1장 알고리즘: 효율성, 분석, 차수

책 소개

- **알고리즘 기초(Foundations of Algorithms)**

- 리차드 네아폴리탄 저, 도경구 역
- 홍릉과학출판사

- 주요 내용: 컴퓨터로 문제 푸는 기법 배우기

목차

- 1장: 알고리즘: 효율성, 분석, 차수

- 2장 - 6장: 다양한 문제풀이 기법 및 적용 예제
    - 2장 분할정복
    - 3장 동적계획
    - 4장 탐욕 알고리즘
    - 5장 되추적
    - 6장 분기한정법

- 7장 계산복잡도 소개: 정렬문제
- 8장 계산복잡도: 검색문제
- 9장 계산복잡도와 문제 난이도: NP 이론 소개

1장 주요 내용

1. 알고리즘

1. 효율적인 알고리즘 개발 중요성

1. 알고리즘 분석

1. 차수

1절 알고리즘

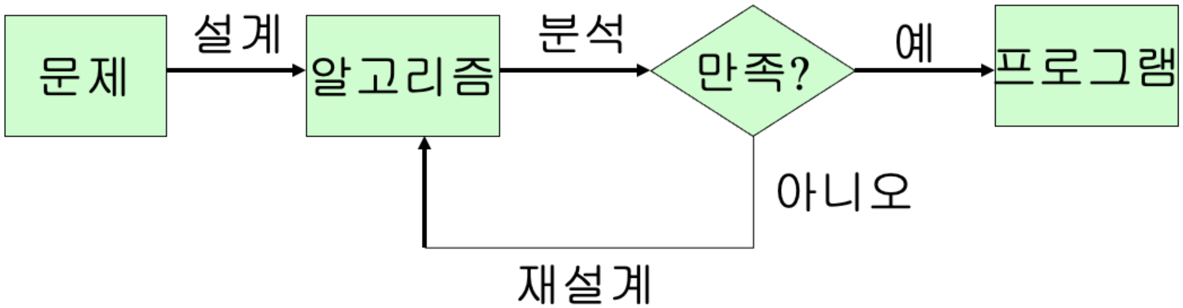
알고리즘이란?

- 컴퓨터를 이용하여 주어진 문제를 해결하는 기법
- 프로그래밍 언어, 프로그래밍 스타일과 무관
- 컴퓨터 프로그램은 여러 방법 중에서 한 가지 방법을 선택하여 구현
- 절차: 문제해결 알고리즘 적용 순서

알고리즘과 절차

- 절차: 문제해결 알고리즘 적용 순서

프로그램 설계 과정



알고리즘 효율성 분석

- 효율성: 문제해결을 위한 필수 요소
  - 컴퓨터 속도, 메모리 가격과 무관
  - 수천년, 수만년 동안 실행되어야 끝나는 비효율적 알고리즘이 일반적임.

- 분석: 알고리즘의 효율성 판단
    - 효율성 판단 기준: 계산복잡도
    - 계산복잡도
        - 시간복잡도: 특정 연산의 실행 횟수
        - 공간복잡도: 메모리 공간 사용 정도

- 차수: 계산복잡도 판단 기준
  - 계산복잡도 함수의 차수(order) 기준
  - 차수를 이용하여 알고리즘을 계산복잡도별로 분류 가능

알고리즘 효율성 비교 예제

- 문제: 전화번호부에서 '홍길동'의 전화번호 찾기
- 알고리즘 1: 순차검색
    - 첫 쪽부터 '홍길동'이라는 이름이 나올 때까지 순서대로 찾는다.
- 알고리즘 2: 이분검색
    - 전화번호부는 '가나다'순
    - 먼저 'ㅎ'이 있을 만한 곳을 적당히 확인
    - 이후 앞뒤로 뒤적여가며 검색

분석: 어떤 알고리즘이 더 효율적인가?

- 이분검색이 보다 효율적임.

알고리즘 표기법

- 자연어: 한글 또는 영어
    - 단점 1: 복잡한 알고리즘 설명과 전달 어려움
    - 단점 2: 실제로 구현하기 어려움

- 의사코드(Pseudo-code)
    - 실제 프로그래밍 언어와 유사한 언어로 작성된 코드
    - 자연어 사용의 단점 해결
    - 하지만 직접 실행할 수 없음.
    - 교재: C++에 가까운 의사코드 사용

강의에 사용되는 언어: 파이썬3

- 설치: 아나콘다(Anaconda) 패키지 설치 추천
- 주피터 노트북 활용
- 파이썬은 기본패키지만 사용

파이썬 활용의 장점

- 의사코드 수준의 프로그래밍 작성 가능
- 책의 의사코드와 매우 유사하게 구현하여 실행 가능

예제: 순차검색

- 문제: 리스트(배열) S에 x가 항목으로 포함되어 있는가?
    - 입력 파라미터: 리스트(배열) S와 값 x
    - 리턴값: x가 S의 항목일 경우 인덱스, 항목이 아닐 경우 -1.

- 알고리즘 (자연어):
  - x와 같은 항목을 찾을 때까지 S에 있는 모든 항목을 차례로 검사
  - 만일 x와 같은 항목을 찾으면 항목의 인덱스 내주기
  - S를 모두 검사하고도 찾지 못하면 -1 내주기

In [2]:

```python
# 순차검색 알고리즘

def seqsearch(S, x):
    location = 0

    # while 반복문 실행횟수 확인용
    loop_count = 0

    while location < len(S) and S[location] != x:
        loop_count += 1
        location += 1

    if location < len(S):
        return (location, loop_count)
    else:
        return (-1, loop_count)
```

In [77]:

```python
seq = list(range(30))
val = 5

print(seqsearch(seq, val))
```

```
(5, 5)
```

In [78]:

```python
seq = list(range(30))
val = 10

print(seqsearch(seq, val))
```

```
(10, 10)
```

In [79]:

```python
seq = list(range(30))
val = 20

print(seqsearch(seq, val))
```

```
(20, 20)
```

In [80]:

```python
seq = list(range(30))
val = 29

print(seqsearch(seq, val))
```

```
(29, 29)
```

In [81]:
```
seq = list(range(30))
val = 30

print(seqsearch(seq, val))
```

```
(-1, 30)
```

In [82]:
```
seq = list(range(30))
val = 100

print(seqsearch(seq, val))
```

```
(-1, 30)
```

- 입력값의 위치에 따라 `while` 반복문의 실행횟수가 선형적 달라짐.

