

Formelsammlung Mathematik 3

Tim Hilt

24. Januar 2019

Kurzes Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Wiederholung	6
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln	6
1.2. Komplexe Zahlen	6
1.3. Sinus Kardinalis	8
I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen	9
2. Verallgemeinerte Funktionen	10
2.1. Heaviside-Funktion	10
2.2. Dirac-Distribution	11
2.3. Verallgemeinerte Ableitung	11
2.4. Faltung	12
2.5. Faltung mit $\sigma(t)$	12
2.6. Faltung mit $\delta(t)$	13
2.7. Einseitige Faltung	13
3. Fourier-Transformation	14
3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen	14
3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen	15

3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel	15
3.4. Inverse Fourier-Transformation	15
4. Laplacetransformation	17
5. z-Transformation	18
II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	19
6. Beschreibende Statistik	20
7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	21
7.1. Kombinatorik	21
7.2. Kombination und Variation	21
7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung	22

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Wiederholung	6
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln	6
1.2. Komplexe Zahlen	6
1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen	6
1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander	7
1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen	8
1.3. Sinus Kardinalis	8
I. Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen	9
2. Verallgemeinerte Funktionen	10
2.1. Heaviside-Funktion	10
2.2. Dirac-Distribution	11
2.3. Verallgemeinerte Ableitung	11
2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen	12
2.4. Faltung	12
2.5. Faltung mit $\sigma(t)$	12
2.6. Faltung mit $\delta(t)$	13
2.7. Einseitige Faltung	13
3. Fourier-Transformation	14
3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen	14
3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen	15
3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel	15
3.4. Inverse Fourier-Transformation	15
4. Laplacetransformation	17
5. z-Transformation	18

II. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	19
6. Beschreibende Statistik	20
7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	21
7.1. Kombinatorik	21
7.1.1. Permutation	21
7.2. Kombination und Variation	21
7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung	22
7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen	22
Allgemeine Form	22
Hypergeometrische Verteilung	23
Binomialverteilung	24
Poissonverteilung	25
7.3.2. Geometrische Verteilung	25
7.3.3. Exponentialverteilung	25

1. Grundlagen und Wiederholung

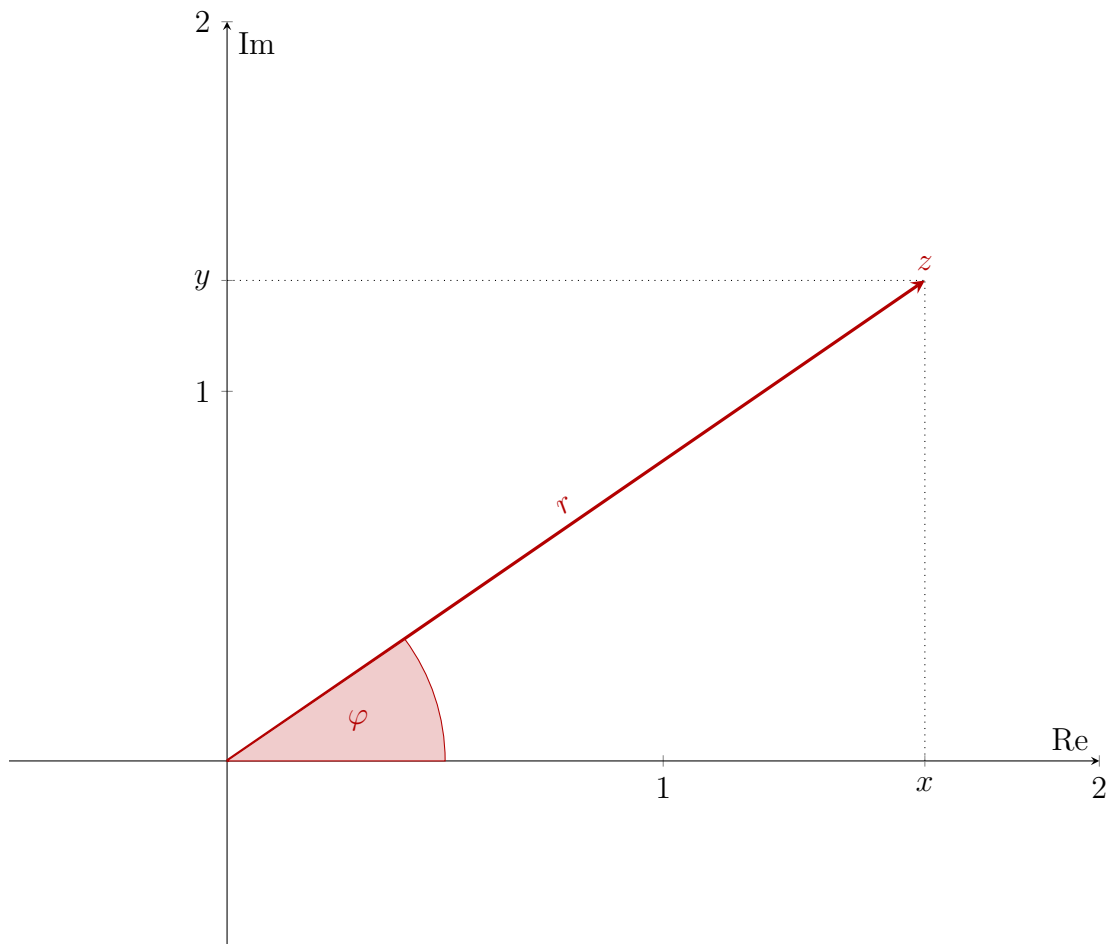
1.1. Allgemeine trigonometrische Umformungen; Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\end{aligned}$$

