

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

13. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Wiederholung	3
1.1	Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln	3
1.2	Komplexe Zahlen	3
1.2.1	Darstellungsformen komplexer Zahlen	3
1.2.2	Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander	4
1.2.3	Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen	5
1.3	Sinus Kardinalis	5
2	Verallgemeinerte Funktionen	5
2.1	Heaviside-Funktion	5
2.2	Dirac-Distribution	6
2.3	Verallgemeinerte Ableitung	7
2.3.1	Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen	7
2.4	Faltung	7
2.5	Faltung mit $\sigma(t)$	8
2.6	Faltung mit $\delta(t)$	8
2.7	Einseitige Faltung	8
3	Fourier-Transformation	8
3.1	Real- und Imaginärteil direkt berechnen	9
3.2	Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen	10
3.3	Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel	10
3.4	Inverse Fourier-Transformation	10
4	Laplacetransformation	11
5	z-Transformation	11
6	Statistik	11
6.1	Beschreibende Statistik	11
6.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	11
6.3	Schließende Statistik	11
7	Tabellen	11

1 Grundlagen und Wiederholung

1.1 Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

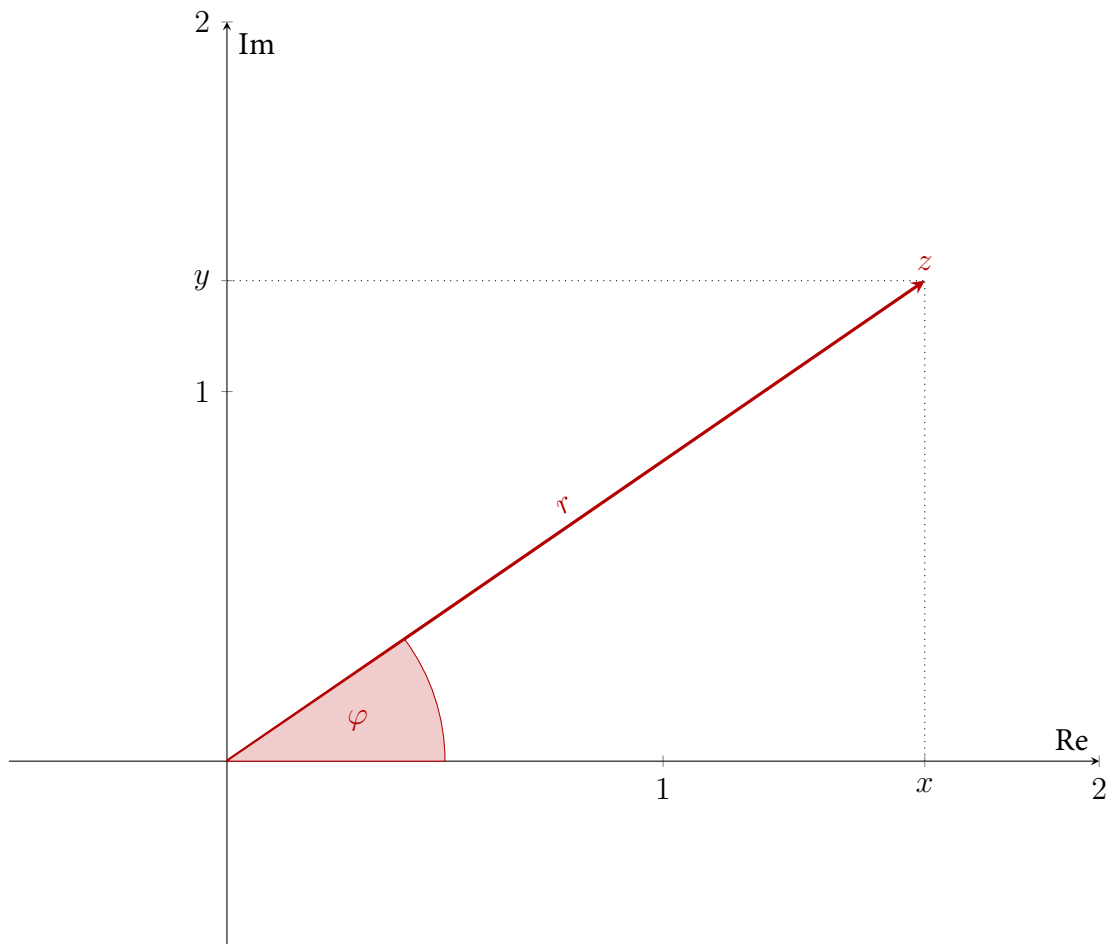
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form:	$z = x + iy$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$
Exponentialform:	$re^{i\varphi}$



