数学分析笔记

作者：今天做证明题了吗

时间：July 14, 2024

版本：1.0

目录

第 1 章 连续

1.1 连续性的证明

要证明一个函数 f 在某区间 I 上连续，只需要在区间里任意取定一点 $x_0 \in I$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. 为此, 我们可以:

1. 利用**定义**, 证明:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} \, |x - x_0| < \delta \text{时, 有} \, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$
2. 利用**左右极限**, 证明:
$$f(x_0 + 0) = f(x_0) = f(x_0 - 0);$$
3. 利用**序列语言**, 证明:
$$\forall \{x_n\} \to x_0, \text{有} \, f(x_n) \to f(x_0);$$
4. 利用**邻域语言**, 证明:
$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon);$$
5. 利用**连续函数的运算性质**: 连续函数经过有限次 $+, -, \times, \div$(除法要求除数不为 0) , 复合 (内层函数的值域在外层函数的定义域内), 仍是连续的.

习题 1.1

证明 Riemann 函数:
$$R(x) \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{为即约分数}, q > 0, \\ 0, & x \text{为无理数} \end{cases}$$
在无理点上连续，在有理点上间断.

习题 1.2

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，且 $f([a,b])=[f(a),f(b)]$. 证明:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

习题 1.3

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$. 证明:$f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最小值.

习题 1.4

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明函数:

$$M(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t),\ m(x)=\inf_{a\le t\le x} f(t)$$

在 $[a,b]$ 上连续.

习题 1.5

讨论函数:

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x), x\text{为有理数} \\ x(1+x), x\text{为无理数} \end{cases}$$

的连续性与可微性.

1.2 闭区间上连续函数的性质

定理 1.1 (有界性定理)

如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上一定有界.

定理 1.2 (最值定理)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

定理 1.3 (介值定理)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,m 和 M 分别为 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值, 则对于 m 和 M 之间任意一个实数 c, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = c$.

1.3 实数的连续性

实数的连续性定理 (或实数的完备性定理) 是指以下七个定理的等价:

定理 1.4 (确界定理)

任何非空集合 $E \subset R$ 若有下 (上) 界, 则必有下 (上) 确界 $supE(infE)$.

定理 1.5 (单调有界定理)

单调增加 (减少) 有下 (上) 界的数列必收敛, 其极限为其下 (上) 确界.

定理 1.6 (Cauchy 准则)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n,m > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理 1.7 (致密性定理)

有界的数列必有收敛子列.

定理 1.8 (聚点定理)

有界无穷数集必有聚点.

定理 1.9 (闭区间套定理)

设 $[a_n, b_n]$ 是一串闭区间, 且满足下述两个条件:

$$(a)\,[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]\,, n = 1, 2, \cdots ; (b) \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

则存在唯一的 $\xi \in [a,b]\,, (n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

笔记 应用闭区间套定理的一般方法是: 将题设条件表述成具有性质 P 的闭区间 $[a,b]$, 并记 $[a_1, b_1] = [a,b]$. 将 $[a_1, b_1]$ 二等分 (有时也可以三等分), 等分后得到的两个长度相等的小闭区间应该具有一个性质 P, 取

之为 $[a_2,b_2]$; 将 $[a_2,b_2]$ 二等分, 等分后的两个小区间应该具有一个性质 P, 取之为 $[a_3,b_3]$;$\cdots\cdots$ 这样就得到了具有性质 P 的闭区间列 $[a_n,b_n]$. 由闭区间定理, 必存在唯一的 $\xi \in [a_n,b_n](n=1,2,3,\cdot)$, 再利用性质 P 推出这个 ξ 就是所要的结论.

定理 1.10 (有限开覆盖定理)

设开区间族 $\{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ 满足条件 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \supset [a,b]$, 则一定存在该开区间族中的有限个开区间 (不妨设为)$O_1,O_2,\cdots,O_n$, 使得 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} O_\lambda \supset [a,b]$.

♡

笔记

1. 有限开覆盖定理有时会被初学者错误地理解为" 一个闭区间能够被有限个开区间所覆盖". 如果这样理解的话, 显然任何一个闭区间只要用一个比它稍大些的开区间就可覆盖了, 那么该定理岂不是毫无意义了吗? 只要稍加分析, 就可以发现这样理解是片面的. 因为有限开覆盖定理的本质是" 覆盖闭区间 $[a,b]$ 的任何一组开区间中, 都含有有限个, 这有限个开区间也覆盖了 $[a,b]$." 因此, 上面说法属于" 断章取义", 是不全面的.
2. 有限开覆盖的重要性在于它将无限化为有限, 便于从局部性质推出整体性质.

