

# Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

24. Januar 2019

# Kurzes Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Wiederholung	6
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln . . . . .	6
1.2. Komplexe Zahlen . . . . .	6
1.3. Sinus Kardinalis . . . . .	8
I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen	9
2. Verallgemeinerte Funktionen	10
2.1. Heaviside-Funktion . . . . .	10
2.2. Dirac-Distribution . . . . .	11
2.3. Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	11
2.4. Faltung . . . . .	12
2.5. Faltung mit $\sigma(t)$ . . . . .	12
2.6. Faltung mit $\delta(t)$ . . . . .	13
2.7. Einseitige Faltung . . . . .	13
3. Fourier-Transformation	14
3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen . . . . .	14
3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen . . . . .	15

3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel . . . . .	15
3.4. Inverse Fourier-Transformation . . . . .	15
4. Laplacetransformation	17
5. z-Transformation	18
 II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	 19
6. Beschreibende Statistik	20
7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	21
7.1. Kombinatorik . . . . .	21
7.2. Kombination und Variation . . . . .	21
7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	23

# Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Wiederholung	6
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln . . . . .	6
1.2. Komplexe Zahlen . . . . .	6
1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen . . . . .	6
1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander . . . . .	7
1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen . . . . .	8
1.3. Sinus Kardinalis . . . . .	8
 I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen	 9
2. Verallgemeinerte Funktionen	10
2.1. Heaviside-Funktion . . . . .	10
2.2. Dirac-Distribution . . . . .	11
2.3. Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	11
2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen . . . . .	12
2.4. Faltung . . . . .	12
2.5. Faltung mit $\sigma(t)$ . . . . .	12
2.6. Faltung mit $\delta(t)$ . . . . .	13
2.7. Einseitige Faltung . . . . .	13
3. Fourier-Transformation	14
3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen . . . . .	14
3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen . . . . .	15
3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel . . . . .	15
3.4. Inverse Fourier-Transformation . . . . .	15
4. Laplacetransformation	17
5. z-Transformation	18

II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	19
6. Beschreibende Statistik	20
7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	21
7.1. Kombinatorik . . . . .	21
7.1.1. Permutation . . . . .	21
7.2. Kombination und Variation . . . . .	21
7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	23
7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	23
Allgemeine Form . . . . .	23
Hypergeometrische Verteilung . . . . .	24
Binomialverteilung . . . . .	25
Poissonverteilung . . . . .	26
7.3.2. Geometrische Verteilung . . . . .	26
7.3.3. Exponentialverteilung . . . . .	26

