4장 탐욕 알고리즘

주요 내용

- 1절 최소비용 신장트리: 프림 알고리즘
- 2절 단일출발점 최단경로: 다익스트라 알고리즘
- 5절 탐욕 알고리즘과 동적계획법 알고리즘 비교: 0-1 배낭채우기 문제

탐욕 알고리즘이란?

- 선택 순간의 최적(locally optimal) 대상을 선택하는 기법
- 동적계획법과 마찬가지로 최적화 문제를 풀기 위해 주로 사용됨.
- 입력사례를 분할하지 않음.

예제: 거스름돈 문제

- 문제: 거스름돈 360원 돌려주기

- 조건: 사용하는 동전 개수 최소화하기

- 동전 종류
    - 500원
    - 250원
    - 100원
    - 50원
    - 10원

해결책: 탐욕 알고리즘 활용

- 가장 큰 액수의 동전부터 최대한 많이 사용하기 시도

```
500원: 0개
250원: 1개
100원: 1개
50원: 0개
10원: 1개
```

- 항상 동전의 개수가 최소가 되도록 거스름돈을 돌려줄 수 있음.
    - 증명 생략

탐욕 알고리즘의 한계

- 탐욕 알고리즘이 항상 최적의 해답을 제시하지는 못함.
- 따라서 탐욕적 알고리즘을 적용하여 얻은 결과가 최적의 해답인지 여부를 따로 검증해야 함.

반례

- 160원을 거슬러주어야 하는데 동전 종류가 다음과 같은 경우
  - 120원
  - 100원
  - 50원
  - 10원

- 탐욕 알고리즘 해법: 5개 동전 필요

```
120원: 1개
100원: 0개
 50원: 0개
 10원: 4개
```

- 최적 해법: 3개 동전 필요

```
120원: 0개
100원: 1개
 50원: 1개
 10원: 1개
```

탐욕 알고리즘 기본 아이디어

- 공집합에서 출발하여 해당 집합에 원소를 아래 과정을 거쳐 문제의 해답을 얻을 때까지 추가

1) 선택과정: 지정된 기준에 따라 집합에 추가할 최적의 원소 선택.

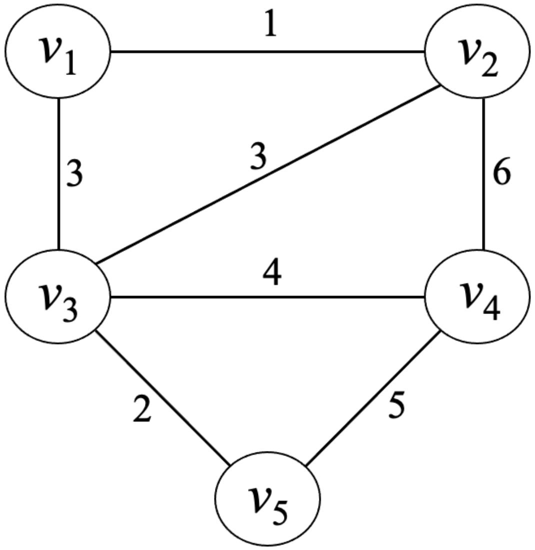
2) 적절성 검사: 선택된 원소가 추가된 새로운 집합의 적절성 판단

3) 해답점검: 새로운 집합이 문제의 해답인지 여부 판단.

- 해답이면 종료.
- 그렇지 않으면 선택과정부터 다시 반복

1절 최소비용 신장트리

가중치포함, 비방향 그래프



- 가중치: 음이 아닌 수.
- 이음선(edge, 변): 방향 없음.
  - 두 마디 사이에 단순히 "이음선이 있다"라고만 말함.

경로

- 경로(path): 연결된 이음선으로 이루어진 마디의 나열
    - 마디 u에서 마디 v로 가는 경로가 존재하면, v에서 u로 가는 경로도 존재. (이음선에 방향성이 없기 때문)

- 두 마디의 연결성 = 두 마디 사이에 경로의 존재 여부

- **연결된 그래프**: 모든 마디 사이에 경로가 존재하는 그래프

단순순환경로(simple cycle)와 트리

- 어떤 마디에서 출발하여 다시 돌아오는 경로에 서로 다른 3개의 마디가 있고, 경로상의 모든 마디가 서로 다른 경로

- 비순환적 비방향그래프: 단순순환경로를 전혀 포함하지 않는 그래프

- **트리**: 연결된 비순환적 비방향그래프
  - 뿌리있는 트리(rooted tree): 특정 마디를 뿌리(root)지정한 트리(여기서는 사용하지 않음)

- 최소비용으로 연결된 부분그래프는 단순순환경로를 포함하지 않음. 즉, 트리이어야 함.

