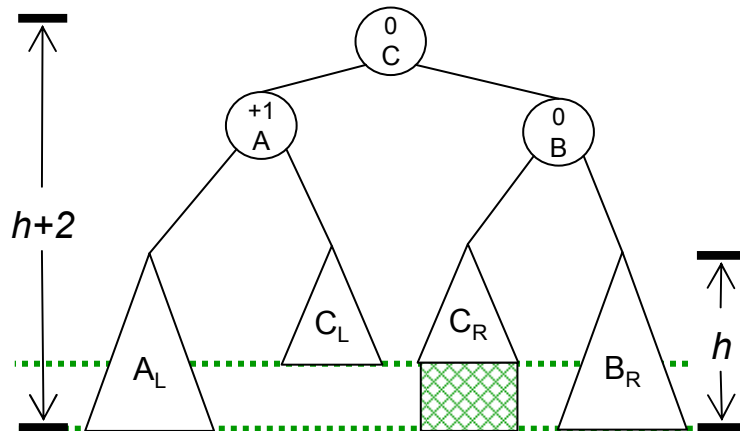
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

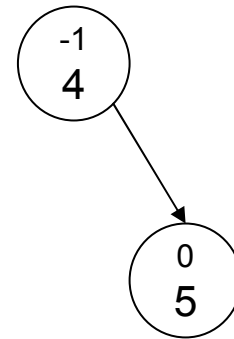


Subárvore rebalanceada



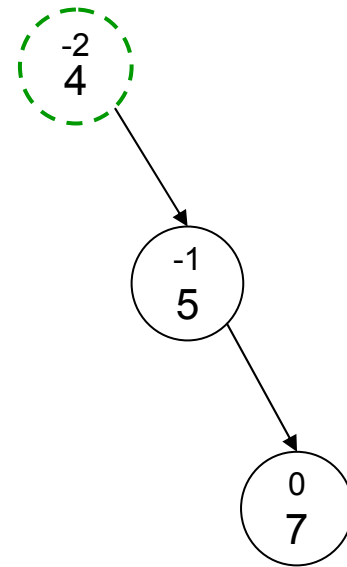
Inserções

□ Inserir $x=7$



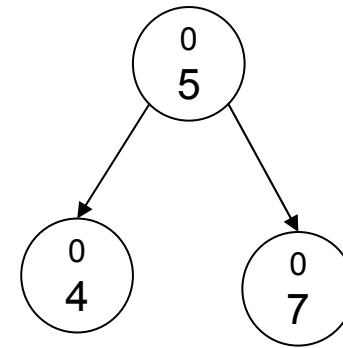
Inserções

- ❑ Inserido $x=7$
- ❑ A inserção produz uma árvore desbalanceada...



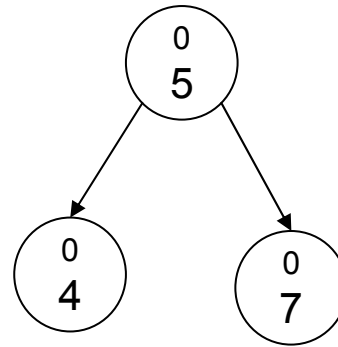
Inserções

- ❑ Inserido $x=7$
- ❑ A inserção produz uma árvore desbalanceada, cujo balanceamento envolve uma rotação RR