# 1. Grundlagen und Wiederholung

## 1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

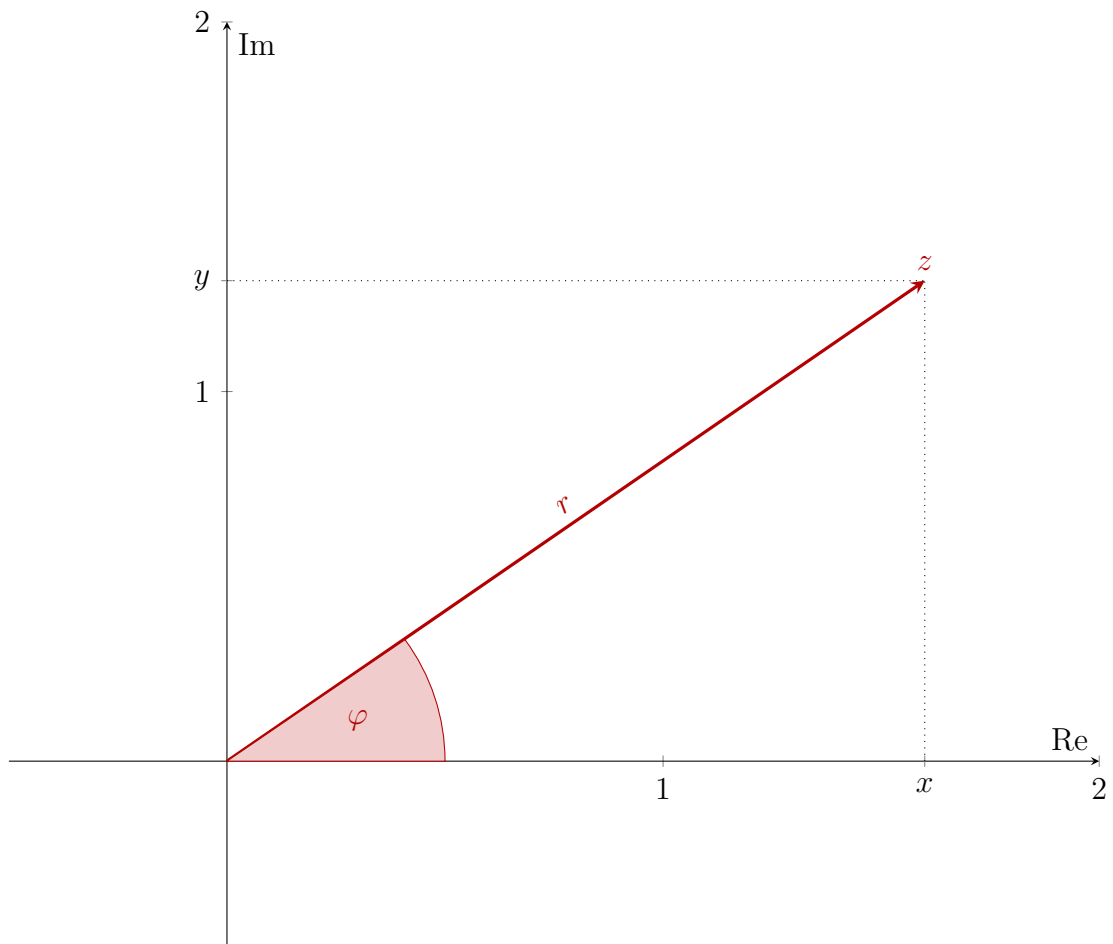
## 1.2. Komplexe Zahlen

### 1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen

---

Kartesische Form:	$z = x + iy$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$
Exponentialform:	$re^{i\varphi}$

---



### 1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r e^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

### 1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

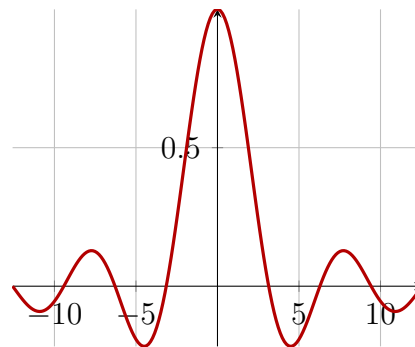
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

### 1.3. Sinus Kardinalis

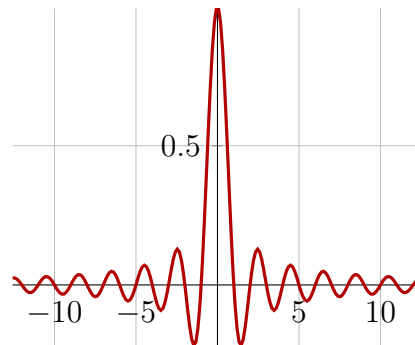
Der Sinus Kardinals  $\text{si}(x)$  ist definiert als

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die  $\text{sinc}(x)$ -Funktion.  
Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$





## Teil I.

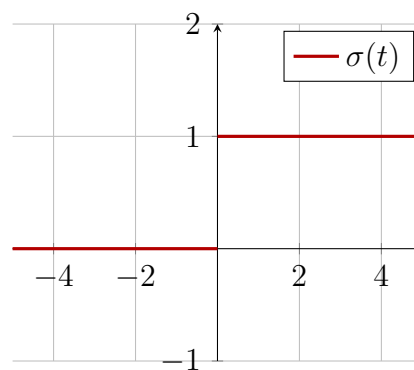
# Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen

## 2. Verallgemeinerte Funktionen

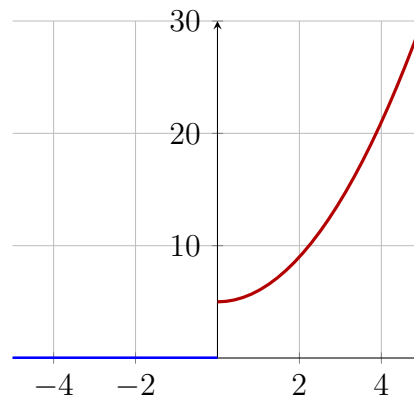
### 2.1. Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

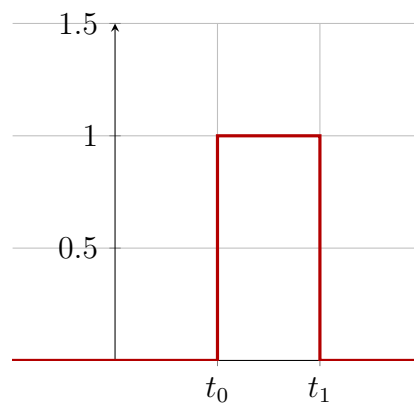


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

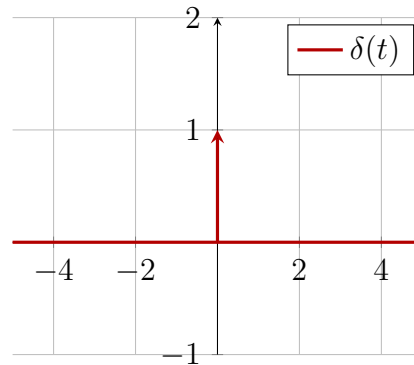
$$r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$$



