Prof. Dirk Praetorius
Paula Hilbert
Institut für Analysis und Scientific Computing
Wintersemester 2025/26

Besprechung in der Übung am 08.10.2025

# Einführung ins Mathematische Arbeiten – Serie 1

*Themen: Tautologien und vollständige Induktion*

---

**Aufgabe 1:**
Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen, dass die de Morgan'schen Regeln

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad \text{und} \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Tautologien sind. Erinnern Sie sich dabei an die in der Vorlesung behandelten Tautologien (siehe Seite 4 im Skriptum).

**Aufgabe 2:**
Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen, dass die Distributivgesetze

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{und} \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Tautologien sind. Beachten Sie, dass Ihre Tabelle jetzt $8 = 2^3$ Zeilen haben muss um alle Kombinationen von Wahrheitswerten von $A$, $B$ und $C$ zu beinhalten. Erinnern Sie sich dabei an die in der Vorlesung behandelten Tautologien (siehe Seite 4 im Skriptum).

**Aufgabe 3:**
Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass der *Modus Barbara*

$$\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

eine Tautologie ist. Erinnern Sie sich dabei an die in der Vorlesung behandelten Tautologien (siehe Seite 4 im Skriptum). In der Vorlesung wurde diese Tautologie zur Beweisführung von Satz 4.3 über die vollständige Induktion verwendet.

**Aufgabe 4:**
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 4.5 aus der Vorlesung vor.

**Aufgabe 5:**
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$4n < 2^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 5 \text{ gilt.}$$

Verwenden Sie dazu eine vollständige Induktion gemäß Korollar 4.6 aus der Vorlesung.

**Aufgabe 6:**
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$ geeignete $a, b \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$n = 4a + 5b \quad \text{gilt.}$$

Wie aus der Schule bekannt, bezeichnet $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen inklusive der Null. Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 4.9 aus der Vorlesung vor.