Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

26. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Wiederholung 3
1.1 Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln . . . 3
1.2 Komplexe Zahlen . . . 3
1.2.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen . . . 3
1.2.2 Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander . . . 4
1.2.3 Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen . . . 5
1.3 Sinus Kardinalis . . . 5

2 Verallgemeinerte Funktionen 5
2.1 Heaviside-Funktion . . . 5
2.2 Dirac-Distribution . . . 6
2.3 Verallgemeinerte Ableitung . . . 7
2.3.1 Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen . . . 7
2.4 Faltung . . . 7
2.5 Faltung mit der Dirac-Distribution . . . 8

3 Fourier-Transformation 8
3.1 Real- und Imaginärteil direkt berechnen . . . 8
3.2 Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen . . . 9
3.3 Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel . . . 9
3.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . 10

4 Laplacetransformation 11

5 z-Transformation 11

6 Statistik 11
6.1 Beschreibende Statistik . . . 11
6.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . 11
6.3 Schließende Statistik . . . 11

1 Grundlagen und Wiederholung

1.1 Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1
\end{aligned}$$

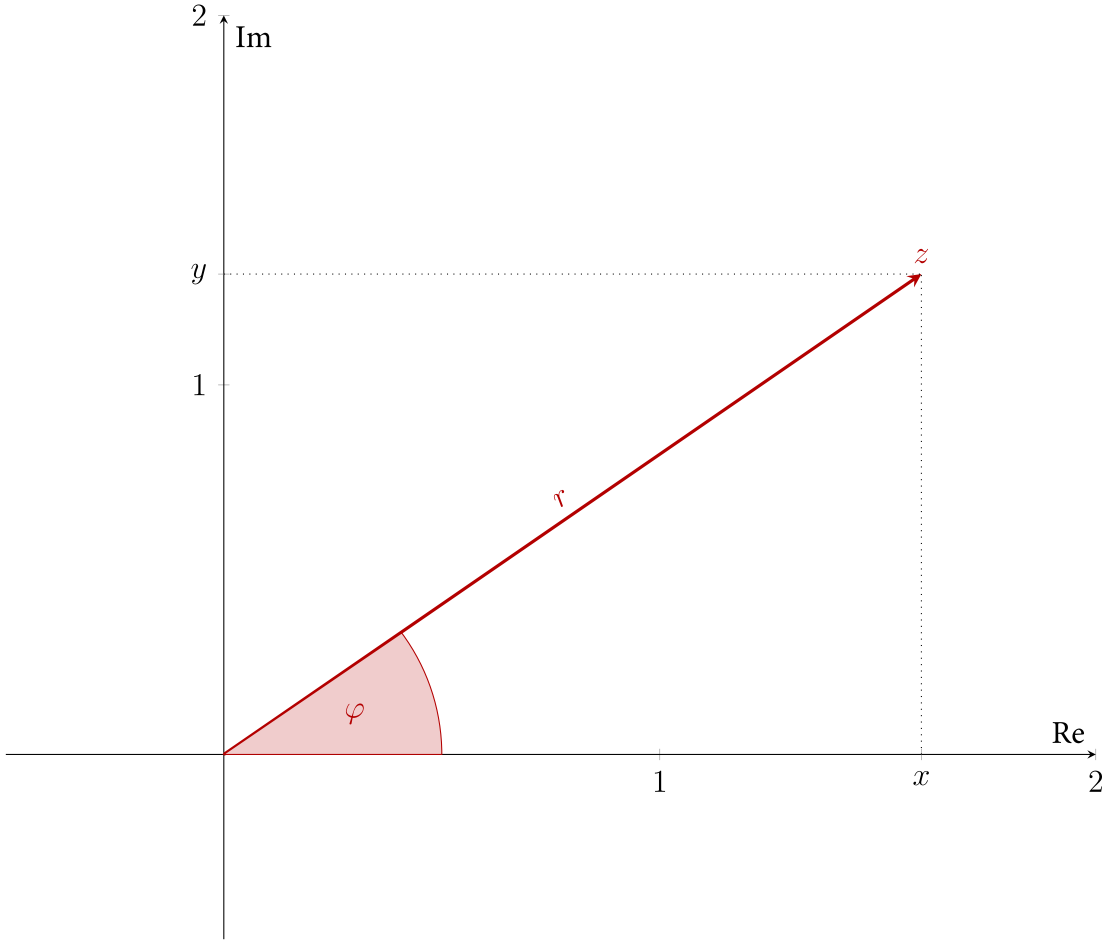
$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form:	$z = x + iy$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$
Exponentialform:	$re^{i\varphi}$