## 2.2. Dirac-Distribution

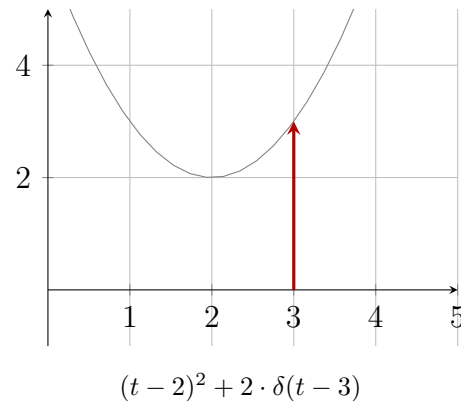
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen  $\infty$ .

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt  $t$  multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle  $t$  ausgeblendet!**



## 2.3. Verallgemeinerte Ableitung

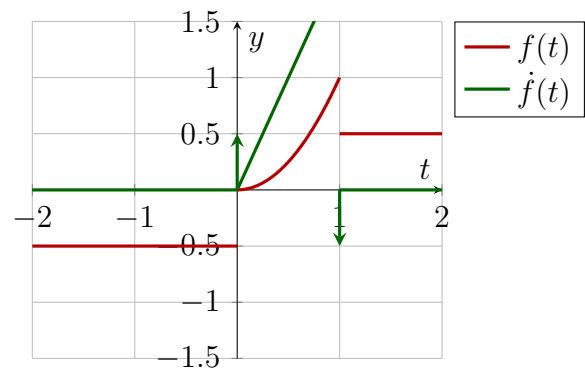
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

**Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!**

### 2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der  $x$ -Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

## 2.4. Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function  $g$  as it is shifted over another function  $f$ .“ (<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>)

Die Faltung ist definiert durch:

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion  $h(t)$ .  $\tau$  ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf  $t$  ab.

## 2.5. Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit  $\sigma(t)$  gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

## 2.6. Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion  $f(t)$  mit der Dirac-Distribution  $\delta(t)$  gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

## 2.7. Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen  $f(t)$  und  $g(t) = 0$  für  $x \leq 0$ , so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

## 3. Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$s(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

### 3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ \operatorname{Im}(z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

## 3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von  $-\infty$  bis  $\infty$  integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis  $\infty$  mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$S(f) = \text{Re}(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$S(f) = i \text{Im}(f) = -2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

## 3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$S(f) = |S(f)| e^{i\varphi(f)}$$

Dabei ist

- Die Amplitude  $|S(f)| = \sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2}$  eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase  $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\text{Re}(f) + i \text{Im}(f))$  eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

## 3.4. Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransformierten Funktion  $S(f)$  die Zeitfunktion  $s(t)$  zu erhalten muss  $S(f)$  **rücktransformiert** werden:

$$S(f) \text{ \textit{LAPLACE} } s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df$$



## 4. Laplacetransformation

Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

## 5. z-Transformation

## Teil II.

# Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 6. Beschreibende Statistik

## 7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 7.1. Kombinatorik

#### 7.1.1. Permutation

Permutation ohne Wiederholung:	$n!$
Permutation mit Wiederholung:	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$

### 7.2. Kombination und Variation

Kombinationen werden verwendet, wenn **nur einige** der Elemente in einer Menge angeordnet werden sollen. Permutationen hingegen ordnen **alle** Elemente an.

Urnenmodell: Ziehen von $k$ aus $n$	Anzahl Möglichkeiten	Name Vorlesung	typische Beispiele
ohne Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n}{k}$	Kombination verschiedene Elemente	a) Lotto: 6 aus 49 b) $k$ Personen aus $n$ (Arbeitsgruppe)
mit Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n+k-1}{k}$	Kombination Elemente mehrfach	a) Widerstände parallel b) 2 T-Shirts aus 5 Farben auswählen
ohne Zurücklegen; geordnet	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Variation verschiedene Elemente Spezialfall: $n = k$ Permutation	a) Siegerpodest b) Rangreihenfolge Auswahl Studierende c) Zieleinlauf insgesamt
mit Zurücklegen; geordnet	$n^k$	Variation Elemente mehrfach	a) Binäre Ziffernfolge b) Wörter aus 7 Buchstaben

## 7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

#### Allgemeine Form

##### **Dichtefunktion:**

Funktion, bei der auf der  $x$ -Achse alle Elemente mit der auf der  $y$ -Achse aufgetragenen Wahrscheinlichkeit gezeichnet sind. Es ergibt sich ein Säulendiagramm.

