Aufgabe 1

Tabelle 1: Wahrheitstabelle zur Tautologie $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w	f	w	w

Aufgabe 4

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

$\Rightarrow$ Aussage stimmt für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Aussage wahr für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, also:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsschritt: Zeige die Aussage für $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&\quad \textit{(Nebenrechnung: } (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6\textit{)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Aussage stimmt auch für $n = 1$.

Schluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 5

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$4n < 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 \text{ gilt.}$$

Beweis durch vollständige Induktion

I. Induktionsanfang ($n = 5$): Da die Aussage nur für $n \geq 5$ gelten soll, wählen wir den kleinsten Wert, $n_0 = 5$.

$$4n < 2^n$$

$$4 * 5 < 2^5$$

$$20 < 32$$

Da $20 < 32$, ist die Aussage $4 \cdot 5 < 2^5$ wahr. $\Rightarrow$ Aussage stimmt für $n = 5$.

II. Induktionsvoraussetzung (IV): Sei die Aussage wahr für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$:

$$4n < 2^n$$

III. Induktionsschritt (IS): Zeige die Aussage für $n+1$, d.h., es muss gezeigt werden: $\mathbf{4(n+1) < 2^{n+1}}$.

$$
\begin{aligned}
4(n+1) &= 4n+4 \\
4n+4 &< 2^n+4 \\
2^n+4 &< 2^n * 2 \text{ (nach IV: } 4n < 2^n) \\
4n+4 &\leq 2^n+4 < 2^n * 2
\end{aligned}
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
2^n+4 &> 2^n * 2 \\
2^n+4 &> 2^{n+1} \\
2^n - 2^{n+1} &> 4 \text{ (umgeformt, sodass 4 kleiner sein muss)} \\
2^n * (2-1) &> 4 \\
2^n * 1 &> 4 => n = 3
\end{aligned}
$$

woraus folgt: $\Rightarrow$ Aussage $A(n+1)$ stimmt, wenn n $\geq$ 5.

Schluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage:

$$4n < 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5.$$

Aufgabe 6

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$ geeignete $a, b \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$n = 4a + 5b \quad \text{gilt.}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Dieser Beweis erfordert die starke Form der Induktion, da wir im Induktionsschritt die Behauptung für eine Zahl $n-k$ benötigen, wobei $k > 1$. Alternativ können wir mehrere Induktionsanfänge verwenden.

I. Induktionsanfang (IA): Wir zeigen die Aussage für die ersten vier Werte $n = 12, 13, 14, 15$.

- $n = 12$**:** $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \quad (\text{mit } a = 3, b = 0)$
- $n = 13$**:** $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \quad (\text{mit } a = 2, b = 1)$
- $n = 14$**:** $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \quad (\text{mit } a = 1, b = 2)$
- $n = 15$**:** $15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \quad (\text{mit } a = 0, b = 3)$

$\Rightarrow$ Die Aussage gilt für $n = 12, 13, 14, 15$.

II. Induktionsvoraussetzung (IV): Sei $n \geq 15$ beliebig. Die Aussage sei wahr für alle $k \in \{12, 13, \ldots, n\}$, d.h., jede Zahl k kann als $k = 4a' + 5b'$ mit $a', b' \in \mathbb{N}_0$ dargestellt werden.

III. Induktionsschritt (IS): Wir zeigen die Aussage für $n + 1$. Es muss gezeigt werden, dass $n + 1 = 4a + 5b$ dargestellt werden kann.

Da $n \geq 15$ ist, ist die Zahl $n+1-4 = n-3$ Element der Menge $\{12, 13, \ldots, n\}$. Daher können wir die Induktionsvoraussetzung auf die Zahl $n - 3$ anwenden:

$$n - 3 = 4a' + 5b' \quad \text{für geeignete } a', b' \in \mathbb{N}_0 \quad \text{(nach IV)}$$

Nun addieren wir 4 auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} n + 1 &= (n - 3) + 4 \\ &= (4a' + 5b') + 4 \\ &= 4a' + 4 + 5b' \\ &= 4(a' + 1) + 5b' \end{aligned}$$

Setzen wir $a = a' + 1$ und $b = b'$, so haben wir die Darstellung

$$n + 1 = 4a + 5b$$

Da $a' \geq 0$ ist, ist auch $a = a' + 1 \geq 1$, und da $b' \geq 0$ ist, ist $b \geq 0$. Somit sind $a, b \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow$ Aussage stimmt für $n + 1$.

Schluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$ geeignete $a, b \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $n = 4a + 5b$ gilt.