Bernadeta Okołowicz 24.03.2023
Paulina Kusztelak
Wstęp do informatyki

Sprawozdanie 1: Notacje liczbowe i teoretyczne modele obliczeń

Część I. Systemy notacji liczb

Notacja jest umownym sposobem zapisu symboli, liczb czy znaków. Wyróżniamy dwa rodzaje zapisu informacji – analogowy i cyfrowy. Oba rodzaje zapisów wykorzystywane są w naszym życiu na co dzień.
Notacje analogową można rozumieć jako zapis wartości mówiących o jakiejś mierze (np. o zjawisku czy kącie) w ośrodku ciągłym, co oznacza, że każdy element można osiągnąć. Nasze dane, czyli nasze informacje w określonej formie, są wartościami mówiącymi o danej cesze. Nie jest określona jedność ani cyfra tylko wartość cechy, która przekazana jest w postaci naszej danej. Naszą wartość możemy zmierzyć np. temperaturę, która w sposób ciągły wzrasta, osiągając po drodze wszystkie możliwe wartości. Jeśli zakres zmienności sygnału wynosi 0-1 to jego amplituda w dowolnej chwili przyjmuje dowolną wartość z przedziału. Jest to zapis w postaci niezmienionej, w stosunku 1:1. Największym minusem tego rodzaju notacji jest jej podatność na błędy. Podczas korzystania z notacji analogowej możliwe jest wykonywanie obliczeń na podstawie notacji unarnej, w której jeden element oznacza jednostkę. Nie znamy tutaj wartości, dlatego liczbę należy przedstawiać jako ilość takich samych symboli np. *** jako wartość równą 3. Przy powielaniu danych istnieje bardzo duże ryzyko błędu, co spowodowane jest jedynie możliwością przepisywania i kopiowania symboli. Wyobraźmy sobie, że chcemy dodać do siebie ************ i ****, więc jak by to wyglądało? Należałoby przepisać jedną daną i bez przerwy dopisać do niej drugą (przepisując ją). To co widzimy jest naszym wynikiem w postaci ****************. Operując na małych wartościach wykonywanie obliczeń nie jest jeszcze takie trudne, ale im wartość jest większa, tym większe jest ryzyko błędu przy przepisywaniu, a zależy nam na jak najdokładniejszych obliczeniach.
Notacja cyfrowa korzysta z zapisu liczb, które są określoną wartością w zależności od systemu liczbowego z którego korzystamy. Najpopularniejszymi systemami pozycyjnymi jest system dziesiętny oraz dwójkowy, natomiast istnieją również inne systemy jak ósemkowy, szesnastkowy czy trójkowy. Znaczenie symbolu zależy od jego położenia w danej notacji (czyli w którym dokładnie miejscu się znajduję). Przyjmuje dokładne wartości skokowo, czyli nie osiąga wszystkich możliwych wartości po drodze, a zapis może być bezstratnie powielany. Po zapoznaniu się z technikami wykonywania działań arytmetycznych jesteśmy w stanie wykonywać skomplikowane operacje liczbowe. Cyfry odczytywane są jako znaki i są rozróżnialne.

Zadanie 1.2 Notacja analogowa a cyfrowa.

