

2장 분할정복

주요 내용

1편

- 1절 이분검색
- 2절 합병정렬
- 3절 분할정복 설계방법

2편

- 4절 빠른정렬(분할교환정렬)
- 5절 쉬트라센의 행렬곱셈 알고리즘
- 8절 분할정복법을 사용할 수 없는 경우

1절 이분검색

- 분할정복은 재귀 알고리즘으로 쉽게 구현 가능

재귀 예제: 이분검색

- 문제: 항목이 비내림차순(오름차순)으로 정렬된 리스트 S 에 x 가 항목으로 포함되어 있는가?
- 입력 파라미터: 리스트 S 와 값 x
- 리턴값:
 - x 가 S 의 항목일 경우: x 의 위치 인덱스
 - 항목이 아닐 경우 -1.

복습: while 반복문을 활용한 이분검색

```
In [1]: # 이분검색 알고리즘

def binsearch(S, x):
    low, high = 0, len(S)-1
    location = -1

    # while 반복문 실행횟수 확인용
    loop_count = 0

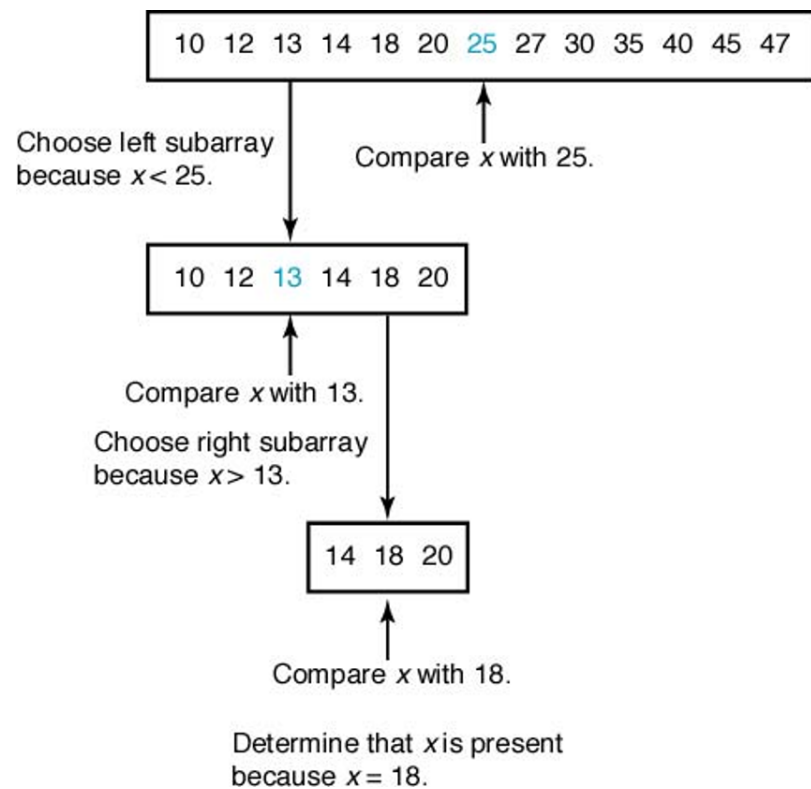
    while low <= high and location == -1:
        loop_count += 1
        mid = (low + high)//2

        if x == S[mid]:
            location = mid
        elif x < S[mid]:
            high = mid - 1
        else:
            low = mid + 1

    return (location, loop_count)
```


설계 전략

1. x 가 배열의 중앙에 위치하고 있는 항목과 같으면 해당 항목 인덱스 리턴.
2. 그렇지 않으면 아래 실행
 - 분할: 배열을 중앙에 위치한 항목을 기준으로 반으로 분할
 - x 가 중앙에 위치한 항목보다 작으면 왼쪽 배열 반쪽 선택
 - 그렇지 않으면 오른쪽 배열 반쪽을 선택
 - 정복: 선택된 반쪽 배열을 대상으로 1번 단계부터 다시 시작
3. 취합: 불필요!



