

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

24. Januar 2019

Kurzes Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| 1. Grundlagen und Wiederholung | 6 |
| 1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln | 6 |
| 1.2. Komplexe Zahlen | 6 |
| 1.3. Sinus Kardinalis | 8 |
| I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen | 9 |
| 2. Verallgemeinerte Funktionen | 10 |
| 2.1. Heaviside-Funktion | 10 |
| 2.2. Dirac-Distribution | 11 |
| 2.3. Verallgemeinerte Ableitung | 11 |
| 2.4. Faltung | 12 |
| 2.5. Faltung mit $\sigma(t)$ | 12 |
| 2.6. Faltung mit $\delta(t)$ | 13 |
| 2.7. Einseitige Faltung | 13 |
| 3. Fourier-Transformation | 14 |
| 3.1. Real- und Imaginarteil direkt berechnen | 14 |
| 3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen | 15 |

| | |
|---|----|
| 3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel | 15 |
| 3.4. Inverse Fourier-Transformation | 15 |
| 4. Laplacetransformation | 17 |
| 5. z-Transformation | 18 |
| II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung | 19 |
| 6. Beschreibende Statistik | 20 |
| 7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung | 21 |
| 7.1. Kombinatorik | 21 |
| 7.2. Kombination und Variation | 21 |
| 7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung | 22 |

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| 1. Grundlagen und Wiederholung | 6 |
| 1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln | 6 |
| 1.2. Komplexe Zahlen | 6 |
| 1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen | 6 |
| 1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander | 7 |
| 1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen | 8 |
| 1.3. Sinus Kardinalis | 8 |
| I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen | 9 |
| 2. Verallgemeinerte Funktionen | 10 |
| 2.1. Heaviside-Funktion | 10 |
| 2.2. Dirac-Distribution | 11 |
| 2.3. Verallgemeinerte Ableitung | 11 |
| 2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen | 12 |
| 2.4. Faltung | 12 |
| 2.5. Faltung mit $\sigma(t)$ | 12 |
| 2.6. Faltung mit $\delta(t)$ | 13 |
| 2.7. Einseitige Faltung | 13 |
| 3. Fourier-Transformation | 14 |
| 3.1. Real- und Imaginarteil direkt berechnen | 14 |
| 3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen | 15 |
| 3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel | 15 |
| 3.4. Inverse Fourier-Transformation | 15 |
| 4. Laplacetransformation | 17 |
| 5. z-Transformation | 18 |

| | |
|--|----|
| II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung | 19 |
| 6. Beschreibende Statistik | 20 |
| 7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung | 21 |
| 7.1. Kombinatorik | 21 |
| 7.1.1. Permutation | 21 |
| 7.2. Kombination und Variation | 21 |
| 7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung | 22 |
| 7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen | 22 |
| Allgemeine Form | 22 |
| Hypergeometrische Verteilung | 23 |
| Binomialverteilung | 24 |
| Poissonverteilung | 25 |
| 7.3.2. Geometrische Verteilung | 25 |
| 7.3.3. Exponentialverteilung | 25 |

1. Grundlagen und Wiederholung

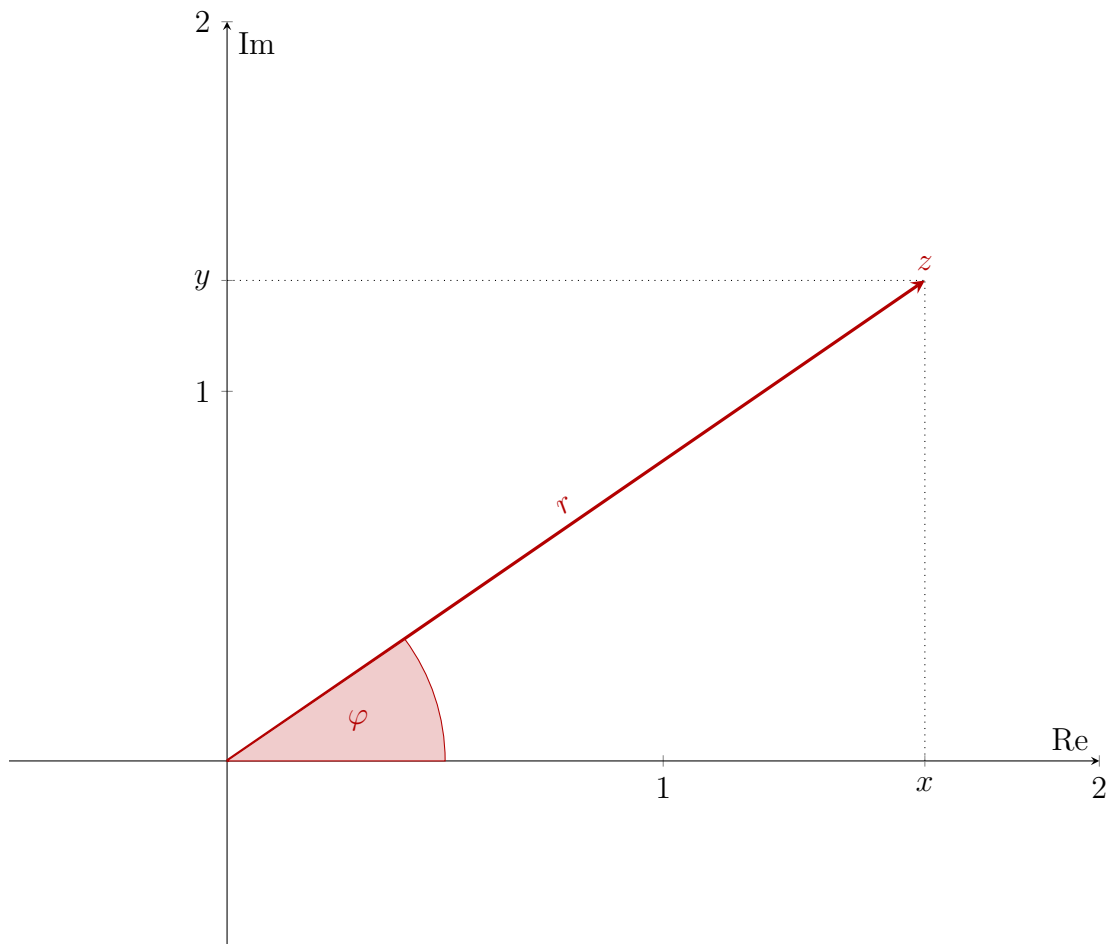
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\end{aligned}$$