1.2.2 Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$\boxed{\begin{aligned} &z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi} \\ &r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}}$$

1.2.3 Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

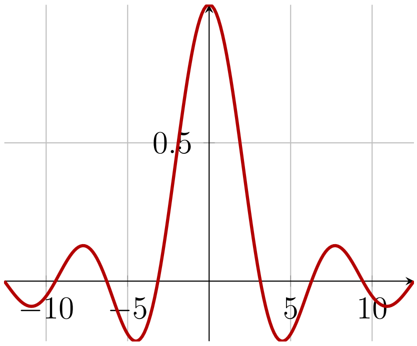
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

1.3 Sinus Kardinalis

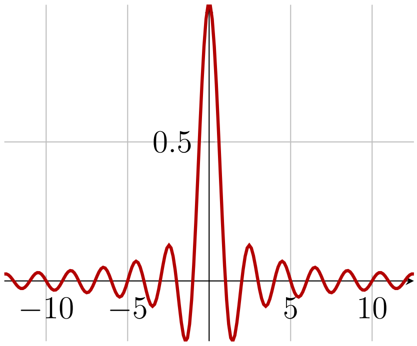
Der Sinus Kardinals $\text{si}(x)$ ist definiert als

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\text{sinc}(x)$-Funktion. Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

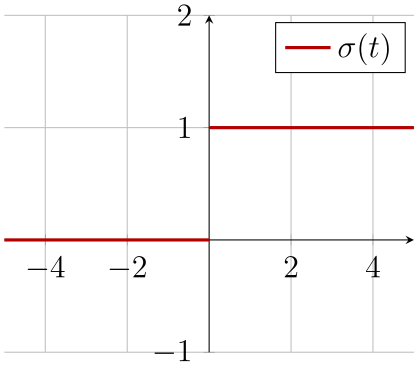


2 Verallgemeinerte Funktionen

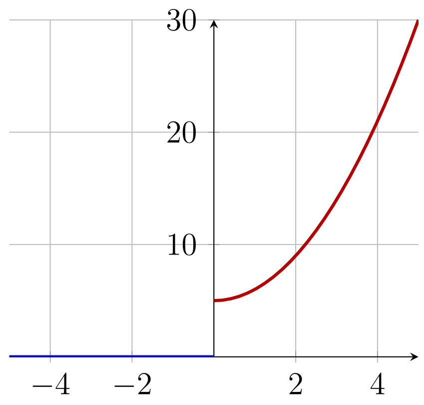
2.1 Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

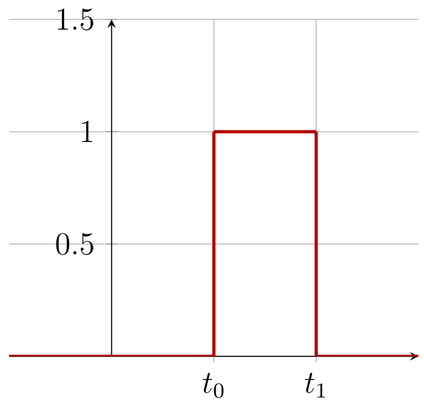


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

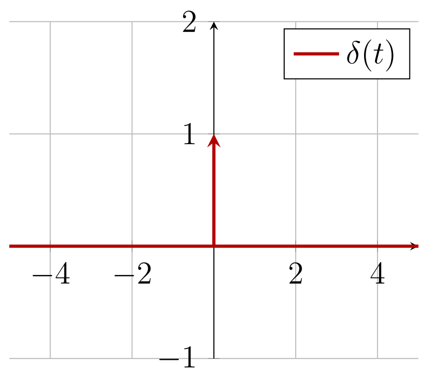
$$\boxed{r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)}$$



