Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

19. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Wiederholung

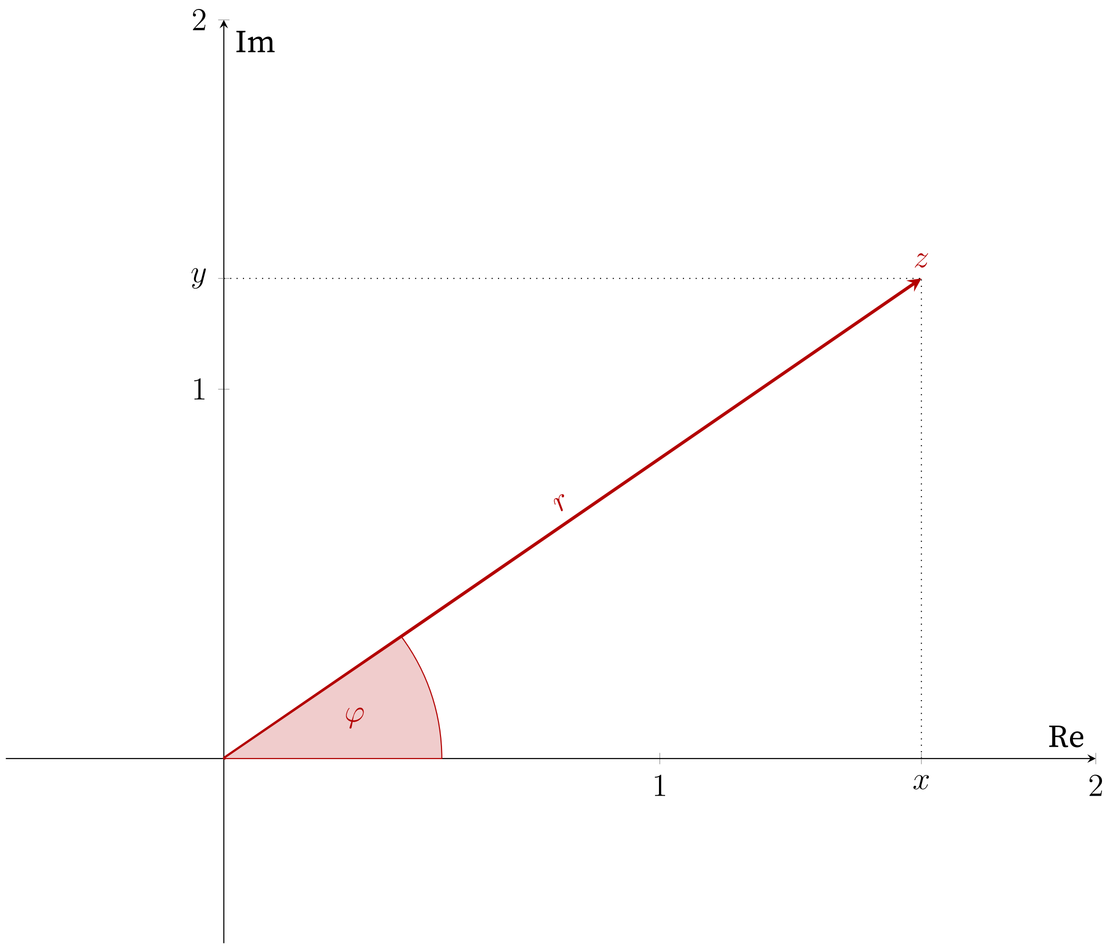
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}
\tan x &= \tfrac{\sin x}{\cos x} \\
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\[1em]
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \tfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \tfrac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \\[1em]
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan(2x) &= \tfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}$$

1.2. Komplexe Zahlen

1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form:	$z = x + iy$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$
Exponentialform:	$re^{i\varphi}$



1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = re^{i\varphi}$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

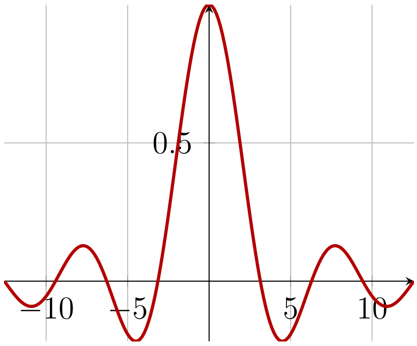
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

