Hochschule Esslingen
University of Applied Sciences

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

24. Januar 2019

Kurzes Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Wiederholung

1.1 Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1
\end{aligned}$$

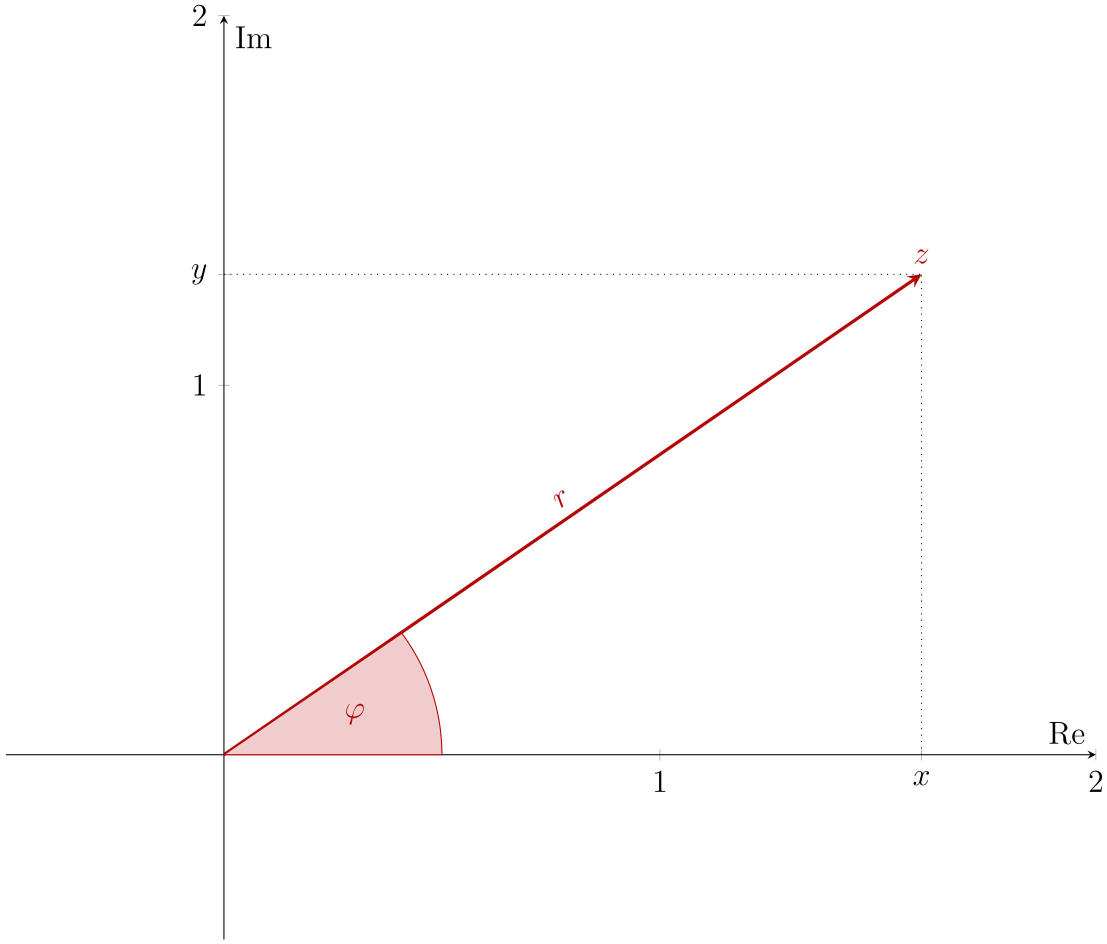
$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form:	$z = x + y$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r \cos\varphi + r \sin\varphi$
Exponentialform:	re^{φ}



1.2.2 Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi = re^{\varphi}$
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

1.2.3 Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

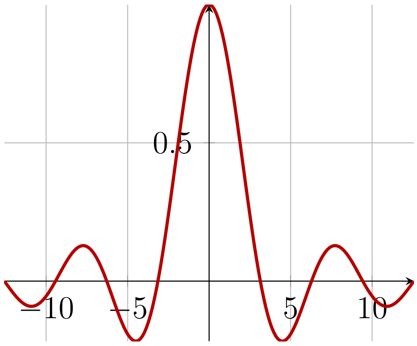
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$$

