Moritz Hahn	1	2	3	4	5	Σ

Übungsblatt Nr. 4

(Abgabetermin 09.11.2024)

Aufgabe 1

(a)

Lösung: Die Summe der ersten n geraden Zahlen $2, 4, 6, \dots, 2n$ kann als das Doppelte der Summe der ersten n natürlichen Zahlen geschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i.$$

Nach der Gaußschen Summenformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Einsetzen ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n.$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

(b)

Lösung: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$. Es lässt sich durch direktes Aufschreiben und Summieren der Werte feststellen, dass:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2.$$

Dies kann durch die Beobachtung bestätigt werden, dass jede zusätzliche ungerade Zahl eine vollständige Quadratzahl bildet. Alternativ kann man auch durch Induktion zeigen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

Aufgabe 2

(a)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Induktionsschritt: Zeigen, dass die Aussage für $n+1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Erweitern der Summe ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2.$$

Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2.$$

Nun bringen wir die Terme auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3),$$

was die Behauptung beweist.

(b)

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Induktionsschritt: Zeigen, dass dann auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Durch Hinzufügen des nächsten Terms ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Durch Umformen und Zusammenfassen der Terme erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist.

(d)

Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr:

$$(1+x)^1 = 1 + x.$$

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt für ein n, also $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Induktionsschritt: Zeige die Aussage für $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x).$$

Durch Ausmultiplizieren und Anwendung der Induktionsvoraussetzung zeigt sich, dass $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

(e)

Induktionsanfang: Für $n = 1$ prüfen wir die Aussage:

$$(1+x)^1 = 1 + x.$$

Da $1 + x = 1 + (2 \cdot 1 - 1) \cdot x$, ist die Aussage für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$(1+x)^n \leq 1 + (2n-1) \cdot x.$$

Induktionsschritt: Zeigen, dass die Aussage dann auch für $n+1$ gilt, also:

$$(1+x)^{n+1} \leq 1 + (2(n+1) - 1) \cdot x = 1 + (2n+1) \cdot x.$$

Wir schreiben $(1+x)^{n+1}$ als

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x).$$

Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert:

$$(1+x)^{n+1} \leq (1 + (2n-1) \cdot x) \cdot (1+x).$$

Nun multiplizieren wir die rechte Seite aus:

$$(1 + (2n-1) \cdot x) \cdot (1+x) = 1 + x + (2n-1) \cdot x + (2n-1) \cdot x^2.$$

Da $x \in [0,1]$, folgt $x^2 \leq x$. Damit können wir abschätzen:

$$1 + x + (2n-1) \cdot x + (2n-1) \cdot x^2 \leq 1 + x + (2n-1) \cdot x + (2n-1) \cdot x = 1 + (2n+1) \cdot x.$$

Damit ist die Aussage auch für $n+1$ wahr, und der Beweis ist abgeschlossen.

Aufgabe 3

Beachten wir, dass sich $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ schreiben lässt. Daher ergibt sich:

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}.$$

Durch Ausmultiplizieren des Produkts erkennen wir, dass viele Terme im Zähler und Nenner wegfallen (Teleskopprodukt):

$$f(n) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n + 1.$$

Somit erhalten wir die explizite Formel:

$$f(n) = n + 1.$$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergibt sich:

$$f(1) = 1 + 1 = 2,$$

was mit der Formel $f(n) = n + 1$ übereinstimmt.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Formel gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, also $f(n) = n + 1$.

Induktionsschritt: Zeigen, dass dann auch $f(n+1) = (n+1) + 1 = n + 2$ gilt.

$$f(n+1) = f(n) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $f(n) = n + 1$, sodass

$$f(n+1) = (n+1) \cdot \frac{n+2}{n+1} = n + 2.$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 4

(a)

- Für $n = 1$ ergibt sich eine Gerade, die die Ebene in 2 Gebiete teilt, also $e_1 = 2$.
- Für $n = 2$ schneiden zwei Geraden die Ebene in 4 Gebiete, also $e_2 = 4$.
- Für $n = 3$ teilen drei Geraden die Ebene in 7 Gebiete, also $e_3 = 7$.
- Für $n = 4$ teilen vier Geraden die Ebene in 11 Gebiete, also $e_4 = 11$.

(b) Rekursive Berechnungsvorschrift für e_{n+1}

Betrachten wir den Übergang von n zu $n+1$ Geraden. Die $n+1$-te Gerade schneidet jede der n bestehenden Geraden genau einmal und fügt somit $n+1$ neue Gebiete hinzu. Daher gilt:

$$e_{n+1} = e_n + (n + 1).$$

(c) Beweis der expliziten Formel

Wir sollen zeigen, dass

$$e_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$e_1 = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 2,$$

was stimmt.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Formel gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, also

$$e_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1.$$

Induktionsschritt: Zeigen, dass dann auch $e_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) + 1$ gilt. Nach der rekursiven Beziehung aus Teil (b) gilt:

$$e_{n+1} = e_n + (n+1).$$

Durch Einsetzen der Induktionsvoraussetzung ergibt sich:

$$e_{n+1} = \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1\right) + (n+1).$$

Durch Vereinfachung erhalten wir:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 + n + 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2.$$

Nun schreiben wir $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2$ um:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) + 1,$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 5: Fehlerhafter Beweis für Schnittpunkt aller Geraden

Der Fehler liegt darin, dass bei $m + 1$ Geraden nicht garantiert ist, dass sich alle in einem gemeinsamen Punkt schneiden, da allgemeine Lage paarweise nicht-parallele Geraden nicht notwendigerweise einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.