##### **Verteilungsfunktion:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_k^x (k \cdot P(X = k))$$

##### **Erwartungswert:**

$$E(X) = \mu = \sum_k k \cdot P(X = k)$$

##### **Varianz**

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_k (k^2 \cdot P(X = k)) - \mu^2$$

## Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung: Ziehen ohne Zurücklegen → Wahrscheinlichkeit verändert sich im Verlauf des Experiments

Es müssen folgende Variablen (bis auf  $k$ ) gegeben sein:

---

$N$  Anzahl aller Elemente

$M$  Anzahl Elemente mit bestimmter Eigenschaft

$n$  Anzahl Elemente in der Stichprobe

$k$  Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

---

### Dichtefunktion:

$$X \sim H(k, n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

### Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x H(k, n, N, M)$$

### Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

### Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$



## Binomialverteilung

Beschreibung: Ziehen **mit** zurücklegen → Wahrscheinlichkeit bleibt während dem Experiment gleich

Es müssen folgende Variablen gegeben sein:

---

- $p$  Anteil der Elemente/ Wahrscheinlichkeit beim Ziehen **eines** Elementes aus der Grundgesamtheit
  - $n$  Anzahl Elemente in der Stichprobe
  - $k$  Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen
- 

### Dichtefunktion:

$$X \sim B(k, n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Verteilungsfunktion:** Hier müssen die einzelnen Dichtefunktionen berechnet werden

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x B(k, n, p)$$

### Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

### Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

### Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung durch Binomialverteilung:

Falls  $\frac{n}{N} \leq 0.1$  kann der Parameter  $p$  durch  $p = \frac{M}{N}$  angenähert werden.

## Poissonverteilung

Beschreibung: Gegeben ist ein Durchschnittswert (*Erwartungswert*)  $\lambda$  pro einer gewissen Einheit (z.B. im Durchschnitt 3 Anrufe in 5 Minuten). Die Poissonverteilung soll berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist einen anderen Wert  $k$  als Ergebnis zu erhalten.

**Dichtefunktion:**

$$X \sim \text{Po}(k, \lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

**Verteilungsfunktion:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \text{Po}(k, \lambda)$$

**Erwartungswert:**

$$E(X) = \mu = \lambda$$

**Varianz:**

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

**Annäherung der Binomialverteilung durch Poissonverteilung:**

Wenn  $n$  groß und  $p$  klein ist ( $n \geq 30, p \leq 0.1$ ) kann der Parameter  $\lambda$  durch  $\lambda = n \cdot p$  angenähert werden.

## 7.3.2. Geometrische Verteilung

## 7.3.3. Exponentialverteilung

## A.2 Trigonometrische Funktionen

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

### Verschiebung des Sinus

$$\begin{aligned}
 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\
 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\
 \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\cos x \\
 \sin(x \pm \pi) &= -\sin x \\
 \sin(\pm\pi - x) &= \sin x
 \end{aligned}$$

### Verschiebung des Kosinus

$$\begin{aligned}
 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\
 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\
 \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\sin x \\
 \cos(x \pm \pi) &= -\cos x \\
 \cos(\pm\pi - x) &= -\cos x
 \end{aligned}$$

### Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
 \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
 \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
 \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\
 \cot(x \pm y) &= \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}
 \end{aligned}$$

### Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}
 \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
 \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\
 \cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}
 \end{aligned}$$

## A.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$e^x$	$e^x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x \quad (a > 0)$	$(\ln a) a^x$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
		$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{(\ln a) x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
$\cot x$	$-1 - \cot^2 x$	$\coth x$	$1 - \coth^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

## A.4 Ableitungsregeln

Regel	Formel
Faktorregel	$(C f(x))' = C f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

## A.5 Integrale

Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante $C$ )	Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante $C$ )
$\int \frac{1}{x} dx$	$= \ln x $	$\int e^x dx$	$= e^x$
$\int \sqrt{x} dx$	$= \frac{2}{3} x\sqrt{x}$	$\int a^x dx$	$= \frac{1}{\ln a} a^x \quad (a > 0)$
$\int x^a dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \ln x dx$	$= x(\ln x - 1)$
		$\int \log_a x dx$	$= x(\log_a x - \log_a e)$ $(a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx$	$= -\cos x$	$\int \sinh x dx$	$= \cosh x$
$\int \cos x dx$	$= \sin x$	$\int \cosh x dx$	$= \sinh x$
$\int \tan x dx$	$= -\ln \cos x $	$\int \tanh x dx$	$= \ln \cosh x $
$\int \cot x dx$	$= \ln \sin x $	$\int \coth x dx$	$= \ln \sinh x $
$\int \arcsin x dx$	$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arsinh} x dx$	$= x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \arccos x dx$	$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arcosh} x dx$	$= x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \arctan x dx$	$= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{artanh} x dx$	$= x \operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$
$\int \operatorname{arccot} x dx$	$= x \operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{arcoth} x dx$	$= x \operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$
$\int \frac{1}{x-a} dx$	$= \ln x-a $	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$	$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$	$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$	$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx$	$= \ln ax^2+bx+c  \quad (a \neq 0)$
$\int x e^{ax} dx$	$= \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$	$\int x^2 e^{ax} dx$	$= \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$
$\int x \sin ax dx$	$= \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax$	$\int x \cos ax dx$	$= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
$\int x^2 \sin ax dx$	$= \frac{2x}{a^2} \sin ax - \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \cos ax$	$\int x^2 \cos ax dx$	$= \frac{2x}{a^2} \cos ax + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
$\int e^{ax} \sin bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$	$\int e^{ax} \cos bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$
$\int \sin^2 x dx$	$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$	$\int \cos^2 x dx$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$

