

MaLo  
SS 2021  
25. April 2021

## Übungsblatt 0

Vorname Nachname 123456  
Firstname Lastname 654321  
Dritter Name 162534

---

### Aufgabe 2

a) Eine geeignete Variablenmenge für dieses Problem ist eine Boolesche Variable pro Fach. Der Wahrheitswert gibt an ob ein Fach belegt wurde oder nicht. Somit ergeben sich folgende Variablen:  $A$  für Algebra,  $C$  für Computeralgebra,  $E$  für Ethik,  $F$  für Formale Systeme und  $G$  für Grundlagen der Mathematik.

b)

- $(A \vee C \vee E \vee F \vee G) \wedge \neg(A \wedge C \wedge E \wedge F \wedge G)$
- $(C \wedge E \wedge F) \vee \neg C$
- $(A \wedge G) \vee (\neg A \wedge \neg G)$
- $(A \wedge C) \vee \neg A$
- $\neg F$
- $G$
- $(\neg F \vee G) \wedge \neg(\neg F \wedge G)$

c) Angenommen David hat Recht. Dann haben Sie  $G$  belegt. Dies bedeutet wegen (iii) auch, dass Sie  $A$  belegt haben müssen. Wegen (iv) müssen Sie also auch  $C$  belegt haben. Und wegen (ii) müssen Sie auch  $E$  und  $F$  belegt haben. Dies kann aber nicht sein weil Sie laut (i) nicht alle 5 Fächer belegt haben. David hat also kein Recht.

Nun muss also noch überprüft werden ob Bertrand tatsächlich Recht hat:

Angenommen Bertrand hat Recht. Dann haben Sie  $F$  nicht belegt, wegen (v). Dies führt dazu, dass ebenfalls  $C$  nicht belegt wurde (wegen (ii)) und dies bedeutet, dass Sie nicht  $A$  belegt haben können (wegen (iv)). Dies bedeutet ausserdem dass Sie nicht  $G$  belegt haben können (wegen (iii)). Dies bedeutet dass Davids Aussage nicht stimmt was Kurts Meinung bestätigt. Das einzige belegte Fach ist dann  $E$  welches belegt werden muss um (i) zu erfüllen.

Da alle logischen Schritte ab der Annahme, dass Bertrand Recht hat zwingend waren gibt es keine weitere Lösungen.

### Aufgabe 3

a) (i)  $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$  kann verstanden werden als: “Nur eine Variable ist Wahr, alle anderen sind Falsch”. Das führt dazu, dass auf der rechten Seite mindestens eine der beiden Folgerungen zu  $0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow 1$  ausgewertet wird. Durch die Negationen vor den Folgerungen wird dieses Wahr zu einem Falsch bevor er 2 Mal verundet wird. Somit ist diese Formel unerfüllbar.

(ii)  $X \rightarrow \neg X$  kann zu  $\neg X$  vereinfacht werden. Das selbe gilt für  $Y$ . Damit die Teilformel links von dem Und Wahr ist muss mindestens eine der beiden Variable also Falsch sein.  $X \rightarrow 0$  kann ebenfalls zu  $\neg X$  vereinfacht werden.  $1 \rightarrow Y$  kann hingegen zu  $Y$  vereinfacht werden. Um  $(\neg X) \oplus Y$  zu erfüllen und die Voraussetzung von der linken Teilformel zu erfüllen (mindestens ein Falsch) müssen beide Variablen Falsch sein. Also ist  $X = 0$  und  $Y = 0$  die einzig mögliche Lösung. Somit sind die anderen 3 möglichen Variablenbelegungen eine Lösung für die negierte Formel und es handelt sich dementsprechend um eine nicht-triviale Formel.

b) In diesem Beweis verwenden wir mehrmals die Tautologie:  $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ . Diese gilt offensichtlich, da um  $A \wedge B$  zu erfüllen  $A$  Wahr sein muss und dann bereits die Teilformel vor dem Oder Wahr ist und somit die ganze Aussage bereits Wahr ist. Also ist die rechte Teilformel irrelevant bei der Berechnung des Wahrheitswertes.

Wir vereinfachen zunächst die erste Formel:

$$\begin{aligned} & (A \vee (A \wedge B)) \vee (C \wedge D) \\ & A \vee (C \wedge D) \end{aligned}$$

Dann vereinfachen wir die zweite Formel:

$$\begin{aligned} & (\neg C \rightarrow A) \wedge ((\neg A \rightarrow C) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg D)) \\ & (C \vee A) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D) \\ & (A \vee C) \wedge (A \vee D) \\ & A \vee (C \wedge A) \vee (A \wedge D) \vee (C \wedge D) \\ & A \vee (A \wedge D) \vee (C \wedge D) \\ & A \vee (C \wedge D) \end{aligned}$$

## Aufgabe 4

(a)  $\varphi = \neg X_{11} \wedge X_{12} \wedge X_{13} \wedge \neg X_{21} \wedge X_{22} \wedge \neg X_{23} \wedge X_{31} \wedge X_{32} \wedge \neg X_{33}$

(b)

$$\varphi_n = \bigvee_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} X_{ij} X_{ji}$$

Die Formel funktioniert indem sie alle möglichen gerichteten Kreise der Länge 2, explizit also die beiden Kanten aus denen es besteht, hintereinander Verodert. Wenn ein gerichteter Graph der Länge 2 tatsächlich existiert, z.B. zwischen den Knoten  $x$  und  $y$ , dann gibt es auch die Kanten  $X_{xy}$  und  $X_{yx}$  und somit wird die Formel  $\varphi$  wahr sein, da durch die eine wahre Aussage die ganze Veroderung wahr ist.