1.2. Komplexe Zahlen

1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen

| | |
|------------------------------|--|
| Kartesische Form: | $z = x + iy$ |
| Polarform; Polarkoordinaten: | $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$ |
| Exponentialform: | $re^{i\varphi}$ |



1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r e^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

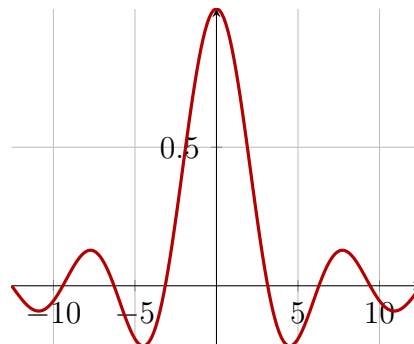
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

1.3. Sinus Kardinalis

Der Sinus Kardinals $\text{si}(x)$ ist definiert als

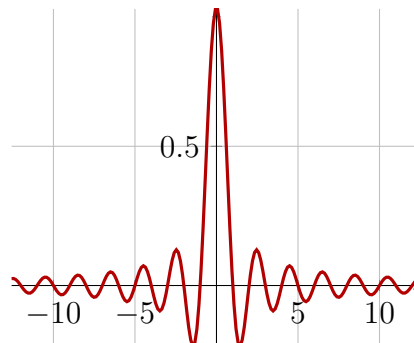
$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\text{sinc}(x)$ -Funktion.

Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Teil I.

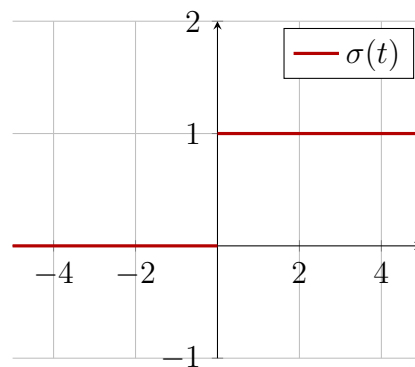
Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen

2. Verallgemeinerte Funktionen

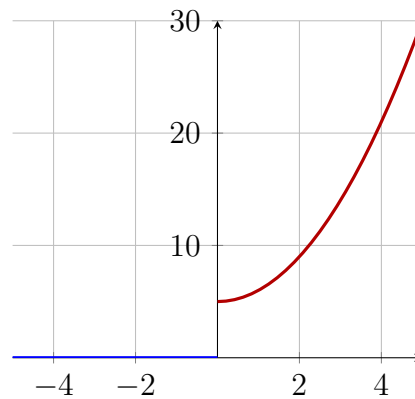
2.1. Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

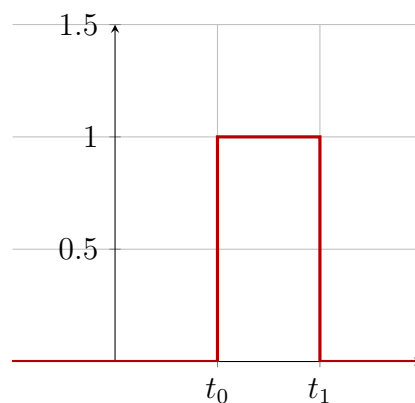


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

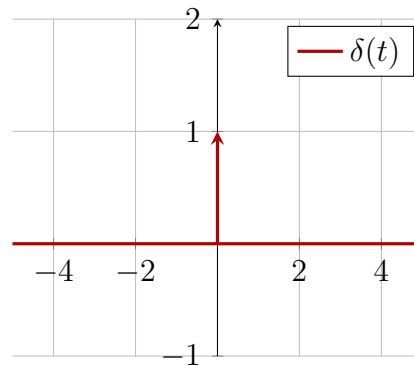
$$r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$$