파이썬튜터 활용: 순차검색

- 위 순차검색 코드를 [PythonTutor: 순차검색 (http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20%EC%88%9C%EC%B0%A8%E 1,%20loop_count%29%0A%0Aseq%20%3D%20list%28range%2830%29%29%0Aval

순차검색 분석

- 특정 값의 위치를 확인하기 위해서 S의 항목 몇 개를 검색해야 하는가?
  - 특정 값과 동일한 항목의 위치에 따라 다름
  - 최악의 경우: S의 길이, 즉, 항목의 개수

- 좀 더 빨리 찾을 수는 없는가?
  - S에 있는 항목에 대한 정보가 없는 한 더 빨리 찾을 수 없음.

2절 효율적 알고리즘 개발 중요성

효율적 검색 알고리즘 예제: 이분검색

- 문제: 항목이 **비내림차순(오름차순)으로 정렬된 리스트(배열)** S에 x가 항목으로 포함되어 있는가?
    - 입력 파라미터: 리스트(배열) S와 값 x
    - 리턴값: x가 S의 항목일 경우 인덱스, 항목이 아닐 경우 -1.

- 알고리즘 (자연어):
    - S의 중간에 위치한 항목과 x를 비교
        - 만일 x와 같으면 해당 항목의 인덱스 내주기
        - 만일 x가 중간에 위치한 값보다 작으면 중간 왼편에 위치한 구간에서 새롭게 검색
        - 만일 x가 중간에 위치한 값보다 크면 중간 오른편에 위치한 구간에서 새롭게 검색
    - 검색 구간의 크기가 0이 될 때가지 위 절차 반복

In [3]:
```python
# 이분검색 알고리즘

def binsearch(S, x):
    low, high = 0, len(S)-1
    location = -1

    # while 반복문 실행횟수 확인용
    loop_count = 0

    while low <= high and location == -1:
        loop_count += 1
        mid = (low + high)//2

        if x == S[mid]:
            location = mid
        elif x < S[mid]:
            high = mid - 1
        else:
            low = mid + 1

    return (location, loop_count)
```

In [70]:
```
seq = list(range(30))
val = 5

print(binsearch(seq, val))
```

```
(5, 5)
```

In [71]:
```
seq = list(range(30))
val = 10

print(binsearch(seq, val))
```

```
(10, 3)
```

In [72]:
```
seq = list(range(30))
val = 20

print(binsearch(seq, val))
```

```
(20, 4)
```

In [73]:
```
seq = list(range(30))
val = 29

print(binsearch(seq, val))
```

```
(29, 5)
```

In [74]:
```
seq = list(range(30))
val = 30

print(binsearch(seq, val))
```

```
(-1, 5)
```

In [75]:
```
seq = list(range(30))
val = 100

print(binsearch(seq, val))
```

```
(-1, 5)
```

- 입력값이 달라져도 `while` 반복문의 실행횟수가 거의 변하지 않음.

파이썬튜터 활용: 이분검색

- 위 이분검색 코드를 PythonTutor: 이분검색 (http://pythontutor.com/visualize.html#code=
1%0A%20%20%20%20%0A%20%20%20%20%23%20while%20%EB%B0%98%EB%
1%3A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20loop_count%20%2B%3D%201%0A%2
%201%0A%20%20%20%20%20%20%20%20else%3A%0A%20%20%20%20%20%2
frontend.js&py=3&rawInputLstJSON=%5B%5D&textReferences=false) 에서 실행하면

이분검색 분석

- 이분검색으로 특정 값의 위치를 확인하기 위해서 S의 항목 몇 개를 검색해야 하는가?
    - `while` 반복문이 실행될 때마다 검색 대상의 총 크기가 절반으로 감소됨.
    - 따라서 최악의 경우 $\lg n + 1$개의 항목만 검사하면 됨.
    - 여기서 $\lg := \log_2$.

순차검색 vs 이분검색

배열의 크기	순차검색	이분검색
n	n	$\lg n + 1$
128	128	8
1,024	1,024	11
1,048,576	1,048,576	21
4,294,967,296	4,294,967,296	33

이분검색 활용

- 다음, 네이버, 구글, 페이스북, 트위터 등등 수백에서 수천만의 회원을 대상으로 검색을 진행하고자 한다면 어떤 알고리즘 선택?

당연히 이분검색!

예제: 피보나찌 수 구하기 알고리즘

- 피보나치 수열 정의

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0 \\
f_1 &= 1 \\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)
\end{aligned}
$$

- 피보나찌 수 예제

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

피보나찌 수 구하기 알고리즘(재귀)