(c) Sei:

$$Y_i = \neg X_{ii} \wedge \neg \left( \bigvee_{1 \leq j \leq n; j \neq i} X_{ji} \right) \wedge \neg \left( \bigvee_{1 \leq j \leq n; j \neq i} X_{ij} \right)$$

sodass  $Y_i$  genau dann wahr ist wenn der Knoten  $i$  ein isolierter Knoten ist.

Nun muss noch geprüft werden ob mindestens die Hälfte der Knoten die Bedingung erfüllt, also ob die mindestens die Hälfte der  $Y_i$  wahr ist. Angenommen mindestens die

Hälfte der Knoten erfüllen tatsächlich die Bedingung. Dann existiert eine Paarung aller Knoten sodass kein Knoten der die Bedingung nicht erfüllt mit einem seiner gleichen Art gepaart wird. Falls  $n$  ungerade ist ignorieren wir zunächst das letzte Element. Um eine dieser Paarung zu finden betrachten wir zuerst alle möglichen Paarungen der Knoten. Dafür sei  $\Pi$  die Menge aller Permutationen über  $\underline{n}$ . Für eine bestimmte Permutation  $\pi \in \Pi$  definieren wir die Paare:  $(\pi(2k-1), \pi(2k))$  für alle  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Angenommen wir kennen bereits eine passende Permutation  $\pi$ , dann können wir  $Y_i$  und  $Y_j$  verodern für alle Paare  $(i, j)$ . Diese Veroderungen werden immer Wahr sein, da wir die Paare so gebildet haben, dass in jedem Paar mindestens ein isolierter Knoten ist. Schliesslich verunden wir die Ergebnisse aller Paare zusammen. Den ignorierten Knoten bei ungeradem  $n$  verunden wir ebenfalls. Zusammengesetzt haben wir dann für eine Permutation  $\pi \in \Pi$  und geradem  $n$ :

$$Z_\pi = \bigvee_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} Y_{\pi(2k-1)} \wedge Y_{\pi(2k)}$$

Für ungerades  $n$  gilt hingegen:

$$Z_\pi = Y_{\pi(n)} \vee \left( \bigvee_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} Y_{\pi(2k-1)} \wedge Y_{\pi(2k)} \right)$$

Schliesslich muss noch die passende Permutation  $\pi$  gefunden werden. Zum Glück reicht es aus wenn eine Permutation passt, sodass wir einfach alle durchprobieren können und die Ergebnisse verodern können sodass bereits eine funktionierende Permutation zum Schluss zu einem Wahr führt:

$$\varphi_n = \bigvee_{\pi \in \Pi} Z_\pi$$

Das die Formel für Graphen mit mindestens der Hälfte an isolierten Knoten wahr ausgibt ist während dem Beweis klar geworden. Zur Korrektheit fehlt aber noch zu beweisen, dass die Formel auch Falsch ergibt wenn die Bedingung nicht erfüllt ist. Das dies Tatsächlich der Fall ist liegt daran, dass es keine Permutation geben wird, sodass in jedem Paar mindestens ein isolierter Knoten vorhanden ist da es nicht genug isolierte Knoten gibt. Somit wird  $Z_\pi$  für alle  $\pi$  Falsch sein und die Gesamtformel gibt ebenfalls Falsch aus.

## Aufgabe 5

Wenn  $\varphi$  und  $\vartheta$  nicht erfüllbar sind ist die Lösung trivial da man für  $\psi$  einfach 1 nehmen kann, da sich  $\varphi$  und  $\neg\psi$  bzw.  $\vartheta$  und  $\psi$  auf jeden Fall widersprechen werden, da es keine Interpretation gibt die  $\varphi$  oder  $\vartheta$  erfüllt und somit es auch keine Interpretation gibt die  $\varphi \wedge \neg\psi$  oder  $\vartheta \wedge \psi$  erfüllt.

Wenn nur  $\varphi$  nicht erfüllbar ist, ist die Lösung ebenfalls trivial mit  $\psi = 0$ .  $\varphi$  und  $\neg\psi$  widersprechen sich offensichtlich, da es keine Interpretation gibt die  $\varphi \wedge \neg 0$  erfüllt, weil  $\varphi$  bereits unerfüllbar ist.  $\vartheta$  und  $\psi$  widersprechen sich ebenfalls, da  $\psi$  unerfüllbar ist und somit  $\vartheta \wedge \psi$  auch unerfüllbar ist.

Ab jetzt betrachten wir also nur noch  $\varphi$  und  $\vartheta$  die beide erfüllbar sind.

Seien die beiden aussagenlogischen Formeln  $\varphi$  und  $\vartheta$  als boolsche Formeln in Disjunktiver Normalform gegeben. Wenn sich die beiden Formeln widersprechen, dann ist  $\varphi \wedge \vartheta$  unerfüllbar. Durch "ausmultiplizieren" der Verundung kann man diese Formel ebenfalls in eine Disjunktive Normalform bringen. Da diese Formel unerfüllbar ist wird es in jedem der Konjunktionsterm jeweils ein Literal geben, was es auch in negierter Form im selben Konjunktionsterm gibt (z.B.  $X$  und  $\neg X$ ), da es ansonsten eine Interpretation gäbe, mit dem einer der Konjunktionsterme erfüllt werden könnte und somit wäre  $\varphi \wedge \vartheta$  erfüllbar. Da  $\varphi$  und  $\vartheta$  erfüllbar sind kommt jeweils einer dieser Literale ursprünglich aus einem der Formeln und wir können festhalten, dass die Variable diesesr Literale in  $\tau(\varphi \cap \vartheta)$  liegt.