2.2. Dirac-Distribution

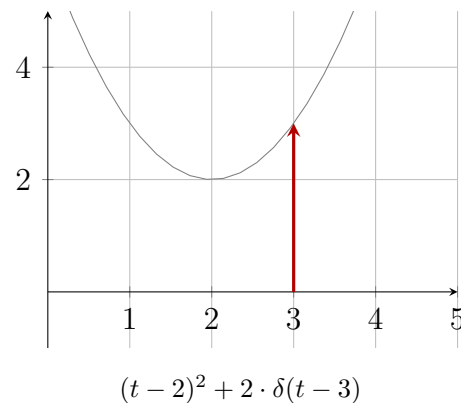
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞ .

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t ausgeblendet!**



2.3. Verallgemeinerte Ableitung

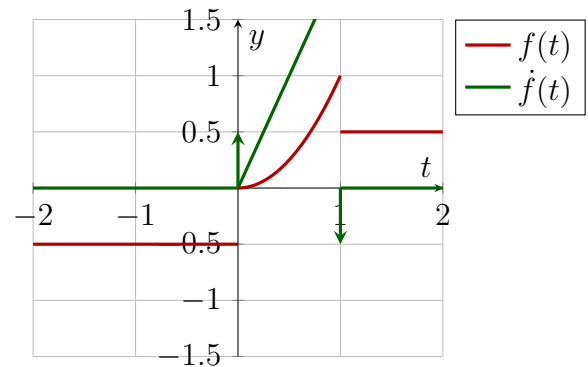
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x -Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4. Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f .“ (<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>)

Die Faltung ist definiert durch:

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

2.5. Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

2.6. Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion $f(t)$ mit der Dirac-Distribution $\delta(t)$ gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

2.7. Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen $f(t)$ und $g(t) = 0$ für $x \leq 0$, so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

3. Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$s(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ \operatorname{Im}(z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$S(f) = \operatorname{Re}(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$S(f) = i \operatorname{Im}(f) = -2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$S(f) = |S(f)| e^{i\varphi(f)}$$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2}$ eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))$ eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4. Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransformierten Funktion $S(f)$ die Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten muss $S(f)$ **rücktransformiert** werden:

$$S(f) \text{ \textit{LAPLACE} } s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df$$

4. Laplacetransformation

Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

5. z-Transformation

Teil II.

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

6. Beschreibende Statistik

7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1. Kombinatorik

7.1.1. Permutation

| | |
|--------------------------------|---|
| Permutation ohne Wiederholung: | $n!$ |
| Permutation mit Wiederholung: | $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$ |

7.2. Kombination und Variation

Kombinationen werden verwendet, wenn **nur einige** der Elemente in einer Menge angeordnet werden sollen. Permutationen hingegen ordnen **alle** Elemente an.

| Urnenmodell: Ziehen von k aus n | Anzahl Möglichkeiten | Name Vorlesung | typische Beispiele |
|--|-------------------------|--|---|
| ohne Zurücklegen; ungeordnet | $\binom{n}{k}$ | Kombination verschiedene Elemente | a) Lotto: 6 aus 49 b) k Personen aus n (Arbeitsgruppe) |
| mit Zurücklegen; ungeordnet | $\binom{n+k-1}{k}$ | Kombination Elemente mehrfach | a) Widerstände parallel b) 2 T-Shirts aus 5 Farben auswählen |
| ohne Zurücklegen; geordnet | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | Variation verschiedene Elemente Spezialfall: $n = k$ Permutation | a) Siegerpodest b) Rangreihenfolge Auswahl Studierende c) Zieleinlauf insgesamt |
| mit Zurücklegen; geordnet | n^k | Variation Elemente mehrfach | a) Binäre Ziffernfolge b) Wörter aus 7 Buchstaben |

7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Allgemeine Form

Dichtefunktion:

Funktion, bei der auf der x -Achse alle Elemente mit der auf der y -Achse aufgetragenen Wahrscheinlichkeit gezeichnet sind. Es ergibt sich ein Säulendiagramm.

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_k^x (k \cdot P(X = k))$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \sum_k k \cdot P(X = k)$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_k (k^2 \cdot P(X = k)) - \mu^2$$

Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung: Ziehen ohne Zurücklegen \rightarrow Wahrscheinlichkeit verändert sich im Verlauf des Experiments

Es müssen folgende Variablen (bis auf k) gegeben sein:

N Anzahl aller Elemente

M Anzahl Elemente mit bestimmter Eigenschaft

n Anzahl Elemente in der Stichprobe

k Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim H(k, n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x H(k, n, N, M)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

Binomialverteilung

Beschreibung: Ziehen **mit** zurücklegen \rightarrow Wahrscheinlichkeit bleibt während dem Experiment gleich

Es müssen folgende Variablen gegeben sein:

-
- p Anteil der Elemente/ Wahrscheinlichkeit beim Ziehen **eines** Elementes aus der Grundgesamtheit
 - n Anzahl Elemente in der Stichprobe
 - k Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen
-

Dichtefunktion:

$$X \sim B(k, n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion: Hier müssen die einzelnen Dichtefunktionen berechnet werden

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x B(k, n, p)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung durch Binomialverteilung:

Falls $\frac{n}{N} \leq 0.1$ kann der Parameter p durch $p = \frac{M}{N}$ angenähert werden.