第 2 章 一致连续

2.1 一致连续的定义及其否定形式

定理 2.1

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义 (I 为为开、闭、半开半闭, 有限, 无限区间). 所谓 $f(x)$ 在 I 上一致连续. 意指:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta \text{时，有} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

如此,$f(x)$ 在 I 上非一致连续.

$$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta^{'}, x_\delta^{''} \in I: \text{虽} \left| x_\delta^{'} - x_\delta^{''} \right| < \delta,$$

$$\text{但} \left| f\left(x_\delta^{'}\right) - f\left(x_\delta^{''}\right) \right| \geq \varepsilon_0.$$

$$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \frac{1}{n} > 0, \exists x_n^{'}, x_n^{''} \in I\,(n = 1, 2, \cdots):$$

$$\text{虽然} \left| x_n^{'} - x_n^{''} \right| < \frac{1}{n}, \text{但是} \left| f\left(x_n^{'}\right) - f\left(x_n^{''}\right) \right| \geq \varepsilon_0.$$

♡

推论 2.1

若 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall, \exists x_n^{'}, x_n^{''} \in I\,(n = 1, 2, \cdots)$, 虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{'} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{''} = a$, 但是 $\left| f\left(x_n^{'}\right) - f\left(x_n^{''}\right) \right| \geq \varepsilon_0\,(n = 1, 2, \cdots)$, 则可断定 f 在 I 上非一致连续.

♡

定理 2.2 (Lipschitz 条件)

$$|f(x') - f(x'')| < L\,|x' - x''|\,, \forall x', x'' \in I$$

其中 $L > 0$ 为某一常数，此条件成立必一致连续. 特别地，若 f 在 I 上存在有界导函数，则 f 在 I 满足 **Lipschitz** 条件.

♡

习题 2.1

设 f 是区间 I 上的实函数，试证如下三个条件有逻辑关系:1.$\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3.

1. f 在 I 上可导且导函数有界，即:$\exists M > 0$ 使得

$$\left| f(x)' \right| < M\,(\forall x \in I)$$

2. f 在 I 上满足 **Lipschitz** 条件，即 $\exists L > 0$ 使得

$$|f(x') - f(x'')| < L\,|x' - x''|\,,\ (\forall\, x', x'' \in I)$$

3. f 在 I 上一致连续.

2.2 一致连续和连续之间

定理 2.3 (一致连续性定理/Cantor 定理)

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

接下来是**开区间**以及**无穷区间**的例题，这类题目需要注意区间的分割问题，下面是两道经典例题.

习题 2.2

设 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内连续，试证 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续的充要条件是极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在 (有限).

笔记 此例表明: 在有限开区间上连续函数是否连续一致，取决于函数在端点附近的状态.

习题 2.3

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$(有限). 证明:$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

笔记 此例需注意区间的分割问题. 在分区间讨论时，让分出的区间有一部分重复，这样做非常有好处. 在适当选取 δ 后,x', x'' 要么同时落入 $[a, A+1]$, 要么同时落入 $[A,+\infty)$. 从而避免了分界点 A 一边有一个点的情况.

然后是**渐近线**和一致连续的相关例题.

习题 2.4

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 证明:$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

习题 2.5

设 $f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上连续, 且当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 有渐近线 $y=ax+b$, 试证 $f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上一致连续.

注 运用上一题相同证明方法.

习题 2.6

设实函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 内处处可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}|f'(x)|=A$(存在). 证明: 当且仅当 $A<+\infty$ 时,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

习题 2.7

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则存在非负实数 a 与 b, 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|f(x)|\le a|x|+b$.

习题 2.8

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上为一致连续的充要条件是: 对在 (a,b) 内任意两数列 $\{x_n\},\{x_n^{'}\}$, 只要 $x_n-x_n^{'}\to 0$, 只要 $f(x_n)-f\left(x_n^{'}\right)\to 0$.

习题 2.9

设函数 f 在闭 $[a, +\infty)$ 上连续, 且存在常数 b,c, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0$$

证明:f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

习题 2.10

证明函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

笔记 这里用到了这样一个事实——若 $f(x)$ 在 $(0,A]$ 与 $[A,+\infty)$ 上分别一致连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一致连续.

第 3 章 实数完备性基本定理的相互证明

3.1 确界原理

习题 3.1

确界原理证明单调有界定理.

证明 不妨设 $\{a_n\}$ 为有上界的递增数列. 由确界原理, 数列 $\{a_n\}$ 有上确界, 记 $a = sup\{a_n\}$. 下面证明 a 就是 $\{a_n\}$ 的极限.

事实上, 任给 $\varepsilon > 0$, 按上确界的定义, 存在数列的某一项 $\{a_n\}$ 中的某一项 $\{a_N\}$, 使得 $a - \varepsilon < a_N$. 又由 $\{a_n\}$ 的递增性, 当 $n \geq N$ 时有

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n$$

. 另一方面, 由于 a 是 $\{a_n\}$ 的一个上界, 故对一切 a_n 都有 $a_n \leq a < a + \varepsilon$. 所以当 $n \geq N$ 时有

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

这就证得 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$. 同理可证有下界的递减数列必有极限, 且极限为它的下确界.