1.3 Sinus Kardinalis

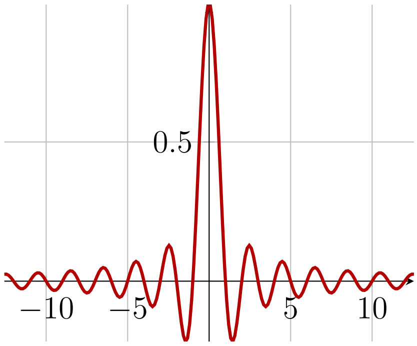
Der Sinus Kardinals $\mathrm{si}(x)$ ist definiert als

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\mathrm{sinc}(x)$-Funktion. Sie ist definiert als:

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Teil I

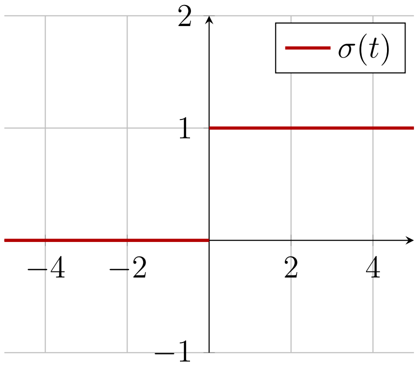
Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen

2 Verallgemeinerte Funktionen

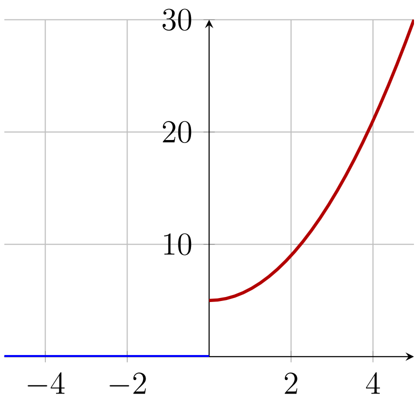
2.1 Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

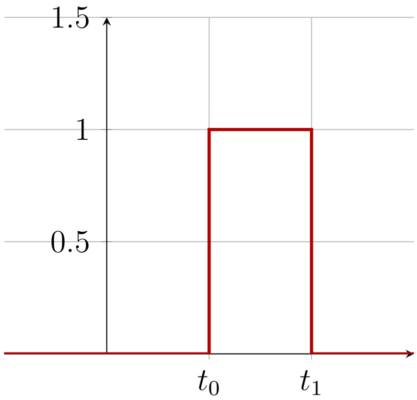


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

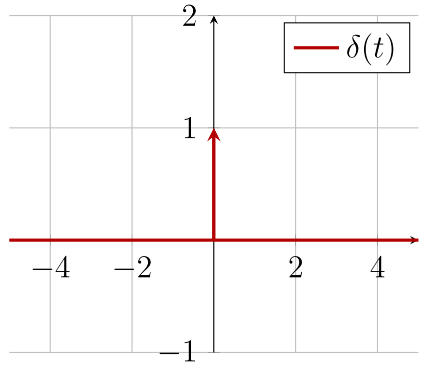
$$\boxed{r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)}$$



2.2 Dirac-Distribution

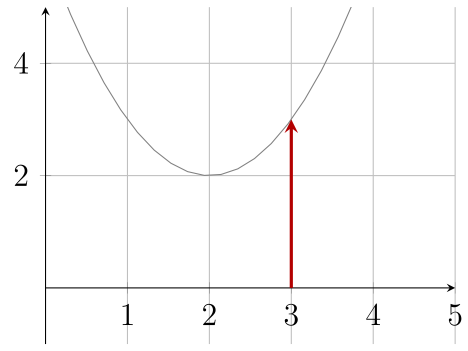
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞.

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t ausgeblendet!**



$(t-2)^2 + 2 \cdot \delta(t-3)$

2.3 Verallgemeinerte Ableitung

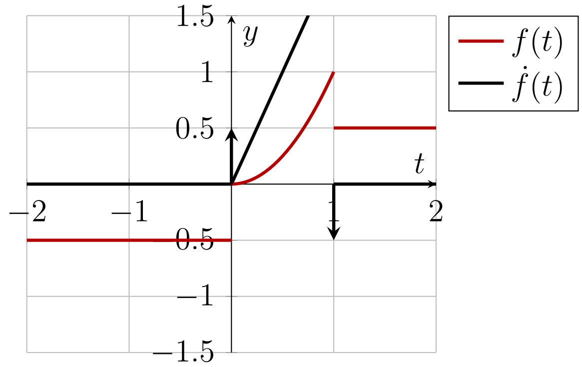
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1 Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x-Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4 Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f." (http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html)

Die Faltung ist definiert durch:

$$\mathrm{h(t)} = \mathrm{f(t)} \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

2.5 Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

2.6 Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion $f(t)$ mit der Dirac-Distribution $\delta(t)$ gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