Podstawową różnicą tych dwóch notacji jest sposób przedstawiania danych. Notacja analogowa posługuje się zapisem wartości, jednostki są umowne. W sposób teoretyczny rozumiemy krotność danych symboli jako liczbę. Natomiast notacja cyfrowa posługuje się tylko liczbami, ale konieczne jest posiadanie wiedzy, co to jest liczba. Dana liczba w zależności od przyjętego systemu liczbowego może oznaczać zupełnie co innego. Porównajmy zapis liczb w systemie dziesiętnym i piątkowym: $(431)_{(10)}$ i $(3211)_{(5)}$ – widzimy, że cyfry tworzące daną liczbę są inne, ale tak naprawdę przedstawiają to samo. Przy porównaniu tych dwóch systemów liczbowych widzimy, że ta sama liczba może być przedstawiona na różne sposoby, które składają się z różnej ilości cyfr, czyli miejsc. Jeśli pomyślimy o tym w kontekście ilości pamięci, które zajmowałyby te liczby to na przytoczonym przykładzie system dziesiętny jest korzystniejszy niż piątkowy. W systemie dziesiętnym zajmujemy tylko 3 bity pamięci (miejsca), a w piątkowym 4 bity. Jednak jakby to wyglądało w notacji analogowej? Przedstawienie liczby $(431)_{(10)}$ byłoby trudne, ale oczywiście możliwe. Składałoby się z ciągu 431 symboli np. *. Porównajmy teraz notacje cyfrową, a dokładniej system dziesiętny do notacji analogowej. W notacji analogowej zajęlibyśmy aż 431 bitów, zamiast 3 jak w notacji cyfrowej. Różnica w ilości zajętej pamięci jest ogromna, a należy pamiętać, że pamięć jest skończona. Wiąże się to z tym, że możemy zapisać więcej takich liczb w systemie dziesiętnym, czyli notacji cyfrowej niż w notacji analogowej.

Drugą bardzo ważną różnicą tych dwóch notacji jest możliwość powielania danych. W obu notacjach powielanie danych jest możliwe i wykorzystywane. Istotnym aspektem jest występowanie błędów podczas powielania wartości. W notacji cyfrowej, jeśli chcemy powielić daną liczbę np. 15 nie stanowi to dla nas żadnego kłopotu, jest to bardzo proste działanie, przy którym rzadko występują błędy. Natomiast w notacji analogowej przedstawienie wartości 15, oznacza 15 takich samych symboli. Jeśli chcielibyśmy ją powielić to należałoby przepisać te 15 symboli, bez pominięcia żadnego z nich. Tutaj aspekt ludzki narzuca możliwość pojawienia się błędów ze względu na pominięcie, zgubienie czy złe policzenie ilości danych symboli. Wynika z tego, że notacja analogowa gorzej się sprawdzi przy powielaniu danych wartości. Przykład, który przytoczyłam, był prostą liczbą i możliwe jest, że przepisalibyśmy ją bezbłędnie, ale należy pamiętać, że rozważamy wszystkie liczby całkowite. Liczbę 4013 łatwo przedstawić w notacji cyfrowej, którą przed chwilą się posłużyłam, ale napisanie jej w notacji analogowej byłoby bardzo czasochłonne, a możliwość pojawienia się błędów bardzo wysoka. W notacji analogowej porównując duże wartości możemy nie zauważyć w nich różnic, natomiast jeśli widzimy daną cyfrę w notacji cyfrowej, różnice widzimy od razu.

Wiemy już, jak zbudowane są wartości w obu notacjach oraz jak wygląda ich przechowywanie i powielanie. Czy w takim razie możliwe jest wykonywanie takich samych działań na obu notacjach? W notacji cyfrowej wykonywanie operacji arytmetycznych wymaga wiedzy na temat działań, które chcemy wykonać. Każde działanie ma swoje zasady, a w różnych systemach pozycyjnych liczby mogą przedstawione być inaczej. Jeśli nauczymy się technik wykonywania działań, czyli ogromnej ilości wiedzy, jesteśmy w stanie wykonywać skomplikowane operacje liczbowe. Korzystając z notacji analogowej również możemy wykonywać operacje arytmetyczne. Jesteśmy w stanie wykonać dodawanie, odejmowanie, mnożenie czy dzielenie. Nie możemy sumować liczb, ale dzięki przepisaniu jednej liczby obok drugiej, otrzymamy wynik dodawania. Nie mamy możliwości zapamiętywania, dlatego każda operacja musiałaby być wykonywana osobno. Dużą zaletą notacji analogowej jest jej uniwersalność, nie musimy wiedzieć co dana liczba oznacza, jedynie musimy rozróżniać od siebie symbole. Nie potrzebna jest nam jest też wiedza na temat wykonywania działań, wystarczy nam umiejętność przepisywania i skreślania/usuwania.