Poissonverteilung

Beschreibung: Gegeben ist ein Durchschnittswert (*Erwartungswert*) λ pro einer gewissen Einheit (z.B. im Durchschnitt 3 Anrufe in 5 Minuten). Die Poissonverteilung soll berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist einen anderen Wert k als Ergebnis zu erhalten.

Dichtefunktion:

$$X \sim \text{Po}(k, \lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \text{Po}(k, \lambda)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

Annäherung der Binomialverteilung durch Poissonverteilung:

Wenn n groß und p klein ist ($n \geq 30, p \leq 0.1$) kann der Parameter λ durch $\lambda = n \cdot p$ angenähert werden.

7.3.2. Geometrische Verteilung

7.3.3. Exponentialverteilung

A.2 Trigonometrische Funktionen

| Quadrant | I | II | III | IV |
|----------|---|----|-----|----|
| $\sin x$ | + | + | - | - |
| $\cos x$ | + | - | - | + |
| $\tan x$ | + | - | + | - |

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | 2π |
|----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Verschiebung des Sinus

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\cos x \\ \sin(x \pm \pi) &= -\sin x \\ \sin(\pm\pi - x) &= \sin x\end{aligned}$$

Verschiebung des Kosinus

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\sin x \\ \cos(x \pm \pi) &= -\cos x \\ \cos(\pm\pi - x) &= -\cos x\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \cot(x \pm y) &= \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}\end{aligned}$$

Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}\end{aligned}$$

A.3 Ableitungen

| Funktion $f(x)$ | Ableitung $f'(x)$ | Funktion $f(x)$ | Ableitung $f'(x)$ |
|--------------------------------|---------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | e^x | e^x |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $a^x \quad (a > 0)$ | $(\ln a) a^x$ |
| $x^a \quad (a \in \mathbb{R})$ | $a x^{a-1}$ | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| | | $\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$ | $\frac{1}{(\ln a) x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\tan x$ | $1 + \tan^2 x$ | $\tanh x$ | $1 - \tanh^2 x$ |
| $\cot x$ | $-1 - \cot^2 x$ | $\coth x$ | $1 - \coth^2 x$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arcosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{artanh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arcoth} x$ | $-\frac{1}{x^2-1}$ |

A.4 Ableitungsregeln

| Regel | Formel |
|-----------------|--|
| Faktorregel | $(C f(x))' = C f'(x)$ |
| Summenregel | $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ |
| Produktregel | $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ |
| Quotientenregel | $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ |
| Kettenregel | $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ |
| Umkehrfunktion | $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ |

A.5 Integrale

| Funktion | Stammfunktion (ohne Konstante C) | Funktion | Stammfunktion (ohne Konstante C) |
|-----------------------------------|--|-----------------------------------|--|
| $\int \frac{1}{x} dx$ | $= \ln x $ | $\int e^x dx$ | $= e^x$ |
| $\int \sqrt{x} dx$ | $= \frac{2}{3} x\sqrt{x}$ | $\int a^x dx$ | $= \frac{1}{\ln a} a^x \quad (a > 0)$ |
| $\int x^a dx$ | $= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$ | $\int \ln x dx$ | $= x(\ln x - 1)$ |
| | | $\int \log_a x dx$ | $= x(\log_a x - \log_a e)$ $(a > 0, a \neq 1)$ |
| $\int \sin x dx$ | $= -\cos x$ | $\int \sinh x dx$ | $= \cosh x$ |
| $\int \cos x dx$ | $= \sin x$ | $\int \cosh x dx$ | $= \sinh x$ |
| $\int \tan x dx$ | $= -\ln \cos x $ | $\int \tanh x dx$ | $= \ln \cosh x $ |
| $\int \cot x dx$ | $= \ln \sin x $ | $\int \coth x dx$ | $= \ln \sinh x $ |
| $\int \arcsin x dx$ | $= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ | $\int \operatorname{arsinh} x dx$ | $= x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$ |
| $\int \arccos x dx$ | $= x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ | $\int \operatorname{arcosh} x dx$ | $= x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$ |
| $\int \arctan x dx$ | $= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ | $\int \operatorname{artanh} x dx$ | $= x \operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$ |
| $\int \operatorname{arccot} x dx$ | $= x \operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ | $\int \operatorname{arcoth} x dx$ | $= x \operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$ |
| $\int \frac{1}{x-a} dx$ | $= \ln x-a $ | $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ | $= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$ |
| $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$ | $= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$ | $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx$ | $= \ln ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ |
| $\int x e^{ax} dx$ | $= \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$ | $\int x^2 e^{ax} dx$ | $= \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$ |
| $\int x \sin ax dx$ | $= \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax$ | $\int x \cos ax dx$ | $= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$ |
| $\int x^2 \sin ax dx$ | $= \frac{2x}{a^2} \sin ax - \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \cos ax$ | $\int x^2 \cos ax dx$ | $= \frac{2x}{a^2} \cos ax + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$ |
| $\int e^{ax} \sin bx dx$ | $= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$ | $\int e^{ax} \cos bx dx$ | $= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$ |
| $\int \sin^2 x dx$ | $= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$ | $\int \cos^2 x dx$ | $= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$ |