2.7 Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen $f(t)$ und $g(t) = 0$ für $x \leq 0$, so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

3 Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

s(t) S(f) $= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi f t} dt$

3.1 Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\mathrm{Re}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \cos(2\pi f t)\ dt$$

$$\mathrm{Im}(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ \sin(2\pi f t)\ dt$$

3.2 Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion gerade, so ist die Transformierte rein reell und ebenfalls gerade, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

S(f) $= \mathrm{Re}(f) = 2\int_0^\infty s(t)\ \cos(2\pi ft)dt$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung ungerader Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte rein imaginär und ungerade:

S(f) $= \mathrm{Im}(f) = -2\int_0^\infty s(t)\ \sin(2\pi ft)dt$

3.3 Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

S(f) = —S(f)— e$^{\varphi(f)}$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2}$ eine gerade, reelle Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\mathrm{Re}(f) + \mathrm{Im}(f))$ eine ungerade, reelle Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4 Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransormierten Funktion $S(f)$ die Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten muss $S(f)$ **rücktransformiert** werden:

S(f) s(t) $= \int_{-\infty}^\infty S(f)e^{2\pi f}df$

4 Laplacetransformation

Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

f(t) F(s) $= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$

5 z-Transformation

Teil II

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

6 Beschreibende Statistik

7 Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Kombinatorik

7.1.1 Permutation

Permutation ohne Wiederholung:	$n!$
Permutation mit Wiederholung:	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$

7.2 Kombination und Variation

Kombinationen werden verwendet, wenn **nur einige** der Elemente in einer Menge angeordnet werden sollen. Permutationen hingegen ordnen **alle** Elemente an.

Urnenmodell: Ziehen von k aus n	Anzahl Möglichkeiten	Name Vorlesung	typische Beispiele
ohne Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n}{k}$	Kombination verschiedene Elemente	a) Lotto: 6 aus 49 b) k Personen aus n (Arbeitsgruppe)
mit Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n+k-1}{k}$	Kombination Elemente mehrfach	a) Widerstände parallel b) 2 T-Shirts aus 5 Farben auswählen
ohne Zurücklegen; geordnet	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Variation verschiedene Elemente Spezialfall: $n = k$ Permutation	a) Siegerpodest b) Rangreihenfolge Auswahl Studierende c) Zieleinlauf insgesamt
mit Zurücklegen; geordnet	n^k	Variation Elemente mehrfach	a) Binäre Ziffernfolge b) Wörter aus 7 Buchstaben

7.3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.3.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Allgemeine Form

Dichtefunktion:
Funktion, bei der auf der x-Achse alle Elemente mit der auf der y-Achse aufgetragenen Wahrscheinlichkeit gezeichnet sind. Es ergibt sich ein Säulendiagramm.
Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k}^{x} (k \cdot P(X = k))$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \sum_{k} k \cdot P(X = k)$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k} (k^2 \cdot P(X = k)) - \mu^2$$

Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung: Ziehen ohne Zurücklegen $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit verändert sich im Verlauf des Experiments
Es müssen folgende Variablen (bis auf k) gegeben sein:

N	Anzahl aller Elemente
M	Anzahl Elemente mit bestimmter Eigenschaft
n	Anzahl Elemente in der Stichprobe
k	Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim H(k, n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{H}(k, n, N, M)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Binomialverteilung

Beschreibung: Ziehen **mit** zurücklegen → Wahrscheinlichkeit bleibt während dem Experiment gleich
Es müssen folgende Variablen gegeben sein:

p	Anteil der Elemente/ Wahrscheinlichkeit beim Ziehen **eines** Elementes aus der Grundgesamtheit
n	Anzahl Elemente in der Stichprobe
k	Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim \mathrm{B}(k, n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion: Hier müssen die einzelnen Dichtefunktionen berechnet werden

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{B}(k, n, p)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung durch Binomialverteilung:
Falls $\frac{n}{N} \leq 0.1$ kann der Parameter p durch $p = \frac{M}{N}$ angenähert werden.

Poissonverteilung

Beschreibung: Gegeben ist ein Durchschnittswerts (*Erwartungswert*) λ pro einer gewissen Einheit (z.B. im Durchschnitt 3 Anrufe in 5 Minuten). Die Poissonverteilung soll berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist einen anderen Wert k als Ergebnis zu erhalten.
Dichtefunktion:

$$X \sim \mathrm{Po}(k, \lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \mathrm{Po}(k, \lambda)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

Annäherung der Binomialverteilung durch Poissonverteilung:
Wenn n groß und p klein ist $(n \geq 30, p \leq 0.1)$ kann der Parameter λ durch $\lambda = n \cdot p$ angenähert werden.