1.2. Komplexe Zahlen

1.2.1. Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form:	$z = x + iy$
Polarform; Polarkoordinaten:	$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$
Exponentialform:	$re^{i\varphi}$



1.2.2. Umrechnung verschiedener Darstellungsformen ineinander

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r e^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

1.2.3. Darstellung Sinus und Kosinus als komplexe Zahlen

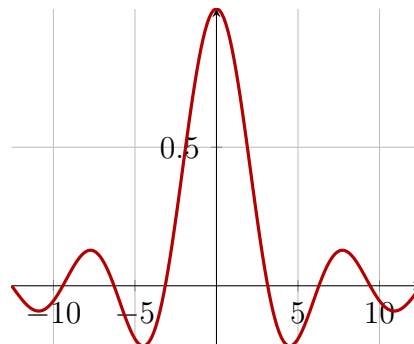
Zudem können Kosinus und Sinus auch dargestellt werden durch:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

1.3. Sinus Kardinalis

Der Sinus Kardinals $\text{si}(x)$ ist definiert als

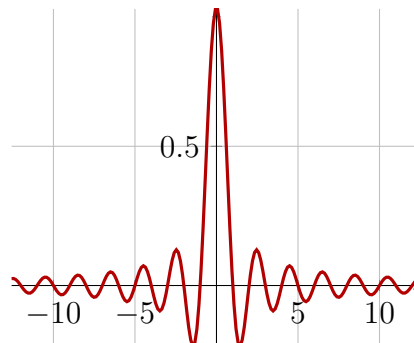
$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Eine spezielle Form ist die $\text{sinc}(x)$ -Funktion.

Sie ist definiert als:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Teil I.

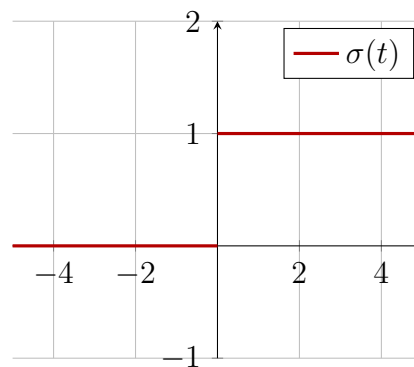
Transformationen und Verallgemeinerte Funktionen

2. Verallgemeinerte Funktionen

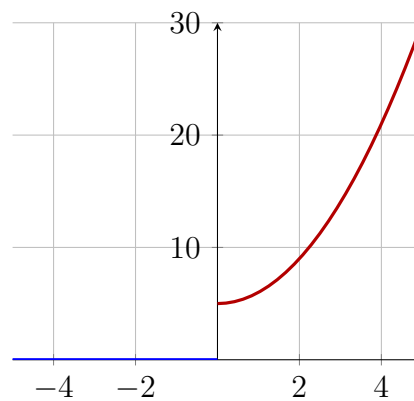
2.1. Heaviside-Funktion

Die Heaviside-Funktion oder Einheitssprungfunktion ist definiert durch:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ 1 & t \in (0, \infty) \end{cases}$$

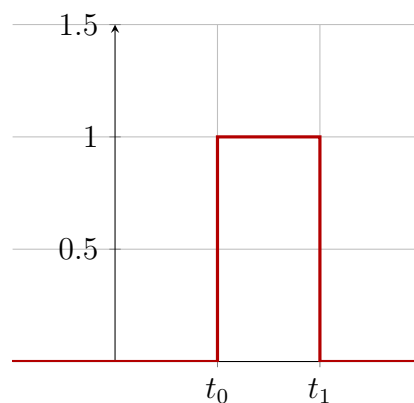


Wird eine Funktion mit der Heaviside-Funktion multipliziert, so werden Teile der Funktion ausgeblendet.



Mithilfe der Heaviside-Funktion können Rechteckimpulse erstellt werden.

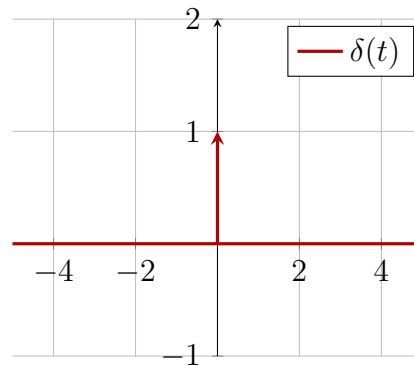
$$r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$$



2.2. Dirac-Distribution

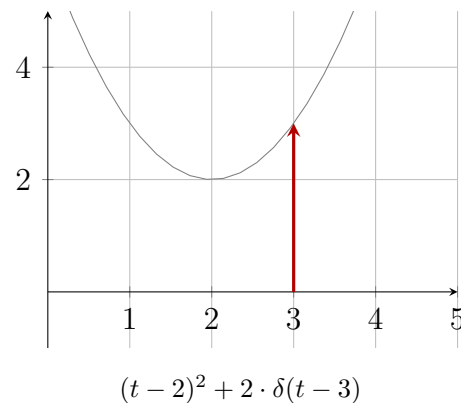
Die Dirac-Distribution ist definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Genauer wird die Dirac-Distribution durch eine Folge von Rechteckimpulsen hergeleitet, die den konstanten Flächeninhalt 1 besitzen, deren Breite dabei jedoch gegen 0 strebt, deren Höhe dafür aber gegen ∞ .