1.2.2 Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

1.2.3 Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

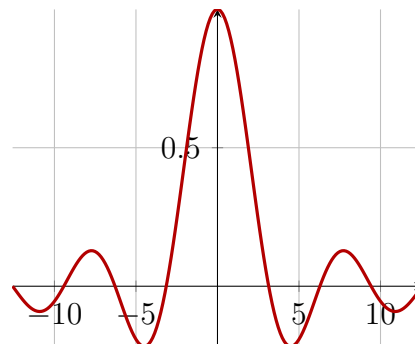
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

1.3 Sinus Kardinalis

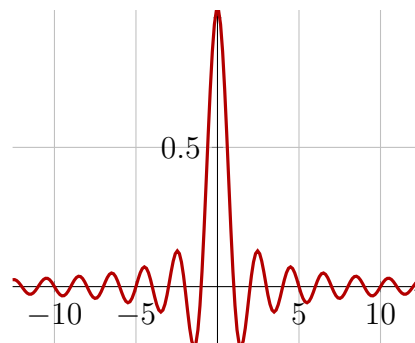
Der Sinus Kardinals $\text{si}(x)$ ist definiert als

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\text{sinc}(x)$ -Funktion. Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

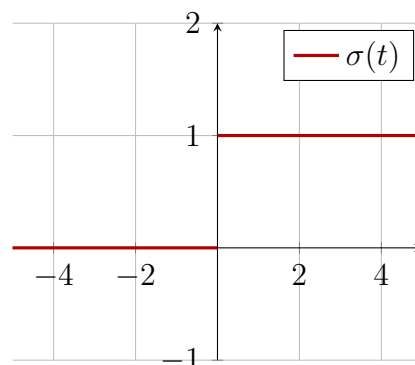


2 Verallgemeinerte Funktionen

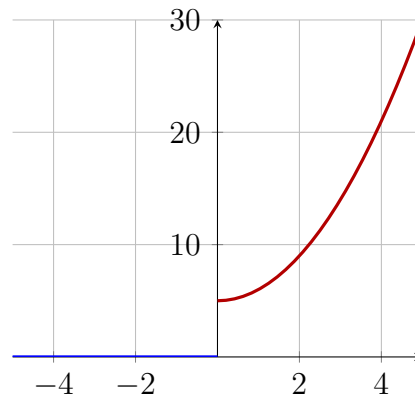
2.1 Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

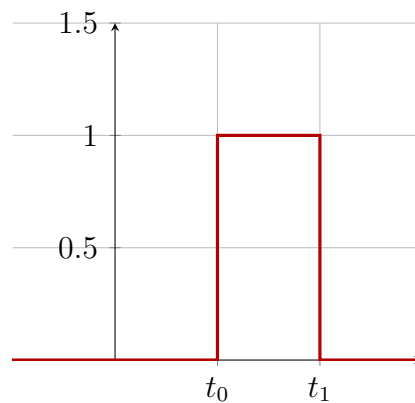


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

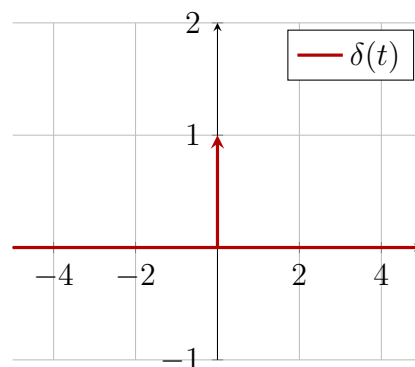
$$r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$$