7.3.2 Geometrische Verteilung

7.3.3 Exponentialverteilung

A.2 Trigonometrische Funktionen

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Verschiebung des Sinus

$$\begin{aligned}
\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x\\
\sin\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cos x\\
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x\\
\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= -\cos x\\
\sin\left(x\pm\pi\right) &= -\sin x\\
\sin\left(\pm\pi-x\right) &= \sin x
\end{aligned}$$

Verschiebung des Kosinus

$$\begin{aligned}
\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin x\\
\cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin x\\
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x\\
\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= -\sin x\\
\cos\left(x\pm\pi\right) &= -\cos x\\
\cos\left(\pm\pi-x\right) &= -\cos x
\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(x\pm y) &= \sin x\cos y\pm\cos x\sin y\\
\cos(x\pm y) &= \cos x\cos y\mp\sin x\sin y\\
\tan(x\pm y) &= \frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}\\
\cot(x\pm y) &= \frac{\cot x\cot y\mp 1}{\cot y\pm\cot x}
\end{aligned}$$

Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x\\
\cos(2x) &= \cos^2 x-\sin^2 x\\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\\
\cot(2x) &= \frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}
\end{aligned}$$

A.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x \quad (a>0)$	$(\ln a)\, a^x$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a\, x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
		$\log_a x \quad (a>0, a \neq 1)$	$\frac{1}{(\ln a)\, x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$
$\cot x$	$-1-\cot^2 x$	$\coth x$	$1-\coth^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

A.4 Ableitungsregeln

Regel	Formel
Faktorregel	$(C\,f(x))' = C\,f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))' = f'(u(x))\cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$

A.5 Integrale

Funktion		Stammfunktion (ohne Konstante C)	Funktion		Stammfunktion (ohne Konstante C)
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln\|x\|$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$	$=$	e^x
$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\int a^x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{1}{\ln a}a^x \quad (a>0)$
$\int x^a\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \ln x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x(\ln x - 1)$
			$\int \log_a x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x(\log_a x - \log_a \mathrm{e}) \quad (a>0, a\neq 1)$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$=$	$-\cos x$	$\int \sinh x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\cosh x$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\sin x$	$\int \cosh x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\sinh x$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x$	$=$	$-\ln\|\cos x\|$	$\int \tanh x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln\|\cosh x\|$
$\int \cot x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln\|\sin x\|$	$\int \coth x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln\|\sinh x\|$
$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arsinh} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \arccos x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arcosh} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \arctan x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{artanh} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$
$\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{arcoth} x\,\mathrm{d}x$	$=$	$x\operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$
$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln\|x-a\|$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a\neq 0)$
$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$	$=$	$-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad (n\neq 1)$	$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\ln\|ax^2+bx+c\| \quad (a\neq 0)$
$\int x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{ax-1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}$	$\int x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}\mathrm{e}^{ax}$
$\int x\sin ax\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$	$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$
$\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{2x}{a^2}\sin ax - \frac{a^2x^2-2}{a^3}\cos ax$	$\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax$
$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$	$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$
$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x$	$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$	$=$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x$