1.3. Sinus Kardinalis

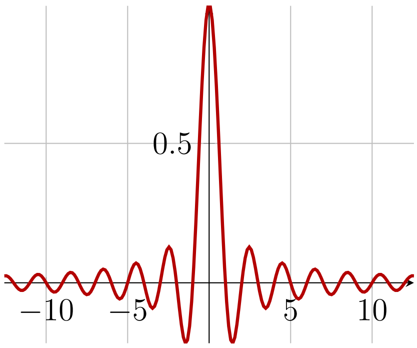
Der Sinus Kardinals $\text{si}(x)$ ist definiert als

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\text{sinc}(x)$-Funktion. Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R} \backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

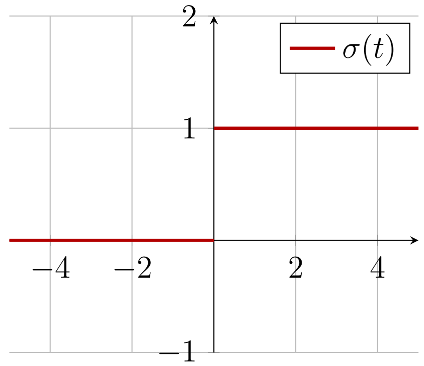


Teil I.

Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen

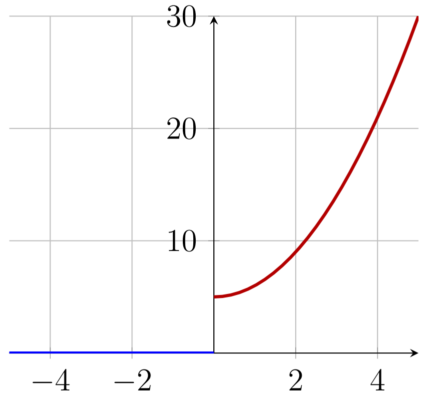
2. Verallgemeinerte Funktionen

2.1. Heaviside-Funktion

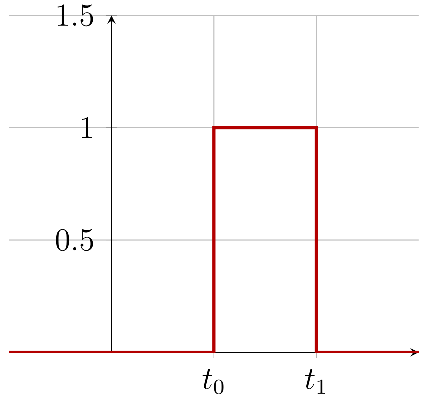


Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$



Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



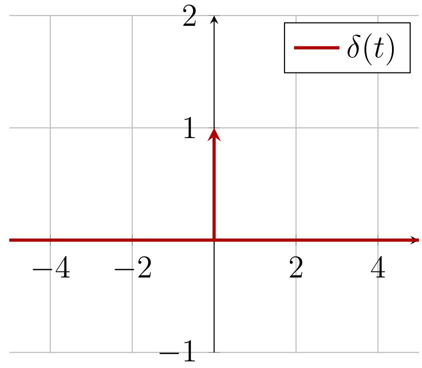
Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

$$\boxed{r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)}$$

2.2. Dirac-Distribution

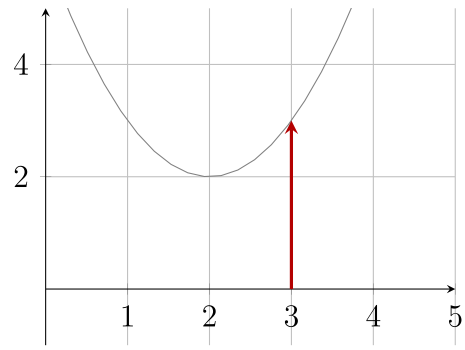
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞.

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t ausgeblendet!**



$(t-2)^2 + 2 \cdot \delta(t-3)$

2.3. Verallgemeinerte Ableitung

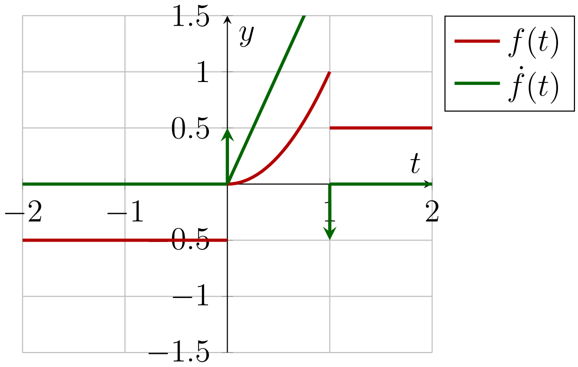
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x-Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4. Faltung

