

# **Formelsammlung Mathematik 3**

Tim Hilt

29. Oktober 2018

# Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Wiederholung	3
1.1	Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln . . . . .	3
1.2	Komplexe Zahlen . . . . .	3
1.2.1	Darstellungsformen komplexer Zahlen . . . . .	3
1.2.2	Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander . . . . .	4
1.2.3	Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen . . . . .	5
1.3	Sinus Kardinalis . . . . .	5
2	Verallgemeinerte Funktionen	5
2.1	Heaviside-Funktion . . . . .	5
2.2	Dirac-Distribution . . . . .	6
2.3	Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	7
2.3.1	Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen . . . . .	7
2.4	Faltung . . . . .	7
2.5	Faltung mit der Dirac-Distribution . . . . .	8
3	Fourier-Transformation	8
3.1	Real- und Imaginärteil direkt berechnen . . . . .	8
3.2	Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen . . . . .	9
3.3	Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel . . . . .	9
3.4	Inverse Fourier-Transformation . . . . .	9
3.5	Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	11
4	Laplace-Transformation	12
5	z-Transformation	12
6	Statistik	12
6.1	Beschreibende Statistik . . . . .	12
6.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	12
6.3	Schließende Statistik . . . . .	12

# 1 Grundlagen und Wiederholung

## 1.1 Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

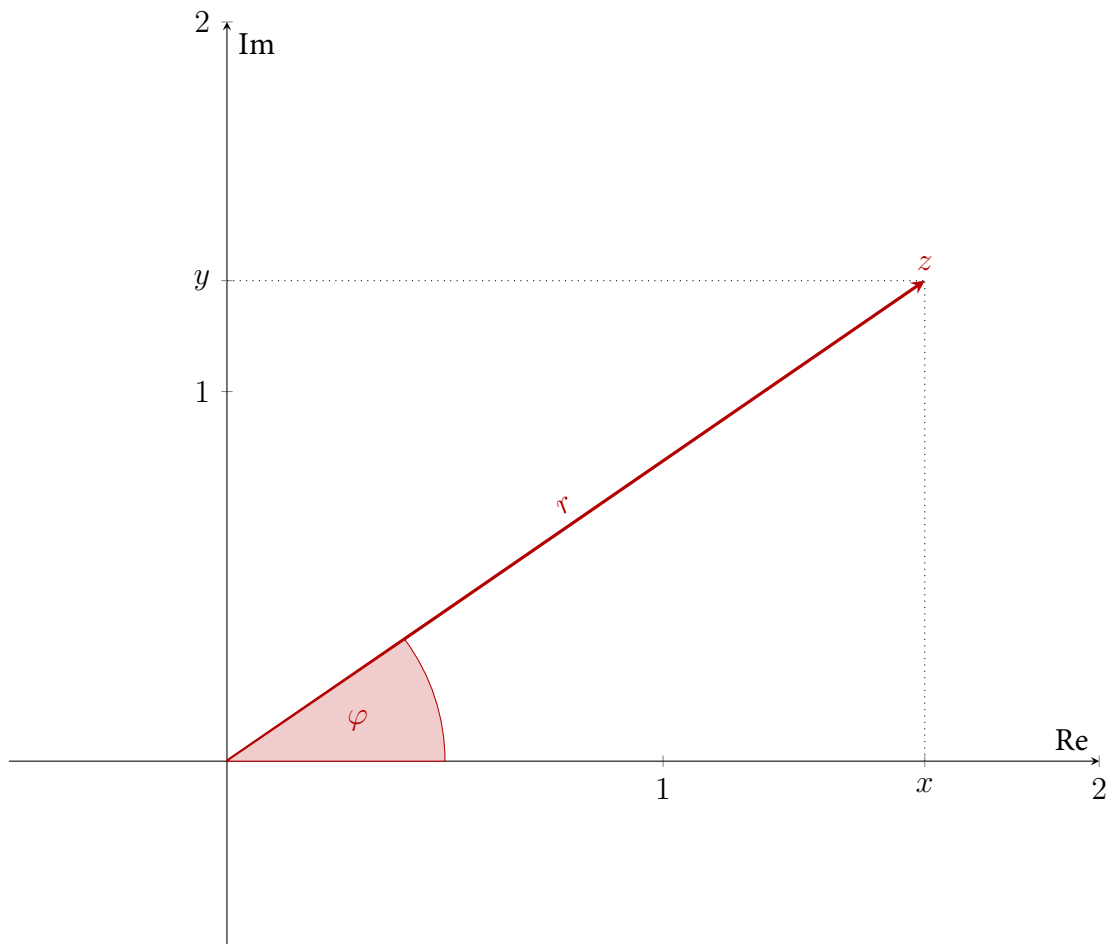
## 1.2 Komplexe Zahlen

### 1.2.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

---

Kartesische Form:	$z = x + iy$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$
Exponentialform:	$re^{i\varphi}$

---



### 1.2.2 Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$\begin{aligned} z &= r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r e^{i\varphi} \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

### 1.2.3 Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

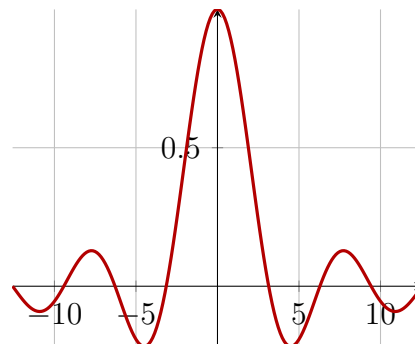
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

### 1.3 Sinus Kardinalis

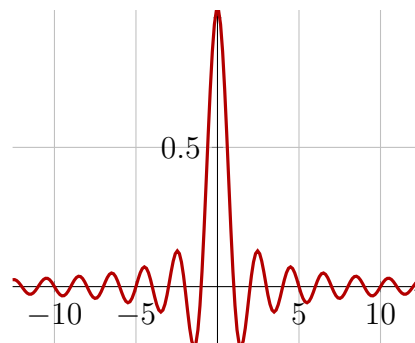
Der Sinus Kardinals  $\text{si}(x)$  ist definiert als

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die  $\text{sinc}(x)$ -Funktion. Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

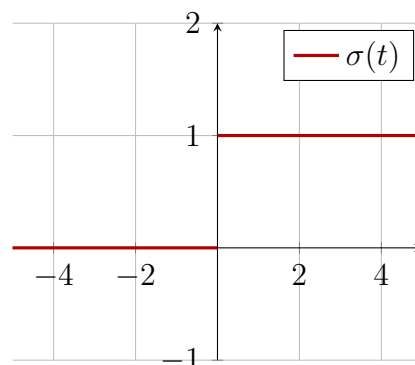


## 2 Verallgemeinerte Funktionen

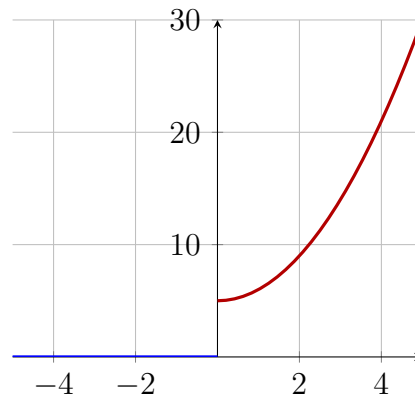
### 2.1 Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

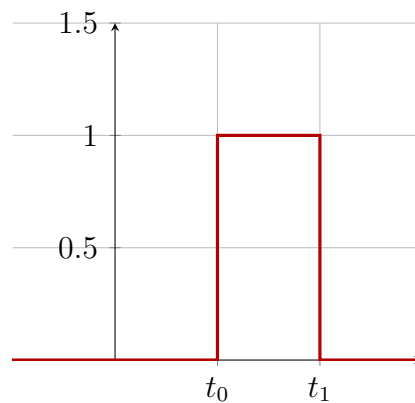


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

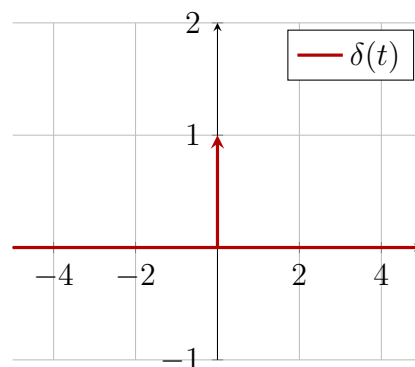
$$r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$$