2.2 Dirac-Distribution

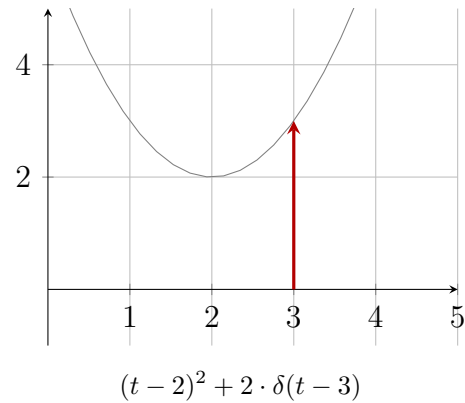
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞ .

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t ausgeblendet!**



2.3 Verallgemeinerte Ableitung

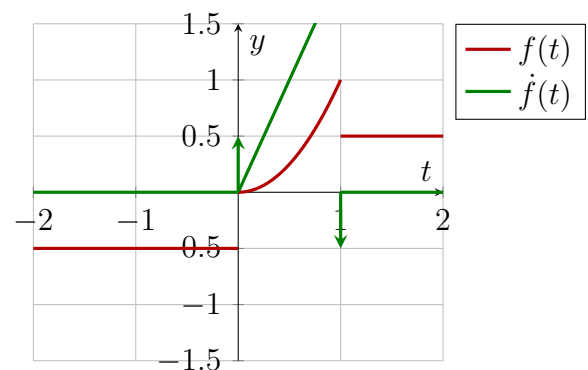
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1 Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x -Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4 Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f .“ (<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>)

Die Faltung ist definiert durch:

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

2.5 Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

2.6 Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion $f(t)$ mit der Dirac-Distribution $\delta(t)$ gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

2.7 Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen $f(t)$ und $g(t) = 0$ für $x \leq 0$, so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

3 Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$s(t) \circ \longrightarrow \bullet S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

3.1 Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ \operatorname{Im}(z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

3.2 Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$S(f) = \operatorname{Re}(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$S(f) = i \operatorname{Im}(f) = -2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

3.3 Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$S(f) = |S(f)| e^{i\varphi(f)}$$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2}$ eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))$ eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4 Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransformierten Funktion $S(f)$ die Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten muss $S(f)$ **rücktransformiert** werden:

$$S(f) \bullet \circ s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df$$

4 Laplacetransformation

Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) \xrightarrow{\bullet} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

5 z-Transformation

6 Statistik

6.1 Beschreibende Statistik

6.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.3 Schließende Statistik

7 Tabellen

A.2 Trigonometrische Funktionen

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Verschiebung des Sinus

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\cos x \\ \sin(x \pm \pi) &= -\sin x \\ \sin(\pm\pi - x) &= \sin x\end{aligned}$$

Verschiebung des Kosinus

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\sin x \\ \cos(x \pm \pi) &= -\cos x \\ \cos(\pm\pi - x) &= -\cos x\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \cot(x \pm y) &= \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}\end{aligned}$$

Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}\end{aligned}$$

A.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x \quad (a > 0)$	$(\ln a) a^x$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
		$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{(\ln a) x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
$\cot x$	$-1 - \cot^2 x$	$\coth x$	$1 - \coth^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

A.4 Ableitungsregeln

Regel	Formel
Faktorregel	$(C f(x))' = C f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