- 문제: 피보나찌 수열에서 n번째 수를 구하라.
    - 입력: 음이 아닌 정수
    - 출력: n번째 피보나찌 수

In [84]:
```python
# 피보나찌 수 구하기 알고리즘(재귀)

def fib(n):
    if (n <= 1):
        return n
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

In [55]:
```python
fib(3)
```

Out[55]: 2

In [56]:
```python
fib(6)
```

Out[56]: 8

In [57]:
```python
fib(10)
```

Out[57]: 55

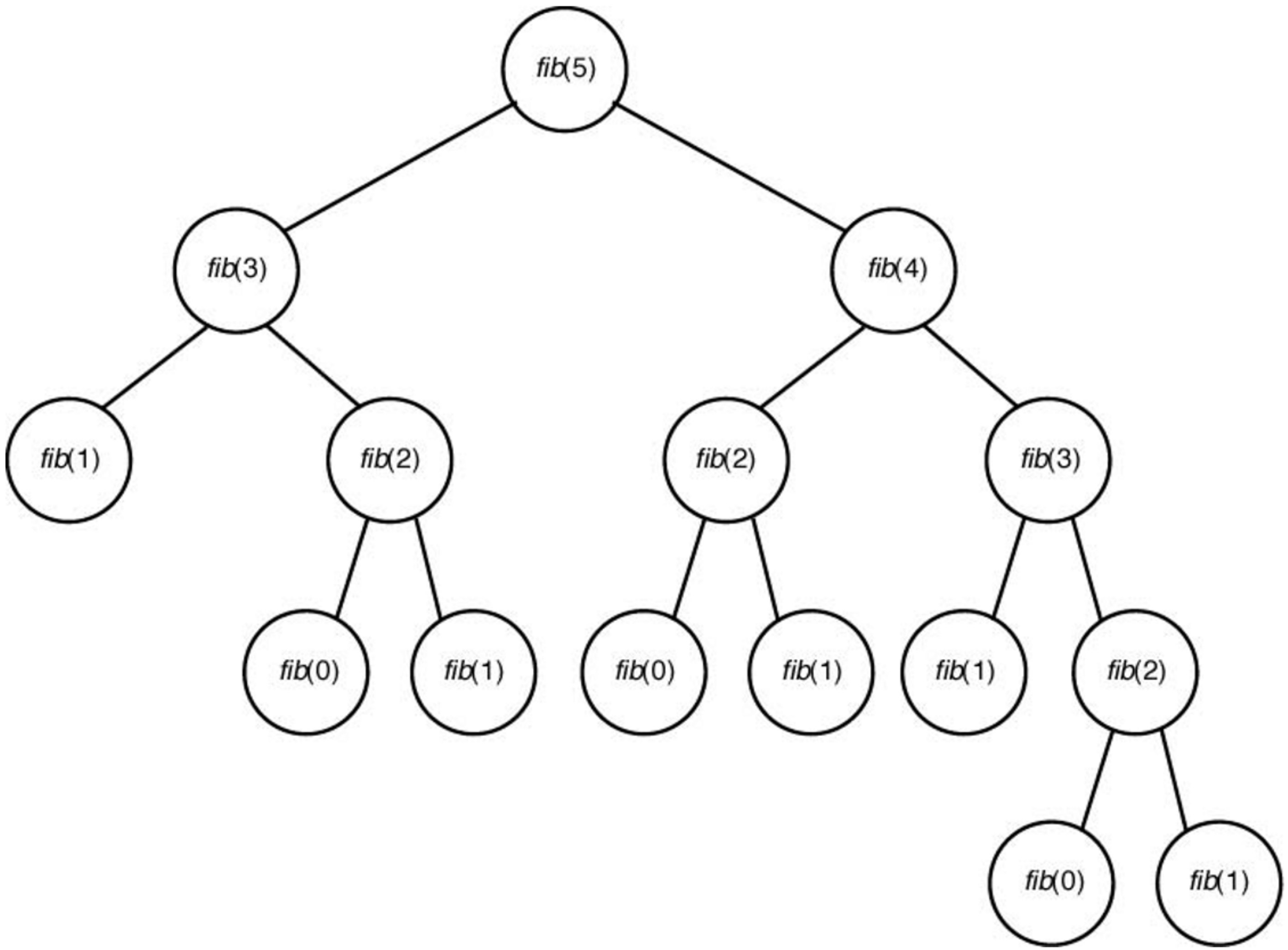
In [60]:
```python
fib(13)
```

Out[60]: 233

`fib` 함수 분석

- 작성하기도 이해하기도 쉽지만, 매우 비효율적임.
- 이유는 동일한 값을 반복적으로 계산하기 때문.

- 예를들어, `fib(5)`를 계산하기 위해 `fib(2)`가 세 번 호출됨. 아래 나무구조 그림 참조.



`fib` 함수 호출 횟수

- $T(n)$ = `fib(n)`을 계산하기 위해 `fib` 함수를 호출한 횟수. 즉, `fib(n)`을 위한 재귀 나무구조에 포함된 마디(node)의 개수
- 아래 부등식 성립.

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 1 \\
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 \qquad (n \geq 2) \\
&> 2 \times T(n-2) \qquad\qquad\qquad\qquad (T(n-1) > T(n-2)) \\
&> 2^2 \times T(n-4) \\
&> 2^3 \times T(n-6) \\
&\dots \\
&> 2^{n/2} \times T(0) \\
&= 2^{n/2}
\end{aligned}
$$

- 증명
    - 수학적 귀납법 활용
    - 교재 14쪽, 정리 1.1 참조.

정리 1.1

- 재귀적 알고리즘으로 구성한 재귀 나무구조의 마디의 수를 $T(n)$이라고 하면, $n \geq 2$인 모든 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$T(n) > 2^{n/2}$$

- 증명: (n에 대한 수학적 귀납법으로 증명)

- 귀납출발점:
  - $T(2) = T(1) + T(0) + 1 = 3 > 2 = 2^{2/2}$
  - $T(3$

피보나찌 수 구하기 알고리즘 (반복)

- 한 번 계산한 값을 리스트(배열)에 저장해두고 필요할 때 활용.
- 중복 계산 없음.

In [1]:
```python
# 피보나찌 수 구하기 알고리즘 (반복)

def fib2(n):
    f = []