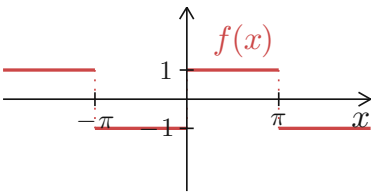
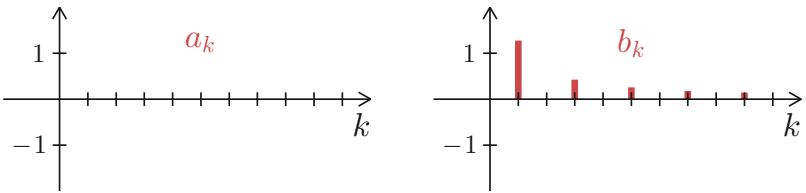
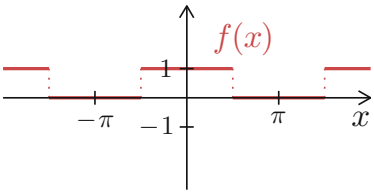
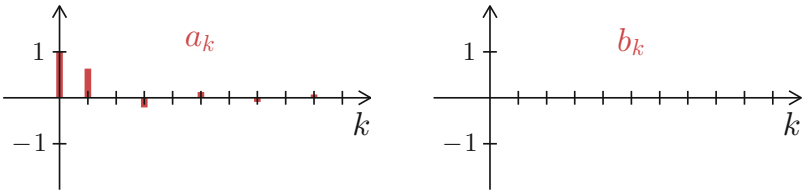
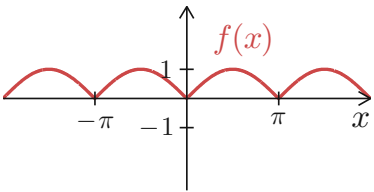
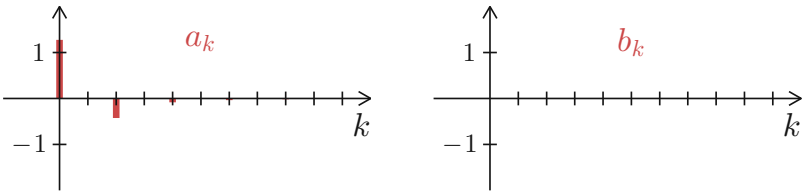
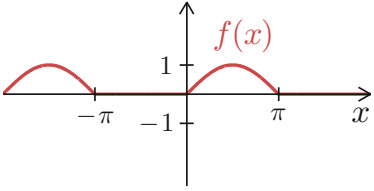
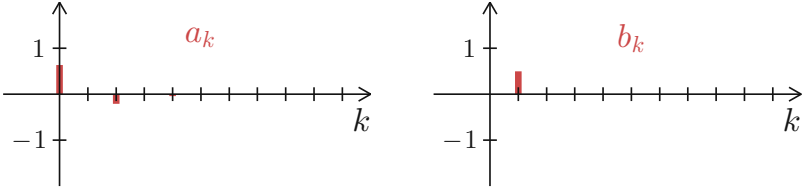
A.6 Integralregeln