A.5 Integrale

Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)	Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)
$\int \frac{1}{x} dx$	$= \ln x $	$\int e^x dx$	$= e^x$
$\int \sqrt{x} dx$	$= \frac{2}{3} x\sqrt{x}$	$\int a^x dx$	$= \frac{1}{\ln a} a^x \quad (a > 0)$
$\int x^a dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \ln x dx$	$= x(\ln x - 1)$
		$\int \log_a x dx$	$= x(\log_a x - \log_a e)$ $(a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx$	$= -\cos x$	$\int \sinh x dx$	$= \cosh x$
$\int \cos x dx$	$= \sin x$	$\int \cosh x dx$	$= \sinh x$
$\int \tan x dx$	$= -\ln \cos x $	$\int \tanh x dx$	$= \ln \cosh x $
$\int \cot x dx$	$= \ln \sin x $	$\int \coth x dx$	$= \ln \sinh x $
$\int \arcsin x dx$	$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arsinh} x dx$	$= x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \arccos x dx$	$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arcosh} x dx$	$= x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \arctan x dx$	$= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{artanh} x dx$	$= x \operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$
$\int \operatorname{arccot} x dx$	$= x \operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{arcoth} x dx$	$= x \operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$
$\int \frac{1}{x-a} dx$	$= \ln x-a $	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$	$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$	$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$	$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx$	$= \ln ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$
$\int x e^{ax} dx$	$= \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$	$\int x^2 e^{ax} dx$	$= \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$
$\int x \sin ax dx$	$= \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax$	$\int x \cos ax dx$	$= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
$\int x^2 \sin ax dx$	$= \frac{2x}{a^2} \sin ax - \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \cos ax$	$\int x^2 \cos ax dx$	$= \frac{2x}{a^2} \cos ax + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
$\int e^{ax} \sin bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$	$\int e^{ax} \cos bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$
$\int \sin^2 x dx$	$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$	$\int \cos^2 x dx$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$

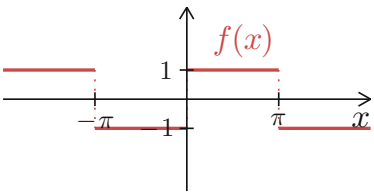
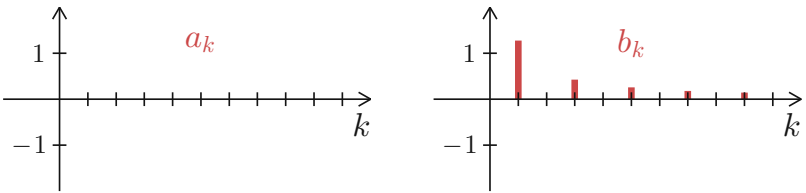
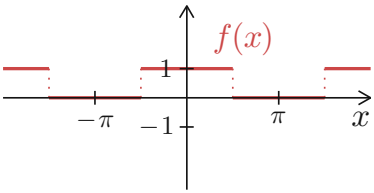
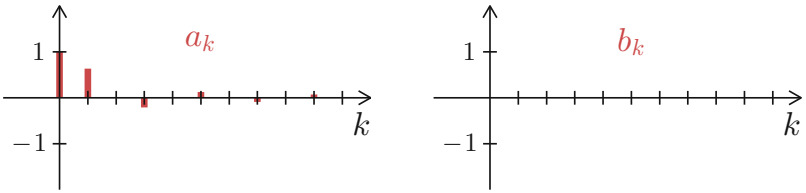
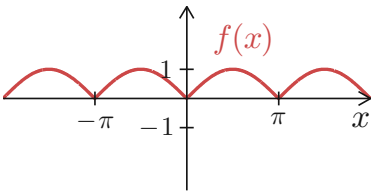
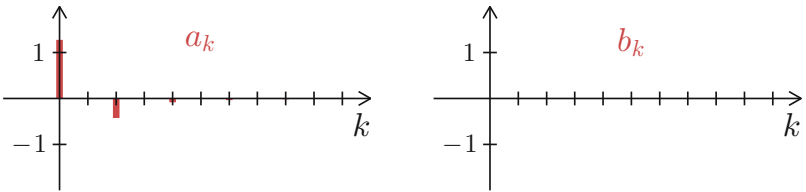
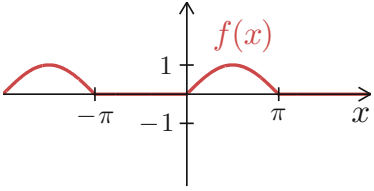
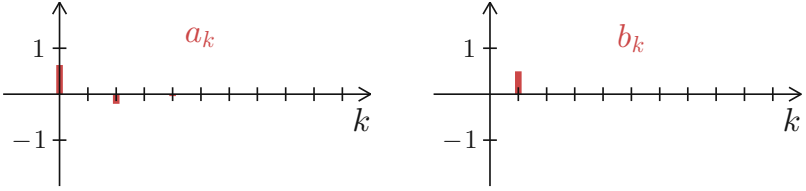
A.6 Integralregeln