    f.append(0)
    if n > 0:
        f.append(1)
        for i in range(2, n+1):
            fi = f[i-1] + f[i-2]
            f.append(fi)
    return f[n]
```

In [2]:
```python
fib2(3)
```

Out[2]:
```
2
```

In [3]:
```python
fib2(6)
```

Out[3]:
```
8
```

In [4]:
```python
fib2(10)
```

Out[4]:
```
55
```

In [5]:
```python
fib2(13)
```

Out[5]:
```
233
```

- 중복 계산이 없는 반복 알고리즘은 수행속도가 훨씬 더 빠름.

`fib2` 함수 분석

- `fib2` 함수 호출 횟수 $T(n)$
  - $T(n) = n + 1$
  - 즉, `f[0]`부터 `f[n]`까지 한 번씩만 계산

두 피보나찌 알고리즘의 비교

n	$n+1$	$2^{n/2}$	Iterative	Recursive (Lower bound)
40	41	1,048,576	41 *ns*	1048 μs
60	61	1.1×10^{9}	61 *ns*	1 *sec*
80	81	1.1×10^{12}	81 *ns*	18 *min*
100	101	1.1×10^{15}	101 *ns*	13 *days*
120	121	1.2×10^{18}	121 *ns*	36 *years*
160	161	1.2×10^{24}	161 *ns*	3.8×10^{7} *years*
200	201	1.3×10^{30}	201 *ns*	4×10^{13} *years*

- 1 ns = 10^{-9} 초
- 1 μs = 10^{-6} 초
- 가정: 피보나찌 수 하나를 계산하는 데 걸리는 시간 = 1 ns.

3절 알고리즘 분석

- 설계한 알고리즘의 효율성 분석
- 알고리즘 분석에 사용하는 용어와 표준 분석방법 학습

시간복잡도 분석

- **특정 단위연산이 수행되는 횟수를 입력크기에 대한 함수**를 이용한 알고리즘 효율성 분석 기법

입력크기 : 특정 입력값의 크기

- 예제
  - 리스트(배열)의 길이
  - 행렬의 행과 열의 수
  - 나무(트리)의 마디와 이음선의 수
  - 그래프의 정점과 간선의 수

- 주의: 입력과 입력크기는 일반적으로 다름.
  - 피보나찌 함수 `fib`에 사용되는 입력값 n의 크기는 n을 이진법으로 표기했을 때의 길이인 $\lg n + 1$ 이다.
  - 예제: $n = 13$의 입력크기는 $\lfloor \lg 13 \rfloor + 1 = 4$.

단위연산: 명령문 또는 명령문 덩어리(군)

- 예제
    - 비교문(comparison)
    - 지정문(assignment)
    - 반복문
    - 모든 기계적 명령문 각각의 실행(
        - 예제: PythonTutor의 Step 계산

- 순차검색과 이분검색 알고리즘에서는 비교 while 반복문에 실행되는 명령문들의 덩어리를 단위연산으로 보았음.

- 피보나찌 함수의 경우 함수 본체 전체를 단위연산으로 사용됨.

- 주위
    - 단위연산을 지정하는 일반적인 규칙 없음.
    - 경우에 따라 두 개의 다른 단위연산을 고려해야 할 수도 있음.
        - 예제: 키를 비교하여 정렬하는 경우, 비교와 지정이 서로 다른 비율로 발생하여, 서로 독립적인 단위연산으로 간주해야 함.
    - 단위연산의 실행횟수가 입력크기뿐만 아니라 입력에도 의존함.

시간복잡도 종류

- 단위연산 실행횟수가 입력값에 상관없이 입력크기에만 의존하는 경우
  - 일정 시간복잡도: $T(n)$

- 단위연산 실행횟수가 입력값과 입력크기 모두에 의존하는 경우
  - 최악 시간복잡도: $W(n)$
  - 평균 시간복잡도: $A(n)$
  - 최선 시간복잡도: $B(n)$

일정 시간복잡도

- 일정 시간복잡도 $T(n)$: 입력크기 n에 대한 단위연산 실행횟수
- 예제
    - 리스트(배열)의 원소 모두 더하기
    - 교환정렬
    - 행렬곱셈

최악 시간복잡도

- 최악 시간복잡도 $W(n)$: 입력크기 n에 대한 단위연산의 최대 실행횟수
- 핵발전소 시스템의 경우처럼 나쁜 사례에 대한 최악의 반응시간이 중요한 경우 활용

평균 시간복잡도

- 평균 시간복잡도 $A(n)$: 입력크기 n에 대한 단위연산의 실행횟수 기대치(평균)
- 평균 단위연산 실행횟수가 중요한 경우 활용
- 각 입력값에 대해 확률 할당 가능
- 최악의 경우 분석보다 보통 계산이 보다 복잡함

최선 시간복잡도

- 최선 시간복잡도 $B(n)$: 입력크기 n에 대한 단위연산의 최소 실행횟수
- 잘 사용되지 않음.

시간복잡도 특성

- $T(n)$이 존재하는 경우:

  $$T(n) = W(n) = A(n) = B(n)$$

- 일반적으로:

  $$B(n) \leq A(n) \leq W(n)$$

일정 시간복잡도를 구할 수 없는 경우

- 최선의 경우 보다 최악 또는 평균의 경우 분석을 일반적으로 진행

- 평균 시간복잡도 분석
  - 다른 입력을 여러 번 사용할 때 평균적으로 걸리는 시간 알려줌.
  - 예를 들어, 속도가 느린 정렬 알고리즘이라도 평균적으로 시간이 좋게 나오는 경우 사용 가능.

- 최악 시간복잡도 분석
  - 핵발전소 감시시스템 경우처럼 단 한 번의 사고가 치명적인 경우 활용.

공간(메모리)복잡도

- 알고리즘이 메모리 사용명으로 얼마나 효율적인지 분석
- 책에서는 시간복잡도에 집중.
- 필요한 경우 공간복잡도 분석 활용.

예제: 일정 시간복잡도 분석

알고리즘: 리스트(배열) 항목더하기

- 문제: 크기가 n인 리스트(배열) S의 모든 항목을 더하라.
- 입력: 리스트(배열) S
- 출력: 리스트(배열) S에 있는 항목의 합

In [7]:

```python
# 리스트(배열)의 항목 모두 더하기

def sum(S):
    result = 0

    for i in range(len(S)):
        result = result + S[i]
    return result
```

In [9]:

```python
seq = list(range(11))

sum(seq)
```

Out[9]:

```
55
```

리스트(배열) 항목더하기 알고리즘의 $T(n)$ 구하기: 덧셈 기준

- 단위연산: 덧셈
- 입력크기: 리스트(배열)의 크기 n

- 모든 경우 분석:
    - 리스트(배열) 내용에 상관없이 for-반복문 n번 실행.
    - 반복마다 덧셈 1회 실행.
    - 따라서 $T(n) = n$.

알고리즘: 교환정렬

- 문제: 리스트(배열)의 항목을 비내림차순(오름차순)으로 정렬하기
- 입력: 리스트(배열) S
- 출력: 비내림차순으로 정렬된 리스트(배열)

In [10]:
```python
# 교환정렬

def exchangesort(S):
    for i in range(len(S)):
        for j in range(i+1, len(S)):
            if (S[j] < S[i]):
                S[i], S[j] = S[j], S[i]
```

In [11]:
```python
seq = [1, 4, 5, 2, 7]
exchangesort(seq)
print(seq)
```