Ä convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f."(http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html)

Die Faltung ist definiert durch:

$$\boxed{h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau}$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

2.5. Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

2.6. Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion $f(t)$ mit der Dirac-Distribution $\delta(t)$ gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

2.7. Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen $f(t)$ und $g(t) = 0$ für $x \leq 0$, so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

3. Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$\boxed{s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt}$$

3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \cos(2\pi ft)\ dt \\ \mathrm{Im}(z) &= -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \sin(2\pi ft)\ dt \end{aligned}}$$

3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$\boxed{S(f) = \text{Re}(f) = 2\int_0^\infty s(t)\ \cos(2\pi ft)dt}$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$\boxed{S(f) = i\,\text{Im}(f) = -2i\int_0^\infty s(t)\ \sin(2\pi ft)dt}$$

3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$\boxed{S(f) = |S(f)|e^{i\varphi(f)}}$$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2}$ eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\text{Re}(f) + i\,\text{Im}(f))$ eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4. Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransormierten Funktion $S(f)$ die Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten muss $S(f)$ **rücktransformiert** werden:

$$\boxed{S(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f} df}$$

4. Laplacetransformation

Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

5. z-Transformation

Teil II.

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

6. Beschreibende Statistik

7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1. Kombinatorik

7.1.1. Permutation

Permutationen werden immer dann verwendet, wenn **alle Elemente einer Menge einmal** verwendet werden sollen. Man unterscheidet zwischen Permutation mit und ohne Wiederholung.

Permutation ohne Wiederholung

Wenn alle Elemente in einer Menge voneinander verschieden sind und soll die Anzahl der möglichen Anordnungen aller Elemente berechnet werden, so wendet man eine **Permutation ohne Wiederholung** an. Ihre Berechnung ist definiert durch:

$$n!$$

Permutation mit Wiederholung

Die Permutation mit Wiederholung wird immer dann angewandt, wenn einige Elemente in einer Menge von n Elementen gleich sind, wenn zum Beispiel Element n_1 k mal vorhanden ist. Die Formel zur Permutation mit Wiederholung ist definiert durch:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

Beispiel 1: Menge von 5 Elementen, von denen 3 eine selbe Eigenschaft aufweisen, 2 weisen eine andere Eigenschaft auf. Berechnung:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10$$

Beispiel 2: Wenn von 5 Elementen 3 Elemente gleich sind, die anderen zwei jedoch unterschiedliche Eigenschaften aufweisen, so berechnet sich die Permutation mit Wiederholung durch:

$$\frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} \equiv \frac{5!}{3!} \frac{120}{6} = 20$$

7.2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.2.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Allgemeine Form

Dichtefunktion:
Funktion, bei der auf der x-Achse alle Elemente mit der auf der y-Achse aufgetragenen Wahrscheinlichkeit gezeichnet sind. Es ergibt sich ein Säulendiagramm.
Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k}^{x} (k \cdot P(X = k))$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \sum_{k} k \cdot P(X = k)$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k} (k^2 \cdot P(X = k)) - \mu^2$$

Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung: Ziehen ohne Zurücklegen $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit verändert sich im Verlauf des Experiments

Es müssen folgende Variablen (bis auf k) gegeben sein:

N	Anzahl aller Elemente
M	Anzahl Elemente mit bestimmter Eigenschaft
n	Anzahl Elemente in der Stichprobe
k	Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim H(k, n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{H}(k, n, N, M)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Binomialverteilung

Beschreibung: Ziehen **mit** zurücklegen $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit bleibt während dem Experiment gleich

Es müssen folgende Variablen gegeben sein:

p	Anteil der Elemente/ Wahrscheinlichkeit beim Ziehen **eines** Elementes aus der Grundgesamtheit
n	Anzahl Elemente in der Stichprobe
k	Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim \mathrm{B}(k, n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion: Hier müssen die einzelnen Dichtefunktionen berechnet werden

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{B}(k, n, p)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

A.2 Trigonometrische Funktionen

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Verschiebung des Sinus		Verschiebung des Kosinus	
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$= \cos x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$= -\sin x$
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	$= -\cos x$	$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	$= \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	$= \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	$= \sin x$
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$	$= -\cos x$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$	$= -\sin x$
$\sin(x \pm \pi)$	$= -\sin x$	$\cos(x \pm \pi)$	$= -\cos x$
$\sin(\pm\pi - x)$	$= \sin x$	$\cos(\pm\pi - x)$	$= -\cos x$