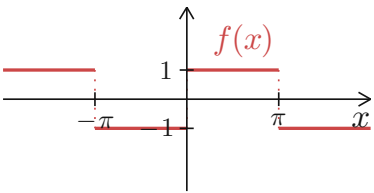
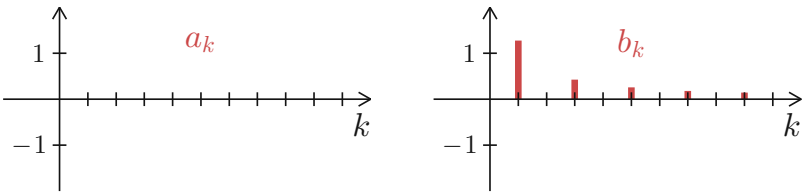
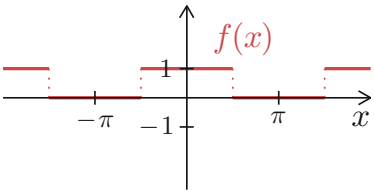
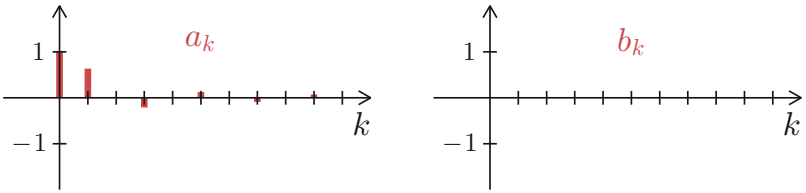
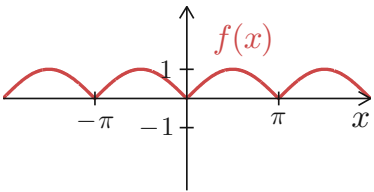
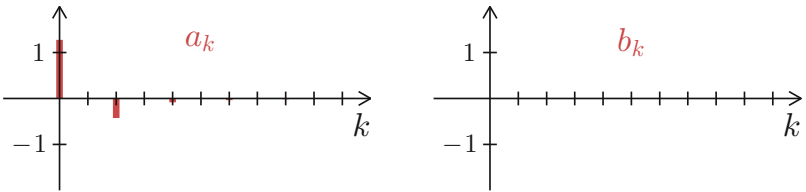
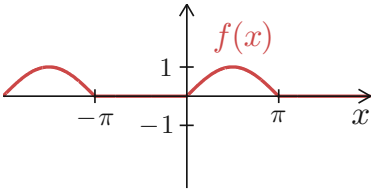
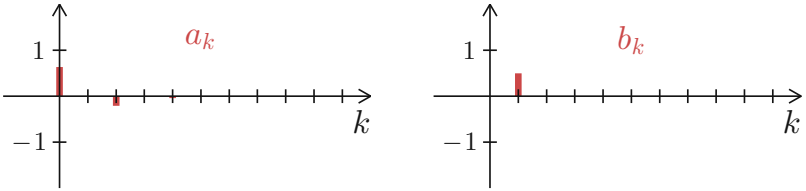
## A.6 Integralregeln