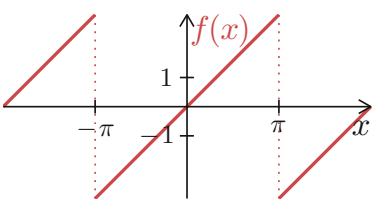
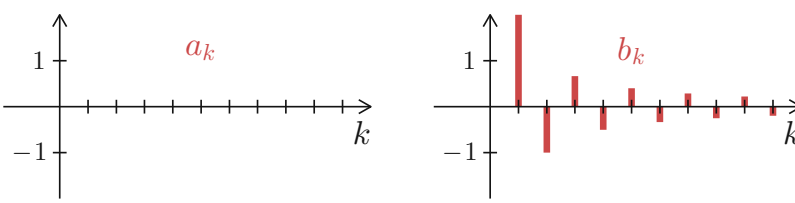
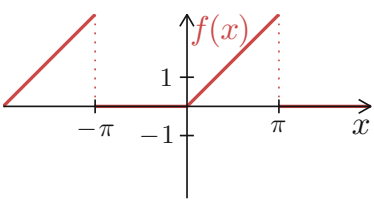
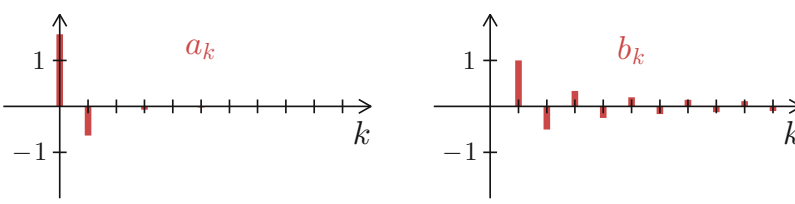
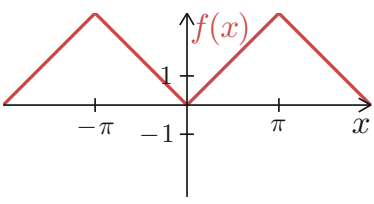
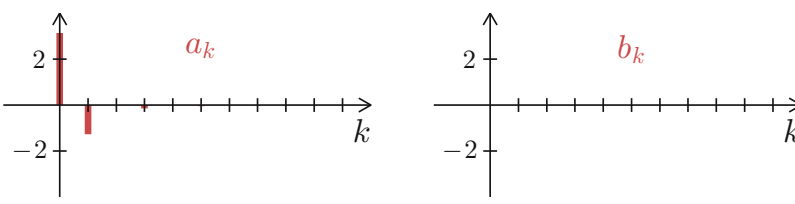
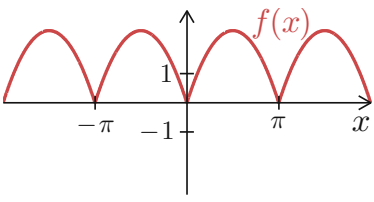
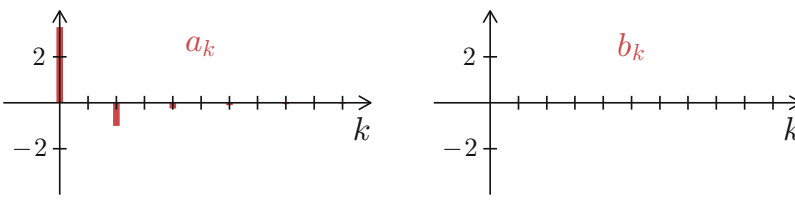
Regel	Formel
Faktorregel	$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$
Summenregel	$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
Substitution	$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$
	$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x)$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) $
Partielle Integration	$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$
Vertauschen	$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
Integrationsbereich	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
Hauptsatz I	$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t f(x) dx \right)' = f(t)$
Hauptsatz II	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