Wird eine Funktion mit der Dirac-Distribution an einem Punkt t multipliziert, so wird die **gesamte Funktion, bis auf den Funktionswert an der Stelle t ausgeblendet!**



2.3. Verallgemeinerte Ableitung

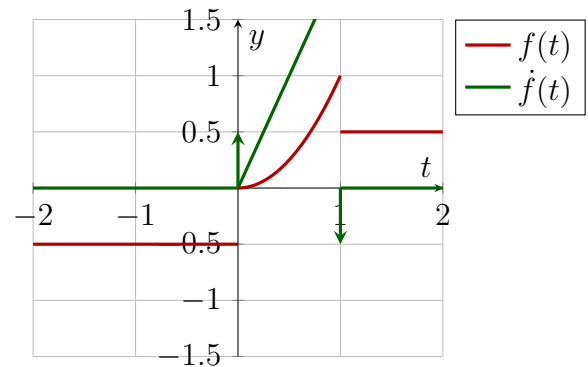
Leitet man die Heaviside-Funktion ab entsteht die Dirac-Distribution.

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$

Beim Ableiten ist insbesondere auf die innere Ableitung zu achten!

2.3.1. Grafisches Ableiten verallgemeinerter Funktionen

Wird eine Funktion mit Unstetigkeitsstellen abgeleitet, so wird an der Sprungstelle ein Dirac-Impuls in Höhe und Richtung des Sprungs eingezeichnet. Dieser Impuls ist von der x -Achse aus zu zeichnen.



Jedoch kann die Dirac-Distribution mit unserem Wissensstand nicht weiter abgeleitet werden.

2.4. Faltung

„A convolution is an integral that expresses the amount of overlap of one function g as it is shifted over another function f .“ (<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>)

Die Faltung ist definiert durch:

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Dadurch entsteht eine neue Funktion $h(t)$. τ ist eine Dummy-Variable! Beim Integrieren verschwindet sie und bildet die Funktion wieder auf t ab.

2.5. Faltung mit $\sigma(t)$

Wird eine Funktion mit $\sigma(t)$ gefaltet, so ergibt sich für das Faltungsintegral:

$$(t) \star \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sigma(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

2.6. Faltung mit $\delta(t)$

Wird eine Funktion $f(t)$ mit der Dirac-Distribution $\delta(t)$ gefaltet, so ergibt sich:

$$f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

Dies haben wir den Ausblendeigenschaften der Dirac-Distribution zu verdanken.

2.7. Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen $f(t)$ und $g(t) = 0$ für $x \leq 0$, so ergibt sich das Faltungsintegral:

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

3. Fourier-Transformation

Mithilfe der Fouriertransformation werden Funktionen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich übersetzt:

$$s(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

3.1. Real- und Imaginärteil direkt berechnen

In der Regel ist das Ergebnis einer Fouriertransformation eine komplexwertige Funktion. Natürlich lässt sich diese stets in Real- und Imaginärteil aufspalten — die Anteile lassen sich aber auch direkt berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ \operatorname{Im}(z) &= - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

3.2. Fourier-Transformation von geraden- und ungeraden Funktionen

Ist die zu transformierende Funktion **gerade**, so ist die Transformierte **rein reell und ebenfalls gerade**, aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. Zudem muss nicht mehr von $-\infty$ bis ∞ integriert werden. Es genügt das Integral von 0 bis ∞ mit 2 zu multiplizieren. Ihre Berechnung reduziert sich dabei auf:

$$S(f) = \operatorname{Re}(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Das selbe Prinzip lässt sich auf die Berechnung **ungerader** Funktionen anwenden. Hier ist die Transformierte **rein imaginär und ungerade**:

$$S(f) = i \operatorname{Im}(f) = -2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

3.3. Darstellung mit Amplituden- und Phasenwinkel

Fourierreihen lassen sich auch in Exponentialform darstellen:

$$S(f) = |S(f)| e^{i\varphi(f)}$$

Dabei ist

- Die Amplitude $|S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2}$ eine **gerade, reelle** Funktion
- Die Phase $\varphi(f) = \arg(S(f)) = \arg(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))$ eine **ungerade, reelle** Funktion.

Diese Darstellung findet insbesondere in der Elektrotechnik ihre Anwendung (Bode-Diagramm).

3.4. Inverse Fourier-Transformation

Um aus einer fouriertransformierten Funktion $S(f)$ die Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten muss $S(f)$ **rücktransformiert** werden:

$$S(f) \text{ \textit{LAPLACE} } s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df$$

4. Laplacetransformation

Die Berechnung der Laplace-Transformation ist definiert durch:

$$f(t) \xrightarrow{\text{LAPLACE}} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

5. z-Transformation

Teil II.

