

MaLo
SS 2021
4. Juli 2021

Übungsblatt 10

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

- (a) $R^{\mathfrak{h}(T)} = \{c_0, f^2 c_0\}$
- (b) Nein. $\mathfrak{h}(T)$ ist ein Modell von $f^4 c_0 \neq c_1$, jedoch ist $f^4 c_0 = c_1 \in T$. (Skript Seite 99)
- (c) Beobachtungen:
- Wegen $f c_0 = f c_1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $f^n c_0 = f^n c_1$
 - Da $f^4 c_0 = c_1$ gilt auch $f^4 c_1 = c_1$. Es gilt also $f^4 c_0 \xrightarrow{f} c_1$ und $f^4 c_1 \xrightarrow{f} c_1$.
 - Es gilt auch $R f^2 c_1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$: $R f^{2+4 \cdot n} c_0, R f^{2+4 \cdot n} c_1$.

Sei G_τ die Menge aller Grundterme über τ .

$$\begin{aligned} \Sigma = & \{t = t' \mid t, t' \in G_\tau, \text{ in } t \text{ bzw. } t' \text{ kommen } k \geq 1 \text{ bzw. } m \geq 1 \text{ } f \text{ vor, mit } k = 4 \cdot z \cdot m, z \in \mathbb{Z}\} \\ & \cup \{t = c_1, c_1 = t \mid t \in G_\tau, \text{ in } t \text{ kommt } f \text{ } k\text{-mal vor, mit } k = 4 \cdot (1 + n), n \in \mathbb{N}\} \\ & \cup \{c_0 = c_0, c_1 = c_1\} \\ & \cup \{R f^k c_0, R f^k c_1 \mid k = 2 + 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}\} \\ & \cup \{R c_0\} \end{aligned}$$

- (d) Nein. $\mathfrak{h}(T)$ ist kein Modell von $R f^2 c_1$, $\mathfrak{h}(\Sigma)$ jedoch schon.
- (e)

$$\begin{aligned} [c_0]_\sim &= \{c_0\} \\ [c_1]_\sim &= \{c_1, f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot (n + 1), n \in \mathbb{N}\} \\ [f c_0]_\sim &= \{f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}\} \\ [f^2 c_0]_\sim &= \{f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot n + 2, n \in \mathbb{N}\} \\ [f^3 c_0]_\sim &= \{f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot n + 3, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$$R^{\mathfrak{A}(\Sigma)} = \{[c_0]_\sim, [f^2 c_0]_\sim\}$$

$$\begin{array}{ll} f : [c_0]_\sim \mapsto [f c_0]_\sim & [c_1]_\sim \mapsto [f c_0]_\sim \\ [f c_0]_\sim \mapsto [f^2 c_0]_\sim & [f^2 c_0]_\sim \mapsto [f^3 c_0]_\sim \\ [f^3 c_0]_\sim \mapsto [c_1]_\sim & \end{array}$$