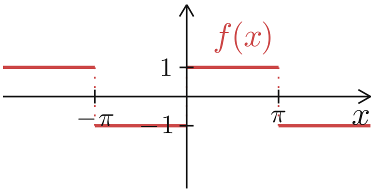
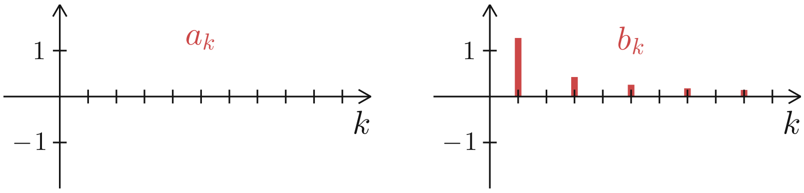
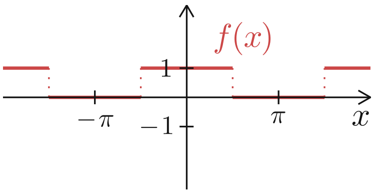
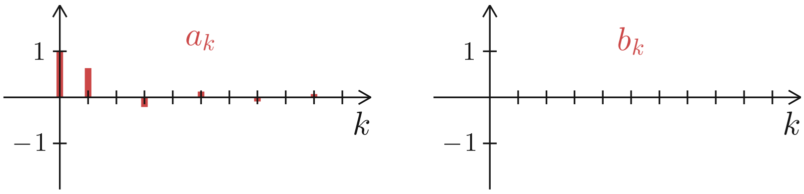
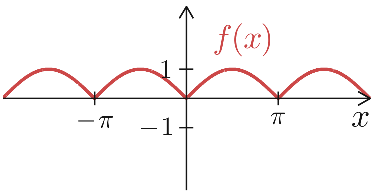
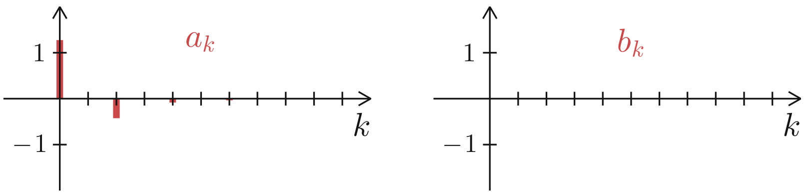
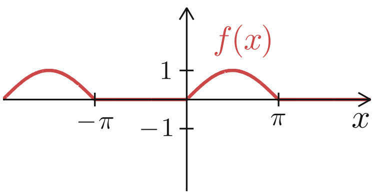
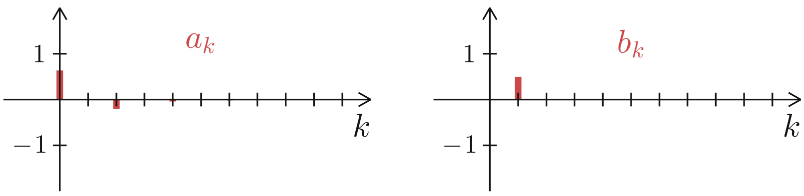
A.6 Integralregeln

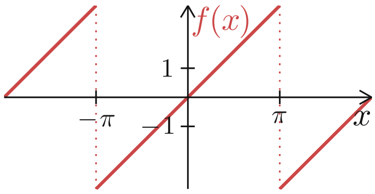
Regel	Formel
Faktorregel	$\int C\,f(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x$
Summenregel	$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
Substitution	$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$
	$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,f^2(x)$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert$
Partielle Integration	$\int f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$
Vertauschen	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
Integrationsbereich	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Hauptsatz I	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(t)$
Hauptsatz II	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

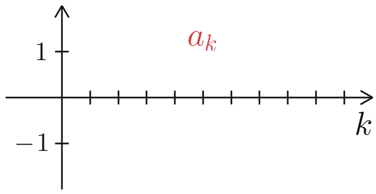
A.7 Potenzreihen

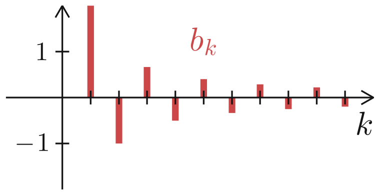
Funktion	Potenzreihe		Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	1
e^x	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,x^k$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	∞
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$	1
$\sin x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$	∞
$\cos x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k}$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$	∞
$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots$	1
$\sinh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$	∞
$\cosh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\,x^{2k}$	$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$	∞

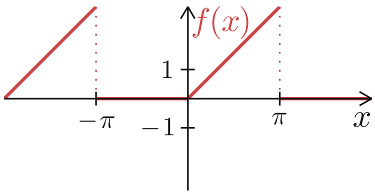
A.8 Fourier-Reihen

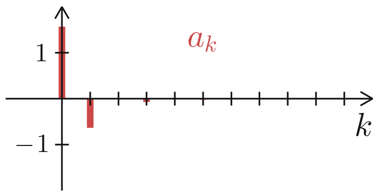
Funktion	Fourier-Reihe
	
$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$	$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$
	
$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$	$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots\right)$
	
$f(x) = \lvert \sin x \rvert \quad -\pi \le x < \pi$	$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$
	
$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \sin x & 0 \le x < \pi \end{cases}$	$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right) + \frac{\sin x}{2}$

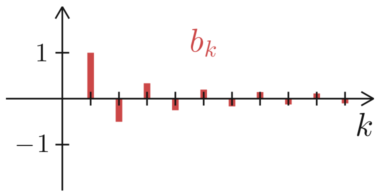
<table>
<tr><th>Funktion</th><th>Fourier-Reihe</th></tr>
<tr>
<td>

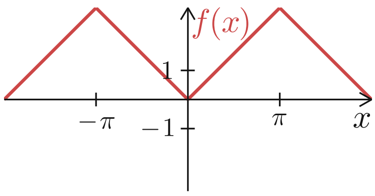
$f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$</td>
<td>