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

6. Beschreibende Statistik

7. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1. Kombinatorik

7.1.1. Permutation

Permutation ohne Wiederholung:	$n!$
Permutation mit Wiederholung:	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$

7.2. Kombination und Variation

Kombinationen werden verwendet, wenn **nur einige** der Elemente in einer Menge angeordnet werden sollen. Permutationen hingegen ordnen **alle** Elemente an.

Urnenmodell: Ziehen von k aus n	Anzahl Möglichkeiten	Name Vorlesung	typische Beispiele
ohne Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n}{k}$	Kombination verschiedene Elemente	a) Lotto: 6 aus 49 b) k Personen aus n (Arbeitsgruppe)
mit Zurücklegen; ungeordnet	$\binom{n+k-1}{k}$	Kombination Elemente mehrfach	a) Widerstände parallel b) 2 T-Shirts aus 5 Farben auswählen
ohne Zurücklegen; geordnet	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Variation verschiedene Elemente Spezialfall: $n = k$ Permutation	a) Siegerpodest b) Rangreihenfolge Auswahl Studierende c) Zieleinlauf insgesamt
mit Zurücklegen; geordnet	n^k	Variation Elemente mehrfach	a) Binäre Ziffernfolge b) Wörter aus 7 Buchstaben

7.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Allgemeine Form

Dichtefunktion:

Funktion, bei der auf der x -Achse alle Elemente mit der auf der y -Achse aufgetragenen Wahrscheinlichkeit gezeichnet sind. Es ergibt sich ein Säulendiagramm.

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_k^x (k \cdot P(X = k))$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \sum_k k \cdot P(X = k)$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_k (k^2 \cdot P(X = k)) - \mu^2$$

Hypergeometrische Verteilung

Beschreibung: Ziehen ohne Zurücklegen \rightarrow Wahrscheinlichkeit verändert sich im Verlauf des Experiments

Es müssen folgende Variablen (bis auf k) gegeben sein:

N Anzahl aller Elemente

M Anzahl Elemente mit bestimmter Eigenschaft

n Anzahl Elemente in der Stichprobe

k Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen

Dichtefunktion:

$$X \sim H(k, n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x H(k, n, N, M)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

Binomialverteilung

Beschreibung: Ziehen **mit** zurücklegen \rightarrow Wahrscheinlichkeit bleibt während dem Experiment gleich

Es müssen folgende Variablen gegeben sein:

-
- p Anteil der Elemente/ Wahrscheinlichkeit beim Ziehen **eines** Elementes aus der Grundgesamtheit
 - n Anzahl Elemente in der Stichprobe
 - k Anzahl Elemente aus der Stichprobe, die das Merkmal aufweisen sollen
-

Dichtefunktion:

$$X \sim B(k, n, p)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Verteilungsfunktion: Hier müssen die einzelnen Dichtefunktionen berechnet werden

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x B(k, n, p)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung durch Binomialverteilung:

Falls $\frac{n}{N} \leq 0.1$ kann der Parameter p durch $p = \frac{M}{N}$ angenähert werden.

Poissonverteilung

Beschreibung: Gegeben ist ein Durchschnittswert (*Erwartungswert*) λ pro einer gewissen Einheit (z.B. im Durchschnitt 3 Anrufe in 5 Minuten). Die Poissonverteilung soll berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist einen anderen Wert k als Ergebnis zu erhalten.

Dichtefunktion:

$$X \sim \text{Po}(k, \lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \text{Po}(k, \lambda)$$

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

Varianz:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

Annäherung der Binomialverteilung durch Poissonverteilung:

Wenn n groß und p klein ist ($n \geq 30, p \leq 0.1$) kann der Parameter λ durch $\lambda = n \cdot p$ angenähert werden.

7.3.2. Geometrische Verteilung

7.3.3. Exponentialverteilung

A.2 Trigonometrische Funktionen

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Verschiebung des Sinus

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\cos x \\ \sin(x \pm \pi) &= -\sin x \\ \sin(\pm\pi - x) &= \sin x\end{aligned}$$

Verschiebung des Kosinus

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) &= -\sin x \\ \cos(x \pm \pi) &= -\cos x \\ \cos(\pm\pi - x) &= -\cos x\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ \cot(x \pm y) &= \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}\end{aligned}$$

Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}\end{aligned}$$

A.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x \quad (a > 0)$	$(\ln a) a^x$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a x^{a-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
		$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{(\ln a) x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$
$\cot x$	$-1 - \cot^2 x$	$\coth x$	$1 - \coth^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

A.4 Ableitungsregeln

Regel	Formel
Faktorregel	$(C f(x))' = C f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