Podsumowując obie notacje posiadają swoją mocne i słabe strony. Notacja analogowa pozwala nam na zapisywanie wartości w sposób zrozumiały dla każdego, a wykonywanie operacji liczbowych bez wiedzy na temat skomplikowanych działań. Dzięki swojej uniwersalności, czyli rozumieniu, że jeden symbol jest jednostką, jest bardziej podatna na błędy. Więcej czasu zajmuję wykonywanie operacji, możemy się pomylić przy przepisywaniu wartości i przez to zmienić nasz wynik, a zapisywanie liczb w notacji analogowej zajmuje więcej pamięci. Jeśli chodzi jednak o możliwość automatyzacji operacji liczbowych jest ona prostsza, ponieważ posiadamy mało symboli (najczęściej jeden). Wystarczy nam umiejętność rozróżniania czy symbol jest czy go nie ma, wpisywania go i usuwania, ewentualnie zmieniania na inny symbol. Nie musimy znać dużej ilości schematów rozwiązywania działań, więc stworzenie automatu, który opierałby się na notacji analogowej jest prostsze niż na notacji cyfrowej. Przykładem takiej maszyny jest Maszyna Turinga, o której będzie w drugiej części sprawozdania.

Notacja cyfrowa jest ogólnie korzystniejsza od notacji analogowej ze względu na lepszą kontrolę błędów. Łatwiej porównać dwie liczby (jeśli posiadamy informację na temat tego jak je odczytać), możemy wykonywać bardziej skomplikowane operacje arytmetyczne, ale wiąże się z tym ogromna ilość wiedzy, którą najczęściej zdobywa się kilka lat. Notacja cyfrowa nie jest uniwersalna, każdy może zapisać daną liczbę w inny sposób, za pomocą innego systemu pozycyjnego. Ogromną jej zaletą jest mniejsza ilość pamięci, którą zajmuje, czyli możliwość przechowywania większej ilości danych. Przepisanie danej liczby jest czymś prostym, nie stanowiącym większego problemu, dlatego powielanie liczb w notacji cyfrowej jest prostsze. Natomiast stworzenie automatu, który opierałby się na notacji cyfrowej jest dużo trudniejsze. Musielibyśmy dodatkowo nauczyć automat rozróżniania większej ilości cyfr od siebie, przetrwania tych danych, umiejętności operacji na różnych systemach pozycyjnych oraz schematów skomplikowanych działań arytmetycznych.

Część II: Maszyna Turinga

Maszyna Turinga stworzona została przez angielskiego matematyka Alana Turinga w roku 1937. Jest to bardzo prosta maszyna logiczna, która opiera się na algorytmach, dzięki czemu możemy wykorzystywać ją m.in do wykonywania obliczeń matematycznych, takich jak dzielenie, mnożenie, dodawanie czy odejmowanie liczb. Możemy maszynę taką wykorzystać także do odczytywania liczb zapisanych w innych systemach, niż system dziesiętny, np. system dwójkowy (zero-jedynkowy) zapisany przy użyciu symboli 0 i 1 - zastrzegamy, są to symbole, nie liczby. Maszyną sterować możemy za pomocą prostych reguł, zapisanych w specjalnie przeznaczonym do tego bloku. Koniec pracy maszyny możemy wykonać w sposób zaplanowany, ustalając odpowiedni stan dla głowicy lub też w sposób nieprzewidziany, tzw. „martwa pętla”, która będzie powodować nieskończoną jej prace, nie jest to jednak działanie pożądane.

Pomimo swojej prostoty jest ona niezwykle ważnym odkryciem w historii informatyki, ponieważ współczesne komputery opierają się właśnie na jej działaniu. Wszelkie problemy rozwiązywane na komputerze da się również rozwiązać również za pomocą maszyny Turinga.

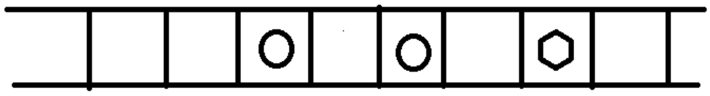
BUDOWA MASZYNY TURINGA.

Składa się z kilku części:

1. Nieskończenie długiej taśmy, która zawiera komórki z symbolami (Rys. 1):

Najczęściej są to symbole 0, 1 oraz pusty znak - pusta komórka. W zależności jednak od notacji, w jakiej chcemy zapisać nasze symbole, mogą to być również kropki . . . czy kreski | | | |. Da się ją przesunąć tylko o jedną komórkę w dowolnym kierunku.