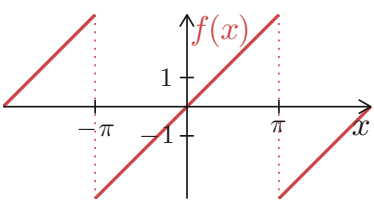
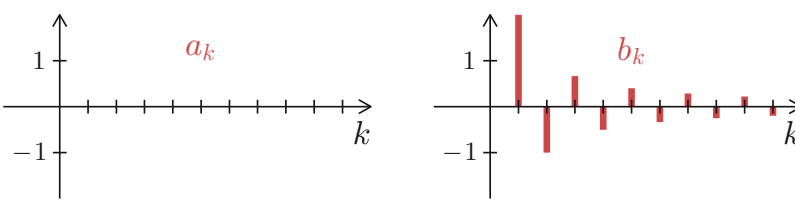
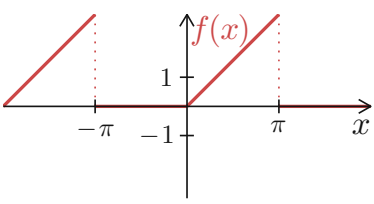
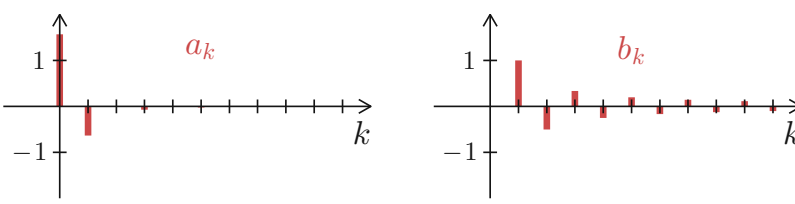
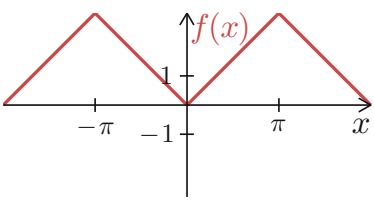
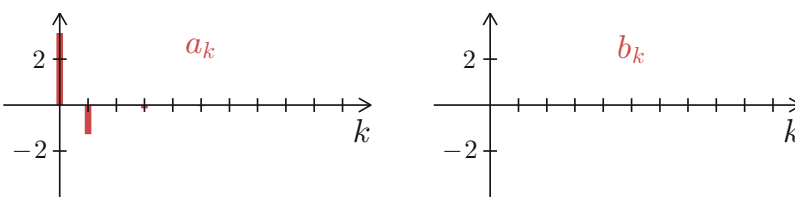
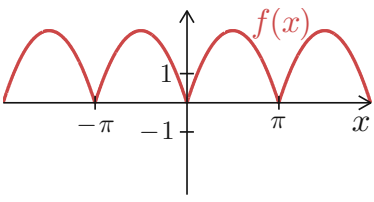
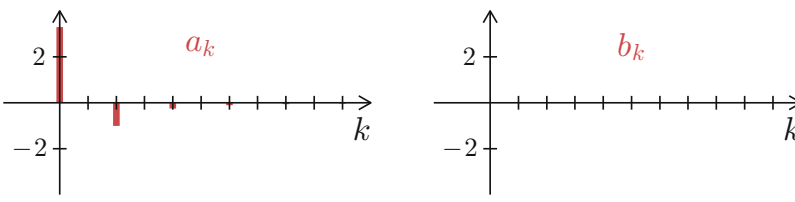
Regel	Formel
Faktorregel	$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$
Summenregel	$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
Substitution	$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$
	$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x)$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) $
Partielle Integration	$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$
Vertauschen	$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
Integrationsbereich	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
Hauptsatz I	$\frac{d}{dt} \left( \int_a^t f(x) dx \right)' = f(t)$
Hauptsatz II	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

## A.7 Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	1
$e^x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\infty$
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$	1
$\sin x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$	$\infty$
$\cos x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$	$\infty$
$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$	1
$\sinh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$\infty$
$\cosh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$\infty$

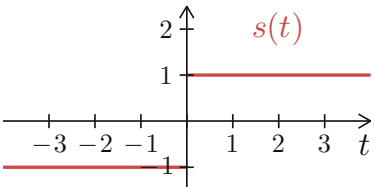
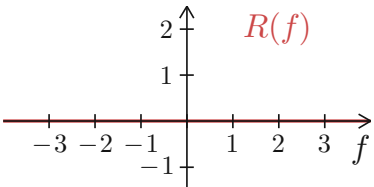
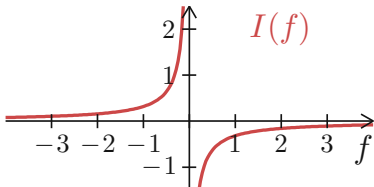
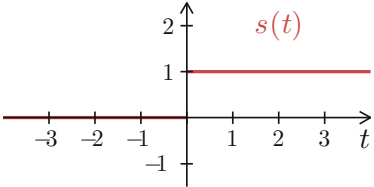
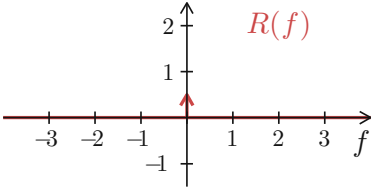
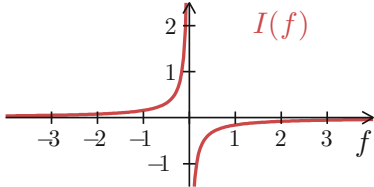
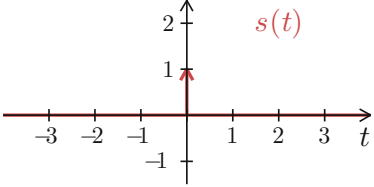
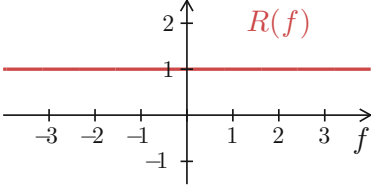
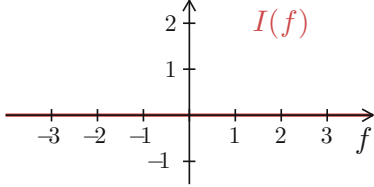
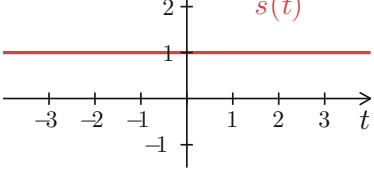
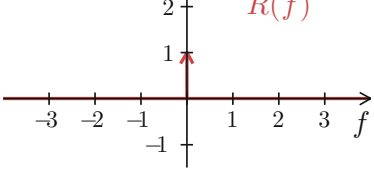
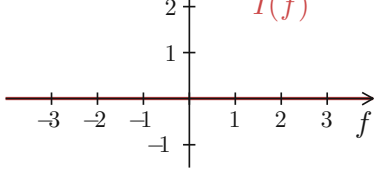
## A.8 Fourier-Reihen