A.5 Integrale

Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)	Funktion	Stammfunktion (ohne Konstante C)
$\int \frac{1}{x} dx$	$= \ln x $	$\int e^x dx$	$= e^x$
$\int \sqrt{x} dx$	$= \frac{2}{3} x\sqrt{x}$	$\int a^x dx$	$= \frac{1}{\ln a} a^x \quad (a > 0)$
$\int x^a dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \ln x dx$	$= x(\ln x - 1)$
		$\int \log_a x dx$	$= x(\log_a x - \log_a e)$ $(a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx$	$= -\cos x$	$\int \sinh x dx$	$= \cosh x$
$\int \cos x dx$	$= \sin x$	$\int \cosh x dx$	$= \sinh x$
$\int \tan x dx$	$= -\ln \cos x $	$\int \tanh x dx$	$= \ln \cosh x $
$\int \cot x dx$	$= \ln \sin x $	$\int \coth x dx$	$= \ln \sinh x $
$\int \arcsin x dx$	$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arsinh} x dx$	$= x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$
$\int \arccos x dx$	$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\int \operatorname{arcosh} x dx$	$= x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$
$\int \arctan x dx$	$= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{artanh} x dx$	$= x \operatorname{artanh} x + \frac{\ln(1-x^2)}{2}$
$\int \operatorname{arccot} x dx$	$= x \operatorname{arccot} x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$	$\int \operatorname{arcoth} x dx$	$= x \operatorname{arcoth} x + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$
$\int \frac{1}{x-a} dx$	$= \ln x-a $	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$	$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$	$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$	$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx$	$= \ln ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$
$\int x e^{ax} dx$	$= \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$	$\int x^2 e^{ax} dx$	$= \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$
$\int x \sin ax dx$	$= \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax$	$\int x \cos ax dx$	$= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
$\int x^2 \sin ax dx$	$= \frac{2x}{a^2} \sin ax - \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \cos ax$	$\int x^2 \cos ax dx$	$= \frac{2x}{a^2} \cos ax + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
$\int e^{ax} \sin bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$	$\int e^{ax} \cos bx dx$	$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$
$\int \sin^2 x dx$	$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$	$\int \cos^2 x dx$	$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$

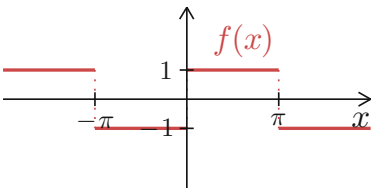
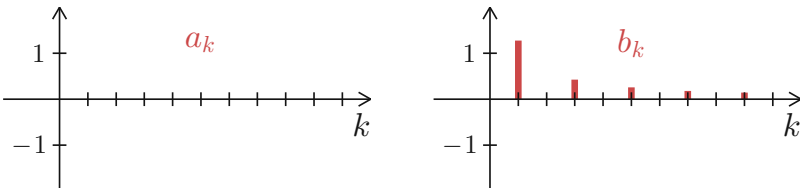
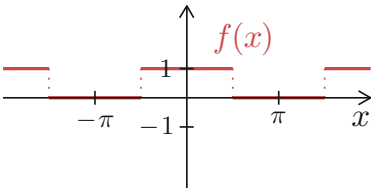
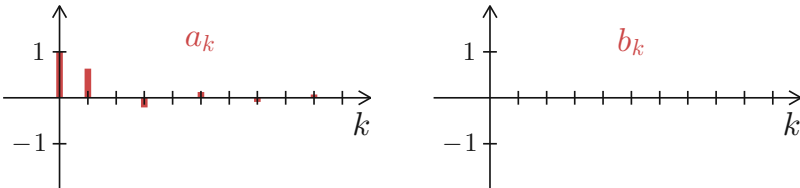
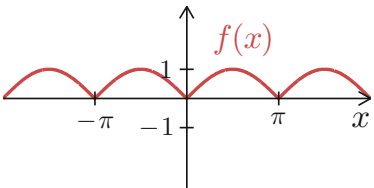
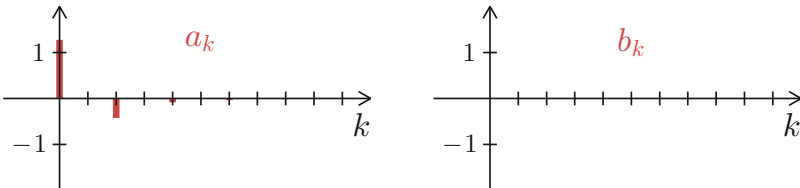
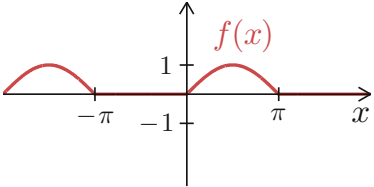
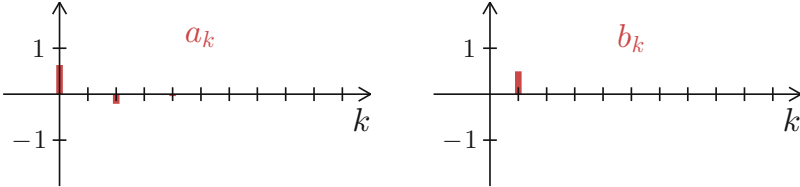
A.6 Integralregeln