재귀 이해

- "정복: 선택된 반쪽 배열을 대상으로 1번 단계부터 다시 시작"이라는 표현이 **재귀**를 의미함.
- 분할정복으로 재귀 알고리즘을 개발할 때 아래 사항을 고려해야 함.
 - 분할한 작은 입력사례의 답으로부터 전체 입력사례에 대한 답을 구하는 방법 고안
 - 더 이상 분할이 불가능한 입력사례에 대한 판단할 종료조건 정하기
 - 종료조건을 만족하는 경우 답을 구하는 방법 정하기

파이썬 구현: 이분검색 재귀

In [2]: *# 이분검색 재귀*

```
def location(S,x, low, high):  
    if low > high:  
        return -1  
  
    mid = (low + high)//2  
    if x == S[mid]:  
        return mid  
    elif x < S[mid]:  
        return location(S, x, low, mid-1)  
    else:  
        return location(S, x, low+1, high)
```

In [3]: `sec = [10, 12, 13, 14, 18, 20, 25, 27, 30, 35, 40, 45, 47]`
`x = 18`

`print(location(sec, x, 0, len(sec)-1))`

주의사항

- 책 설명과는 달리 `location` 함수의 인자로 `s`와 `x`를 추가하였음.
- 이유: `location` 함수를 임의의 리스트와 임의의 값에 대해 사용하기 위해서.
- 책에서 `s`와 `x`를 인자로 사용하지 않은 이유:
 - `location` 함수를 재귀로 호출할 때마다 `s`와 `x`의 값이 매번 새롭게 할당되어 메모리가 많이 사용됨.
- 하지만 파이썬의 경우 기존의 리스트를 가리키는 변수를 재활용 함.

- 참조: [PythonTutor: 이분검색 재귀](http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20mid%20%3D%20%28low%2Bhigh%29%2F2%2A%20else%3A%20%20%20%20return%20mid%29%29&cumulative=false&curInstr=0&heapPrimitives=nevernest&mode=display) (<http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20mid%20%3D%20%28low%2Bhigh%29%2F2%2A%20else%3A%20%20%20%20return%20mid%29%29&cumulative=false&curInstr=0&heapPrimitives=nevernest&mode=display>)

최악 시간복잡도 분석: 이분검색 재귀

- 입력크기: 리스트 길이
- 단위연산: x 와 $S[mid]$ 비교

$n = 2^k$ 인 경우

- 아래 점화식 성립

$$W(n) = W\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

$$W(1) = 1$$

- 위 점화식에 대한 해답:

$$W(n) = \lg n + 1$$

- 점화식 해답 설명

$$W(1) = 1$$

$$W(2) = W(1) + 1 = 2$$

$$W(2^2) = W(2) + 1 = 3$$

$$W(2^3) = W(2^2) + 1 = 4$$

...