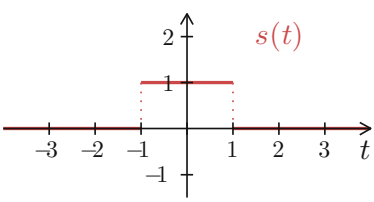
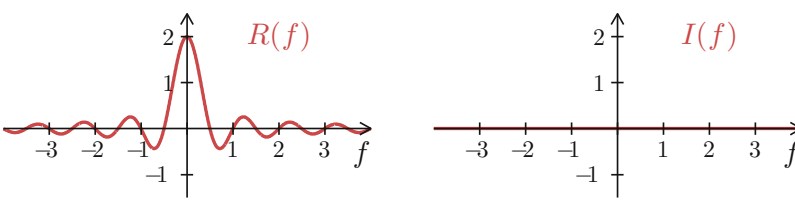
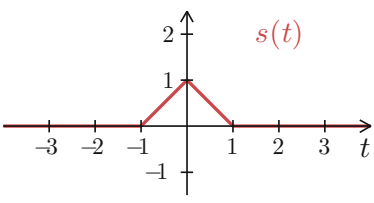
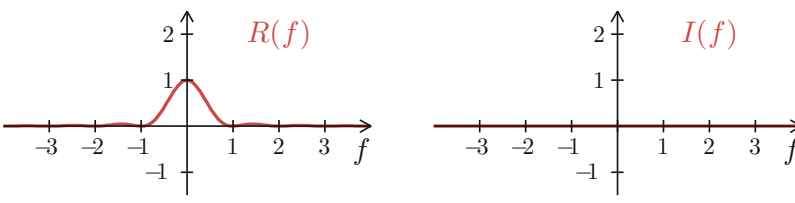
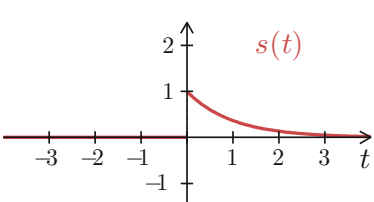
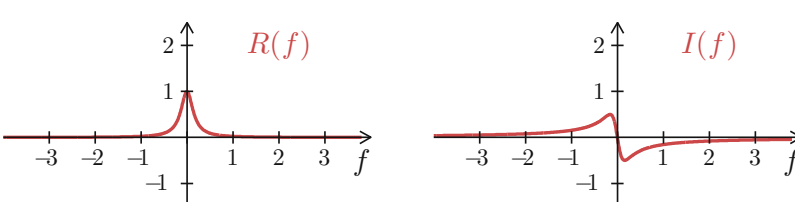
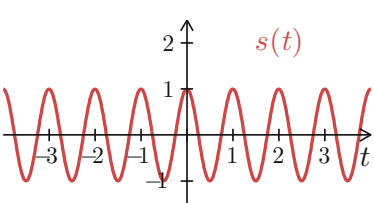
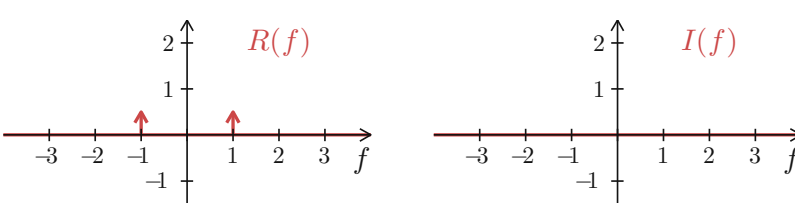
Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right)$
 $f(x) =  \sin x  \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) + \frac{\sin x}{2}$

Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots$
 $f(x) =  x  \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \leq x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left( \cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$