Additionstheoreme		Doppelwinkelformeln	
$\sin(x \pm y)$	$= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sin(2x)$	$= 2 \sin x \cos x$
$\cos(x \pm y)$	$= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cos(2x)$	$= \cos^2 x - \sin^2 x$
$\tan(x \pm y)$	$= \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\tan(2x)$	$= \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\cot(x \pm y)$	$= \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$	$\cot(2x)$	$= \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$

A.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x \quad (a>0)$	$(\ln a)\, a^x$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a\, x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
		$\log_a x \quad (a>0, a \neq 1)$	$\frac{1}{(\ln a)\, x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$
$\cot x$	$-1-\cot^2 x$	$\coth x$	$1-\coth^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

A.4 Ableitungsregeln

Regel	Formel
Faktorregel	$(C\,f(x))' = C\,f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))' = f'(u(x))\cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$

A.5 Integrale

Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)	Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert x\rvert$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$	$= \mathrm{e}^x$
$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}$	$\int a^x\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{\ln a}\,a^x \quad (a>0)$
$\int x^a\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \ln x\,\mathrm{d}x$	$= x\,(\ln x - 1)$
		$\int \log_a x\,\mathrm{d}x$	$= x\,(\log_a x - \log_a \mathrm{e}) \quad (a>0, a\neq 1)$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$= -\cos x$	$\int \sinh x\,\mathrm{d}x$	$= \cosh x$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x$	$= \sin x$	$\int \cosh x\,\mathrm{d}x$	$= \sinh x$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x$	$= -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\int \tanh x\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert\cosh x\rvert$
$\int \cot x\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert\sin x\rvert$	$\int \coth x\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert\sinh x\rvert$
$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$	$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arsinh} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \arccos x\,\mathrm{d}x$	$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arcosh} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \arctan x\,\mathrm{d}x$	$= x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{artanh} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$
$\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{arcoth} x\,\mathrm{d}x$	$= x\operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$
$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert x-a\rvert$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a\neq 0)$
$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$	$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad (n\neq 1)$	$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$	$= \ln\lvert ax^2+bx+c\rvert \quad (a\neq 0)$
$\int x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{ax-1}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}$	$\int x^2\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$= \frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}\,\mathrm{e}^{ax}$
$\int x\sin ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$	$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$
$\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{2x}{a^2}\sin ax - \frac{a^2x^2-2}{a^3}\cos ax$	$\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x$	$= \frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax$
$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$	$= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$	$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$	$= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$
$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$	$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x$	$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x$

A.6 Integralregeln

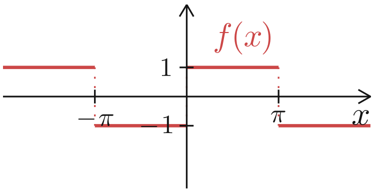
Regel	Formel
Faktorregel	$\int C\,f(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x$
Summenregel	$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
Substitution	$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$
	$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,f^2(x)$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert$
Partielle Integration	$\int f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$
Vertauschen	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
Integrationsbereich	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Hauptsatz I	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(t)$
Hauptsatz II	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

A.7 Potenzreihen

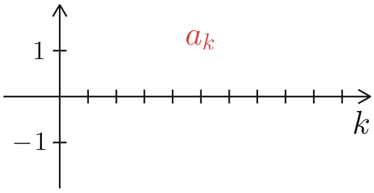
Funktion	Potenzreihe	Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	1
e^x	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	∞
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$	1
$\sin x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$	∞
$\cos x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$	∞
$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots$	1
$\sinh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$	∞
$\cosh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\,x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$	∞