Przykładowy fragment taśmy z symbolami jako "koło" (oznaczający zapis pewnej liczby w systemie dwójkowym, tzw. zero-jedynkowym) oraz symbolem dodatkowym, który w tym przypadku będzie oznaczał koniec zapisanej liczby.

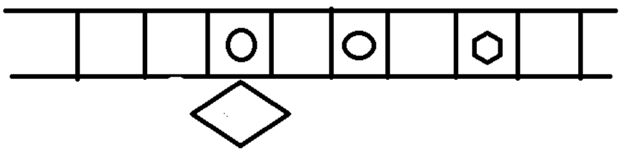


Rys. 1

2. Głowicy, która odczytuje symbole z taśmy i również na niej zapisuje wynik (Rys. 2):

Głowica znajduje się na jednej z komórek taśmy - zawiera ona pierwszy symbol do przetworzenia i poruszając się w prawo lub lewo odczytuje symbol znajdujący się w komórce, w której aktualnie się znajduje. W głowicy w danym momencie znajduje się wybrany stan oznaczony dowolnie (np. stan początkowy oznaczający „widzę symbol lub pustą komórkę i czekam na polecenie” - na potrzeby zadania oznaczamy go jako stan P). Ilość stanów głowicy jest skończona i w zależności od intencji, nazwy oraz zadania stanów są ustalane przez twórców maszyny. Może ona jednocześnie odczytywać i przetworzyć tylko jedną komórkę z taśmy.

Na potrzeby zadania przyjmujemy wygląd głowicy jako romb:



Rys. 2

3. Układu sterowania głowicą (Rys. 3):

Jak sama nazwa wskazuje, służy do sterowania głowicą i tym samym do odczytywania symboli z taśmy, ich przetwarzania i przepisywania. Dodatkowo wyznacza kierunek poruszania się głowicy. W układzie sterowania operujemy zatem na stanach głowicy, tym co może ona zobaczyć na taśmie oraz kierunku jej poruszania.

S	T	S	T	K
P	○	P	○	⇨
P	___	P	___	⇨

Rys. 3

Oznaczenie **S** oznacza wybrany przez nas stan:

"**P**" - na potrzeby zadania oznacza on stan początkowy „Widzę coś na taśmie, wykonuję polecenie".

Do każdego ze stanów należy przyporządkować odpowiednie polecenia, takie jak: co znajduje się na taśmie, kierunek, w jakim będzie poruszać się głowica w tym właśnie stanie.

Oznaczenie **T** oznacza to, co głowica odczytuje z taśmy:

___ - oznacza pustą komórkę ("Widzę puste pole")

O - oznacza nasz wybrany symbol ("Widzę O")

Oznaczenie **K** oznacza kierunek poruszania się głowicy.

-----> - "Idę w prawo"

<----- - "Idę w lewo"

W przygotowanej maszynie powinnyśmy zawrzeć również informacje odnośnie „alfabetu" taśmy oraz głowicy, tzn. wypisać wszystkie symbole, które znajdują się na taśmie oraz wszystkie stany, jakie będzie osiągać głowica.

Powyższy fragment (Rys. 3) przedstawia jedynie kawałek bloku sterującego. Aby w pełni i poprawnie odczytać wybraną liczbę, należałoby dopisać dodatkowe stany, które mogłyby zapisać wynik oraz zatrzymać pracę maszyny, aby ta nie odczytywała dalej komórek z taśmy. W tym wstępie jednak nie będziemy się tym zajmować, gdyż miał on jedynie na celu przybliżyć czytelnika do zrozumienia, czym jest oraz czym zajmuje się Maszyna Turinga.

W ogólnym opisie zatem, schemat działania maszyny wygląda następująco:

Bieżący stan głowicy, bieżący symbol na taśmie ---> nowy stan głowicy, symbol zastępujący (lub usuwający lub też nie) symbol znajdujący się na taśmie, kierunek przesunięcia się taśmy.