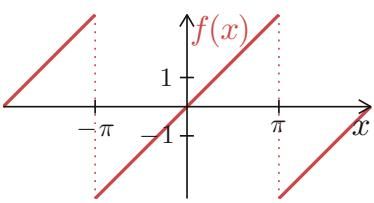
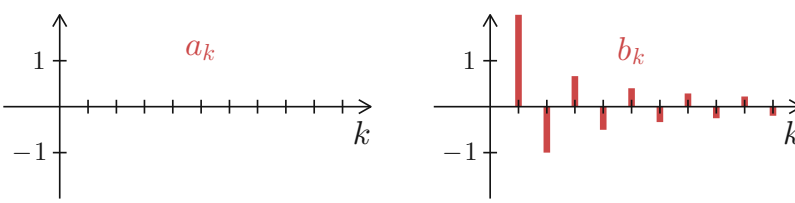
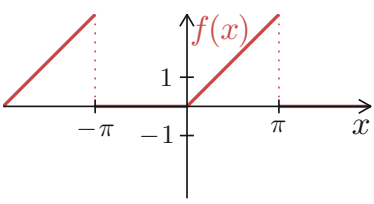
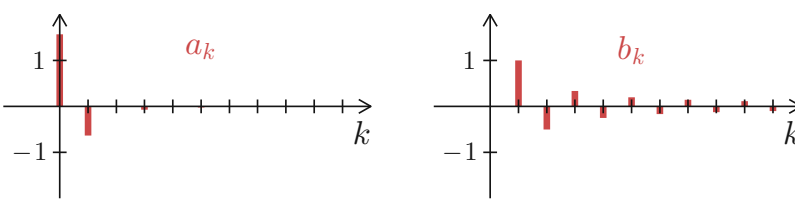
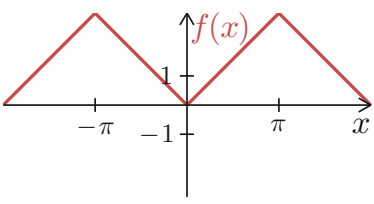
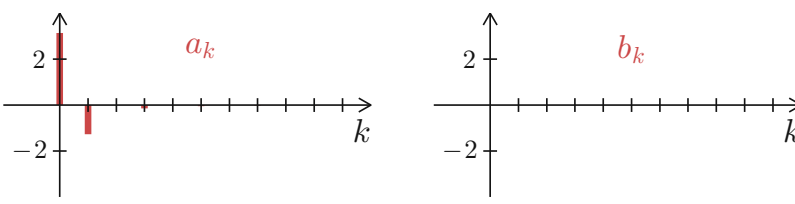
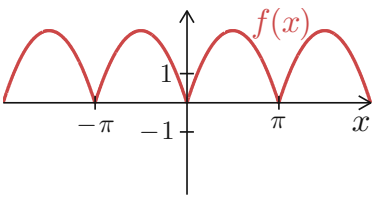
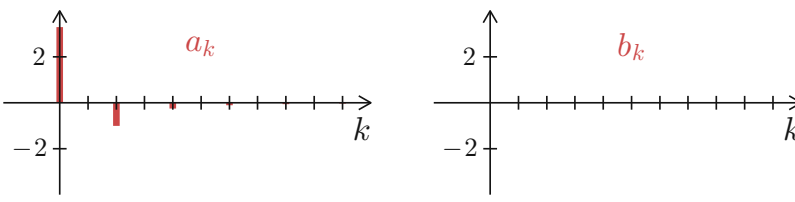
Regel	Formel
Faktorregel	$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$
Summenregel	$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
Substitution	$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$
	$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x)$
	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) $
Partielle Integration	$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$
Vertauschen	$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
Integrationsbereich	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
Hauptsatz I	$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t f(x) dx \right)' = f(t)$
Hauptsatz II	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

A.7 Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzradius
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	1
e^x	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	∞
$\ln(1+x)$	$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$	1
$\sin x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$	∞
$\cos x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$	∞
$\arctan x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$	1
$\sinh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	∞
$\cosh x$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	∞