A.7 Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	1
e^x	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	∞
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$	1
$\sin x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$	∞
$\cos x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$	∞
$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$	1
$\sinh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	∞
$\cosh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	∞

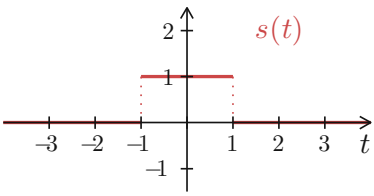
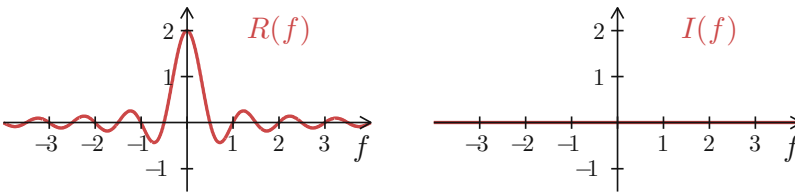
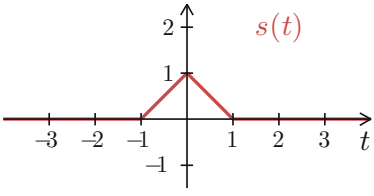
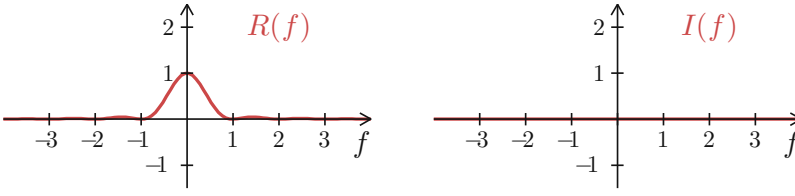
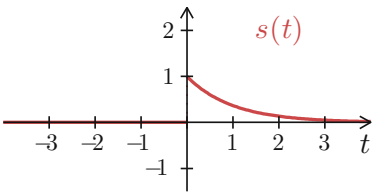
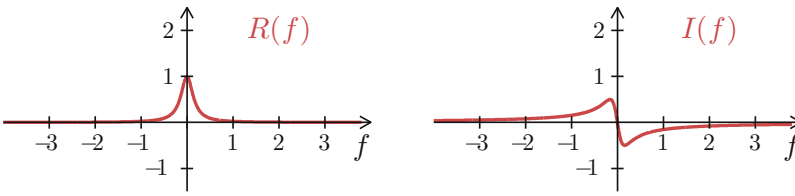
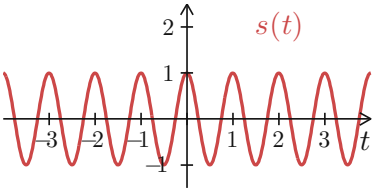
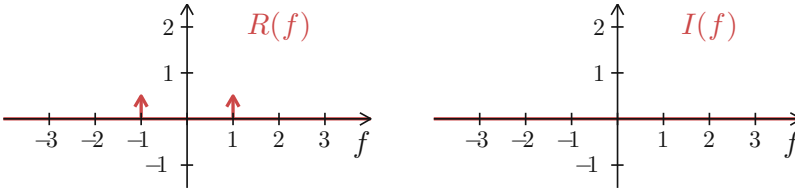
A.8 Fourier-Reihen

Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right)$
 $f(x) = \sin x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) + \frac{\sin x}{2}$

Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots$
 $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \leq x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$

A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i}I(f)$	
<p>$s(t) = \text{sgn}(t)$</p>		<p>$S(f) = -\mathbf{i} \frac{1}{\pi f}$</p>
<p>$s(t) = \sigma(t)$</p>		<p>$S(f) = \frac{1}{2} \delta(f) - \mathbf{i} \frac{1}{2\pi f}$</p>
<p>$s(t) = \delta(t)$</p>		<p>$S(f) = 1$</p>
<p>$s(t) = 1$</p>		<p>$S(f) = \delta(f)$</p>