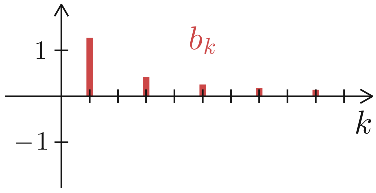
A.8 Fourier-Reihen

Funktion	Fourier-Reihe

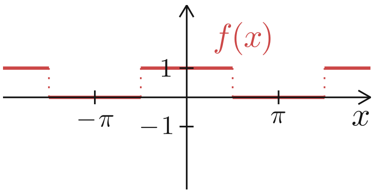


$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

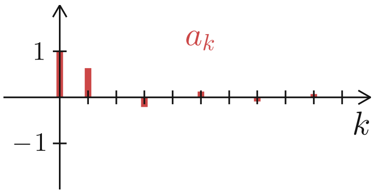


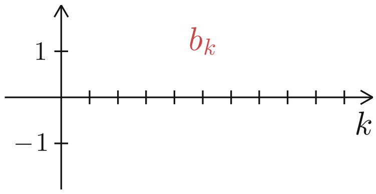


$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

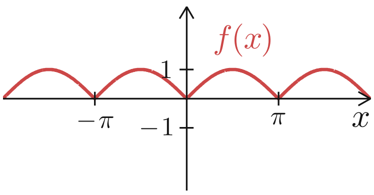


$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

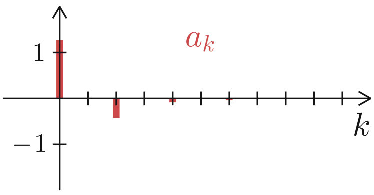


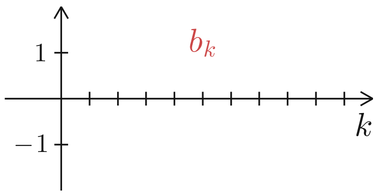


$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots\right)$$

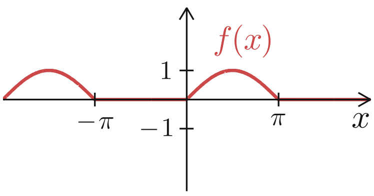


$$f(x) = |\sin x| \qquad -\pi \le x < \pi$$

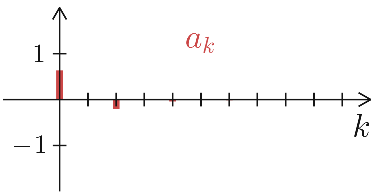


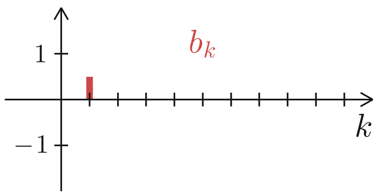


$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$

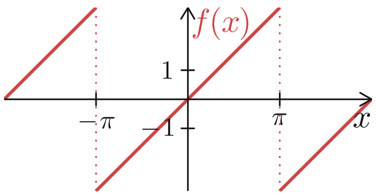


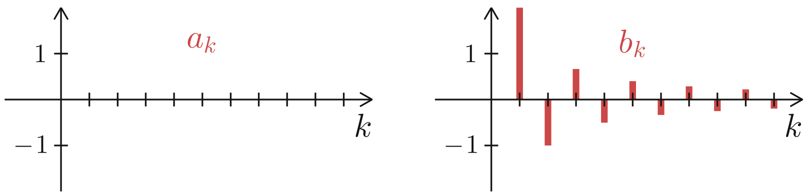
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \sin x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

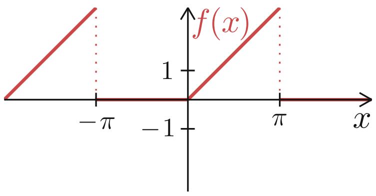


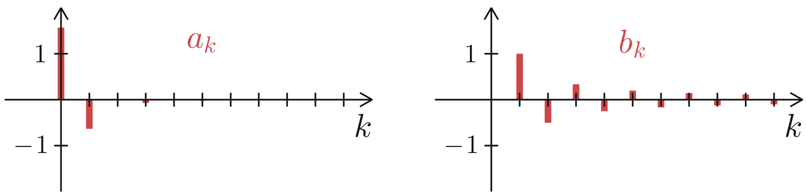


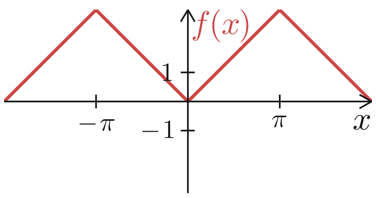
$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right) + \frac{\sin x}{2}$$

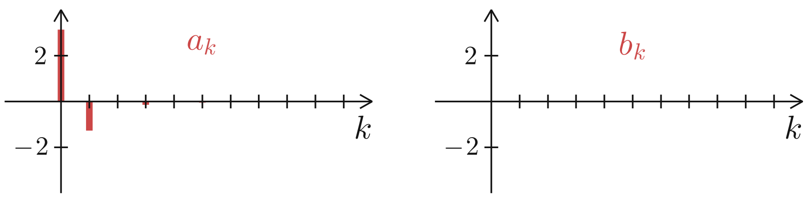
<table>
<tr><th>Funktion</th><th>Fourier-Reihe</th></tr>
<tr><td>


