Aufgabe 1:c

Sind eine Implikation $A \Rightarrow B$ und ihre Prämisse A wahr, so folgt das Konklusion B wahr ist; kann man etwas über den Wahrheitsgehalt der Prämisse A aussagen, wenn Implikation und Konklusion wahr sind?

Logische Schlussfolgerung

Wenn die Implikation $A \Rightarrow B$ und die Konklusion B wahr sind, kann man über den Wahrheitsgehalt der Prämisse A **keine eindeutige Aussage** treffen.

- Die Schlussfolgerung, dass A wahr sein muss, ist der **logische Fehlschluss** der Bejahung des Konsequens (Affirming the Consequent).
- Die Implikation ist wahr, wenn A und B beide wahr sind (W $\Rightarrow$ W), aber auch, wenn A falsch und B wahr ist (F $\Rightarrow$ W).

Analyse der Ungleichungen und Beweise

(i) Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (AGM)
A bezeichne die Aussage $\forall x, y \in \mathbb{R} : x, y > 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

(a) **Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung. Beweisen Sie!**

Die Aussage A ist **wahr**.

Beweis: Wir beweisen die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ durch eine Kette von **Äquivalenzen** ($\iff$) zur trivial wahren Aussage.

Da $x, y > 0$ gelten, sind $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ reelle Zahlen.

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} && \iff \\ x + y &\geq 2\sqrt{xy} && \iff \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\geq 0 && \iff \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Da die letzte Aussage, $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, als Quadrat einer reellen Zahl **stets wahr** ist, und alle Schritte Äquivalenzen sind, ist die Aussage A ebenfalls wahr.

(b) **Analyse des Beweises:** Der im Text gezeigte "Beweisïst **richtig**.

- **Lokalisierung des Fehlers:** Es gibt **keinen Fehler**.

(ii) Ungleichung $x + 1 \leq 2x$ A bezeichne die Aussage $\forall x > 0 : x + 1 \leq 2x$.

(a) **Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung. Woher das $x \geq 1$ sein muss? Unterscheiden Sie nach dem Definitionsbereich.**

Die Aussage A ist **falsch** für den Definitionsbereich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Herleitung der Bedingung $x \geq 1$: Wir formen die Ungleichung $x+1 \leq 2x$ elementar um:

$$x + 1 \leq 2x \quad \iff \quad 1 \leq x$$

Die Ungleichung ist also nur für Werte $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$ erfüllt.

Fallunterscheidung nach dem Definitionsbereich:

- **Fall 1: Reelle Zahlen ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x} > \mathbf{0}$)**
  Die Aussage A ist **falsch**, da sie für alle x im Intervall $(0, 1)$ nicht erfüllt ist.
- **Fall 2: Natürliche Zahlen ($\mathbf{x} \in \mathbb{N}$)**
  Da alle natürlichen Zahlen x die Bedingung $x \geq 1$ erfüllen, ist die Aussage A für den Definitionsbereich der natürlichen Zahlen **wahr**.

(b) **Analyse des Beweises:** Der folgende "Beweisïst **falsch**.

- **Lokalisierung des Fehlers:** Der Fehler liegt in der **Schlussrichtung** (logische Implikation). Der "Beweis"geht von der Behauptung (A) aus und leitet eine wahre Aussage ($B : 0 \leq (x-1)^2$) ab.
- **Fehlertyp:** Die Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ beweist nicht A. Man müsste die Kette als Äquivalenzen ($\iff$) oder in umgekehrter Richtung ($B \Rightarrow A$) führen, um die Behauptung zu beweisen. Da A für $x \in (0, 1)$ falsch ist, kann der Beweis auch durch Umkehrung nur für $x \geq 1$ funktionieren.
- **Modifikation des Beweises:** Der Beweis kann **nicht modifiziert werden, um die Aussage A als universell wahr zu beweisen**, da A für reelle Zahlen $\mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ falsch ist.