```
[1, 2, 4, 5, 7]
```

교환정렬 알고리즘의 $T(n)$ 구하기 : 조건문 기준

- 단위연산: 조건문 (`S[j]`와 `S[i]`의 비교)
- 입력크기: 리스트(배열)의 길이 n

- 모든 경우 분석:
    - j-반복문이 실행할 때마다 조건문 한 번씩 실행
    - 조건문의 총 실행횟수
        - $i = 1$일 때: $n - 1$ 번
        - $i = 2$일 때: $n - 2$ 번
        - $i = 3$일 때: $n - 3$ 번
        - ...
        - $i = n - 1$일 때: 1 번
        - 따라서 다음이 성립한다.

$$T(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

예제: 최악 시간복잡도 분석

교환정렬 알고리즘의 $W(n)$ 구하기 : 교환 기준

- 단위연산: 교환하는 연산 (`S[j]`와 `S[i]`의 교환)
- 입력크기: 정렬할 항목의 수 n

- 최악의 경우 분석:
    - 조건문의 결과에 따라서 교환 연산의 실행여부 결정
    - 최악의 경우
        - 조건문이 항상 참(true)이 되는 경우
        - 즉, 입력 배열이 꺼꾸로 정렬되어 있는 경우
        - 이때, 조건문 실행 횟수와 동일하게 실행됨.

$$W(n) = \frac{(n-1)n}{2}$$

순차검색 알고리즘의 $W(n)$ 구하기: 항목 비교 연산 기준

- 단위연산: 리스트(배열) S의 항목과 값 x와의 비교연산
    - `S[location] != x`
- 입력크기: 리스트(배열) 크기 n

- 최악의 경우 분석:
  - x 가 리스트(배열)의 마지막 항목이거나, 리스트(배열)에 포함되지 않은 경우, 단위연산이 n번 수행된다. 즉,

$$W(n) = n$$

- **주의:** 입력(S와 x)에 따라서 검색횟수가 달라지므로, 일정 시간복잡도 분석 불가능.

예제: 평균 시간복잡도 분석

순차검색 알고리즘의 $A(n)$ 구하기: 항목 비교 연산 기준

- 단위연산: 리스트(배열) S의 항목과 값 x와의 비교연산
    - `S[location] != x`
- 입력크기: 리스트(배열) 크기 n

- 평균의 경우 분석 (경우 1)
    - 가정
        - $\mathbf{x}$가 리스트(배열) S안에 있음
        - 리스트(배열)의 항목이 모두 다름.
        - $\mathbf{x}$가 리스트(배열)의 특정 위치에 있을 확률 동일, 즉 $1/n$. 단, n은 리스트(배열) S의 길이.
    - $\mathbf{x}$ 가 리스트(배열)의 k 번째 있다면, S 를 찾기 위해서 수행하는 단위연산의 횟수는 k.
    - 따라서 다음이 성립

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(k \times \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

순차검색 알고리즘의 $A(n)$ 구하기 (경우 2)

- 가정
  - x가 리스트(배열) S 안에 없을 수도 있음.
  - x가 리스트(배열) S 안에 있을 확률: p
- x가 배열에 없을 확률: $1 - p$
- x가 리스트(배열)의 k 번째 항목일 확률: p/n
- 따라서 다음이 성립.

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(k \times \frac{p}{n}\right) + n\,(1 - p) \\
&= \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + n\,(1 - p) \\
&= n\left(1 - \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}
\end{aligned}
$$

- p 일 때:
  $= 1$

$$A(n) = (n+1)/2$$

예제: 최선 시간복잡도 분석

교환정렬 알고리즘의 $B(n)$ 구하기 : 교환 기준

- 단위연산: 교환하는 연산 (`S[j]`와 `S[i]`의 교환)
- 입력크기: 정렬할 항목의 수 n

- 최선의 경우 분석:
    - 조건문의 결과에 따라서 교환 연산의 실행여부 결정
    - 최선의 경우
        - 조건문이 항상 거짓(false)이 되는 경우
        - 즉, 입력 배열이 이미 오름차순(비내림차순)으로 정렬되어 있는 경우
        - 이때, 교환이 전혀 발생하지 않음.
        - 따라서 $B(n) = 0$.

순차검색 알고리즘의 $B(n)$ 구하기: 항목 비교 연산 기준

- 단위연산: 리스트(배열) `S`의 항목과 값 `x`와의 비교연산
    - `S[location] != x`
- 입력크기: 리스트(배열) 크기 n

- 최선의 경우 분석:
  - `x`가 `S[0]`일 때, 입력의 크기에 상관없이 단위연산이 한 번 수행
  - 따라서 $B(n) = 1$.

4절 차수

복잡도의 표기법

- O
  - Big O, asymptotic upper bound
- Ω
  - Omega, asymptotic lower bound
- Θ
  - Theta, order, asymptotic tight bound ($O \cap \Omega$)

대표적인 복잡도 카테고리

- $\Theta(\lg n)$
- $\Theta(n)$: 1차 (linear time algorithm)
- $\Theta(n \lg n)$
- $\Theta(n^2)$: 2차 (quadratic time)
- $\Theta(n^3)$: 3차 (cubic time)
- $\Theta(2^n)$: 지수 (exponential time)
- $\Theta(n!)$

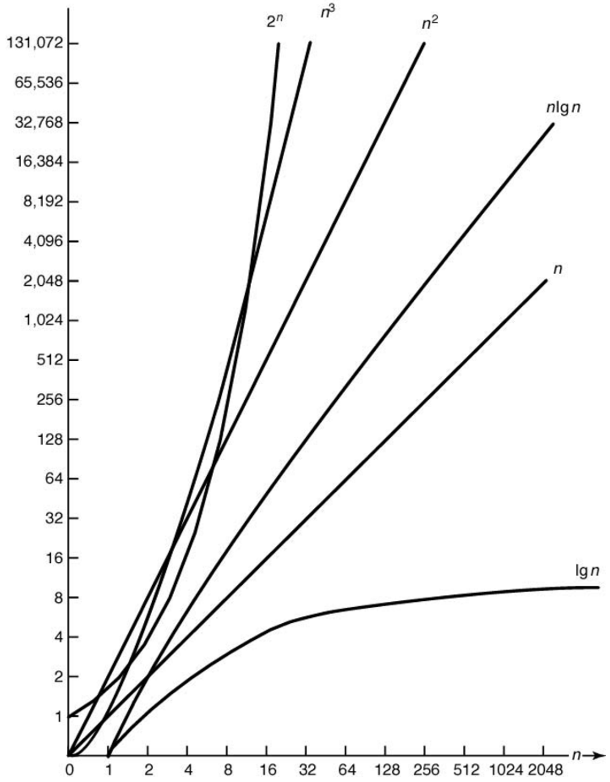
최고차 항이 궁극적으로 지배한다

n	$0.1n^2$	$0.1n^2+n+100$
10	10	120
20	40	160
50	250	400
100	1,000	1,200
1,000	100,000	101,100