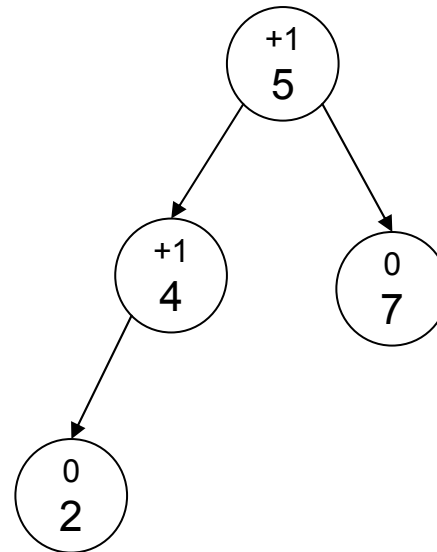
Inserções

❑ Inserir $x=2$



Inserções

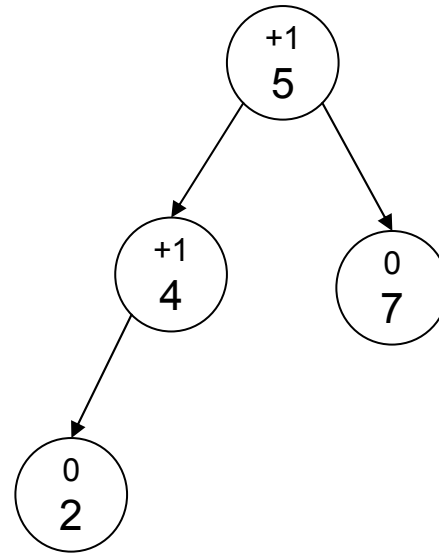
❑ Inserido $x=2$



Inserções

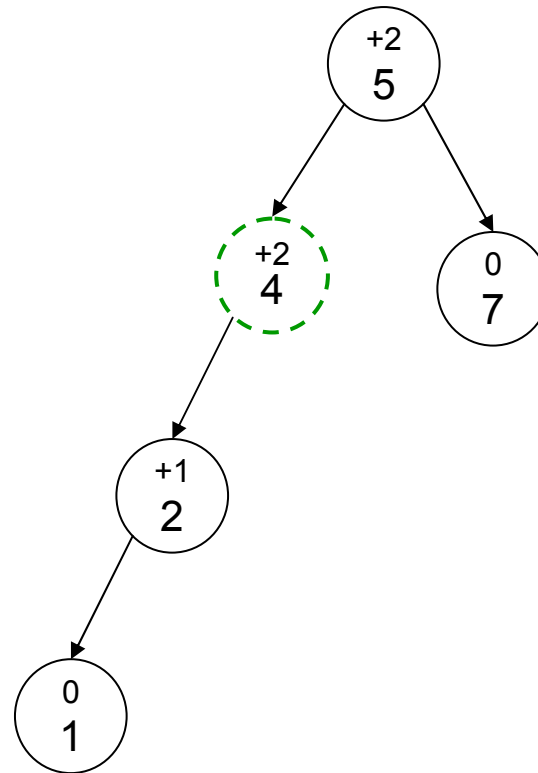
☐ Inserido $x=2$

☐ Inserir $x=1$



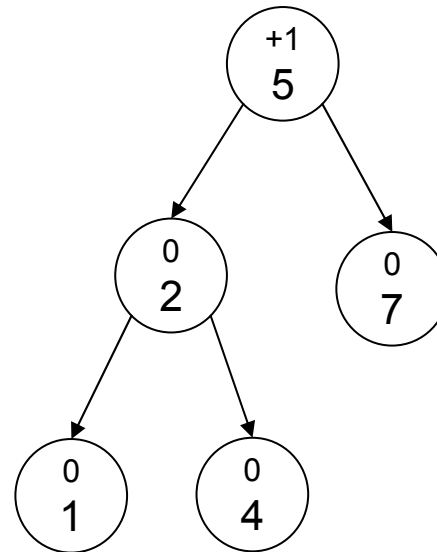
Inserções

- ❑ Inserido $x=2$
- ❑ Inserido $x=1$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 4...



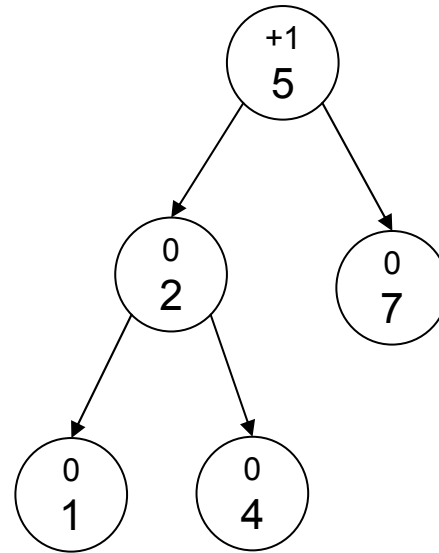
Inserções

- ❑ Inserido $x=2$
- ❑ Inserido $x=1$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 4, que é corrigido por uma rotação LL