习题 3.2

确界原理证明区间套定理.

第 4 章 导数

定理 4.1 (导数)

设函数 f 在点 a 某一领域内有定义, 若极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在, 则称 f 在 a 点处可导, 此极限为 f 在点 a 的导数, 记为 $f'(a)$.

♡

习题 4.1

(广义 Rolle 中值定理) 设 f 在 (a,b)(有穷区间或者无穷区间) 中任意一点有有限导数, 且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

定理 4.2 (Leibniz 公式)

如果函数 $u=u(x)$,$v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数, 则函数 $u\cdot v=u(x)\cdot v(x)$ 也在点 x 处有 n 阶导数, 且有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

♡

定理 4.3 (Darboux 定理)

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则它在 I 上导数 $f'(x)$ 具有介值性, 即如果 $[a,b]\subset I$,$f'(a)<\mu<f'(b)$ 或 $f'(a)>\mu>f'(b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\mu$.

♡

证明 只考虑 $f'(a)<\mu<f'(b)$ 的情形，另一情形的证明类似. 设

$$F(x)=f(x)-\mu x$$

则 $F'(x)=f'(x)-\mu$, 得

$$F'(a)=f'(a)-\mu<0, F'(b)=f'(b)-\mu>0$$

由于函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最小值点 ξ. 若 $\xi=a$, 则

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\geq 0, F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\geq 0$$

这与 $F'(a)<0$ 矛盾. 故 $\xi\neq a$. 同理可证 $\xi\neq b$. 因此 $\xi\in(a,b)$, 即 ξ 是 $F(x)$ 的极小值点, 故 $F'(\xi)=f'(\xi)-\mu=0$,$f'(\xi)=\mu$.

习题 4.2

(导数无第一类间断点) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处有导数 $f'(x)$. 证明:(a,b) 中的点或者为 $f'(x)$ 的连续点, 或者为 $f'(x)$ 的第二类间断点.

第 5 章 微分中值定理

定理 5.1 (Fermat 定理)

设函数 f 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 有定义, 且在 x_0 处可导, 若 x_0 是 f 的极值点, 即对 $\forall x \in U(x_0)$, 有 $f(x) \le f(x_0)$ (或 $f(x) \ge f(x_0)$),

则 $f'(x_0) = 0$.

♡

定理 5.2 (Rolle 中值定理)

若函数 f 满足条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;
2. 在开区间 (a,b) 可导;
3. $f(a) = f(b)$.

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

♡

定理 5.3 (Lagrange 中值定理)

若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 可导, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

♡

笔记 Lagrange 中值定理在极限中的参数处理:

1. 我们知道了参数 ξ 的一个范围, 它是在 $g(x)$ 和 $h(x)$ 之间, 假设 $g(x) \ge h(x)$, 那么就有 $h(x) \le \xi \le g(x)$, 是不是有点夹逼定理的味道了? 如果取极限后 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相等, 那么参数 ξ 就可以夹出来了.
   适用范围:$g(x)$ 和 $h(x)$ 都趋近于 x_0, 同时 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在且不为 0.
   不适用范围: 如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都趋近于 0(或 ∞), 且 $\lim\limits_{x \to 0/\infty} f'(x)$ 为 ∞ 或者 0, 这时候夹逼定理得参数的值就不再适用了, 尝试使用 2 搞.
2. 等价于某个关于 x 的式子:
   适用于: 当内层函数趋近于 0, 同时 $x \to 0, f'(x) \backsim mx^k$(其中 m,k 为非 0 常数) 或者当内层函数趋近于 ∞, 同时 $x \to \infty, f'(x) \backsim mx^k$(其中 m,k 为非 0 常数). 上述条件看似很严格, 但是所幸在考研极限题目中, 基本上都是满足的.

对于数列极限, 也可以运用 Lagrange 中值求解, 只不过需要在运用之前将数列转变为函数, 即 $n \to x$, 即可。2 及相应的结论在计算小题时, 可以快速得到答案; 对于大题而言, 可以用这个方法及结论快速判断能否用 Lagrange 中值, 同时可以利用这个方法快速验算自己的结果. 如果想要在大题中使用 2, 则具体步骤要写的详细一点 (利用夹逼定理).

参考文章传送门:利用拉格朗日中值定理秒杀某些复杂极限问题——内含高级秒杀结论

定理 5.4 (Cauchy 中值定理)

设 f 与 g 满足:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

2. 在开区间 (a,b) 可导且 $g'(x) \neq 0$.

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

定理 5.5 (L'Hospital 法则)

设 f 与 g 满足:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
2. 在 a 的去心邻域内 f,g 都可导, 且 $g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (有限或无穷).

则有 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. 将上述法则中 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 与 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ 换成 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 与 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ 即得 L'Hospital 法则 .

习题 5.1

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微,$f(0)=0$, 并设有实数 $A>0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 成立. 证明: 在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

笔记 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可微, 则在 $[a,b]$ 上

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)\ (\xi\text{在}x\text{与}x_0\text{之间})$$

这可视为函数 $f(x)$ 的一种变形, 它给出了函数与导数的一种关系.