- $g(n)$ order of n^2

  $= 5n^2$
  $+ 100n$
  $+ 20$
  $\in \theta$
  $(n^2) \equiv$

복잡도 함수의 증가율



2^n
n^3
n^2
n lg n
n
lg n
131,072
65,536
32,768
16,384
8,192
4,096
2,048
1,024
512
256
128
64
32
16
8
4
2
1
0
1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
n

시간복잡도별 실행시간 비교

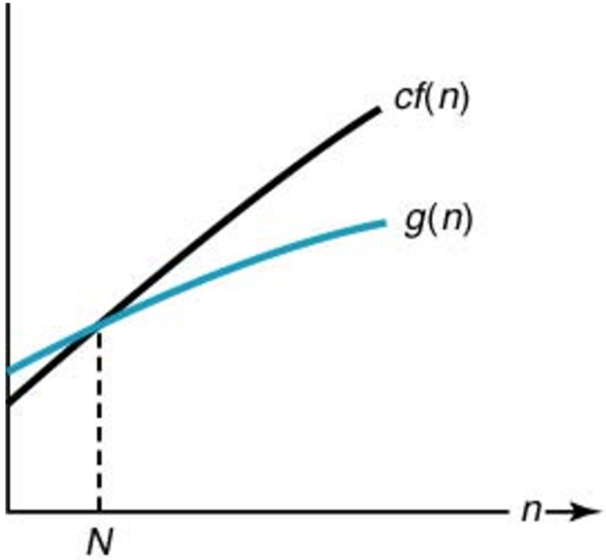
n	$f(n) = \lg n$	$f(n) = n$	$f(n) = n \lg n$	$f(n) = n^2$	$f(n) = n^3$	$f(n) = 2^n$
10	0.003 μs*	0.01 μs	0.033 μs	0.10 μs	1.0 μs	1 μs
20	0.004 μs	0.02 μs	0.086 μs	0.40 μs	8.0 μs	1 ms†
30	0.005 μs	0.03 μs	0.147 μs	0.90 μs	27.0 μs	1 s
40	0.005 μs	0.04 μs	0.213 μs	1.60 μs	64.0 μs	18.3 min
50	0.006 μs	0.05 μs	0.282 μs	2.50 μs	125.0 μs	13 days
10^2	0.007 μs	0.10 μs	0.664 μs	10.00 μs	1.0 ms	4×10^{13} years
10^3	0.010 μs	1.00 μs	9.966 μs	1.00 ms	1.0 s	
10^4	0.013 μs	10.00 μs	130.000 μs	100.00 ms	16.7 min	
10^5	0.017 μs	0.10 ms	1.670 ms	10.00 s	11.6 days	
10^6	0.020 μs	1.00 ms	19.930 ms	16.70 min	31.7 years	
10^7	0.023 μs	0.01 s	2.660 s	1.16 days	31.709 years	
10^8	0.027 μs	0.10 s	2.660 s	115.70 days	3.17×10^7 years	
10^9	0.030 μs	1.00 s	29.900 s	31.70 years		

*1 μs = 10^{-6} second.
†1 ms = 10^{-3} second.

Big O 표기법

- 정의 : 점근적 상한 (Asymptotic Upper Bound)
  - 분석된 복잡도함수 g(n)이 어떤 함수 f(n)에 대해서 $g(n) \in O(f(n))$.
  - $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $g(n) \leq c \times f(n)$이 성립하는 실수 $c > 0$와 음이 아닌 정수 N이 존재한다.
- $g(n) \in O(f(n))$ 읽는 방법:
  - $g(n)$의 점근적 상한은 $f(n)$이다.
  - Asymptotic upper bound of g(n) is f(n).
- 의미:
  - 입력 크기 n에 대해서 이 알고리즘의 수행시간은 궁극적으로 f(n)보다 나쁘지는 않다.

Big O 표기법 (Cont)



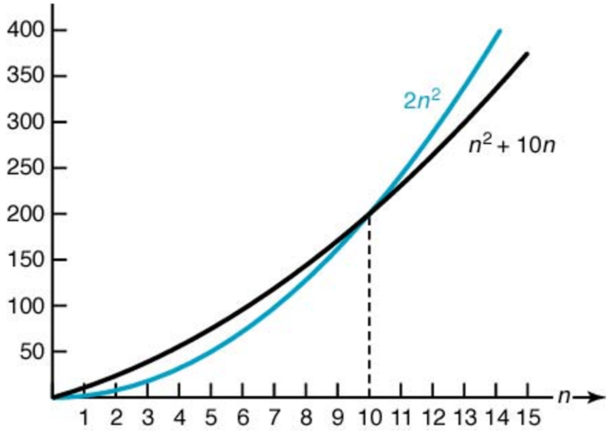
(a) $g(n) \in O(f(n))$

Big O 표기법 (예)

- 어떤 함수 g(n)이 $O(n^2)$에 속한다는 말은
  - 함수g(n)은 궁극에 가서는 (즉, 어떤 N값 이후부터는) 어떤 2차 함수 cn2 보다는 작은 값을 가지게 된다는 것을 뜻한다. (그래프 상에서는 아래에 위치)
- $n^2 + 10n \in O(n^2)$?
  - $n \geq 10$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2 + 10n \leq 2n^2$이 성립한다. 그러므로 $c = 2$와 $N = 10$을 선택하면, 'Big O'의 정의에 의해서 $n^2 + 10n \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.
  - $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2 + 10n \leq n^2 + 10n^2 = 11n^2$이 성립한다. 그러므로 $c = 11$와 $N = 1$을 선택하면, '큰 O'의 정의에 의해서 $n^2 + 10n \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

Big O 표기법 (예) (Cont)

- $2n^2$과 $n^2 + 10n$의 비교



Big O 표기법 (예) (Cont)

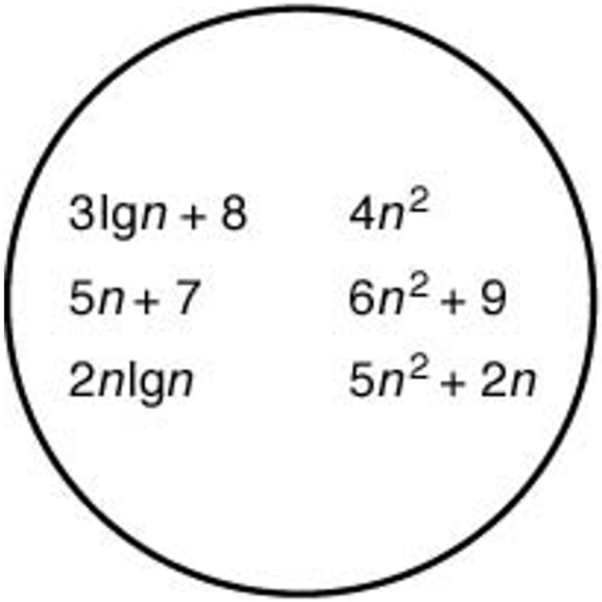
- $5n^2 \in O(n^2)$?
  - $c = 5$와 $N = 0$을 선택하면, $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서 $5n^2 \leq 5n^2$ 이 성립한다.
- $T(n) = n(n-1)/2$?
  - $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서 $n(n-1)/2 \leq n^2/2$이 성립한다. 그러므로 $c = 1/2$과 $N = 0$을 선택하면, $T(n) \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.
- $n^2 \in O(n^2 + 10n)$?
  - $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서, $n^2 \leq 1 \times (n^2 + 10n)$이 성립한다. 그러므로, $c = 1$와 $N = 0$을 선택하면, $n^2 \in O(n^2 + 10n)$이라고 결론지을 수 있다.

Big O 표기법 (예) (Cont)

- $n \in O(n^2)$?
  - $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서, $n \leq 1 \times n^2$ 이 성립한다. 그러므로, $c = 1$와 $N = 1$을 선택하면, $n \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.