## 2.2 Dirac-Distribution

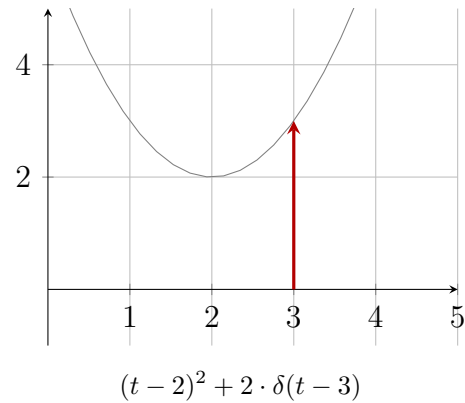
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen  $\infty$ .

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt  $t$  multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle  $t$  ausgeblendet!**



## 2.3 Verallgemeinerte Ableitung

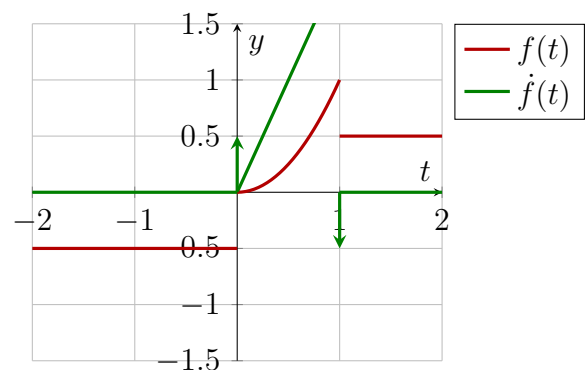
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

**Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!**

### 2.3.1 Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der  $x$ -Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

## 2.4 Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function  $g$  as it is shifted over another function  $f$ .“ (<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>)

Die Faltung ist definiert durch:

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion  $h(t)$ .  $\tau$  ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf  $t$  ab.

Noch  
mehr  
schrei-  
ben!

## 2.5 Faltung mit der Dirac-Distribution

## 3 Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$s(t) \circ \bullet S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

### 3.1 Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ \operatorname{Im}(z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$



## 3.2 Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von  $-\infty$  bis  $\infty$  integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis  $\infty$  mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$S(f) = \text{Re}(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$S(f) = i \text{Im}(f) = -2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

## 3.3 Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$S(f) = |S(f)| e^{i\varphi(f)}$$

Dabei ist

- Die Amplitude  $|S(f)| = \sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2}$  eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase  $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\text{Re}(f) + i \text{Im}(f))$  eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

## 3.4 Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransformierten Funktion  $S(f)$  die Zeitfunktion  $s(t)$  zu erhalten muss  $S(f)$  **rücktransformiert** werden:

$$S(f) \bullet \circ s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df$$



### 3.5 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)$	$C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f)$
Zeitverschiebung: <b>Wenn nach rechts verschoben wird ist Exponent negativ!</b>	$s(t - t_0)$	$e^{-i2\pi f t_0} S(f)$
Frequenzverschiebung	$e^{i2\pi f_0 t} s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}(S(f - f_0) + S(f + f_0))$
Ähnlichkeit	$s(at)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in $t$	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$i2\pi f S(f)$ $(i2\pi f)^2 S(f)$ $\vdots$ $(i2\pi f)^n S(f)$
Differenziation in $f$	$(-i2\pi t)s(t)$ $(-i2\pi t)^2 s(t)$ $\vdots$ $(-i2\pi t)^n s(t)$	$\dot{S}(f)$ $\ddot{S}(f)$ $\vdots$ $\frac{d^n}{dt^n} S(f)$
Multiplikation in $t$	$ts(t)$ $t^2 s(t)$ $\vdots$ $t^n s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-i2\pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}}{(-i2\pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{1}{i2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \delta(f)$
Faltung in $t$	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in $f$	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

## **4 Laplacetransformation**

## **5 z-Transformation**

## **6 Statistik**

### **6.1 Beschreibende Statistik**

### **6.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung**

### **6.3 Schließende Statistik**