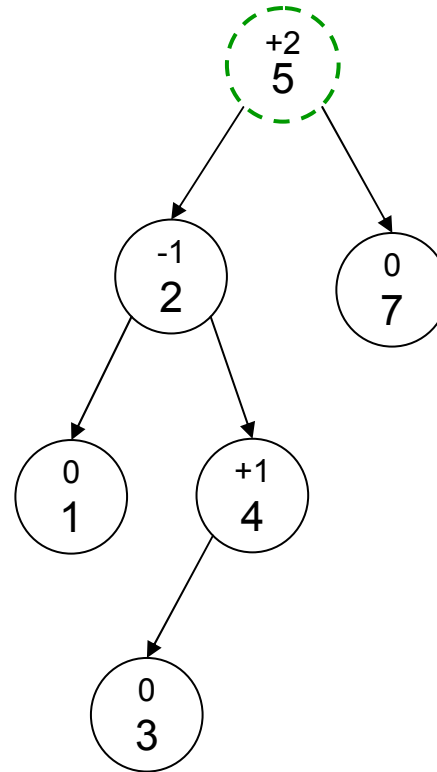
Inserções

❑ Inserir $x=3$



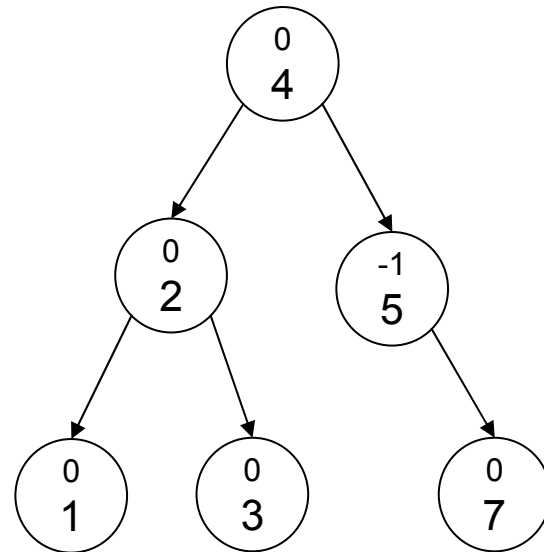
Inserções

- ❑ Inserido $x=3$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5...



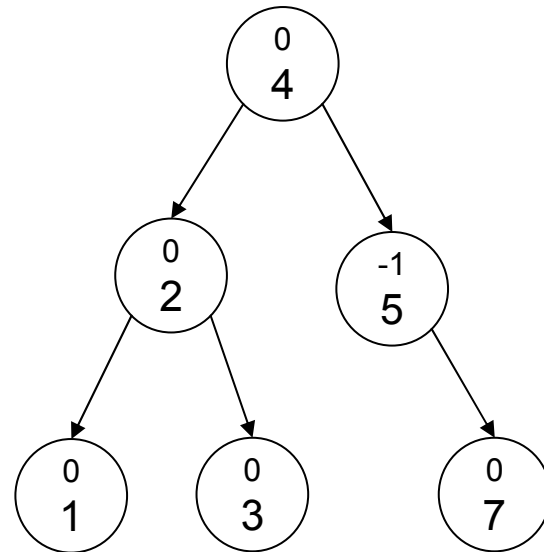
Inserções

- ❑ Inserido $x=3$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5, que é corrigido por uma rotação LR



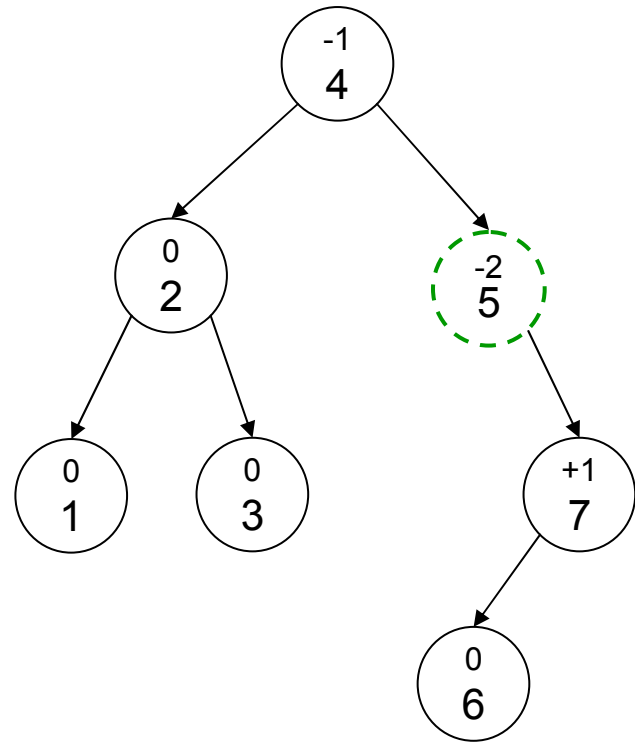
Inserções

❑ Inserir $x=6$



Inserções

- ❑ Inserido $x=6$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5...



Inserções

- ❑ Inserido $x=6$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5, que é corrigido por uma rotação RL