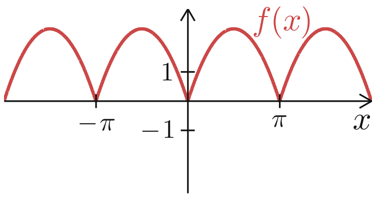
$f(x) = x \qquad -\pi \le x < \pi$
</td><td>


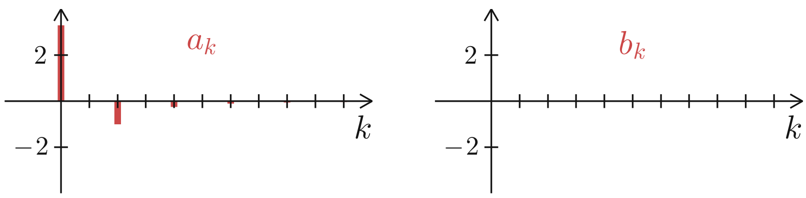
$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots\right)$
</td></tr>
<tr><td>


$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$
</td><td>


$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$
$+ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots$
</td></tr>
<tr><td>


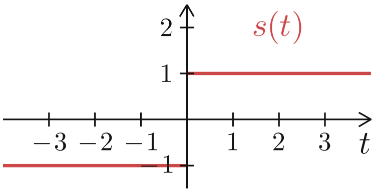
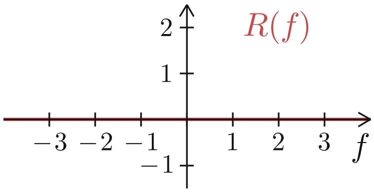
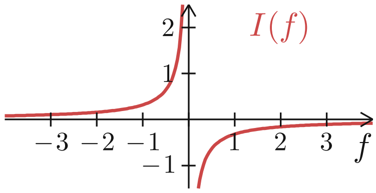
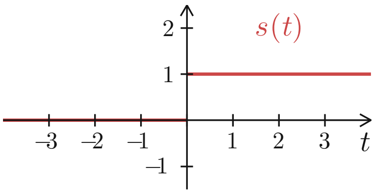
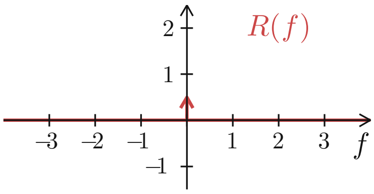
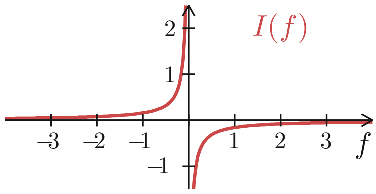
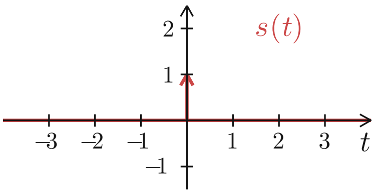
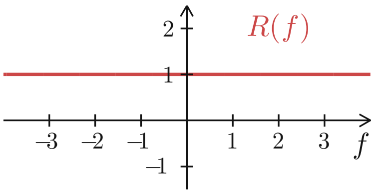
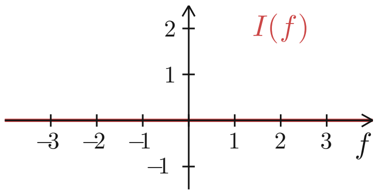
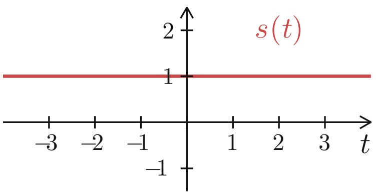
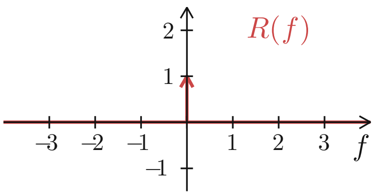
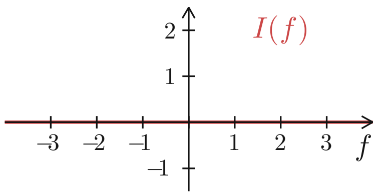
$f(x) = \lvert x\rvert \qquad -\pi \le x < \pi$
</td><td>


