Moritz Hahn

1	2	3	Σ

Übungsblatt Nr. 5

(Abgabetermin 16.11.2024)

Aufgabe 1:

(a) Drei Mengen A, B, C

Die möglichen Regionen im Venn-Diagramm mit drei Mengen lassen sich wie folgt notieren:

1. Nur in A: $A \setminus (B \cup C)$
2. Nur in B: $B \setminus (A \cup C)$
3. Nur in C: $C \setminus (A \cup B)$
4. In $A \cap B$, aber nicht in C: $(A \cap B) \setminus C$
5. In $A \cap C$, aber nicht in B: $(A \cap C) \setminus B$
6. In $B \cap C$, aber nicht in A: $(B \cap C) \setminus A$
7. In $A \cap B \cap C$: $A \cap B \cap C$
8. Außerhalb aller Mengen: $\overline{A \cup B \cup C}$

(b) Vier Mengen A, B, C, D

Die fehlenden Regionen im Venn-Diagramm mit vier Mengen lauten:

1. Nur in A und D: $(A \cap D) \setminus (B \cup C)$
2. Nur in B und D: $(B \cap D) \setminus (A \cup C)$
3. Nur in C und D: $(C \cap D) \setminus (A \cup B)$
4. In allen vier Mengen: $A \cap B \cap C \cap D$

Aufgabe 2:

(a) $A \cup B = A \cap B$

Behauptung: Falsch.
Gegenbeispiel: Sei $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Dann ist:

$$A \cup B = \{1, 2\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Also gilt $A \cup B \neq A \cap B$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Behauptung: Falsch.
Gegenbeispiel: Sei $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$. Dann:

$$A \cap (B \cup C) = \emptyset, \quad (A \cap B) \cup C = \{3\}.$$

Daher $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

(c) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

Behauptung: Wahr.
Beweis: $A \cup B = A \cap B$ bedeutet:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \cap B.$$

Das impliziert $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, also $A = B$.

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Behauptung: Wahr.
Beweis: Zeige Äquivalenz der beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \text{Links: } & x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C), \\ \text{Rechts: } & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C). \end{aligned}$$

Beide Aussagen sind identisch.

(e) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

Behauptung: Wahr.
Beweis: Durch Anwendung des Distributivgesetzes zeigt sich, dass beide Seiten äquivalent sind.

(f) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) \iff A \subseteq B \vee B \subseteq A \vee A \cap B = \emptyset$

Behauptung: Wahr.
Beweis: Die Potenzmengen $P(A) \cap P(B)$ und $P(A \cap B)$ stimmen nur überein, wenn eine der genannten Bedingungen erfüllt ist.

Aufgabe 3:

Zeige, dass die Aussagen äquivalent sind:

1. $M \subseteq N$,
2. $M \cup N = N$,
3. $M \cap N = M$.

Beweis:

- $M \subseteq N \Rightarrow M \cup N = N$:
  Elemente von M sind in N, also ergänzt M nichts.

- $M \cup N = N \Rightarrow M \cap N = M$:
  Elemente von M sind in N, daher ist $M \cap N = M$.
- $M \cap N = M \Rightarrow M \subseteq N$:
  Jedes Element von M liegt in N, also $M \subseteq N$.