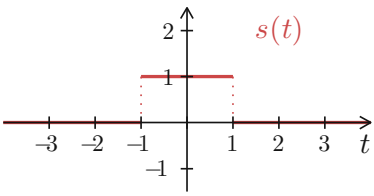
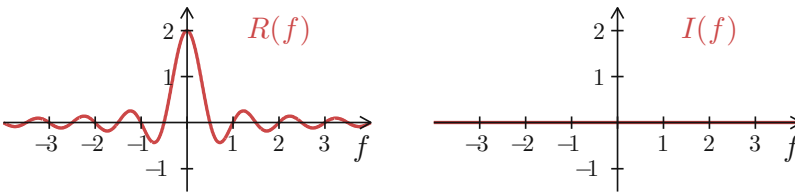
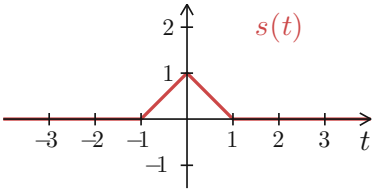
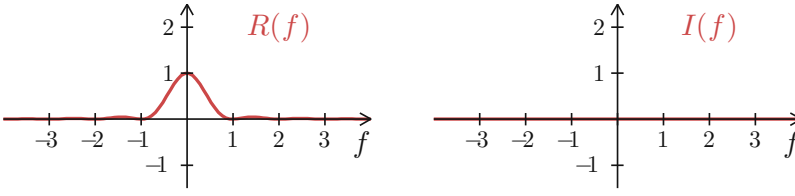
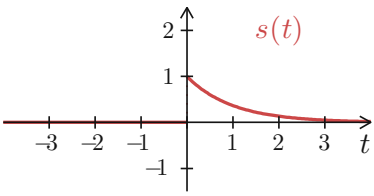
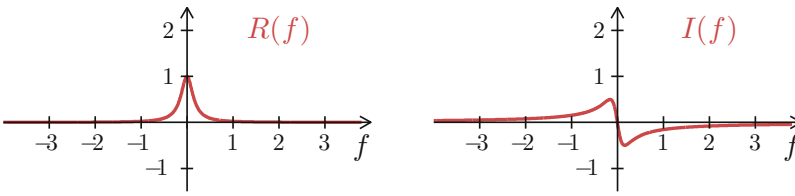
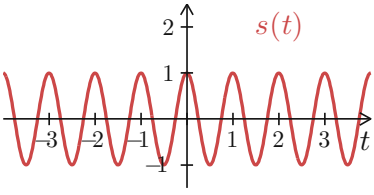
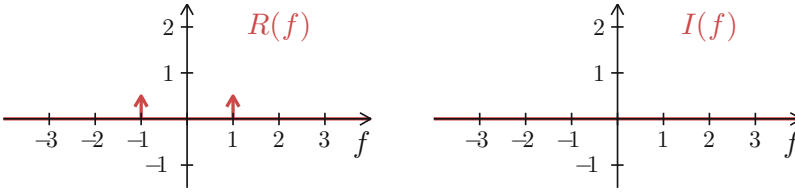
A.8 Fourier-Reihen

Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right)$
 $f(x) = \sin x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right) + \frac{\sin x}{2}$

Funktion	Fourier-Reihe
 $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots$
 $f(x) = x \quad -\pi \leq x < \pi$	 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$
 $f(x) = \begin{cases} -x(x+\pi) & -\pi \leq x < 0 \\ -x(x-\pi) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	 $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$

A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i}I(f)$	
<p>The graph shows the signum function $s(t) = \text{sgn}(t)$. It is a horizontal line at $y = -1$ for $t < 0$ and a horizontal line at $y = 1$ for $t > 0$. The horizontal axis is labeled t and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$s(t) = \text{sgn}(t)$</p>	<p>The graph shows the real part $R(f)$ of the Fourier transform. It is a horizontal line at $y = 0$ for all f. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$R(f)$</p>	<p>The graph shows the imaginary part $I(f)$ of the Fourier transform. It is an odd function passing through the origin, with a vertical asymptote at $f = 0$. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$I(f)$</p>
	$S(f) = -\mathbf{i} \frac{1}{\pi f}$	
<p>The graph shows the function $s(t) = \sigma(t)$. It is a horizontal line at $y = 1$ for $t > 0$ and a horizontal line at $y = 0$ for $t < 0$. The horizontal axis is labeled t and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$s(t) = \sigma(t)$</p>	<p>The graph shows the real part $R(f)$ of the Fourier transform. It is a horizontal line at $y = 0$ for all f, with a red arrow pointing up at $f = 0$ indicating a delta function. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$R(f)$</p>	<p>The graph shows the imaginary part $I(f)$ of the Fourier transform. It is an odd function passing through the origin, with a vertical asymptote at $f = 0$. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$I(f)$</p>
	$S(f) = \frac{1}{2} \delta(f) - \mathbf{i} \frac{1}{2\pi f}$	
<p>The graph shows the Dirac delta function $s(t) = \delta(t)$. It is a red arrow pointing up at $t = 0$. The horizontal axis is labeled t and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$s(t) = \delta(t)$</p>	<p>The graph shows the real part $R(f)$ of the Fourier transform. It is a horizontal line at $y = 1$ for all f. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$R(f)$</p>	<p>The graph shows the imaginary part $I(f)$ of the Fourier transform. It is a horizontal line at $y = 0$ for all f. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$I(f)$</p>
	$S(f) = 1$	
<p>The graph shows the constant function $s(t) = 1$. It is a horizontal line at $y = 1$ for all t. The horizontal axis is labeled t and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$s(t) = 1$</p>	<p>The graph shows the real part $R(f)$ of the Fourier transform. It is a horizontal line at $y = 0$ for all f, with a red arrow pointing up at $f = 0$ indicating a delta function. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$R(f)$</p>	<p>The graph shows the imaginary part $I(f)$ of the Fourier transform. It is a horizontal line at $y = 0$ for all f. The horizontal axis is labeled f and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from -1 to 2.</p> <p>$I(f)$</p>
	$S(f) = \delta(f)$	

Zeitfunktion $s(t)$	Fourier-Transformation $S(f) = R(f) + \mathbf{i} I(f)$
 $s(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$	 $S(f) = 2 \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}$
 $s(t) = (1+t)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) + (1-t)(\sigma(t) - \sigma(t-1))$	 $S(f) = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2$
 $s(t) = e^{-t} \sigma(t)$	 $S(f) = \frac{1}{1 + \mathbf{i} 2\pi f} = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2} - \mathbf{i} \frac{2\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$
 $s(t) = \cos(2\pi t)$	 $S(f) = \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1))$