第 6 章 Taylor 公式

定理 6.1 (Taylor 中值定理)

设函数 f 在 x_0 的某个邻域内具有直到 $(n+1)$ 阶导数, 则对此邻域中每一点 x,$f(x)$ 可表示为

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间, 且 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 Lagrange 余项. 上式也称为 f 在点 x_0 处的带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式. 有时 Taylor 公式可以写成

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+o\left[(x-x_0)^n\right]$$

称为 f 在点 x_0 处的带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式.

♡

笔记 当 $x_0=0$ 时得到的 Taylor 公式也叫 Maclaurin 公式. 常用的 Maclaurin 公式:

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.
2. $\sin x=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)$.
3. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o\left(x^{2m+1}\right)$.
4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^3}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^n)$.

习题 6.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微, 记 $M_0=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$,$M_1=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$,$M_2=\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|$. 证明:$M_1\leq 2M_0+\frac{1}{2}M_2$.

笔记 若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|A|$.

习题 6.2

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微, 且对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$, 有 $|f(x)| \leq M_0$,$|f'(x)| \leq M_1$,
$|f''(x)| \leq M_2$, 其中 M_0, M_1, M_2 为正常数. 证明: 对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$, 有 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

习题 6.3

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且变号 (即非恒正, 也非恒负), 在 (a,b) 二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

习题 6.4

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上三次可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)$ 存在. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)$.

第 7 章 不等式与凸函数

7.1 不等式

a. 利用单调性证明不等式

若 $f'(x) \geq 0$ $\left(\text{或}f'(x) > 0\right)$, 则当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \left(\text{或}f(x_1) < f(x_2)\right)$$

由此可获得不等式.

b. 利用微分中值定理证明不等式

1. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a) \quad (\xi \in (a, b))$$

   故当 $f(a) = 0$,(a, b) 内 $f'(x) > 0$ 时, 有 $f(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b])$.

2. 在上述条件下, 有

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

   其中 $\xi \in (a, b)$, 若 $f'(x)$ 严 $\nearrow$, 则

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b)$$

c. 利用 Taylor 公式证明不等式

要 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续 n 阶导数, 且

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

$f^{(n)}(x) > 0$(当 $\xi \in (a, b)$ 时), 则

$$f(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!}(x - a)^n > 0 \ \left(\text{当}x \in (a, b] \text{ 时}\right)$$

d. 用求极值的方法证明不等式

要证明 $f(x) \geq g(x)$, 只要求函数 $F(x) \equiv f(x) - g(x)$ 的极值, 证明 $\min F(x) \geq 0$. 这是证明不等式的基本方法.

e. 利用单调极限证明不等式

若当 $x < b$ 时,$f(x) \nearrow$(或严 $\nearrow$), 且当 $x \to b - 0$ 时 $f(x) \to A$(以上条件今后简记作 $f(x) \nearrow$(或 $f(x)$ 严 $\nearrow A$, 当 $x \to b - 0$ 时)), 则

$$f(x) \leq A\left(\text{当}x < b\text{时}\right) \left(\text{或}f(x) < A\left(\text{当}x < b\text{时}\right)\right).$$

对于递减或者严格递减, 也有类似结论.

7.2 凸函数

定义 7.1

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$,$\forall\lambda \in (0,1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

凹凸函数与单调函数一样同样有严格之分.

定义 7.2

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq f(x_1) + f(x_2)$$

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq f(x_1) + f(x_2)$$

推论 7.1

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

定理 7.1

若 $f(x)$ 连续, 则推论7.1, 定义7.1和7.2等价.

定理 7.2

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则一下条件等价 (其中各不等式要求 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ 保持成立):

1. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$;
2. $\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$;
3. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$;
4. $f(x)$ 在 I 上称为凸函数;
5. 曲线 $y=f(x)$ 上三点 $A(x_1, f(x_1))$,$B(x_2, f(x_2))$,$C(x_3, f(x_3))$ 所围的有向曲面积

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$$

推论 7.2

若 $f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 则 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

推论 7.3

若 $f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 则 $\forall x_0 \in I$, 过 x_0 的弦的斜率

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

时 x 的增函数.

推论 7.4

若 $f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 则 I 上任意四点 $s < t < u < v$, 有

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

推论 7.5

若 $f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 则对 I 内任一内点 x, 单侧导数 $f_{+}^{'}(x)$ 与 $f_{-}^{'}(x)$ 皆存在, 且为增函数, 且

$$f_{-}^{'}(x) \leq f_{+}^{'}(x) \quad (\forall x \in I^{o})$$

这里 I^{o} 表示全体 I 的全体内点组成之集合.

推论 7.6

若 $f(x)$ 在区间 I 上为凸的, 则 f 在任一内点 $x \in I^{o}$ 上连续.