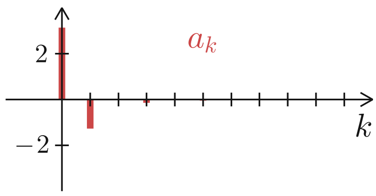


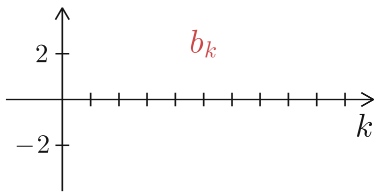
$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \ldots\right)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

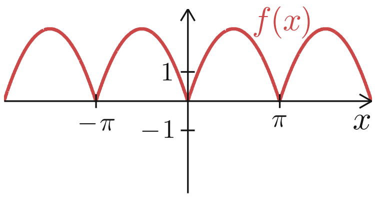
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$</td>
<td>

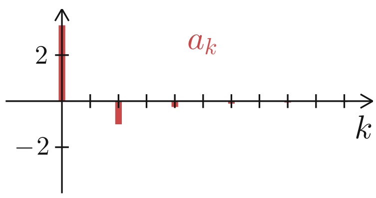


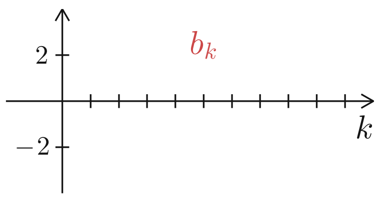
$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \ldots$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$f(x) = |x| \quad -\pi \leq x < \pi$</td>
<td>



$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

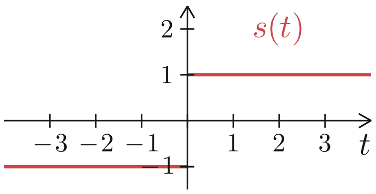
$$f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \leq x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$</td>
<td>

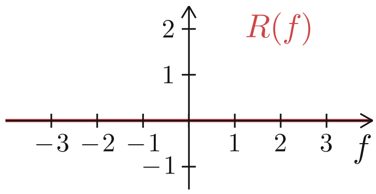


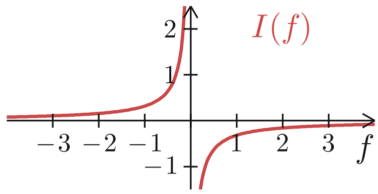
$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$</td>
</tr>
</table>