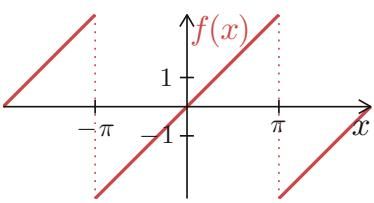
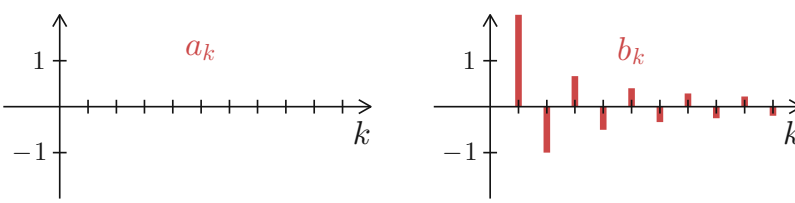
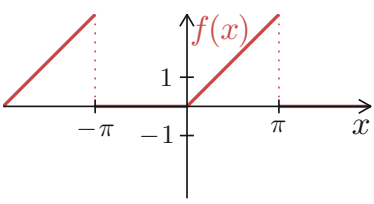
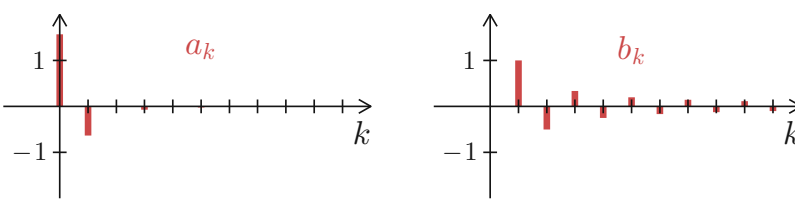
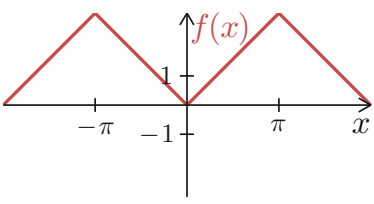
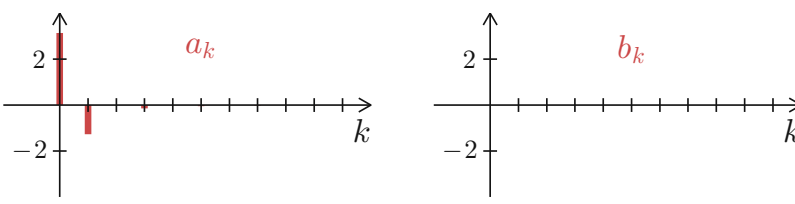
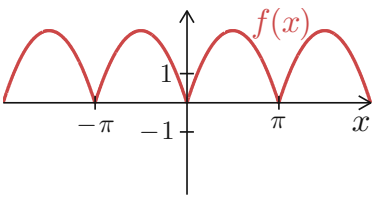
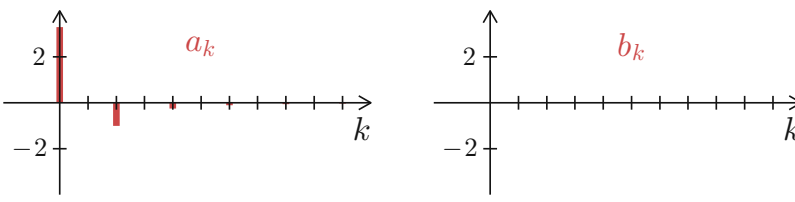
| Regel | Formel |
|-----------------------|---|
| Faktorregel | $\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$ |
| Summenregel | $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ |
| Substitution | $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$ |
| | $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x)$ |
| | $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) $ |
| Partielle Integration | $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$ |
| Vertauschen | $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ |
| Integrationsbereich | $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ |
| Hauptsatz I | $\frac{d}{dt} \left(\int_a^t f(x) dx \right)' = f(t)$ |
| Hauptsatz II | $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ |

A.7 Potenzreihen

| Funktion | Potenzreihe | Konvergenzradius |
|-----------------|--|------------------|
| $\frac{1}{1-x}$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ | 1 |
| e^x | $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ | ∞ |
| $\ln(1+x)$ | $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$ | 1 |
| $\sin x$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$ | ∞ |
| $\cos x$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$ | ∞ |
| $\arctan x$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$ | 1 |
| $\sinh x$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$ | ∞ |
| $\cosh x$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$ | ∞ |

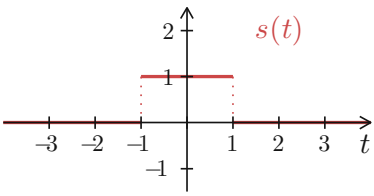
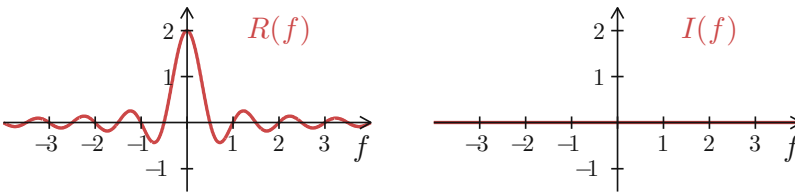
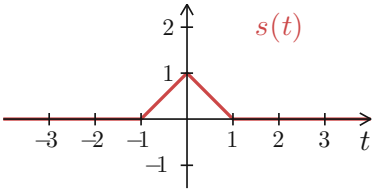
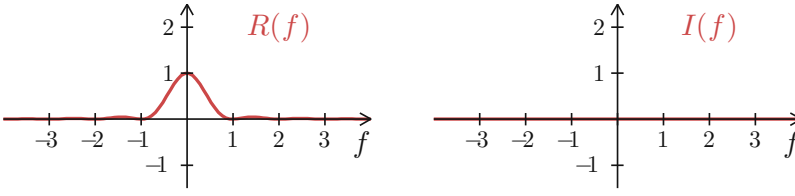
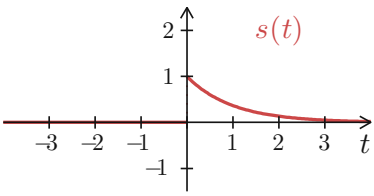
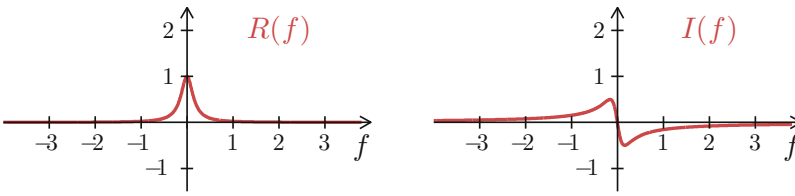
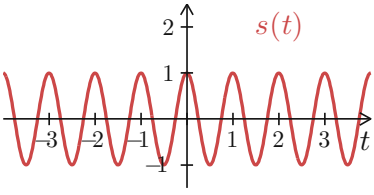
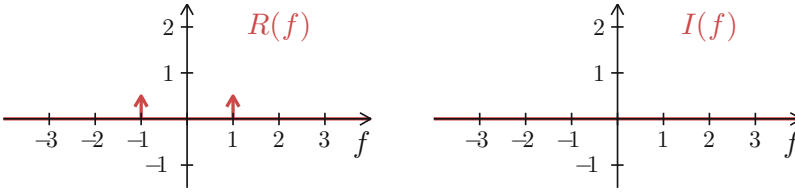
A.8 Fourier-Reihen