A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)$	$C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f)$
Zeitverschiebung	$s(t - t_0)$	$e^{-i 2 \pi f t_0} S(f)$
Frequenzverschiebung	$e^{i 2 \pi f_0 t} s(t)$	$S(f - f_0)$
Amplitudenmodulation	$s(t) \cos(2 \pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} (S(f - f_0) + S(f + f_0))$
Ähnlichkeit	$s(at)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$
Differenziation in t	$\dot{s}(t)$ $\ddot{s}(t)$ \vdots $\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$i 2 \pi f S(f)$ $(i 2 \pi f)^2 S(f)$ \vdots $(i 2 \pi f)^n S(f)$
Differenziation in f	$(-i 2 \pi t) s(t)$ $(-i 2 \pi t)^2 s(t)$ \vdots $(-i 2 \pi t)^n s(t)$	$S'(f)$ $S''(f)$ \vdots $S^{(n)}(f)$
Multiplikation in t	$t s(t)$ $t^2 s(t)$ \vdots $t^n s(t)$	$S'(f)$ $\frac{S''(f)}{-i 2 \pi}$ \vdots $\frac{S^{(n)}(f)}{(-i 2 \pi)^n}$
Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{1}{i 2 \pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \delta(f)$
Faltung in t	$s_1(t) \star s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
Faltung in f	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) \star S_2(f)$

A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
$\frac{1}{(s - a)^2}$	$t e^{at}$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
$\frac{a}{s(s - a)}$	$e^{at} - 1$	$\frac{a}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
$\frac{a - b}{(s - a)(s - b)}$	$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
$\frac{a}{1 + as}$	$e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{a^2}{(1 + as)^2}$	$t e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{s(1 + as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \sinh at$
$\frac{a - b}{(1 + as)(1 + bs)}$	$e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}} \quad (a, b \neq 0)$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cosh at$
$\frac{s}{(s - a)^2}$	$(1 + at)e^{at}$	$\frac{2}{(s - a)^3}$	$t^2 e^{at}$
$\frac{(a - b)s}{(s - a)(s - b)}$	$a e^{at} - b e^{bt}$	$\frac{2s}{(s - a)^3}$	$(at^2 + 2t)e^{at}$
$\frac{a^3 s}{(1 + as)^2}$	$(a - t)e^{-\frac{t}{a}} \quad (a \neq 0)$	$\frac{2s^2}{(s - a)^3}$	$(a^2 t^2 + 4at + 2)e^{at}$
$\frac{ab(a - b)s}{(1 + as)(1 + bs)}$	$a e^{-\frac{t}{b}} - b e^{-\frac{t}{a}} \quad (a, b \neq 0)$	$\frac{a^2}{s^2(s - a)}$	$e^{at} - at - 1$

A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitfunktion	Bildfunktion
Linearität	$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$
Ähnlichkeit ($a > 0$)	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Zeitverschiebung	$\sigma(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} F(s)$
Dämpfung	$e^{-s_0 t} f(t)$	$F(s + s_0)$
Differenziation in t	$f'(t)$ $f''(t)$ \vdots $f^{(n)}(t)$	$s F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$ \vdots $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$
Differenziation in s	$-t f(t)$ $t^2 f(t)$ \vdots $(-t)^n f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ \vdots $F^{(n)}(s)$
Multiplikation mit t	$t f(t)$ $t^2 f(t)$ \vdots $t^n f(t)$	$-F'(s)$ $F''(s)$ \vdots $(-1)^n F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$
Faltung im Zeitbereich	$f_1(t) \star f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Periodische Funktion	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen

Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)	Bildfunktion $F(z)$	Zeitfolge (f_k)
1	δ_k	$\frac{1}{z^n}$	1 für $k = n$, 0 sonst
$\frac{z}{z-1}$	1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	k
$\frac{z}{z-a}$	a^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$k a^k$

A.14 Eigenschaften der z-Transformationen

Eigenschaft	Zeitfolge	Bildfunktion
Linearität	$C_1 (f_k) + C_2 (g_k)$	$C_1 F(z) + C_2 G(z)$
Dämpfung	$(a^{-k} f_k)$	$F(az)$
Indexverschiebung	(f_{k-n}) (f_{k+1}) (f_{k+2}) \vdots (f_{k+n})	$z^{-n} F(z)$ $z(F(z) - f_0)$ $z^2(F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$ \vdots $z^n \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} \right)$
Differenzen	(Δf_k) $(\Delta^2 f_k)$ \vdots $(\Delta^n f_k)$	$(z-1)F(z) - z f_0$ $(z-1)^2 F(z) - z((z-1)f_0 + \Delta f_0)$ \vdots $(z-1)^n F(z) - z \sum_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \Delta^k f_0$
Multiplikation mit k	$(k f_k)$ $(k^2 f_k)$ \vdots	$-z F'(z)$ $z F'(z) - z^2 F''(z)$ \vdots
Faltung im Zeitbereich	$(f_k) \star (g_k)$	$F(z) \cdot G(z)$