A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$

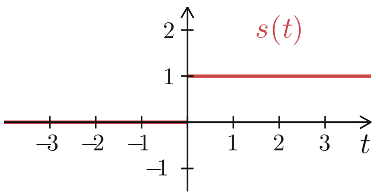


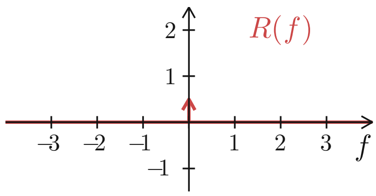


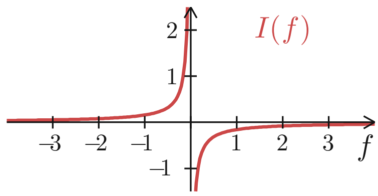


$s(t) = \operatorname{sgn}(t)$

$S(f) = -\mathrm{i}\,\dfrac{1}{\pi f}$

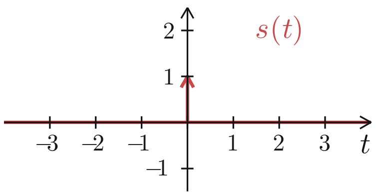


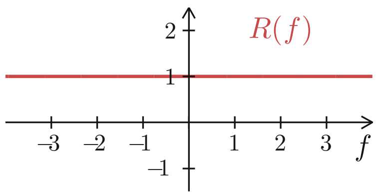


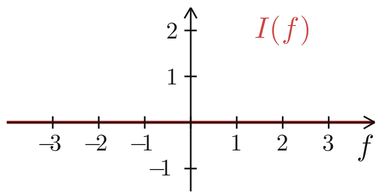


$s(t) = \sigma(t)$

$S(f) = \dfrac{1}{2}\,\delta(f) - \mathrm{i}\,\dfrac{1}{2\pi f}$

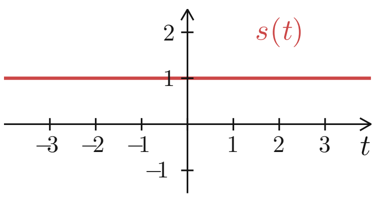


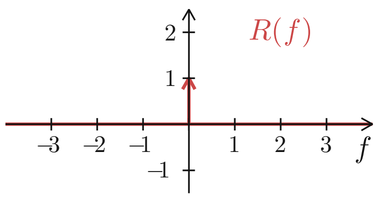


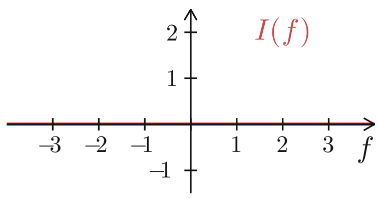


$s(t) = \delta(t)$

$S(f) = 1$



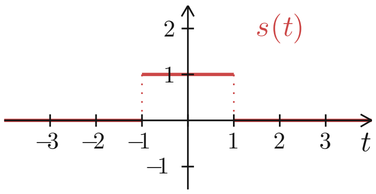




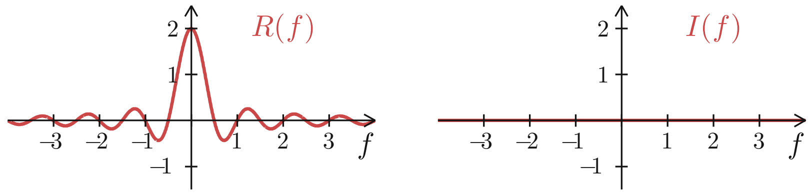
$s(t) = 1$

$S(f) = \delta(f)$

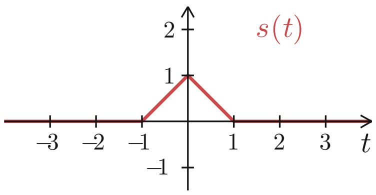
Zeitfunktion $s(t)$ | Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$



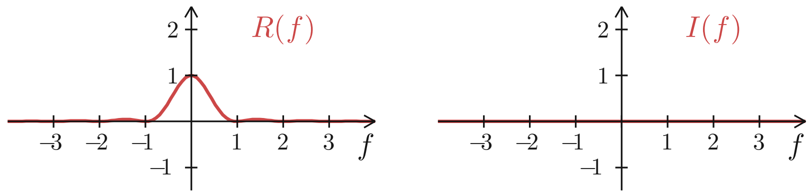
$s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$



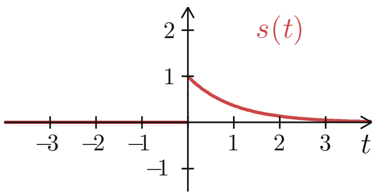
$$S(f) = 2\,\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$$



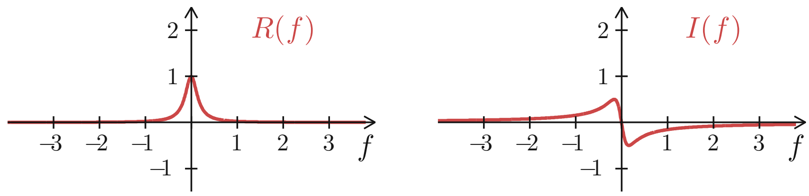
$$s(t) = (1+t)\big(\sigma(t+1) - \sigma(t)\big) + (1-t)\big(\sigma(t) - \sigma(t-1)\big)$$



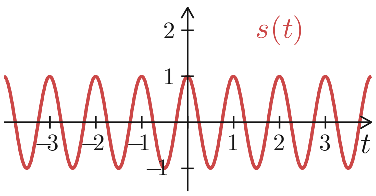
$$S(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$$



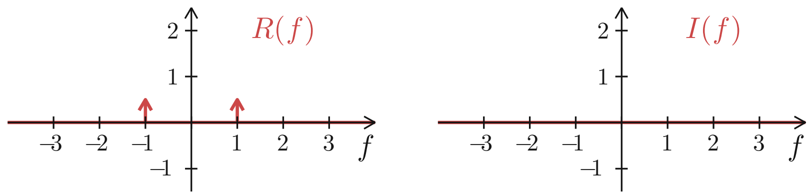
$s(t) = \mathrm{e}^{-t}\sigma(t)$



$$S(f) = \frac{1}{1+\mathrm{i}\,2\pi f} = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} - \mathrm{i}\,\frac{2\pi f}{1+4\pi^2 f^2}$$