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i} I(f)$
 $s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$	 $S(f) = 2 \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$
 $s(t) = (1+t)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) + (1-t)(\sigma(t) - \sigma(t-1))$	 $S(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2$
 $s(t) = e^{-t} \sigma(t)$	 $S(f) = \frac{1}{1 + \mathbf{i} 2\pi f} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} - \mathbf{i} \frac{2\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$
 $s(t) = \cos(2\pi t)$	 $S(f) = \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1))$

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)$	$C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$e^{-i 2 \pi f t_0} S(f)$
Frequenzverschiebung	$e^{i 2 \pi f_0 t} s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t) \cos(2 \pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} (S(f - f_0) + S(f + f_0))$
Ähnlichkeit	$s(at)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ \vdots $\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$i 2 \pi f S(f)$ $(i 2 \pi f)^2 S(f)$ \vdots $(i 2 \pi f)^n S(f)$
Differenziation in f	$(-i 2 \pi t) s(t)$ $(-i 2 \pi t)^2 s(t)$ \vdots $(-i 2 \pi t)^n s(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ \vdots $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in t	$t s(t)$ $t^2 s(t)$ \vdots $t^n s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-i 2 \pi}$ \vdots $\frac{S^{(n)}(f)}{(-i 2 \pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{1}{i 2 \pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
$\frac{1}{(s - a)^2}$	$t e^{at}$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
$\frac{a}{s(s - a)}$	$e^{at} - 1$	$\frac{a}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
$\frac{a - b}{(s - a)(s - b)}$	$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
$\frac{a}{1 + as}$	$e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{a^2}{(1 + as)^2}$	$t e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{s(1 + as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \sinh at$
$\frac{a - b}{(1 + as)(1 + bs)}$	$e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}} \quad (a, b \neq 0)$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
$\frac{s}{(s - a)^2}$	$(1 + at)e^{at}$	$\frac{2}{(s - a)^3}$	$t^2 e^{at}$
$\frac{(a - b)s}{(s - a)(s - b)}$	$a e^{at} - b e^{bt}$	$\frac{2s}{(s - a)^3}$	$(at^2 + 2t)e^{at}$
$\frac{a^3 s}{(1 + as)^2}$	$(a - t)e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2s^2}{(s - a)^3}$	$(a^2 t^2 + 4at + 2)e^{at}$
$\frac{ab(a - b)s}{(1 + as)(1 + bs)}$	$a e^{-\frac{t}{b}} - b e^{-\frac{t}{a}} \quad (a, b \neq 0)$	$\frac{a^2}{s^2(s - a)}$	$e^{at} - at - 1$

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$
Ähnlichkeit ($a > 0$)	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} F(s)$
Dämpfung	$e^{-s_0 t} f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in t	$f'(t)$ $f''(t)$ \vdots $f^{(n)}(t)$	$s F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ \vdots $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$
Differenziation in s	$-t f(t)$ $t^2 f(t)$ \vdots $(-t)^n f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ \vdots $F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit t	$t f(t)$ $t^2 f(t)$ \vdots $t^n f(t)$	$-F'(s)$ $F''(s)$ \vdots $(-1)^n F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)
1	δ_k	$\frac{1}{z^n}$	1 für $k = n$, 0 sonst
$\frac{z}{z-1}$	1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	k
$\frac{z}{z-a}$	a^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$k a^k$

A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1 (f_k) + C_2 (g_k)$	$C_1 F(z) + C_2 G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k} f_k)$	$F(az)$
Indexverschiebung	(f_{k-n}) (f_{k+1}) (f_{k+2}) \vdots (f_{k+n})	$z^{-n} F(z)$ $z(F(z) - f_0)$ $z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$ \vdots $z^n \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} \right)$
Differenzen	(Δf_k) $(\Delta^2 f_k)$ \vdots $(\Delta^n f_k)$	$(z-1)F(z) - z f_0$ $(z-1)^2 F(z) - z((z-1)f_0 + \Delta f_0)$ \vdots $(z-1)^n F(z) - z \sum_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \Delta^k f_0$
Multiplikation mit k	$(k f_k)$ $(k^2 f_k)$ \vdots	$-z F'(z)$ $z F'(z) - z^2 F''(z)$ \vdots
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z) \cdot G(z)$