定理 7.3

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则 $f(x)$ 是凸函数的充要条件是:$\forall x_0 \in I^{0}$,$\exists$实数α, 使得 $\forall x \in I$ 有 $f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0)$.

推论 7.7

设 $f(x)$ 在区间 I 内可导, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸的充要条件:$\forall x_0 \in I^{0}$, 有

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (\forall x \in I)$$

推论 7.8

设 $f(x)$ 在区间 I 为凸的, 则:$\forall x_0 \in I^{0}$, 在曲线 $y = f(x)$ 上一点 $(x_0, f(x_0))$ 可作一条直线

$$L : y = \alpha(x - x_0) + f(x_0)$$

使曲线 $y = f(x)$ 位于直线 L 上方.

笔记 若 f 为严格凸函数, 则除点 $(x_0, f(x_0))$ 之外曲线严格地在直线 L 的上方. 这是著名分离性定理. 直线 L 称为 $y = f(x)$ 的支撑.

定理 7.4

设 $f(x)$ 在区间 I 内有导数, 则 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数的充要条件是 $f'(x) \nearrow (x \in I)$.

推论 7.9

若 $f(x)$ 在区间 I 内有二阶导数, 则设 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数的充要条件是 $f''(x) \geq 0$.

定理 7.5

若 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则以下三条件等价:

1. $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数;
2. $\forall q_i \geq 0 : q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1, \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 有;
$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \cdots + q_nf(x_n)$$
3. $\forall p_i \geq 0\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零,$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 有
$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right) \leq \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \cdots + p_nf(x_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

第 8 章 常数 K 值法

定义 8.1 (常数 K 值法)

如果一个微分中值式满足:

1. 等式一端是只与端点 a,b 及其函数值、导数值有关的常数; 另一端只含导函数和函数在区间内某点 (中值点) 的值, 就称它是分离的;
2. 如果把式中 b 换成 a 时, 原式呈 $0=0$ 形式, 就称它是对称式.

对可化为具有 1.2. 两个特点的微分中值公式, 即可分离且可对称化的中值公式, 我们可以统一按下程序证明:

1. 把原式化为分离形式, 令等式一端的常数等于 K;
2. 再把原式化为对称式, 把含有中值的导数换位 K, 把 b 换成 x, 再把右端移于左端, 把所得的式子记作 $F(x)$, 这就是作出的辅助函数;
3. 由 K 的取法及 $F(x)$ 的作法必有 $F(a)=F(b)$;
4. 使用 **Rolle** 中值定理于 $F(x)$, 便有 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

若原式中含有二阶导数, 可由得 $f'(\xi)=0$ 解出 K 后, 再用一次中值定理. 若有更高阶导数, 重复即可.

♣

习题 8.1

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 证明: 在 (a,b) 内存在一个 ξ, 使 $bf(b)-af(a)=[f(\xi)+\xi f'(\xi)](b-a)$.

习题 8.2

证明: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二次可微, 则必存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$.

命题 8.1

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二次可微, 则对大于 1 的任意自然数 n 有 $\xi \in (a,b)$, 使

$$f(b) - \frac{n}{n-1} f\left(\frac{a+(n-1)b}{n}\right) + \frac{1}{n-1} f(a) = \frac{(b-a)^2}{2n} f''(\xi)$$

证明

1. 令

$$K = \frac{f(b) - \frac{n}{n-1} f\left(\frac{a+(n-1)b}{n}\right) + \frac{1}{n-1} f(a)}{\frac{(b-a)^2}{2n}}$$

2. 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{n}{n-1} f\left(\frac{a+(n-1)x}{n}\right) + \frac{1}{n-1} f(a) - \frac{(x-a)^2}{2n} K$$

   易知 $F(a) = F(b) = 0$.

3. 应用 Rolle 中值定理知 $\xi \in (a,b)$, 使 $F'(\eta) = 0$, 即

$$f'(\eta) - f'\left(\frac{a+(n-1)\eta}{n}\right) + \frac{\eta-a}{n} K = 0$$

   得,

$$K = \frac{f'(\eta) - f'\left(\frac{a+(n-1)\eta}{n}\right)}{\frac{\eta-a}{n}}.$$

4. 应用 Lagrange 定理, 就知 $\xi \in \left\{\frac{a+(n-1)\eta}{n}, \eta\right\} \subset (a,b)$, 使 $f''(\xi) = K$, 证毕.

命题 8.2

若 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二次可微，并且 $g''(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

证明

1. 令
$$K=\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(a)}$$
2. 作辅助函数
$$F(x)=\left[f(x)-2f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f(a)\right]-K\left[g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)+g(a)\right]$$
易知 $F(a)=F(b)=0$.
3. 应用 Rolle 中值定理知 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=0$，即
$$K=\frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)}{g'(\eta)-g'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)}$$
再应用 Cauchy 中值定理，便有 $\xi\in\left\{\frac{a+(n-1)\eta}{n},\eta\right\}\subset(a,b)$ 便有,$K=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$，证毕.