- $n^3 \in O(n^2)$?
  - $n \geq N$인 모든 n에 대해서 $n^3 \leq c \cdot n^2$ 이 성립하는 c와 N값은 존재하지 않는다. 즉, 양변을 n^2 으로 나누면, $n \leq c$가 되는데, c를 아무리 크게 잡더라도 그 보다 더 큰 n이 존재한다. (성립하지 않음)

Big O 표기법 (예) (Cont)

- $O(n^2)$: cn^2 보다 작은 값을 가지는 모든 함수.

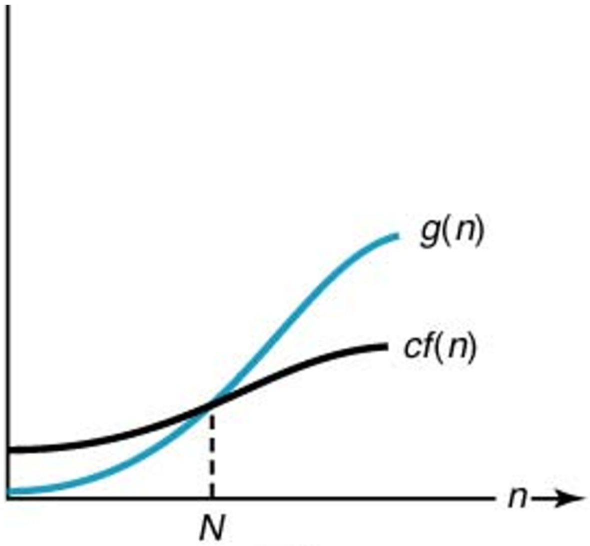


(a) $O(n^2)$

Ω 표기법

- 정의: 점근적 하한 (Asymptotic Lower Bound)
    - 분석된 복잡도함수 g(n)이 어떤 함수 f(n)에 대해서 $g(n) \in \Omega(f(n))$
    - $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $g(n) \geq c \cdot f(n)$이 성립하는 실수 $c > 0$와 음이 아닌 정수 N이 존재한다.
- $g(n) \in \Omega(f(n))$ 읽는 방법:
    - $g(n)$의 점근적 하한은 $f(n)$이다.
    - Asymptotic lower bound of $g(n)$ is $f(n)$.
- 의미:
    - 입력 크기 n에 대해서 이 알고리즘의 수행시간은 궁극적으로 $f(n)$보다 효율적이지는 못하다.

Ω 표기법



(b) $g(n) \in \Omega(f(n))$

Ω 표기법 : 예

- 어떤 함수 $g(n)$이 $\Omega(n^2)$에 속한다는 말은
    - 그 함수는 궁극에 가서는 (즉 어떤 N 값 이후부터는) 어떤 2차 함수 $c \cdot n^2$의 값보다는 큰 값을 가지게 된다는 것을 뜻한다(그래프 상에서는 위에 위치).
- $n^2 + 10n \in \Omega(n^2)$?
    - $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2 + 10n \geq n^2$이 성립한다. 그러므로 $c = 1$와 $N = 0$을 선택하면, $n^2 + 10n \in \Omega(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.
- $5n^2 \in \Omega(n^2)$?
    - $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서, $5n^2 \geq 1 \cdot n^2$이 성립한다. 그러므로, $c = 1$와 $N = 0$을 선택하면, $5n^2 \in \Omega(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

Ω 표기법 : 예 (계속)

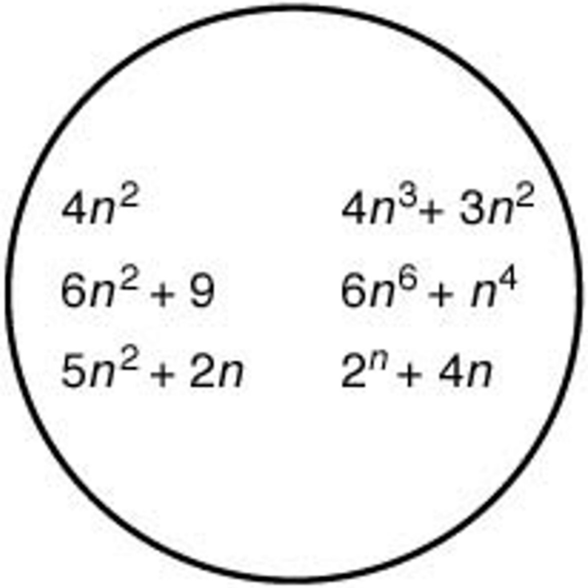
- $T(n) = n(n-1)/2$?
  - $n \geq 2$인 모든 n에 대해서 $n - 1 \geq n/2$이 성립한다. 그러므로, $n \geq 2$인 모든 n에 대해서 $n(n-1)/2 \geq n/2 \cdot n/2 = 1/4n^2$ 이 성립한다. 따라서 $c = 1/4$과 $N = 2$를 선택하면, $T(n) \in \Omega(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.
- $n^3 \in \Omega(n^2)$?
  - $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서, $n^3 \geq 1 \cdot n^2$ 이 성립한다. 그러므로, $c = 1$과 $N = 1$을 선택하면, $n^3 \in \Omega(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

Ω 표기법 : 예 (계속)

- $n \in \Omega(n^2)$?
  - 모순유도에 의한 증명(Proof by contradiction)
  - $n \in \Omega(n^2)$ 이라고 가정. 그러면 $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서, $n \geq c \cdot n^2$ 이 성립하는 실수 $c > 0$, 그리고 음이 아닌 정수 N이 존재한다. 위의 부등식의 양변을 $c \cdot n$으로 나누면 $1/c \geq n$이 된다. 그러나 이 부등식은 절대로 성립할 수 없다. 따라서 위의 가정은 모순이다.

Ω 표기법: 예 (Cont)

- $\Omega(n^2)$

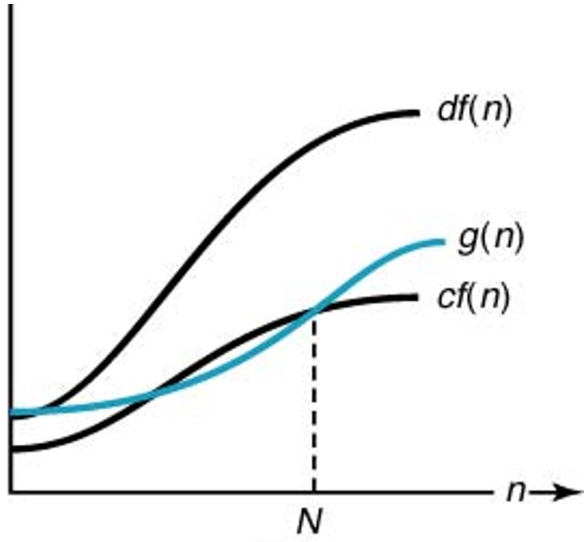


(b) $\Omega(n^2)$

Θ 표기법

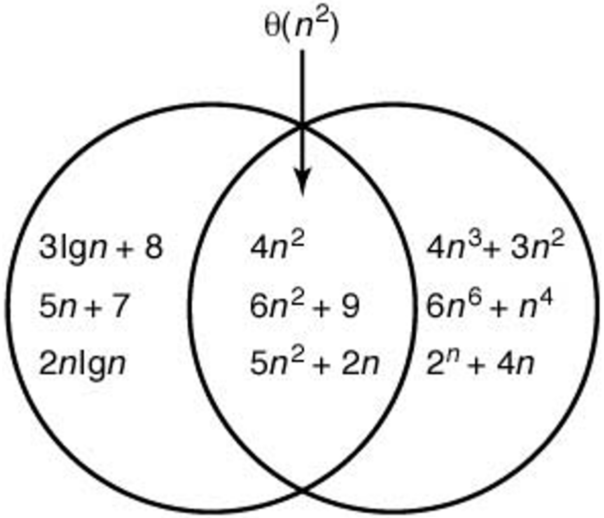
- 정의 : Asymptotic Tight Bound
  - 분석된 복잡도함수 $g(n)$이 어떤 함수 $f(n)$에 대해서 $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$.
  - $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $c \cdot f(n) \geq g(n) \leq d \cdot f(n)$이 성립하는 실수 $c > 0$와 $d > 0$, 그리고 음이 아닌 정수 N이 존재한다.
- $g(n) \in \Theta(f(n))$ 읽는 방법:
  - $g(n)$의 차수(order=asymptotic tight bound)는 $f(n)$이다.
  - Asymptotic tight bound of g(n) is f(n).
- 예 : $T(n) = n(n-1)/2$은 $O(n^2)$이면서 $\Omega(n^2)$이다. 따라서 $T(n) = \Theta(n^2)$.

Θ 표기법



(c) $g(n) \in \theta(f(n))$

$\Theta(n^2)$



(c) $\theta(n^2) = O(n^2) \cap \Omega(n^2)$