신장트리(spanning tree)

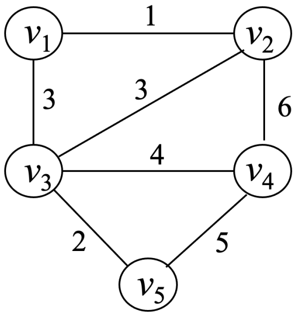
- 가정: 연결되고 가중치가 있는 비방향그래프 G가 주어졌음.
- G의 신장트리: G의 마디는 그대로 두면서 이음선의 일부를 제거하여 만들어진 트리
- G의 최소비용 신장트리: 트리에 포함된 이음선의 가중치들의 합이 최소인 G의 신장트리

신장트리의 특징

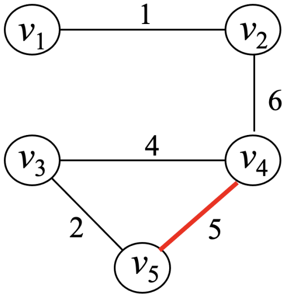
- 모든 신장트리가 최소비용 신장트리는 아님.
- 여러 개의 최소비용 신장트리 존재 가능.

예제

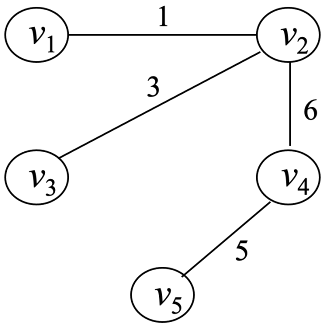
(a) 연결되고, 가중치가 있는
비방향 그래프 G



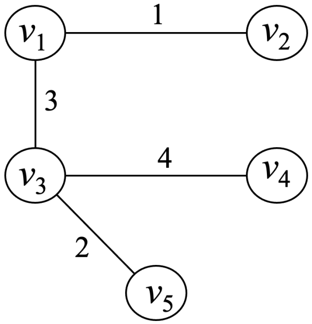
(b) 이음선 (v_4,v_5)를 제거해도 연결성 유지됨



(c) G의 신장트리



(d) G의 최소신장트리



최소비용 신장트리 활용 예제

- 도로건설: 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 문제
- 통신: 통신선의 길이가 최소가 되도록 통신케이블 망을 구성하는 문제
- 배관: 배관의 총 길이가 최도가 되도록 연결하는 문제

최소비용 신장트리 구하기: 무작정 방법(brute-force method)

- 알고리즘: 모든 신장트리를 확인하여 최소비용 신장트리 선택하기
- 복잡도: 최악의 경우 지수함수 복잡도보다 나쁨. 예를 들어, 아래 복잡도보다 나쁨.

$$\Theta(n^{n-2})$$

프림(Prim) 알고리즘

전제조건

- 연결된 비방향그래프 G가 아래 모양을 가짐.

$$G = (V, E)$$

- V: 마디들의 집합
- E: 이음선들의 집합

프림 알고리즘 기본 아디이어

$$G = (V, E)$$

$Y = \{v_1\}$
$F = \emptyset$

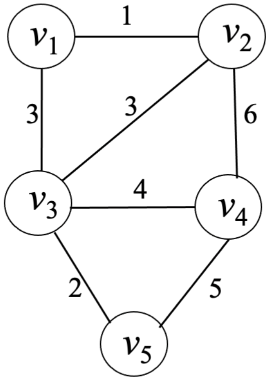
while (사례 미해결):