第 9 章 通法框架三步法

对于本部分内容, 需运用常微分等等思想, 方法思路来源于 b 站 up 主习之侃数. 下面用一个例题来演示:

习题 9.1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $a>0, f'(x)\neq 0$, 证明:$\exists \xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=(b-a)f'(\eta)$.

笔记 先对本题按如下步骤进行分析:

1. 将中值 ξ 暂时视为常数

$$\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=(b-a)f'(x)$$

2. 对式子两边进行积分等操作

$$\Rightarrow \xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=(b-a)\frac{df(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right]dx=(b-a)df(x)$$

$$\Rightarrow \left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right]\int dx=(b-a)\int df(x)$$

$$\Rightarrow (b-a)f(x)=\left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right]x+C$$

3. 于是可以得到

$$(b-a)f(x)-\left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right]x=C$$

故令辅助函数

$$F(x)=(b-a)f(x)-\left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right]x$$

再令 $F(a)=F(b)$, 则

$$\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(b)-f(a)$$

再进行二次构造得

$$G(x)=f(x)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\ln x$$

证明

1. 令 $G(x)=f(x)\ln\frac{b}{a}-[f(b)-f(a)]\ln x$, 则 $G(a)=G(b)$, 计算过程如下:

$$G(b)-G(a)=[f(b)-f(a)]\ln\frac{b}{a}+[f(b)-f(a)][\ln a-\ln b]=0$$

由 Rolle 定理可得,$\exists\xi\in(a,b)(a,b\neq 0)$ 使得 $G'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=\frac{f(b)-f(a)}{\xi}$

2. 再令 $F(x)=(b-a)f(x)-\left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right]x$, 其中 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$, 则

$$F(b)-F(a)=(b-a)[f(b)-f(a)]+\left[\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\right](a-b)=0$$

即 $F(a) = F(b)$, 由 Rolle 定理可得,$\exists \eta \in (a, b)$ 使得 $F'(\eta) = 0$, 即 $\xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a} = (b-a) f'(\eta)$.

第 10 章 积分的计算和积分的极限

习题 10.1

(定积分一例七解) 计算 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

证明 (方法一) 令 $x=tanx$, 则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

注 最后一步解法用到了偶函数关于原点对称的闭区间上积分的性质.

(方法二) 考虑含参积分 $I(a)=\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

显然 $I(0)=0,I(1)=I$, 且函数 $\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}$ 及 $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\right)=\frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}$ 在 $R=[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 故

$$I'(a)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}dx$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left(\frac{a+x}{1+x^2}-\frac{a}{1+ax}\right)dx=\frac{1}{1+a^2}\left[\frac{a\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+a)\right]$$

因此

$$I=\int_0^1 I'(a)\,\mathrm{d}a=\int_0^1\frac{1}{1+a^2}\left[\frac{a\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+a)\right]da=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

得

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

(方法三) 令 $x=\frac{1-u}{1+u}$, 则 $dx=\frac{-2}{(1+u)^2}du$,

$$I=2\int_0^1\frac{\ln\left(1+\frac{1-u}{1+u}\right)}{1+\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2}\frac{1}{(1+u)^2}du=\int_0^1\frac{\ln 2-\ln(1+u)}{1+u^2}du$$
$$=\ln 2\int_0^1\frac{du}{1+u^2}-\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{1+u^2}du=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

得

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

注 选取了最常用的三种解法, 其他解法暂时不做要求.

第 11 章 函数的可积性与可积函数的性质

定理 11.1 (Riemann 定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可积,$g(x)$ 是以 T 为周期的可积函数, 由

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\left(x\right)g\left(nx\right)dx=\frac{1}{T}\int_a^b f\left(x\right)dx\int_a^b g\left(x\right)dx$$

♡

第 12 章 积分不等式

定理 12.1 (Cauchy-schwarz 不等式)

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

12.1 待定系数法证明积分不等式

习题 12.1

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是 Riemann 可积函数, 满足 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明:$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 4\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

笔记 如果设 $p(x)$ 是多项式, 则由 Cauchy-schwarz 不等式,

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 p^2(x)\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 f(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

, 由于 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 要保证不等号右边只含 $f(x)$, 则 $p(x)$ 最多只能是一次多项式, 即 $deg\,p(x)=1$, 记 $p(x)=a_1x+a_0$, 于是

$$\int_0^1 p^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3a_1}\left[(a_1+a_0)^3-a_0^3\right]$$

比较欲证命题的系数可知

$$\frac{a_0^2}{4}=\frac{1}{3a_1}\left[(a_1+a_0)^3-a_0^3\right]$$

因此可以让 $a_0=-2$,$a_1=3$ 即可.