2.2 Dirac-Distribution

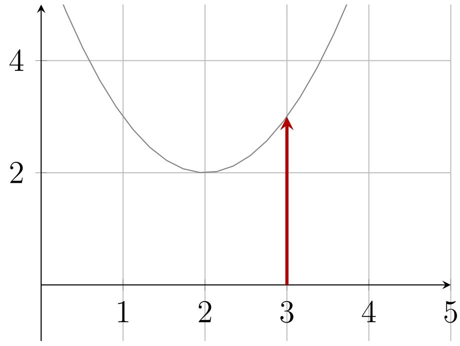
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \backslash 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞.

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t ausgeblendet!**



$(t-2)^2 + 2 \cdot \delta(t-3)$

2.3 Verallgemeinerte Ableitung

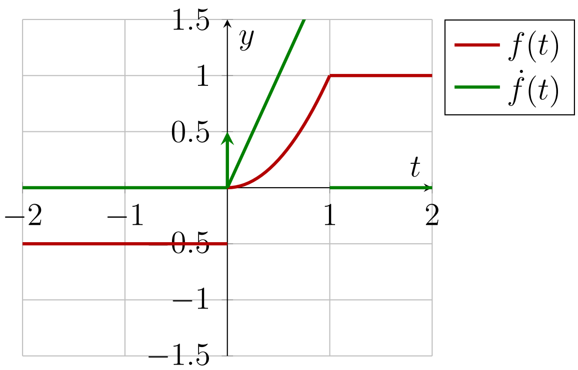
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1 Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x-Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4 Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f." (http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html)

Die Faltung ist definiert durch:

$$\boxed{h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau}$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

Noch mehr schreiben!

2.5 Faltung mit der Dirac-Distribution

3 Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$\boxed{s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i 2\pi f t} dt}$$

3.1 Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \cos(2\pi f t)\ dt \\ \mathrm{Im}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \sin(2\pi f t)\ dt \end{aligned}}$$

3.2 Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$\boxed{S(f) = \mathrm{Re}(f) = 2\int_0^\infty s(t)\ \cos(2\pi ft)dt}$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$\boxed{S(f) = i\,\mathrm{Im}(f) = -2i\int_0^\infty s(t)\ \sin(2\pi ft)dt}$$

3.3 Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$\boxed{S(f) = |S(f)|e^{i\varphi(f)}}$$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2}$ eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f))$ eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)$	$C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$e^{-i2\pi f t_0} S(f)$
Frequenzverschiebung	$e^{i2\pi f_0 t} s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t)\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}(S(f - f_0) + S(f + f_0))$
Ähnlichkeit	$s(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$i2\pi f S(f)$ $(i2\pi f)^2 S(f)$ $\vdots$ $(i2\pi f)^n S(f)$
Differenziation in f	$(-i2\pi t) s(t)$ $(-i2\pi t)^2 s(t)$ $\vdots$ $(-i2\pi t)^n s(t)$	$\dot{S}(f)$ $\ddot{S}(f)$ $\vdots$ $\frac{d^n}{dt^n} S(f)$
Multiplikation in t	$t s(t)$ $t^2 s(t)$ $\vdots$ $t^n s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-i2\pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}}{(-i2\pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau) d\tau$	$\frac{1}{i2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0)\delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

4 Laplacetransformation

5 z-Transformation

6 Statistik

6.1 Beschreibende Statistik

6.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.3 Schließende Statistik