Aufgabe 3

- (a) (i) Wenn es ein $\psi \in \text{Th}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$ gäbe, dann würde ja $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \not\models \psi$ gelten. Dies ist ein Widerspruch. Folglich sind $\text{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$ disjunkt.
- (ii) (1) Sei t ein beliebiger Term. Dann ist $t = t \in \text{Th}(\mathfrak{A})$, denn $\mathfrak{A} \models t = t$, denn $t = t$ ist eine Tautologie.
- (2) Seien t, t' beliebige Terme. Angenommen $t = t', \psi(t) \in \text{Th}(\mathfrak{A})$. Dann ist auch $\psi(t') \in \text{Th}(\mathfrak{A})$, denn es gilt: $\{t = t', \psi(t)\} \models \psi(t')$ und Theorien sind unter \models abgeschlossen.
- (iii) Sei $\neg\psi \in \text{Th}(\mathfrak{A})$. Es gilt folglich $\mathfrak{A} \models \psi$. Angenommen es gilt aber $\psi \notin \text{Th}(\mathfrak{A})$. Da $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A}) = \text{FO}(\tau)$ und beide disjunkt sind, muss $\psi \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$, also $\mathfrak{A} \not\models \psi$. Da \mathfrak{A} aber beliebig ist, ist dies ein Widerspruch. Folglich muss $\psi \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$ analog umgekehrt.
- (iv) Sei $\psi \vee \vartheta \in \text{Th}(\mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi \vee \vartheta$. \mathfrak{A} ist also ein Modell von mindestens eins von beidem. Es muss also $\mathfrak{A} \models \psi$ oder $\mathfrak{A} \models \vartheta$ gelten. Folglich muss auch eines zu $\text{Th}(\mathfrak{A})$ gehören.
- Sei $\psi \vee \vartheta \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$. Dann gilt ja $\mathfrak{A} \not\models \psi \vee \vartheta$. Ist nun einer der beiden Formeln nicht in $\overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$, so muss diese Formel dann in $\text{Th}(\mathfrak{A})$ sein. Dann ist aber \mathfrak{A} ein Modell der Formel, weswegen $\mathfrak{A} \models \psi \vee \vartheta$ gelten müssten. Widerspruch. Folglich muss $\psi, \vartheta \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$ gelten.
- (b) Wenn $\psi \wedge \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehören ψ und ϑ zu Γ^* . Wenn $\psi \wedge \vartheta \in \Delta^*$, dann gehört ψ oder ϑ zu Δ^* .
- (c) Wenn $\psi \rightarrow \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehört ψ zu Δ^* oder ϑ zu Γ^* . Wenn $\psi \rightarrow \vartheta \in \Delta^*$, dann gehören ψ zu Γ^* und ϑ zu Δ^* .
- Sei $\psi \rightarrow \vartheta \in \text{Th}(\mathfrak{A})$. Dann ist entweder \mathfrak{A} kein Modell von ψ . Also gilt $\mathfrak{A} \not\models \psi$, weshalb $\psi \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$. Oder \mathfrak{A} ist Modell von sowohl ψ als auch ϑ . Dann ist folglich $\vartheta \in \text{Th}(\mathfrak{A})$, da ja $\mathfrak{A} \models \vartheta$.
- Sei $\psi \rightarrow \vartheta \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$. Dann ist ja \mathfrak{A} zwar ein Modell von ψ , aber keines von ϑ . Deshalb gilt $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \not\models \vartheta$, also ist $\psi \in \text{Th}(\mathfrak{A})$, aber $\vartheta \in \overline{\text{Th}}(\mathfrak{A})$.
- (d) Offensichtlich ist $\exists x\psi(x) \in \text{Th}(\mathfrak{A})$ mit $\psi := 2 = x \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{2}$). Jedoch sind alle Grundterme rationale Zahlen. Es gibt also keinen Grundterm t , bei dem $\mathfrak{A} \models \psi(t)$. Folglich ist $\psi(t) \notin \text{Th}(\mathfrak{A})$.

Aufgabe 4

(a)

(b)

(c) Falsch!

Seien $\tau := \{<\}$, $\Phi := \{\exists x \forall y (x = y \vee x < y), \exists x \forall (x = y \vee y < x)\}$.

Φ axiomatisiert also die Klasse der τ -Strukturen mit kleinstem und größtem Element.

$\text{Mod}(\varphi_1)$ axiomatisiert nur die Klasse der τ -Strukturen mit kleinstem Element,

$\text{Mod}(\varphi_2)$ axiomatisiert nur die Klasse der τ -Strukturen mit größtem Element.

Widerspruch!

(d) Gegenbeispiel: Die Klasse der Endlichen Linearen Ordnungen welche endlich axiomatisierbar ist durch $\varphi = \forall x (\forall y (y < x \vee y = x) \vee \exists y (x < y \wedge \neg \exists z (x < z < y))) \wedge \exists x (\forall y (x < y \vee x = y))$

Also gibt es ein kleinstes und größtes Element und jedes Element hat einen eindeutigen Nachfolger.

Aber für das unendliche Axiomensystem Ψ gibt es keine endliche Teilmenge, die die Klasse axiomatisiert und somit auch keine Konjunktion von Sätzen in Ψ , die die Klasse axiomatisiert.

Sei $\psi_n = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge \forall y ((y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_n) \wedge x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} < x_n))$

ψ_n axiomatisiert die Lineare Ordnung mit n Elementen. Also ist $\Psi = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein unendliches Axiomensystem für die Endlichen Linearen Ordnungen. Jegliche endliche Untermenge von Ψ hat ein ψ_m für maximales m . Somit kann eine Lineare Ordnung gewählt werden mit $m + 1$ Elementen und diese wird kein Modell von besagten Untermenge sein.

(e) Richtig!

Es gibt ein endliches Axiomensystem Φ' für K . K ist also auch axiomatisierbar durch $\varphi := \bigwedge \Phi'$. Für jede Struktur $\mathfrak{A} \in K$ muss also gelten $\mathfrak{A} \models \varphi$ und für jede Struktur $\mathfrak{B} \notin K$ ($\mathfrak{B} \in \overline{K}$) $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Folglich muss für \mathfrak{B} dann gelten $\mathfrak{B} \models \overline{\varphi}$ mit $\overline{\varphi} := \neg \varphi = \neg \bigwedge \Phi' = \bigvee_{\varphi' \in \Phi'} \neg \varphi'$. Folglich ist $\{\overline{\varphi}\}$ ein endliches Axiomensystem von \overline{K} .