$s(t) = \cos(2\pi t)$



$$S(f) = \frac{1}{2}\big(\delta(f-1) + \delta(f+1)\big)$$

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, s_1(t) + C_2\, s_2(t)$	$C_1\, S_1(f) + C_2\, S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\,\pi\, f\, t_0}\, S(f)$
Frequenzverschiebung	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\,\pi\, f_0\, t}\, s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t)\, \cos(2\,\pi\, f_0\, t)$	$\frac{1}{2}\big(S(f - f_0) + S(f + f_0)\big)$
Ähnlichkeit	$s(a\, t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\, S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ $\vdots$ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} s(t)$	$\mathrm{i}\,2\,\pi\, f\, S(f)$ $(\mathrm{i}\,2\,\pi\, f)^2\, S(f)$ $\vdots$ $(\mathrm{i}\,2\,\pi\, f)^n\, S(f)$
Differenziation in f	$(-\mathrm{i}\,2\,\pi\, t) s(t)$ $(-\mathrm{i}\,2\,\pi\, t)^2 s(t)$ $\vdots$ $(-\mathrm{i}\,2\,\pi\, t)^n s(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ $\vdots$ $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in t	$t\, s(t)$ $t^2\, s(t)$ $\vdots$ $t^n\, s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-\mathrm{i}\,2\,\pi}$ $\vdots$ $\frac{S^{(n)}(f)}{(-\mathrm{i}\,2\,\pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} s(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{\mathrm{i}\,2\,\pi\, f}\, S(f) + \frac{1}{2}\, S(0)\, \delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\sin at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\cos at$
$\frac{a}{s(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-1$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\sinh at$
$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$\mathrm{e}^{bt}\cosh at$
$\frac{a}{1+as}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
$\frac{a^2}{(1+as)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$	$t\sinh at$
$\frac{a-b}{(1+as)(1+bs)}$	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}} \quad (a,b \neq 0)$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)\mathrm{e}^{at}$	$\frac{2}{(s-a)^3}$	$t^2\,\mathrm{e}^{at}$
$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	$a\,\mathrm{e}^{at}-b\,\mathrm{e}^{bt}$	$\frac{2s}{(s-a)^3}$	$(at^2+2t)\mathrm{e}^{at}$
$\frac{a^3 s}{(1+as)^2}$	$(a-t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2s^2}{(s-a)^3}$	$(a^2t^2+4at+2)\mathrm{e}^{at}$
$\frac{ab(a-b)s}{(1+as)(1+bs)}$	$a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}-b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}} \; (a,b \neq 0)$	$\frac{a^2}{s^2(s-a)}$	$\mathrm{e}^{at}-at-1$

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1\, f_1(t) + C_2\, f_2(t)$	$C_1\, F_1(s) + C_2\, F_2(s)$
Ähnlichkeit $(a > 0)$	$f(a\,t)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0)\, f(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-t_0\, s}\, F(s)$
Dämpfung	$\mathrm{e}^{-s_0\, t}\, f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in t	$f'(t)$	$s\, F(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n\, F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\, f^{(k)}(0)$
Differenziation in s	$-t\, f(t)$	$F'(s)$
	$t^2\, f(t)$	$F''(s)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(-t)^n\, f(t)$	$F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit t	$t\, f(t)$	$-F'(s)$
	$t^2\, f(t)$	$F''(s)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$t^n\, f(t)$	$(-1)^n\, F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{s}\, F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}\, f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\, \mathrm{d}\, u$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-T\, s}} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-s\, t}\, \mathrm{d}\, t$

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)
1	δ_k	$\dfrac{1}{z^n}$	1 für $k = n$, 0 sonst
$\dfrac{z}{z-1}$	1	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	k
$\dfrac{z}{z-a}$	a^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$k\,a^k$

A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1\,(f_k) + C_2\,(g_k)$	$C_1\,F(z) + C_2\,G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k}\,f_k)$	$F(a\,z)$
Indexverschiebung	(f_{k-n})	$z^{-n}F(z)$
	(f_{k+1})	$z(F(z) - f_0)$
	(f_{k+2})	$z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$
	$\vdots$	$\vdots$
	(f_{k+n})	$z^n\left(F(z) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}\right)$
Differenzen	$(\Delta\,f_k)$	$(z-1)F(z) - z\,f_0$
	$\left(\Delta^2\,f_k\right)$	$(z-1)^2F(z) - z((z-1)f_0 + \Delta f_0)$
	$\vdots$	$\vdots$
	$(\Delta^n\,f_k)$	$(z-1)^nF(z) - z\sum\limits_{k=0}^{n-1}(z-1)^{n-k-1}\Delta^k f_0$
Multiplikation mit k	$(k\,f_k)$	$-z\,F'(z)$
	$\left(k^2\,f_k\right)$	$z\,F'(z) - z^2\,F''(z)$
	$\vdots$	$\vdots$
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z) \cdot G(z)$