$$W(2^k) = W(2^{k-1}) + 1 = k + 1 = \lg(2^k) + 1$$

일반적인 경우

- 아래 최악 시간복잡도 성립

$$W(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \in \Theta(\lg n)$$

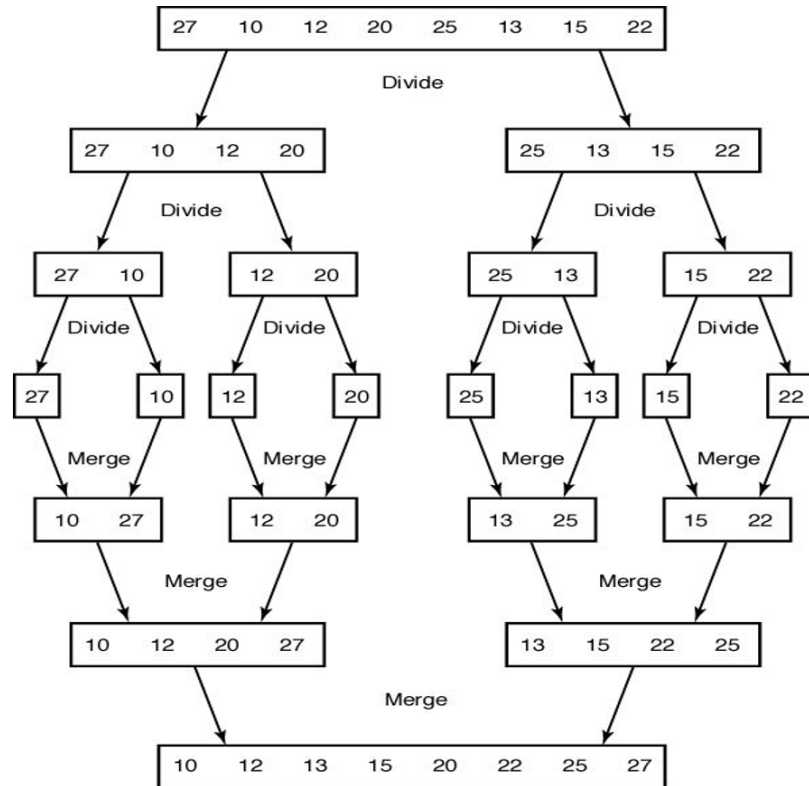
- 증명: 생략

2절 합병정렬

- 문제: 리스트의 항목을 비내림차순(오름차순)으로 정렬하기
- 입력 파라미터: 리스트 S
- 리턴값: S 의 모든 항목을 크기순으로 포함한 리스트

설계 전략

1. 분할: 배열을 반으로 분할
2. 정복: 분할된 왼쪽/오른쪽 배열을 대상으로 다음 실행
 - 배열의 크기가 2 이상이면 1번 분할 단계로 이동
 - 두 배열의 크기가 1이면 3번 통합 단계로 이동
3. 통합: 정렬된 두 배열을 합병하려 정렬 후 아직 정복되지 않은 배열이 남아 있는 경우 2번 정복 단계로 이동



파이썬 구현: 합병정렬 재귀

정렬된 두 리스트를 정렬된 리스트로 합병하기

- 입력값: 정렬된 두 리스트
- 리턴값: 두 리스트의 항목을 비내림차순으로 정렬한 리스트

예제: 작동법 설명

비교횟수	left	right	합병결과
1	10 12 20 27	13 15 22 25	10
2	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12
3	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13
4	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15
5	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20
6	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20 22
7	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20 22 25
	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20 22 25 27

In [4]: *# 정렬된 두 리스트를 정렬된 리스트로 합병하기*

```
def merge(lList, rList):
    mergedList = []

    while len(lList)>0 and len(rList)>0:
        if lList[0] < rList[0]:
            mergedList.append(lList.pop(0))
        else:
            mergedList.append(rList.pop(0))

    mergedList.extend(lList)
    mergedList.extend(rList)

    return mergedList
```

```
In [5]: a = [10, 12, 20, 27]
        b = [13, 15, 22, 25]
        merge(a, b)
```

```
Out[5]: [10, 12, 13, 15, 20, 22, 25, 27]
```

In [6]: # 합병정렬 재귀

```
def mergesort(aList):  
    if len(aList) <= 1:  
        return aList  
  
    mid = len(aList) // 2  
  
    lList = mergesort(aList[:mid])  
    rList = mergesort(aList[mid:])  
  
    return merge(lList, rList)
```

In [7]: aList = [27, 10, 12, 20, 25, 13, 15, 22]

```
print(mergesort(aList))
```

```
[10, 12, 13, 15, 20, 22, 25, 27]
```

- 참조: [PythonTutor: 합병정렬 재귀](http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20%EC%A0%95%EB%A0%AC%[frontend.js&py=3&rawInputLstJSON=%5B%5D&textReferences=false))

최악 시간복잡도 분석: 합병(merge) 알고리즘

- 입력크기: 리스트 길이
- 단위연산: 비교연산

최악의 경우 예제:

- 오른쪽 리스트의 마지막 원소를 제외한 나머지를 먼저 옮긴다.
- 왼쪽 리스트의 모든 원소를 옮긴다.
- 오른쪽 마지막 리스트를 옮긴다.

```
In [8]: def merge_count(lList, rList):
        mergedList = []
        count = 0

        while len(lList)>0 and len(rList)>0:
            count += 1
            if lList[0] < rList[0]:
                mergedList.append(lList.pop(0))
            else:
                mergedList.append(rList.pop(0))

        mergedList.extend(lList)
        mergedList.extend(rList)

        print(f"count: {count}")

        return mergedList
```

```
In [9]: a1 = [18, 20, 23, 26]
        b1 = [13, 15, 17, 27]
        merge_count(a1, b1)
```

```
count: 7
```

```
Out[9]: [13, 15, 17, 18, 20, 23, 26, 27]
```

최선의 경우 예제:

- 왼쪽 리스트 모든 항목이 오른쪽 리스트의 항목보다 작은 경우

```
In [10]: a = [10, 12, 16, 18]
         b = [19, 20, 22, 27]
         merge_count(a, b)
```

```
count: 4
```

```
Out[10]: [10, 12, 16, 18, 19, 20, 22, 27]
```

최악 시간복잡도 분석: 합병정렬(mergesort) 알고리즘

- 입력크기: 리스트 길이
- 단위연산: merge 함수에서 발생하는 비교연산

$n = 2^k$ 인 경우

- 아래 점화식 성립: $n > 1$

$$\begin{aligned} W(n) &= W\left(\frac{n}{2}\right) + W\left(\frac{n}{2}\right) + (n-1) \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot W\left(\frac{n}{2}\right) + (n-1)$$

$$\end{aligned}$$

- 종료 조건: $W(1)$
 $= 0$

- 위 점화식에 대한 해답:

$$W(n) = n \lg n - (n - 1) \in \Theta(n \lg n)$$

- 증명: 생략

일반적인 경우

- 아래 점화식 성립:

$$W(n) = W\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + W\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + (n - 1)$$

- 따라서 다음 최악 시간복잡도 성립

$$W(n) \in \Theta(n \lg n)$$

- 증명: 생략

제자리 합병정렬

- 앞서 살펴본 `mergesort()` 함수는 호출될 때마다 매번 `aList` 인자에 대한 메모리를 새롭게 사용.

- 이유: 파이썬 리스트의 슬라이싱을 사용하기 때문

```
lList = mergesort(aList[:mid])  
rList = mergesort(aList[mid:])
```

- 재귀 함수를 호출할 때 추가 메모리를 사용하지 않는 방법
 - `low`와 `high`를 추가 인자로 사용하여 주어진 리스트에서 살펴볼 구간을 가리키도록 함.
- 이런 합병정렬 알고리즘을 **제자리** 합병정렬이라 부름.

```
In [11]: # 제자리 합병정렬 재귀

def mergesort2(aList, low, high):
    if (low < high):

        mid = (low + high) // 2

        lList = mergesort2(aList, low, mid)
        rList = mergesort2(aList, mid+1, high)

        return merge(lList, rList)
    return aList[low:low+1]
```

```
In [12]: aList = [27, 10, 12, 20, 25, 13, 15, 22]

print(mergesort2(aList, 0, 7))

[10, 12, 13, 15, 20, 22, 25, 27]
```

- 참조: [PythonTutor: 제자리 합병정렬 재귀](http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20%EC%A0%95%EB%A0%AC%front-end.js&py=3&rawInputLstJSON=%5B%5D&textReferences=false)

3절 분할정복 전략

- 분할(Divide)
 - 해결하기 쉽도록 문제를 여러 개의 작은 부분으로 나눈다.
- 정복(Conquer: 해결)
 - 나눈 작은 문제를 각각 해결한다.
- (필요한 경우) 취합
 - 해결된 해답을 모은다.