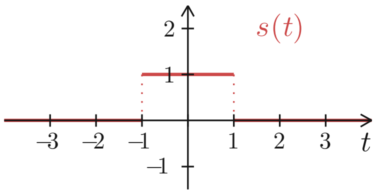
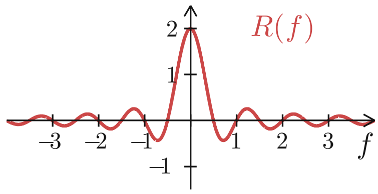
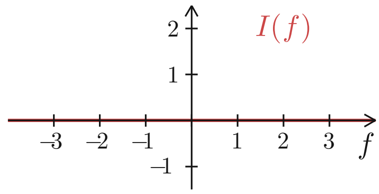
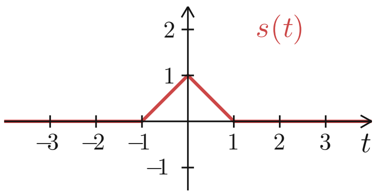
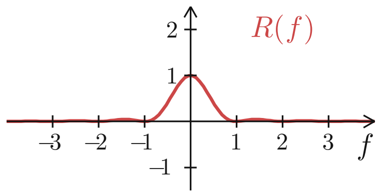
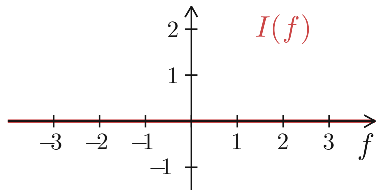
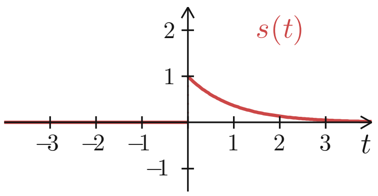
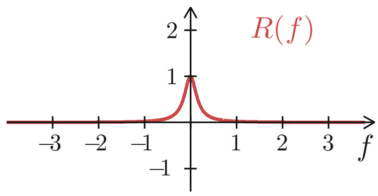
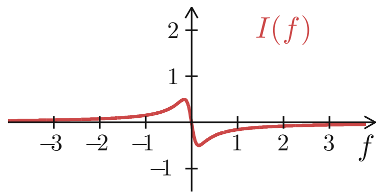
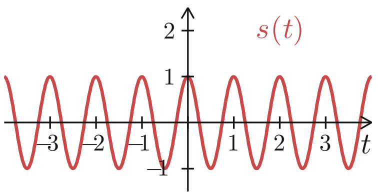
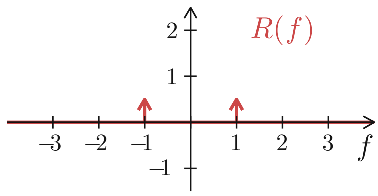
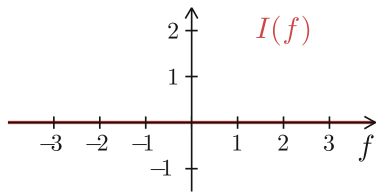
$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$
</td></tr>
<tr><td>


$f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \le x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \le x < \pi \end{cases}$
</td><td>


$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots\right)$
</td></tr>
</table>

A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$
 $s(t) = \operatorname{sgn}(t)$	  $S(f) = -\mathrm{i}\,\dfrac{1}{\pi f}$
 $s(t) = \sigma(t)$	  $S(f) = \dfrac{1}{2}\,\delta(f) - \mathrm{i}\,\dfrac{1}{2\pi f}$
 $s(t) = \delta(t)$	  $S(f) = 1$
 $s(t) = 1$	  $S(f) = \delta(f)$

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$
	 
$s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$	$S(f) = 2\,\dfrac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$
	 
$s(t) = (1+t)\big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big) + (1-t)\big(\sigma(t) - \sigma(t-1)\big)$	$S(f) = \left(\dfrac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$
	 
$s(t) = \mathrm{e}^{-t}\sigma(t)$	$S(f) = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\,2\pi f} = \dfrac{1}{1+4\pi^2 f^2} - \mathrm{i}\,\dfrac{2\pi f}{1+4\pi^2 f^2}$
	 