## A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i}I(f)$	
 $s(t) = \operatorname{sgn}(t)$		 $S(f) = -\mathbf{i} \frac{1}{\pi f}$
 $s(t) = \sigma(t)$		 $S(f) = \frac{1}{2} \delta(f) - \mathbf{i} \frac{1}{2\pi f}$
 $s(t) = \delta(t)$		 $S(f) = 1$
 $s(t) = 1$		 $S(f) = \delta(f)$

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i} I(f)$
 $s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$	 $S(f) = 2 \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$
 $s(t) = (1+t)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) + (1-t)(\sigma(t) - \sigma(t-1))$	 $S(f) = \left( \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2$
 $s(t) = e^{-t} \sigma(t)$	 $S(f) = \frac{1}{1 + \mathbf{i} 2\pi f} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} - \mathbf{i} \frac{2\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$
 $s(t) = \cos(2\pi t)$	 $S(f) = \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1))$

## A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)$	$C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$e^{-i 2 \pi f t_0} S(f)$
Frequenzverschiebung	$e^{i 2 \pi f_0 t} s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t) \cos(2 \pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} (S(f - f_0) + S(f + f_0))$
Ähnlichkeit	$s(at)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in $t$	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$i 2 \pi f S(f)$ $(i 2 \pi f)^2 S(f)$ $\vdots$ $(i 2 \pi f)^n S(f)$
Differenziation in $f$	$(-i 2 \pi t) s(t)$ $(-i 2 \pi t)^2 s(t)$ $\vdots$ $(-i 2 \pi t)^n s(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ $\vdots$ $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in $t$	$t s(t)$ $t^2 s(t)$ $\vdots$ $t^n s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-i 2 \pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}(f)}{(-i 2 \pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{1}{i 2 \pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \delta(f)$
Faltung in $t$	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in $f$	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

## A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s - a}$	$e^{at}$	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
$\frac{1}{(s - a)^2}$	$t e^{at}$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
$\frac{a}{s(s - a)}$	$e^{at} - 1$	$\frac{a}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
$\frac{a - b}{(s - a)(s - b)}$	$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
$\frac{a}{1 + as}$	$e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{a^2}{(1 + as)^2}$	$t e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{s(1 + as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \sinh at$
$\frac{a - b}{(1 + as)(1 + bs)}$	$e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}} \quad (a, b \neq 0)$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
$\frac{s}{(s - a)^2}$	$(1 + at)e^{at}$	$\frac{2}{(s - a)^3}$	$t^2 e^{at}$
$\frac{(a - b)s}{(s - a)(s - b)}$	$a e^{at} - b e^{bt}$	$\frac{2s}{(s - a)^3}$	$(at^2 + 2t)e^{at}$
$\frac{a^3 s}{(1 + as)^2}$	$(a - t)e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2s^2}{(s - a)^3}$	$(a^2 t^2 + 4at + 2)e^{at}$
$\frac{ab(a - b)s}{(1 + as)(1 + bs)}$	$a e^{-\frac{t}{b}} - b e^{-\frac{t}{a}} \quad (a, b \neq 0)$	$\frac{a^2}{s^2(s - a)}$	$e^{at} - at - 1$

## A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$
Ähnlichkeit ( $a > 0$ )	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} F(s)$
Dämpfung	$e^{-s_0 t} f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in $t$	$f'(t)$ $f''(t)$ $\vdots$ $f^{(n)}(t)$	$s F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ $\vdots$ $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$
Differenziation in $s$	$-t f(t)$ $t^2 f(t)$ $\vdots$ $(-t)^n f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ $\vdots$ $F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit $t$	$t f(t)$ $t^2 f(t)$ $\vdots$ $t^n f(t)$	$-F'(s)$ $F''(s)$ $\vdots$ $(-1)^n F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

## A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge $(f_k)$	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge $(f_k)$
1	$\delta_k$	$\frac{1}{z^n}$	1 für $k = n$ , 0 sonst
$\frac{z}{z-1}$	1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$k$
$\frac{z}{z-a}$	$a^k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$k a^k$

## A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1 (f_k) + C_2 (g_k)$	$C_1 F(z) + C_2 G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k} f_k)$	$F(az)$
Indexverschiebung	$(f_{k-n})$ $(f_{k+1})$ $(f_{k+2})$ $\vdots$ $(f_{k+n})$	$z^{-n} F(z)$ $z(F(z) - f_0)$ $z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$ $\vdots$ $z^n \left( F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} \right)$
Differenzen	$(\Delta f_k)$ $(\Delta^2 f_k)$ $\vdots$ $(\Delta^n f_k)$	$(z-1)F(z) - z f_0$ $(z-1)^2 F(z) - z((z-1)f_0 + \Delta f_0)$ $\vdots$ $(z-1)^n F(z) - z \sum_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \Delta^k f_0$
Multiplikation mit $k$	$(k f_k)$ $(k^2 f_k)$ $\vdots$	$-z F'(z)$ $z F'(z) - z^2 F''(z)$ $\vdots$
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z) \cdot G(z)$