Moritz Hahn	1	2	3	4	5	Σ

Übungsblatt Nr. 6

(Abgabetermin 23.11.2024)

Aufgabe 1:

(a)

Die Elemente der Menge $X \times Y$ sind:

$$X \times Y = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5),(b,1),(b,2),\dots,(e,5)\}.$$

Insgesamt gibt es $|X| \cdot |Y| = 5 \cdot 5 = 25$ Elemente.

(b)

Die Potenzmenge $P(X \times Y)$ hat $2^{|X \times Y|}$ Elemente. Da $|X \times Y| = 25$, ergibt sich:

$$|P(X \times Y)| = 2^{25}.$$

(c)

- **Funktionen:** Für $f : X \to Y$ gibt es $|Y|^{|X|} = 5^5$ Möglichkeiten:

$$5^5 = 3125.$$

- **Injektionen:** Eine injektive Funktion ist eine Anordnung von $|X| = 5$ Elementen auf $|Y| = 5$ Plätzen:

$$P(5,5) = 5! = 120.$$

- **Surjektionen:** Für surjektive Funktionen verwenden wir die Inklusions-Exklusionsformel:

$$S(5,5) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)^5 = 120.$$

- **Bijektionen:** Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Es gibt:

$$5! = 120 \text{ Bijektionen.}$$

(d)

Solche Bijektionen entsprechen involutorischen Permutationen, die nur aus Zyklen der Länge 1 oder 2 bestehen. Für $|X| = 5$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k! \cdot (n-2k)! \cdot 2^k}.$$

Für $n = 5$ ergibt dies:

$$15 \text{ involutorische Bijektionen.}$$

Aufgabe 2:

Eine Funktion $f : X \to Y$ entspricht der Relation:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Diese Relation hat folgende Eigenschaften:

- Sie ist **linkstotal**, da jedes $x \in X$ einem Wert in Y zugeordnet wird.
- Sie ist **rechtseindeutig**, da jedes $x \in X$ höchstens einem Wert in Y zugeordnet wird.

Injektive Funktionen

Eine Relation ist injektiv, wenn keine zwei Tupel denselben zweiten Wert besitzen.

Surjektive Funktionen

Eine Relation ist surjektiv, wenn jedes $y \in Y$ in mindestens einem Tupel auftritt.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Relation:

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,3), (3,2)\}.$$

(a)

Eine Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv:

- **Reflexivität:** Ergänzen der Paare (x, x) für $x \in \{4, 5\}$:

$$R_1 = \{(4,4), (5,5)\}.$$

- **Symmetrie:** Ergänzen der Paare $(1,2), (3,2), (2,1)$.
- **Transitivität:** Ergänzen der Paare $(2,2), (3,1)$.

Die finale Relation ist:

$$R \cup R_1 = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,2), (3,1), (4,4), (5,5)\}.$$

(b)

Eine Halbordnungsrelation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv:

- **Reflexivität:** Ergänzen der Paare $(4,4), (5,5)$:

$$R_2 = \{(4,4), (5,5)\}.$$

- **Antisymmetrie:** Es sind keine widersprüchlichen Paare vorhanden.
- **Transitivität:** Ergänzen des Paares $(3,1)$.

Die finale Relation ist:

$$R \cup R_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,1), (4,4), (5,5)\}.$$

(c)

- **Transitivität:** Ergänzen der Paare $(3,1),(2,2),(3,3)$.
- **Nicht asymmetrisch:** Ergänzen des Paares $(1,2)$.

Die finale Relation ist:

$$R \cup R_3 = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,3),(3,2),(3,1),(3,3)\}.$$

(d)

- **Nicht reflexiv:** Entfernen des Paares $(1,1)$.
- **Nicht transitiv:** Keine Ergänzung transitiver Paare wie $(2,2)$ oder $(3,1)$.

Die finale Relation ist:

$$R \cup R_4 = \{(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Aufgabe 4:

(a)

- **Symmetrie:** Wenn $(a,b) \in R$, dann auch $(b,a) \in R$.
- **Antisymmetrie:** Wenn $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$, dann gilt $a = b$.

Wegen Antisymmetrie bleibt nur $a = b$. Reflexivität folgt aus $a = b$. Somit gilt für $(a,b),(b,c) \in R$, dass auch $(a,c) \in R$. **Folgerung:** R ist transitiv.

(b)

Zu zeigen: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$. Sei $x \in (R \circ S) \circ T$. Dann existieren y, z mit:

$$(x,y) \in R,\ (y,z) \in S,\ (z,w) \in T.$$

Analog gilt für $R \circ (S \circ T)$. Die Assoziativität folgt aus der Definition des Relationenprodukts.

(c)

Sei $(a,b) \in (R \circ S)^{-1}$. Dann gilt:

$$(b,a) \in R \circ S \Rightarrow \exists c : (b,c) \in R,\ (c,a) \in S.$$

Das bedeutet:

$$(a,c) \in S^{-1},\ (c,b) \in R^{-1}.$$

Somit ist $(a,b) \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

Aufgabe 5:

(a)

$F \cap G$ ist nur dann eine Funktion, wenn $F(x) = G(x)$ für alle $x \in \mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G)$. **Definitionsmenge:** $\{x \in X \mid F(x) = G(x)\}$.

(b)

$F \cup G$ ist nur dann eine Funktion, wenn $F(x) = G(x)$ für alle $x \in \mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G)$.
Definitionsmenge: $\mathrm{Dom}(F) \cup \mathrm{Dom}(G)$.