$s(t) = \cos(2\pi t)$	$S(f) = \dfrac{1}{2}\big(\delta(f-1) + \delta(f+1)\big)$

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, s_1(t) + C_2\, s_2(t)$	$C_1\, S_1(f) + C_2\, S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\, f\, t_0}\, S(f)$
Frequenzverschiebung	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\,\pi\, f_0\, t}\, s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t)\, \cos(2\,\pi\, f_0\, t)$	$\frac{1}{2}\big(S(f - f_0) + S(f + f_0)\big)$
Ähnlichkeit	$s(a\, t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\, S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} s(t)$	$\mathrm{i}\,2\,\pi\, f\, S(f)$ $(\mathrm{i}\,2\,\pi\, f)^2\, S(f)$ $\vdots$ $(\mathrm{i}\,2\,\pi\, f)^n\, S(f)$
Differenziation in f	$(-\mathrm{i}\,2\,\pi\, t) s(t)$ $(-\mathrm{i}\,2\,\pi\, t)^2 s(t)$ $\vdots$ $(-\mathrm{i}\,2\,\pi\, t)^n s(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ $\vdots$ $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in t	$t\, s(t)$ $t^2\, s(t)$ $\vdots$ $t^n\, s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-\mathrm{i}\,2\,\pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}(f)}{(-\mathrm{i}\,2\,\pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{\mathrm{i}\,2\,\pi\, f}\, S(f) + \frac{1}{2}\, S(0)\, \delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\dfrac{1}{s}$	1	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\sin at$
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\cos at$
$\dfrac{a}{s(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-1$	$\dfrac{a}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\sinh at$
$\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\cosh at$
$\dfrac{a}{1+as}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
$\dfrac{a^2}{(1+as)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
$\dfrac{1}{s(1+as)}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$	$t\sinh at$
$\dfrac{a-b}{(1+as)(1+bs)}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}\quad(a,b\neq 0)$	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
$\dfrac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{2}{(s-a)^3}$	$t^2\,\mathrm{e}^{at}$
$\dfrac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	$a\,\mathrm{e}^{at}-b\,\mathrm{e}^{bt}$	$\dfrac{2s}{(s-a)^3}$	$(at^2+2t)\mathrm{e}^{at}$
$\dfrac{a^3 s}{(1+as)^2}$	$(a-t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\quad(a\neq 0)$	$\dfrac{2s^2}{(s-a)^3}$	$(a^2t^2+4at+2)\mathrm{e}^{at}$
$\dfrac{ab(a-b)s}{(1+as)(1+bs)}$	$a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}-b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\;(a,b\neq 0)$	$\dfrac{a^2}{s^2(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-at-1$

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, f_1(t) + C_2\, f_2(t)$	$C_1\, F_1(s) + C_2\, F_2(s)$
Ähnlichkeit $(a > 0)$	$f(a\, t)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0)\, f(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-t_0\, s}\, F(s)$
Dämpfung	$\mathrm{e}^{-s_0\, t}\, f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in t	$f'(t)$ $f''(t)$ $\vdots$ $f^{(n)}(t)$	$s\, F(s) - f(0)$ $s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)$ $\vdots$ $s^n\, F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\, f^{(k)}(0)$
Differenziation in s	$-t\, f(t)$ $t^2\, f(t)$ $\vdots$ $(-t)^n\, f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ $\vdots$ $F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit t	$t\, f(t)$ $t^2\, f(t)$ $\vdots$ $t^n\, f(t)$	$-F'(s)$ $F''(s)$ $\vdots$ $(-1)^n\, F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{s}\, F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}\, f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\, \mathrm{d}\, u$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-T\, s}} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-s\, t}\, \mathrm{d}\, t$

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)
1	δ_k	$\frac{1}{z^n}$	1 für $k = n$, 0 sonst
$\frac{z}{z-1}$	1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	k
$\frac{z}{z-a}$	a^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$k\,a^k$

A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1\,(f_k) + C_2\,(g_k)$	$C_1\,F(z) + C_2\,G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k}\,f_k)$	$F(a\,z)$
Indexverschiebung	(f_{k-n})	$z^{-n}F(z)$
	(f_{k+1})	$z(F(z) - f_0)$
	(f_{k+2})	$z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$
	$\vdots$	$\vdots$
	(f_{k+n})	$z^n\left(F(z) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}\right)$
Differenzen	$(\triangle\,f_k)$	$(z-1)F(z) - z\,f_0$
	$\left(\triangle^2\,f_k\right)$	$(z-1)^2 F(z) - z((z-1)f_0 + \triangle f_0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(\triangle^n\,f_k)$	$(z-1)^n F(z) - z\sum\limits_{k=0}^{n-1}(z-1)^{n-k-1}\triangle^k f_0$
Multiplikation mit k	$(k\,f_k)$	$-z\,F'(z)$
	$\left(k^2\,f_k\right)$	$z\,F'(z) - z^2\,F''(z)$
	$\vdots$	$\vdots$
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z)\cdot G(z)$