同思路题视频传送门:全国大学生数学竞赛非专业组，一类积分不等式难题通解方法

参考文章传送门:数分笔记——待定系数法证积分不等式

习题 12.2

设 $f\in C^1[0,1]$, 满足 $f(0)=f(1)=f'(0), f'(1)=1$, 则 $\int_0^1 (f''(x))^2\,dx \geq 4$.

习题 12.3

设 $f \in C^1[0,1]$, 满足 $f(0)=f(1)=0$, 则 $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \geq 4\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

第 13 章 无穷积分

定理 13.1 (比较判别法)

$\forall x\in[a,+\infty)$, 有 $|f(x)|\le c\varphi(x)$(c 是正常数).

1. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛;
2. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散;

定理 13.2 (Cauchy 判别法)

$\forall x\in[a,+\infty), f(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=d$,$d\in[0,+\infty)$.

1. 若 $p>1, 0\le d<+\infty$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;
2. 若 $p\le 1, 0<d\le+\infty$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

定理 13.3 (Abel 判别法)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,$\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

定理 13.4 (Dirichlet 判别法)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 积分 $\int_a^{A}g(x)\,\mathrm{d}x(A>a)$ 有界则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

习题 13.1

(Froullani 积分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,$f(+\infty)$ 存在且有限, 实数 a,$b>0$, 计算积分

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

证明 (收敛性的证明包含在下面的计算过程中) 对任意的 $0<r<R<+\infty$, 由定积分的换元公式, 有

$$\begin{aligned}\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx&=\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由积分中值定理, 存在 $\xi\in(ar,br),\eta\in(aR,bR)$, 使得

$$\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{\mathrm{d}x}{x}-f(\eta)\int_{aR}^{bR}\frac{\mathrm{d}x}{x}=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a}$$

令 $r\to0^+,R\to+\infty$, 得

$$J=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$$

习题 13.2

(Dirichlet 积分) 证明:$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

证明

1. 收敛性的证明. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, 故 $x=0$ 不是被积函数的瑕点. 一下只需要证明 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 因 $\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|\le 2,\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格减少且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 由 Dirichlet 判别法知,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 也收敛 (实际上 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛).
2. 等式的证明. 我们知道,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

利用含参量积分的性质, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

再由换元积分法, 得

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

笔记 对收敛的广义积分 (包括无穷积分与瑕积分), 可以使用 Newton-Leibniz 公式. 当然在将积分上下限代入所得的" 部分原函数" 时, 需用对应的极限代替函数值. 例如

$$\frac{1-\cos x}{2x}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{2x}-\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{2x}=0$$

下面是无穷积分在无穷远的性质.

习题 13.3

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$(不妨设 $\delta<\varepsilon$), 使得对任何 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由 $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛, 所以存在 $T>a$, 使得任意 $x_1,x_2>T$, 有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\delta^2}{2}$$

于是对任意 $x>T+\frac{\delta}{2}$, 取 $x_1=x-\frac{\delta}{2},x_2=x+\frac{\delta}{2}$, 则

$$|f(x)|\,\delta=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}t-\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2}$$

从而 $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

习题 13.4

证明: 若 $f(x)$ 连续可微, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f'(x)\,dx$ 都收敛, 则 $x \to +\infty$ 时, 有 $f(x) \to 0$.

证明 要证明当 $x \to +\infty$ 时, 有 $f(x)$ 有极限, 只要证明 $\forall\{x_n\} \to +\infty$ 恒有 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 事实上, 因为 $\int_a^{+\infty} f'(x)\,dx$ 收敛, 据 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $A > a$, 当 $x_1, x_2 > a$ 时, 恒有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. 那么 $\forall\{x_n\} \to +\infty$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$, 有 $x_n, x_m > A$, 从而

$$\left|\int_{x_n}^{x_m} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

因此恒有 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 从而极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ 存在.

下面证明 $a = 0$. 若 $a > 0$, 则由保号性, 存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, 有 $f(x) > \frac{a}{2} > 0$, 从而 $A > M$ 时 $\left|\int_A^{2A} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq \frac{a}{2}A \to +\infty$(当 $A \to +\infty$ 时). 这与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛矛盾. 同理可证 $a < 0$ 也不可能, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a = 0$

习题 13.5

(第十五届全国大学生数学竞赛数学 B 类) 设非负函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 无穷积分有 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且存在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数 g, 使得

$$f'(x) \leq g(x), x \geq 0$$

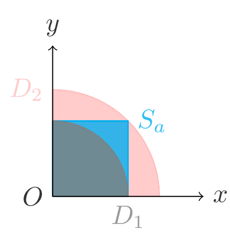
分别就下列三种情形, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. $g(x) = C > 0$, 其中 C 为常数.
3. $g(x) = Cf^p(x)$, 其中 $C > 0, p > 0$ 为常数.

