Week 4 摘要

(1) 首先延续了上周的内容，介绍了群同态的若干基本性质，这些基本性质将会经常用到，并进一步给出了两个例子.

(2) 引入了 Cayley 定理. Cayley 定理揭示了每个群 G 都有一个固有的到其置换群 $Sym(G)$ 上的同态. 这是一个重要的同态，因为置换群是群论中一类非常重要的群，后续我们也将对其进行较为详细的研究.（从历史的角度来看，置换群也可以说是群论研究的起点）

(3) 在 Week 3 中，我们对一般的子群定义了商集的概念，并且提到过，如果这里的子群是所谓"正规子群"，则商集构成群，称为商群. 本周，我们正式引入了正规子群的概念，介绍了两个基础性的结论（同态的核是原像群的正规子群；正规子群上定义的等价关系 ~（特指）与群运算相容）.

(4) 最后，我们给出了商群的两种定义，其中后者是更加常见的. 我们建议读者仔细体会两种定义在数学思想上的等价性. 我们将着重于后一种定义中对群性质的证明而略去前者.

正规子群的定义在此时可能显得很抽象. 在之后，我们将看到它的一个非常良好的性质，即左右陪集可交换. 我们将会看到这种可交换性直接保证了商群的群性质（事实上，以左右陪集可交换 $(aH=Ha)$ 来定义正规子群的做法也是常见的.

同态、同构；Cayley Thm.；正规子群.

Def. 对 $(G;\circ)$, $(H;*)$, $f: G\to H$. 称 f 是 $(G;\circ)$ 到 $(H;*)$ 的同态，

若 $\forall a,b\in G$，有 $f(a\circ b)=f(a)*f(b)$.

特别地，若 f 为双射，则称 f 为同构.

群同态的若干基本性质

设 $(G;\circ)$, $(H;*)$ 为群，幺元分别为 e_G, e_H. f 为 $(G;\circ)$ 到 $(H;*)$ 的同态. 则有：

(1) $f(e_G)=e_H$

(2) $\forall a\in G$, $f(a^{-1})=(f(a))_H^{-1}$

(3) $\forall a\in G$, $m\in\mathbb{Z}$，有 $f(a^m)=f(a)^m$

Pf. (1) $f(e_G)=f(e_G\cdot e_G)=f(e_G)\cdot f(e_G)$

由消去律，知 $f(e_G)=e_H$（群 H 中的消去律）.

(2) $\forall a\in G$，有 $f(a)\cdot f(a^{-1})=f(a\cdot a^{-1})=f(e_G)=e_H$

$\Rightarrow f(a^{-1})=f(a)^{-1}$（群 H 中的消去律）

(3) 对正整数 m，结论由归纳法是显然的.

对负整数 $-m$，有 $f(a^{-m})=f((a^m)^{-1})$
$=f(a^m)^{-1}$
$=f(a)^{-m}$

线性代数中同态的若干例子.

(1) $M_{n\times n}(\mathbb{R};\cdot)\longrightarrow\mathbb{R}$ 矩阵乘法.

$A\longrightarrow \det(A)$.

熟知 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

故行列式是一种同态.

$\det(A)\neq 0\Leftrightarrow A$ 可逆，即 $\exists B$ 使 $AB=BA=I_n$

可逆矩阵对乘法构成群，非零实数对乘法构成群.

因此 det 是上述两个群中的群同态.

(2) $GL_n(\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 上的 n 阶可逆矩阵.

考虑映射 $f: GL_n(\mathbb{R})\to GL_{n+1}(\mathbb{R})$

$$f(A):=\begin{pmatrix} A & O\\ O & \det(A)^{-1}\end{pmatrix}$$

$\det(f(A))=\det(A)\cdot\det(A)^{-1}=1$.（分块矩阵的行列式）

可以验证 f 保持矩阵乘法，这也是一种群同态.

Cayley Thm.

背景：对集合 X，$M(X):=\{f\mid f: X\to X\}$. 则 $(M(X);\circ)$ 为半群 映射的复合

$Sym(X):=\{f: X\to X\mid f 双射\}$. 则 $(Sym(X);\circ)$ 构成群.

给定群 $(G;*)$，$a\in G$ 给出一个 $G\to G$ 映射 L_a. $\forall b\in G$, $L_a(b):=a*b$

Cayley 定理：设 $(G;*)$ 为半群. 定义映射 $f: G\to M(G)$，$\forall a\in G$, $f(a):=L_a$，则有：

(1) $\forall u,v\in G$，有 $L_{uv}=L_u\circ L_v$. 即 f 是 $(G;*)$ 到 $(M(G);\circ)$ 的同态

(2) 设 $(G;*)$ 有幺元 e_G. 则 $f(e_G)=L_{e_G}=id_G$（G 到 G 的恒等映射）

且 f 为单射.