$(V - Y)$에 속한 마디 중에서 Y와 가장 가까운(최소거리) 마디 선택

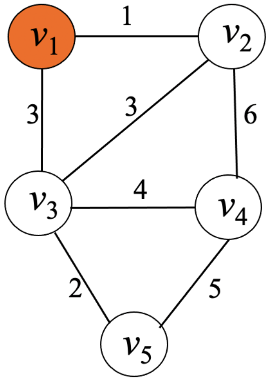
해당 마디를 Y에 추가
해당 마디의 해당 최소거리 이음선을 F에 추가

if ($Y == V$):
사례해결

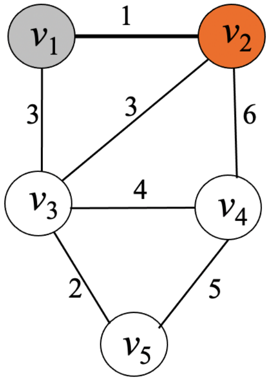
예제



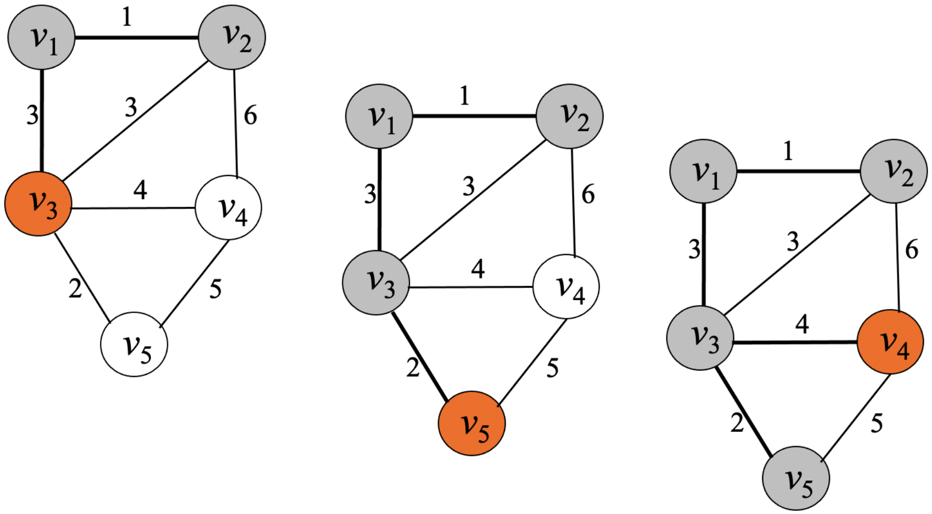
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
1
3
3
6
4
2
5



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
1
3
3
6
4
2
5



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
1
3
3
6
4
2
5



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
1
3
3
6
4
2
5
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
1
3
3
6
4
2
5
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
1
3
3
6
4
2
5

프림 알고리즘의 최적여부 증명

- 프림 알고리즘이 항상 최소비용 신장트리를 생성하는지 증명해야 함.

- 결과가 신장트리라는 것은 확실함.
  - $(V == Y)$ 일 때 종료.
  - 모든 마디가 서로 연결됨.
  - 단순순환경로 존재하지 않음.

- 하지만 최소비용 신장트리 여부는 불확실함.

유망한 이음선 집합

- 전제:

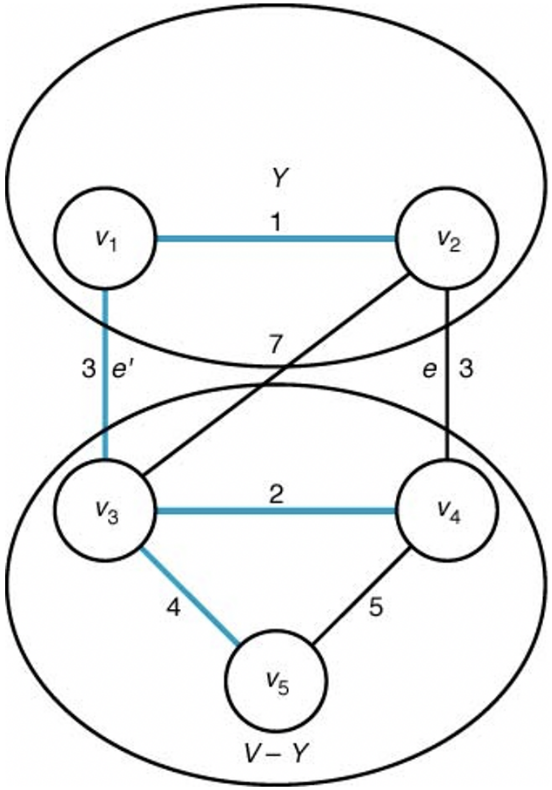
  $$G = (V, E) \quad \text{이고} \quad F \subseteq E$$

- F에 이음선을 추가하여 최소비용 신장트리를 만들 수 있을 때 "F는 유망하다(promissing)" 라고 부름.

보조정리

- 전제 1: $G = (V, E)$ 이고 $F(\subseteq E)$는 유망함.
- 전제 2: Y는 F에 사용된 마디들의 집합
- 전제 3: Y에 있는 정점과 $(V - Y)$에 있는 정점을 잇는 이음선 중에서 가중치가 가장 적은 이음선 중에 하나가 e.
- 결론: $F \cup \{e\}$ 또한 유망함.

보조정리 증명 (그림으로 설명)



정리

- 프림 알고리즘은 항상 최소비용 신장트리를 생성한다.

증명 (귀납법 사용)

- 귀납법을 사용하여 while 반복문에서 확장되는 F가 항상 유망하다는 것을 증명함.
- 귀납기초: 공집합은 당연히 유망함.
- 귀납단계: 보조정리에 의해 while 반복문에서 확장되는 F는 언제나 유망함.
    - 귀납가정: while 반복문이 시작할 때 F가 유망하다고 가정
    - 귀납절차: 보조정리에 의해 $F \cup \{e\}$도 유망함. (알고리즘 참조)
- 귀납증명 완료

프림 알고리즘 구현