习题 13.6

证明:$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

笔记 对于本题直接去算是算不出来的，所以需要利用二重积分构造圆环使用面积关系去逼近，具体面积关系如下图所示



证明 设

$$S_a=[0,a]\times[0,a]$$

显然 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ 在 S_a 上可积，且

$$F\left(a\right)=\iint_{S_a} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy=\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2$$

作半径为 a 和 $\sqrt{2}a$ 的 $\frac{1}{4}$ 的圆 D_1 和 D_2，使得

$$D_1\subset S_a\subset D_2$$

由 $e^{-\left(x^2+y^2\right)}>0$ 有

$$H\left(a\right)=\iint_{D_1} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\le F\left(a\right)\le\iint_{D_2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=G\left(a\right)$$

而

$$H\left(a\right)=\iint_{D_1} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-r^2}rdrd\theta=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

类似有 $G\left(a\right)=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$, 且有

$$\lim_{a\to+\infty}H\left(a\right)=\lim_{a\to+\infty}G\left(a\right)=\frac{\pi}{4}$$

由夹逼原则可得

$$\lim_{a\to+\infty}F\left(a\right)=\lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

第 14 章 瑕积分

其他判别法与无穷积分平行，故不作展示. 只需单独记忆 Cauchy 判别法的 p 的情况与无穷积分相反即可.

习题 14.1

(Euler 积分) 证明瑕积分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$ 收敛, 且 $J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

证明 注意到在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\sin x)=-\infty$. 因此, 该瑕积分适合用比较判别法.
由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln(\sin x)=0$, 故瑕积分 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$ 收敛. 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则有

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx$$

故

$$\begin{aligned}
2J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin x)+\ln(\cos x)]\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx-\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du-\frac{\pi}{2}\ln 2\,(\text{令}u=2x)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,du+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)\,du-\frac{\pi}{2}\ln 2\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,du-\frac{\pi}{2}\ln 2=J-\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

即 $J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$. 其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos u)\,du=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)\,du$$

下面这个例子展示了 Cauchy 判别法以及瑕点判别方式.

习题 14.2

讨论瑕积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}=0$, 其中 $p=\frac{1}{2}$, 由 Cauchy 判别法的极限形式知原积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

笔记 $x=1$ 不是被积函数瑕点, 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=1$$

第 15 章 数项级数

推论 15.1 (级数收敛的必要条件)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

♡

第 16 章 函数项级数

定义 16.1

设 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 是具有公共定义域 E 的一列函数，我们将这无穷个函数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为函数项级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

♣

16.1 等度连续

定义 16.2 (等度连续)

设 $\mathbb{H}$ 是区间 I 上定义的函数族, 所谓族 $\mathbb{H}$ 上的函数在 I 上等度连续是指:
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon(\forall f\in\mathbb{H})$$

特别,I 上定义的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续是指:
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon(\forall n\in\mathbb{H})$$

♣

显然, 若 $\mathbb{H}$ 是有限族 (即由有限个函数组成), 且 I 为有界闭区间, 那么 $\mathbb{H}$ 中每个函数连续, 就必然等度连续. 若 $\mathbb{H}$ 为无穷族,$\mathbb{H}$ 中每个成员连续,$\mathbb{H}$ 不见得是等度连续的.

习题 16.1

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上为等度连续的. 试证: 若在 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$, 则在 $[a,b]$ 上

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty).$$

证明 由 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上为等度连续, 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 因而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

今将 $[a,b]k$ 等分, 使每个小区间的长度小于 δ(这是可以办到的, 只要令 $\frac{b-a}{k}<\delta$, 即 $k>\frac{b-a}{\delta}$ 便可). 记 k 等分的各分点为

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_k=b$$

因为 $f_n(a_i)\to f(a_i)(n\to\infty)$, 所以对上述 $\varepsilon>0,\exists N_i>0$ 使得 $n>N_i$, 有

$$|f_n(a_i)-f(a_i)|<\frac{\varepsilon}{3}(i=1,2,\cdots,k)$$

令 $N=max\{N_1,N_2,\cdots,N_k\}$, 则当 $n>N$ 时,$\forall x\in[a,b],\exists a_i(i\in\{1,2,\cdots,k\})$ 使得 $|a_i-x|<\delta$,

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_n(a_i)|+|f_n(a_i)-f(a_i)|+|f(a_i)-f(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

这就证明了: 在 $[a,b]$ 上 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n \to \infty)$.

16.2 幂级数

我们将形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数.

第 17 章 含参量普通积分

习题 17.1

设 f 在 $C^1[0,1]$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx\right] = \frac{f(1)-f(0)}{2}$.

证明

$$I_n = n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\right] = n\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\right]$$
$$= n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\right] = n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx\right]$$

使用 Lagrange 中值定理可得 $\exists\xi_k \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ 使得

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) = f'(\xi_k(x))\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

于是

$$I_n = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k(x))\left(\frac{k}{n} - x\right)dx$$

再由积分中中值定理 $\exists\eta_k \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ 使得

$$I_n = n\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k(x))\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k(x))\frac{1}{n}$$

最后, 由定积分定义可得

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

习题 17.2

设 $A_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln 2 - A_n) = \frac{1}{4}$