Zadanie 1.7. Zbuduj maszynę Turinga obliczającą iloczyn dwóch liczb zapisanych w postaci unarnej.

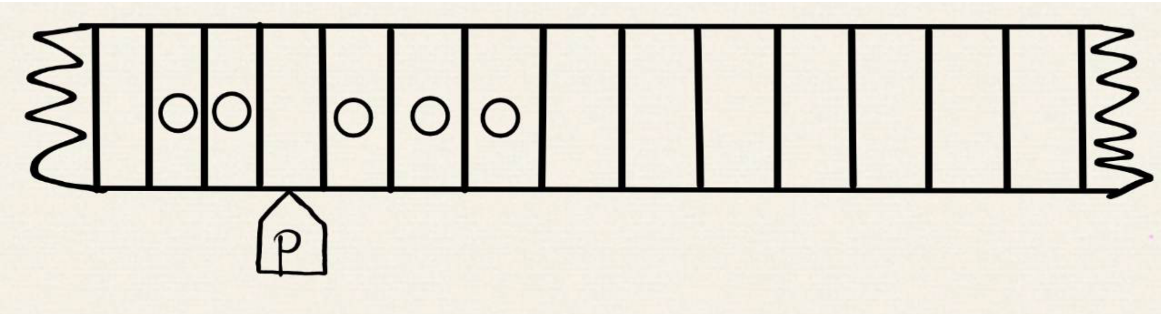
Założenia:

Zakładamy, że maszyna Turinga pomnoży dwie liczby 2 i 3 zapisane w postaci unarnej jako koła i wypisze wynik w wyznaczonych komórkach. Rozpoczęcie pracy maszyny następuje w pustej komórce oddzielającej obie liczby. Zakończenie liczby oznaczone jest pustą komórką, dlatego maszyna wie, gdzie jest jej koniec. Maszyna ma za zadanie przesunąć się w prawo, odczytać czarne koło, zmienić jego kolor na czerwony (oznacza to, że ten znak został odczytany, nie odczytuje go ponownie), następnie przesunąć się w lewo, na puste pole i kolejny raz w lewo na pole z kołem czarnym drugiej liczby. Po odczytaniu znaku należy zmienić jej kolor na czerwony. Po wykonaniu tych czynności maszyna musi przejść w prawą stronę dopóki nie trafi na pustą komórkę po zakończeniu drugiej liczby, w tym momencie następuje zmiana stanu i przejście na kolejną pustą komórkę, w której należy przepisać odczytany symbol. Po odczytaniu i przepisaniu całej liczby znajdującej się po lewej stronie maszyna powinna zamienić czerwone koła na czarne i powtórzyć swoją pracę, aż do momentu odczytania całej liczby z prawej strony. Zostały do tego przydzielone osobne stany. Po wykonaniu takiej serii następuje wypisanie ostatecznego wyniku mnożenia liczby 2 oraz 3 w postaci 6 czarnych kół i zakończenie pracy maszyny. Pracą maszyny manipulujemy za pomocą stanów i kierunków jej poruszania.

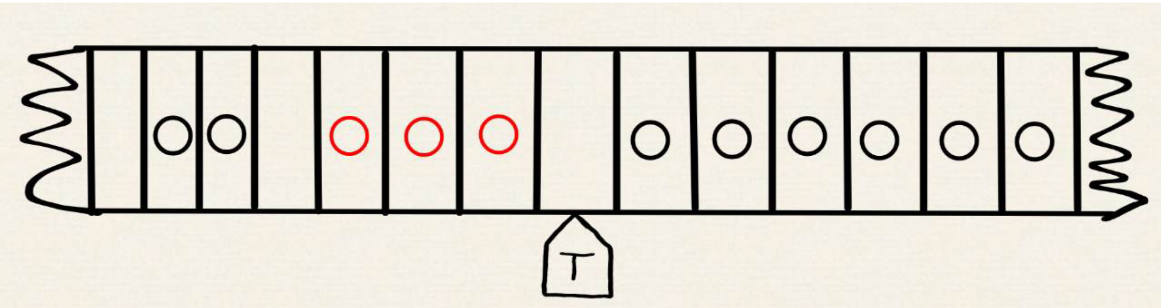
Alfabet taśmy = { O, O, __}

Alfabet głowicy = { P (stan początkowy), S, M, B, Z, Y, D, K, A, C, E, T (stań końcowy, terminal)}