(3) 设 $(G;*)$ 为群. 则 $\forall a\in G$，L_a 为双射. f 是 $(G;*)$ 到 $(Sym(G);\circ)$ 的群同态

Pf: (1) 对 $u,v\in G$. $\forall b\in G$，有 $L_{u*v}(b)=(u*v)*b$.

$(L_u\circ L_v)(b)=L_u(L_v(b))=L_u(v*b)=u*(v*b)=(u*v)*b$.

故 $L_{u*v}=L_u\circ L_v$

(2) $\forall b\in G$，有 $L_{e_G}(b)=e_G\cdot b=b\Rightarrow L_{e_G}=id(G)$

单射：设有 $u,v\in G$, $f(u)=f(v)$，即 $L_u=L_v$

特别地，$L_u(e_G)=L_v(e_G)$，即 $u\cdot e_G=v\cdot e_G$，即 $u=v$

故 f 为单射.

(3) $\forall a\in G$. 先证 L_a 为双射.

1) L_a 为单射：设 $u,v\in G$, $L_a(u)=L_a(v)$. 即 $au=av$

由群 G 中的消去律有 $u=v$.

L_a 为满射. $\forall b\in G$，有 $L_a(a^{-1}b)=a*a^{-1}b=b$.

Cayley Thm. 的作用之一在于将任意的群同态到我们较为熟悉的（映射集；复合）群.

正规子群.

设 $(G;*)$ 为群，H 为其子群. 若 $\forall g\in G$, $\forall a\in H$，有 $gag^{-1}\in H$.

则称 H 为 G 的正规子群. 记作 $H\lhd G$.

我们不研究 Abel 群的正规子群. 因为全都是. 平凡子群总是正规子群.

称正规子群仅有平凡子群的群为单群.

例子. $SL_n(\mathbb{R}):=\{A\mid A\in GL_n(\mathbb{R}), \det(A)=1\}$

则 $SL_n(\mathbb{R})\lhd GL_n(\mathbb{R})$

同态的核总是正规子群.

对群 $(G;*)$, $(H;\circ)$. $f: G\to H$ 为同态.

记 $Ker(f):=\{g\in G\mid f(g)=e_H\}$. 则 $Ker(f)\lhd G$.

pf: 设 $a,b\in Ker(f)$，有 $f(a)=f(b)=e_H$

$f(ab)=f(a)f(b)=e_H\cdot e_H=e_H\Rightarrow ab\in Ker(f)$.（封闭性）

$f(a^{-1})=f(a)^{-1}=e_H^{-1}=e_H\Rightarrow a^{-1}\in Ker(f)$, $\Rightarrow Ker(f)\leq G$

设 $g\in G$, $a\in Ker(f)$. 有 $f(gag^{-1})=f(g)f(a)f(g^{-1})$
$=f(g)\cdot e_H\cdot f(g)^{-1}=f(g)f(g)^{-1}=e_H$

即 $gag^{-1}\in Ker(f)\Rightarrow Ker(f)\lhd G$

$gag^{-1}\to$ a 关于 g 的共轭元（联系线代中的相似矩阵）

正规子群的一个性质.

设 $H\lhd G$. 定义 G 上的关系 ~：$a\sim b \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists h\in H$, s.t. $b=ah$

$\Longleftrightarrow a^{-1}b\in H$.

我们证明过 ~ 是一种等价关系.

回忆我们引入 ~ 时是仿照"同余"关系引入的. 我们知道同余关系与加法、乘法相容 $(a\equiv b, c\equiv d\Rightarrow a+c\equiv b+d)$. 那么对于一般的 ~ 呢？

Fact

1) 若 $a,c,d\in G$，$c\sim d$，则 $ac\sim ad$（上述性质的弱化版）

$c\sim d\Rightarrow\exists h\in H$, $d=ch$，则 $ad=a(ch)=(ac)h\Rightarrow ac\sim ad$.

稍作修改：若 $c\sim d$，是否有 $ca\sim da$

$(d=ch\Rightarrow da=cha$，大概不成立)

2) $H\lhd G\Longleftrightarrow\forall a,b,c,d\in G$，若 $a\sim b$, $c\sim d$，则 $ac\sim bd$.

（正规子群 $\longleftrightarrow$ 子群诱导的等价关系与运算的相容性）.

pf: $\Rightarrow$: $a\sim b\Leftrightarrow\exists u\in H$, $b=au$. $c\sim d\Leftrightarrow\exists v\in H$, $d=cv$.

则有 $bd=(au)(cv)=a(cc^{-1})ucv=(ac)(c^{-1}uc)v$

由 $H\lhd G$，$u,v\in H$，可知 $c^{-1}uc\in H$，则 $(c^{-1}uc)v\in H$. 即 $(ac)^{-1}(bd)\in H$. 故 $ac\sim bd$.