작은(Small) o 표기법

- 정의 : 작은 o
  - 분석된 복잡도 함수 $g(n)$이 어떤 함수 $f(n)$에 대해서 $g(n) \in o(f(n))$
  - 어떤 N값 이후부터는 모든 실수 $c > 0$에 대해서 $g(n) \leq c \cdot f(n)$
- 참고: $g(n) \in o(f(n))$은 "$g(n)$은 $f(n)$의 작은 오(o)"라고 한다.

큰 O vs 작은 o

- 큰 O와의 차이점
  - 큰 O: 실수 $c > 0$ 중에서 하나만 성립하여도 됨
  - 작은 o: 모든 실수 $c > 0$에 대해서 성립하여야 함
- $g(n) \in o(f(n))$은 쉽게 설명하자면
  - $g(n)$이 궁극적으로 $f(n)$보다 '훨씬' 낫다(좋다)는 의미이다.

작은 o 표기법 : 예

- $n \in o(n^2)$?
- 증명:

  $c > 0$이라고 하자. $n \geq N$인 모든 n에 대해서 $n \leq c \cdot n^2$ 이 성립하는 N을 찾아야 한다. 이 부등식의 양변을 $cc\dot{n}$으로 나누면 $1/c \leq n$을 얻는다. 따라서 $N \geq 1/c$가 되는 어떤 N을 찾으면 된다. 여기서 N의 값은 c에 의해 좌우된다.

  예를 들어 만약 $c = 0.0001$이라고 하면, N의 값은 최소한 $10,000$이 되어야 한다. 즉, $n \geq 10,000$인 모든 n에 대해서 $n \leq 0.0001 \cdot n^2$ 이 성립한다.

작은 o 표기법 : 예 (계속)

- n이 $o(5n)$?

- 모순 유도에 의한 증명: $c = 1/6$이라고 하자.

  $n \in o(5n)$이라고 가정하면, $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서, $n \leq 1/6 \cdot 5 \cdot n \leq 5/6 \cdot n$이 성립하는 음이 아닌 정수 N이 존재해야 한다.

  그러나 그런 N은 절대로 있을 수 없다. 따라서 위의 가정은 모순이다.

극한(limit)을 이용하여 차수를 구하는 방법

- 정의 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \begin{cases} c & \text{for some } c > 0 \text{ if } g(n) \in \Theta(f(n)) \,, \\ 0 & \text{if } g(n) \in o(f(n)) = O(f(n)) \backslash \Theta(f(n)) \,, \\ \infty & \text{if } g(n) \in \Omega(f(n)) \backslash \Theta(f(n)) \,. \end{cases}$$

- 예 : 다음이 성립함을 보이시오.
  - $\frac{n^2}{2} \in o(n^3)$
    - 이유: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$
  - $b > a > 0$일 때, $a^n \in o(b^n)$
    - 이유: $0 < \frac{a}{b} < 1$. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0.$

로피탈(L'Hopital)의 법칙

- 정리: 로피탈(L'Hopital)의 법칙:

  $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ 이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g'(n)}{f'(n)}$ 이다.

- 예 : 다음이 성립함을 보이시오.
  - $\lg n \in o(n)$, 이유는

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n \ \ln 2}}{1} \right) = 0$$

  - $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, 이유는

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n \ \ln a}}{\frac{1}{n \cdot \ln b}} \right) = \frac{\log b}{\log a} > 0$$

차수의 주요 성질 I

1. $g(n) \in O(f(n))$ iff $f(n) \in \Omega(g(n))$.

- $g(n) \in \Theta(f(n))$ iff $f(n) \in \Theta(g(n))$.
- $b > 1$이고 $a > 1$이면, $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$은 항상 성립. 다시 말하면 로그(logarithm) 복잡도 함수는 모두 같은 카테고리에 속한다. 따라서 통상 $\Theta(\lg n)$으로 표시한다.
- $b > a > 0$이면, $a^n \in o(b^n)$. 다시 말하면, 지수(exponential) 복잡도 함수가 모두 같은 카테고리 안에 있는 것은 아니다.

차수의 주요 성질 II

1. $a > 0$인 모든 a에 대해서, $a^n \in o(n!)$. 다시 말하면, $n!$은 어떤 지수 복잡도 함수보다도 나쁘다.

2. 복잡도 함수를 다음 순으로 나열해 보자.

$$\Theta(\lg n), \Theta(n), \Theta(n \lg n), \Theta(n^2), \Theta(n^j), \Theta(n^k), \Theta(a^n), \Theta(b^n), \Theta(n!)$$

   여기서 $k > j > 2$이고 $b > a > 1$이다.

   복잡도 함수 $g(n)$이 $f(n)$을 포함한 카테고리의 왼쪽에 위치하면, $g(n) \in o(f(n))$.

3. $c \geq 0, d > 0, g(n) \in O(f(n))$, 그리고 $h(n) \in \Theta(f(n))$ 이면,

$$c \cdot g(n) + d \cdot h(n) \in \Theta(f(n))$$

   - ex) $5n + 3 \lg n + 10n \lg n + 7n^2 \in \Theta(n^2)$.