Wykonanie zadania przedstawiamy w postaci graficznej. To jest wygląd taśmy, którą analizujemy. Jest on oczywiście przykładowy, wymyślony na potrzeby zadania:



Po zakończeniu pracy, czyli wpisaniu wyniku na taśmę, będzie ona wyglądała tak:



Po prawej stronie widzimy wynik zapisany w postaci unarnej. Aby było to możliwe, musiałyśmy napisać zestaw reguł sterujących maszyną. Wykorzystałyśmy zmianę symbolu czarnego koła na czerwone, co oznacza symbol już odczytany (zużyty), ułatwiający poruszanie się po taśmie i rozróżnianie części już odczytanych. Maszyna może odczytać tylko jeden symbol na taśmie, dlatego pojedynczo przepisuje je z prawej strony taśmy i za każdym razem wraca, aby odczytać następny symbol lub zobaczyć, że cała liczba została już przetworzona. Po przetworzeniu przez maszynę liczby po lewej stronie, czyli tej którą mnożymy, dołożyłyśmy stan, który ją porządkuje – zamienia czerwone kółka na czarne. Po przetworzeniu całej liczby znajdującej się po prawej stronie następuje zakończenie pracy maszyny, ponieważ liczba po lewej stronie została przepisana tyle razy ile symboli miała liczba po prawej.

Na następnej grafice pokazany jest zestaw reguł, który pozwolił nam na zapisanie wyniku mnożenia dwóch liczb, przedstawionych w postaci unarnej:

S	T	S	T	K
P	␣	P	␣	→
P	○	S	○	←
S	␣	S	␣	←
S	○	M	○	→
S	○	S	○	←
M	␣	B	␣	→
M	○	M	○	→
B	○	B	○	→
B	○	B	○	→
B	␣	Z	␣	→
Z	␣	Y	○	←
Z	○	Z	○	→
Y	␣	D	␣	←
Y	○	Y	○	←
D	␣	K	␣	←
D	○	D	○	←
D	○	D	○	←
K	○	E	○	→
K	○	K	○	←
K	␣	A	␣	→
A	␣	C	␣	→
A	○	A	○	→
C	○	C	○	→
C	○	S	○	←
C	␣	T	␣	→
E	␣	B	␣	→
E	○	E	○	→

W oparciu o wstęp teoretyczny, nabytą wiedzę oraz wykonanie zadanie numer 1.7 możemy wysnuć tezę, że automat skończony, który swoje działanie opiera na tych samych zasadach, co maszyna Turinga, z tym jedynie wyjątkiem, że automat może przesuwać się wyłącznie w jednym kierunku, nie jest w stanie wykonać wszystkich działań, jakie wykonuje maszyna Turinga.

Na poparcie tezy możemy przytoczyć wspomniane wyżej zadanie 1.7, w którym do wykonania była maszyna Turinga mnożąca dwie liczby w zapisie unarnym i wypisująca wynik tego działania w odpowiednim miejscu. Podczas zapisu reguł warunkujących działanie maszyny, można było zauważyć, że jest to możliwe do wykonania właśnie dlatego, że mogła ona poruszać się w dwóch kierunkach (prawo, lewo). Gdyby takie zadanie należało wykonać przy użyciu automatu skończonego poruszającego się wyłącznie w jedną stronę, stawałoby się ono zbyt skomplikowane, a nawet, śmiem się pokusić o stwierdzenie, awykonalne. Jak pomnożyć przez siebie dwie różne liczby, oddzielone komórkami i zapisać ich wynik, kiedy możemy poruszać się zaledwie w jedną stronę na niekończącej się taśmie? Reasumując, popieram tezę twierdzącą, że nie każde zadanie, które możemy wykonać przy użyciu maszyny Turinga, będzie możliwe do wykonania przy użyciu automatu skończonego.