| Funktion | Fourier-Reihe |
|---|---|
|  $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ |  $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$ |
|  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ |  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right)$ |
|  $f(x) = \sin x \quad -\pi \leq x < \pi$ |  $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$ |
|  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ |  $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) + \frac{\sin x}{2}$ |

| Funktion | Fourier-Reihe |
|--|---|
|  $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$ |  $f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots \right)$ |
|  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ |  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots$ |
|  $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$ |  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$ |
|  $f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \leq x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ |  $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$ |

A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

| Zeitfunktion $s(t)$ | Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i}I(f)$ | |
|--|---|--|
| <p>$s(t) = \text{sgn}(t)$</p> | | <p>$S(f) = -\mathbf{i} \frac{1}{\pi f}$</p> |
| <p>$s(t) = \sigma(t)$</p> | | <p>$S(f) = \frac{1}{2} \delta(f) - \mathbf{i} \frac{1}{2\pi f}$</p> |
| <p>$s(t) = \delta(t)$</p> | | <p>$S(f) = 1$</p> |
| <p>$s(t) = 1$</p> | | <p>$S(f) = \delta(f)$</p> |

| Zeitfunktion $s(t)$ | Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i} I(f)$ |
|---|---|
|  $s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$ |  $S(f) = 2 \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$ |
|  $s(t) = (1+t)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) + (1-t)(\sigma(t) - \sigma(t-1))$ |  $S(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2$ |
|  $s(t) = e^{-t} \sigma(t)$ |  $S(f) = \frac{1}{1 + \mathbf{i} 2\pi f} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} - \mathbf{i} \frac{2\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$ |
|  $s(t) = \cos(2\pi t)$ |  $S(f) = \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1))$ |

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

| Eigenschaft | Zeitfunktion | Bildfunktion |
|------------------------|---|---|
| Linearität | $C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)$ | $C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f)$ |
| Zeitverschiebung | $s(t - t_0)$ | $e^{-i 2 \pi f t_0} S(f)$ |
| Frequenzverschiebung | $e^{i 2 \pi f_0 t} s(t)$ | $S(f - f_0)$ |
| Amplitudenmodulation | $s(t) \cos(2 \pi f_0 t)$ | $\frac{1}{2} (S(f - f_0) + S(f + f_0))$ |
| Ähnlichkeit | $s(at)$ | $\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$ |
| Zeitumkehr | $s(-t)$ | $S(-f)$ |
| Differenziation in t | $\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ \vdots $\frac{d^n}{dt^n} s(t)$ | $i 2 \pi f S(f)$ $(i 2 \pi f)^2 S(f)$ \vdots $(i 2 \pi f)^n S(f)$ |
| Differenziation in f | $(-i 2 \pi t) s(t)$ $(-i 2 \pi t)^2 s(t)$ \vdots $(-i 2 \pi t)^n s(t)$ | $S'(f)$ $S''(f)$ \vdots $S^{(n)}(f)$ |
| Multiplikation in t | $t s(t)$ $t^2 s(t)$ \vdots $t^n s(t)$ | $S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-i 2 \pi}$ \vdots $\frac{S^{(n)}(f)}{(-i 2 \pi)^n}$ |
| Integration | $\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$ | $\frac{1}{i 2 \pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \delta(f)$ |
| Faltung in t | $s_1(t) \star s_2(t)$ | $S_1(f) \cdot S_2(f)$ |
| Faltung in f | $s_1(t) \cdot s_2(t)$ | $S_1(f) \star S_2(f)$ |