$\Leftarrow$: 设 $g\in G$, $a\in H$. 即 $a\sim e_G$（因为 $a\in e_GH$）. 于是 $ge_G\sim g\cdot a$. $\Rightarrow g\cdot g^{-1}\sim gag^{-1}$. 即 $gag^{-1}\sim e_G$

即 $gag^{-1}\in H$.

3) $H\lhd G\Longleftrightarrow\forall g\in G$, $\forall a\in H$. $g^{-1}ag\in H$.

pf: $H\lhd G\Rightarrow\forall g\in G$, $\forall a\in H$. $g^{-1}a(g^{-1})^{-1}\in H$. 即 $g^{-1}ag\in H$.

任取 $g\in G$, $a\in H$. 对 $g^{-1}\in G$, $a\in H$，有 $(g^{-1})^{-1}ag^{-1}\in H$. 即 $gag^{-1}\in H$.

故 $H\lhd G$.

正规子群的上述性质允许我们从它出发去构造商群.

首先看一个经典的例子 —— 同余.

将 $(\mathbb{Z};+)$ 上的等价关系"模 n 同余"得到的 A 的划分的各个块作为元素，并以代表元之间的加法定义新集合上的加法，我们得到了一个新的群 $(\mathbb{Z}_n;\oplus_n)$

（课上以集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 与其上的模 n 加法去阐释模 n 同余关系诱导的商群，这实质上就是选取了一组特殊的代表元去定义了划分集合上的加法）.

一般的定义：

给定群 G 及其上的正规子群 H. G 上的二元关系 ~ 定义同上文.

容易构造 $T\subseteq G$，使得：

(1) $\forall a,b\in T$, $a\sim b\Leftrightarrow a=b$

(2) $\forall g\in G$, $\exists a\in T$ s.t. $g\sim a$

在 T 上定义二元运算 $(T;\odot)$

$\forall a,b\in T$. 由 T 的定义知 $\exists$ 唯一的 $c\in T$ 使 $ab\sim c$.

定义 $a\odot b:=c$.

容易验证 $(T;\odot)$ 为群. 我们略去.

关于如何理解上述商群的定义

我们已经知道，给定群 $(G;\cdot)$ 的正规子群 H，H 可以诱导出 G 上的一个等价关系 ~（定义为 $a\sim b\Longleftrightarrow a^{-1}b\in H$）

我们也熟知，每一种等价关系都给出一个集合上的划分（特别地，在群中，元素 a 所属的等价类（即它被分到的块）即 aH）

从正规子群 H 的视角来看，每一个等价类（即陪集 aH）内部的元素都是"没有差别的"，研究的意义并不大，我们现在不关心这些无差别的元素，转而关心那些"不一样"的元素之间的关系（即不同的等价类之间的关系）. 当然，此处的"关系"指的是 G 上定义的运算.

在上文给出的商群的第一种定义中，我们做的就是从每个等价类中选取一个元素（得到集合 T）. 为什么只需要一个元素？如上文所述，因为我们不关心一个等价类的内部具体有什么元素，而仅仅关心等价类之间的关系. 至于对 T 上的运算 $\odot$ 的定义，它也不是任何新奇的东西，而仅仅是告诉我们：除了我们刚刚选取的那些元素，每个等价类内部的其他所有元素，它们的运算都被归结为我们选取的代表元的运算. 基于此，我们抹平了等价类内部元素的行为差异.

而在下文给出的基于陪集的商集定义中，我们刻画上面提到的等价性的手段则是直接将等价类（即陪集）作为研究对象去构成新的群.

定义映射 $f: G\to T$. 由 T 的定义，$\forall g\in G$, $\exists! a\in T$ 使 $g\sim a$. 令 $f(g):=a$.

我们有：f 是 G 到 T 的同态；$Ker(f)=H$

Pf: 设 $u,v\in G$，欲证 $f(u\cdot v)=f(u)\odot f(v)$.

由 f 的定义，$f(uv)\sim uv$, $f(u)\sim u$, $f(v)\sim v$

由正规子群的性质，$f(u)\odot f(v)\sim u\cdot v$

故有 $f(u\cdot v)=f(u)\odot f(v)$

$g\in Ker(f)\Leftrightarrow f(g)=e_T=:w$

$\Leftrightarrow g\sim w$ （f 的定义）

$\Leftrightarrow g\sim e_G$ （$w\sim e_G$）

$\Leftrightarrow g\in H$.

如上面绿字所述，我们用另一种方式定义商群.

$(G;\cdot)$ 群. $H\lhd G$. $AB:=\{ab\mid a\in A, b\in B\}$

$f: G\to G/H:=\{aH\mid a\in G\}$. $\forall a\in G$, $f(a):=aH$. $(G/H;\cdot)$ 构成群

且有幺元：H. 逆元：$aH\to a^{-1}H$

f 为 $G\to G/H$ 的同态，$Ker(f)=H$

上述定理的证明在 Week 5 笔记中给出.