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

| Bildfunktion $F(s)$ | Zeitfunktion $f(t)$ | Bildfunktion $F(s)$ | Zeitfunktion $f(t)$ |
|---------------------------------------|---|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1 | $\delta(t)$ | $\frac{a}{s^2 + a^2}$ | $\sin at$ |
| $\frac{1}{s}$ | 1 | $\frac{s}{s^2 + a^2}$ | $\cos at$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | t | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ | $\sinh at$ |
| $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | t^n | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ | $\cosh at$ |
| $\frac{1}{s - a}$ | e^{at} | $\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$ | $e^{bt} \sin at$ |
| $\frac{1}{(s - a)^2}$ | $t e^{at}$ | $\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$ | $e^{bt} \cos at$ |
| $\frac{a}{s(s - a)}$ | $e^{at} - 1$ | $\frac{a}{(s - b)^2 - a^2}$ | $e^{bt} \sinh at$ |
| $\frac{a - b}{(s - a)(s - b)}$ | $e^{at} - e^{bt}$ | $\frac{s - b}{(s - b)^2 - a^2}$ | $e^{bt} \cosh at$ |
| $\frac{a}{1 + as}$ | $e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$ | $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$ | $t \sin at$ |
| $\frac{a^2}{(1 + as)^2}$ | $t e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$ | $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$ | $t \cos at$ |
| $\frac{1}{s(1 + as)}$ | $1 - e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$ | $\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$ | $t \sinh at$ |
| $\frac{a - b}{(1 + as)(1 + bs)}$ | $e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}} \quad (a, b \neq 0)$ | $\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$ | $t \cosh at$ |
| $\frac{s}{(s - a)^2}$ | $(1 + at)e^{at}$ | $\frac{2}{(s - a)^3}$ | $t^2 e^{at}$ |
| $\frac{(a - b)s}{(s - a)(s - b)}$ | $a e^{at} - b e^{bt}$ | $\frac{2s}{(s - a)^3}$ | $(at^2 + 2t)e^{at}$ |
| $\frac{a^3 s}{(1 + as)^2}$ | $(a - t)e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$ | $\frac{2s^2}{(s - a)^3}$ | $(a^2 t^2 + 4at + 2)e^{at}$ |
| $\frac{ab(a - b)s}{(1 + as)(1 + bs)}$ | $a e^{-\frac{t}{b}} - b e^{-\frac{t}{a}} \quad (a, b \neq 0)$ | $\frac{a^2}{s^2(s - a)}$ | $e^{at} - at - 1$ |

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

| Eigenschaft | Zeitfunktion | Bildfunktion |
|----------------------------|--|--|
| Linearität | $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ | $C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$ |
| Ähnlichkeit ($a > 0$) | $f(at)$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| Zeitverschiebung | $\sigma(t - t_0) f(t - t_0)$ | $e^{-t_0 s} F(s)$ |
| Dämpfung | $e^{-s_0 t} f(t)$ | $F(s + s_0)$ |
| Differenziation in t | $f'(t)$ $f''(t)$ \vdots $f^{(n)}(t)$ | $s F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ \vdots $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$ |
| Differenziation in s | $-t f(t)$ $t^2 f(t)$ \vdots $(-t)^n f(t)$ | $F'(s)$ $F''(s)$ \vdots $F^{(n)}(s)$ |
| Multiplikation mit t | $t f(t)$ $t^2 f(t)$ \vdots $t^n f(t)$ | $-F'(s)$ $F''(s)$ \vdots $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| Integration im Zeitbereich | $\int_0^t f(\tau) d\tau$ | $\frac{1}{s} F(s)$ |
| Integration im Bildbereich | $\frac{1}{t} f(t)$ | $\int_s^\infty F(u) du$ |
| Faltung im Zeitbereich | $f_1(t) \star f_2(t)$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$ |
| Periodische Funktion | $f(t + T) = f(t)$ | $\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$ |

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

| Bildfunktion $F(z)$ | Zeitfolge (f_k) | Bildfunktion $F(z)$ | Zeitfolge (f_k) |
|---------------------|-------------------|----------------------|-------------------------|
| 1 | δ_k | $\frac{1}{z^n}$ | 1 für $k = n$, 0 sonst |
| $\frac{z}{z-1}$ | 1 | $\frac{z}{(z-1)^2}$ | k |
| $\frac{z}{z-a}$ | a^k | $\frac{az}{(z-a)^2}$ | $k a^k$ |

A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

| Eigenschaft | Zeitfolge | Bildfunktion |
|------------------------|--|--|
| Linearität | $C_1 (f_k) + C_2 (g_k)$ | $C_1 F(z) + C_2 G(z)$ |
| Dämpfung | $(a^{-k} f_k)$ | $F(az)$ |
| Indexverschiebung | (f_{k-n}) (f_{k+1}) (f_{k+2}) \vdots (f_{k+n}) | $z^{-n} F(z)$ $z(F(z) - f_0)$ $z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$ \vdots $z^n \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} \right)$ |
| Differenzen | (Δf_k) $(\Delta^2 f_k)$ \vdots $(\Delta^n f_k)$ | $(z-1)F(z) - z f_0$ $(z-1)^2 F(z) - z((z-1)f_0 + \Delta f_0)$ \vdots $(z-1)^n F(z) - z \sum_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \Delta^k f_0$ |
| Multiplikation mit k | $(k f_k)$ $(k^2 f_k)$ \vdots | $-z F'(z)$ $z F'(z) - z^2 F''(z)$ \vdots |
| Faltung im Zeitbereich | $(f_k) \star (g_k)$ | $F(z) \cdot G(z)$ |