Gesamtpunkte:

MaLo		Marc Ludevid 405401
SS 2021	Übungsblatt 05	Andrés Montoya 405409
30. Mai 2021		Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) (i) Damit $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +, -, \cdot) \subseteq \mathfrak{R}$ gilt, muss $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ und alle Funktionssymbole $+, -, \cdot$ aus $\mathfrak{B}$ eine Restriktion auf $\mathbb{N}$ und abgeschlossen sein. Für $0, 1 \in \mathbb{N}$ ist jedoch $0 - 1 \notin \mathbb{N}$. Daher ist $\mathfrak{B}$ nicht $\{-\}$-abgeschlossen. Also: $\mathfrak{B} \nsubseteq \mathfrak{R}$.

Die kleinste Substruktur, dessen Universum $\mathbb{N}$ enthält, ist $\mathfrak{B}' := (\mathbb{Z}, +, -, \cdot)$:
Es gilt offensichtlich $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ und für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt nun auch $a + b, a - b, a \cdot b \in \mathbb{Z}$. Also sind die hier vorkommenden Funktionen $+, -, \cdot$ alle Restriktionen auf $\mathbb{Z}$ und abgeschlossen. Damit ist $\mathfrak{B}'$ eine Substruktur von $\mathfrak{R}$.
$\mathfrak{B}'$ ist auch die kleinste Substruktur, dessen Universum $\mathbb{N}$ enthält: Würde man ein Element $c, 0 \in \mathbb{Z}, c \notin \mathbb{N}$, also folglich $0 - c \in \mathbb{N}$, aus dem Universum entfernen, so wäre $0 - (0 - c)$ nicht im Universum, weshalb man auch $0 - c$ entfernen müsste, da die Struktur sonst nicht $\{-\}$-abgeschlossen ist. Dann würde das Universum dieser Struktur jedoch nicht mehr $\mathbb{N}$ enthalten!

(ii) $\mathfrak{B} := (2\mathbb{Z}, +, -, \cdot) \subseteq \mathfrak{R}$

- $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ist offensichtlich
- Für alle $a, b \in 2\mathbb{Z}$ gilt offensichtlich $a + b, a - b, a \cdot b \in 2\mathbb{Z}$. $\cdot$ ist eine wohldefinierte Funktion weil die Multiplikation zweier gerader Zahlen immer ein vielfaches von 4 ist und somit ebenfalls eine gerade Zahl ergibt. Damit sind $+, -, \cdot$ Restriktionen auf $2\mathbb{Z}$ und $\mathfrak{B}$ ist $\{+, -, \cdot\}$-abgeschlossen.

(b) (i) $\mathfrak{B} := (\{1\}, +, -, \cdot, ^{-1}) \nsubseteq \mathfrak{Q}$
$\mathfrak{B}$ ist nicht $\{+\}$-abgeschlossen, denn für $1 \in \{1\}$ ist $1 + 1 \notin \{1\}$.

Die kleinste Substruktur, dessen Universum $\{1\}$ enthält, ist $\mathfrak{B}' := \mathfrak{Q}$:
$\mathfrak{B}'$ ist offensichtlich aufgrund Gleichheit eine Substruktur zu sich ($\mathfrak{Q}$) selber.
Damit jede Substruktur, die $\{1\}$ enthält, $\{+, -\}$-abgeschlossen ist, muss jede solche Substruktur offensichtlich $\mathbb{Z}$ enthalten. Soll eine solche Substruktur nun auch $\{^{-1}\}$-abgeschlossen sein, so muss sie $\{z^{-1} \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{q \mid q \in \mathbb{Q}, 0 \leq |q| \leq 1\}$ enthalten. Da eine solche Substruktur zusätzlich $\{\cdot\}$-abgeschlossen sein soll, müssen nun auch alle Vielfachen davon vorkommen.
Damit muss jede Substruktur, die $\{1\}$ enthalten soll, mindestens $\mathbb{Q}$ enthalten.

(ii) $\mathfrak{B} := (\{0\}, +, -, \cdot, ^{-1}) \subseteq \mathfrak{Q}$

- Da $0 \in \mathbb{Q}$ ist $\{0\} \subseteq \mathbb{Q}$

- Für $0 \in \{0\}$ gilt offensichtlich $0 + 0 = 0 - 0 = 0 \cdot 0 = 0^{-1} = 0 \in \{0\}$. Damit sind $+, -, \cdot, ^{-1}$ Restriktionen auf $\{0\}$ und $\mathfrak{B}$ ist $\{+, -, \cdot, ^{-1}\}$-abgeschlossen.

(c) (i) $\mathfrak{C} := (B, \cup, \cap, \overline{}) \nsubseteq \mathfrak{B}$
$\mathfrak{C}$ ist nicht $\{\overline{}\}$-abgeschlossen, da $\emptyset \in B$, aber $\overline{\emptyset} = \mathbb{N} \notin A$.

Da jede Substruktur von $\mathfrak{B}$ $\{\cup\}$-abgeschlossen sein soll und B alle einelementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ enthält, muss in jeder Substruktur von $\mathfrak{B}$ $\{A \subseteq \mathbb{N}\}$ enthalten sein, da man mit jeder einelementigen Teilmenge jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ konstruieren kann.
Folglich ist die kleinste Substruktur, die B enthält, $\mathfrak{B}$ selber.

(ii) $\mathfrak{C} := (B, \cup, \cap, \overline{}) \nsubseteq \mathfrak{B}$
$\mathfrak{C}$ ist nicht $\{\cap\}$-abgeschlossen, da $2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1 \in B$, aber $2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N} + 1 = \emptyset \notin B$.

Da jede Substruktur von $\mathfrak{B}$ $\{\cap\}$-abgeschlossen sein soll und B für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ die Menge $2\mathbb{N} + 1_n := 2\mathbb{N} + 1 \cup \{n\}$ bzw. für jedes ungerade $m \in \mathbb{N}$ die Menge $2\mathbb{N}_m := 2\mathbb{N} \cup \{m\}$ besitzt, muss jede Substruktur die einelementigen Mengen $\{n\} = 2\mathbb{N} + 1_n \cap 2\mathbb{N} + 1$ bzw. $\{m\} = 2\mathbb{N}_m \cap 2\mathbb{N}$ besitzen.
Rest: analog zu (i)
Folglich ist die kleinste Substruktur, die B enthält, $\mathfrak{B}$ selber.

Aufgabe 3

(a) (i) *Die maximale Höhe des Baums ist* 2. bzw. *Jeder Pfad von der Wurzel hat eine maximale Tiefe von* 2.
Im Beispielbaum gilt dieser Satz, dieser hat eine Höhe von 2. $\mathcal{T} \models \psi_1$

(ii) *Jeder Knoten hat entweder* 2 *oder keine Kinder/Kanten.*
Im Beispielbaum gilt dieser Satz nicht, denn der Knoten v_1 hat nur das *Kind* v_3. $\mathcal{T} \not\models \psi_2$

(b) *Es gibt einen Pfad von der Wurzel ausgehend der Länge n.*
Im Beispielbaum gilt dieser Satz nur für $0 < n \leq 2, n \in \mathbb{N}$, also nur für $n \in \{1, 2\}$.

(c)

$$\varphi(x) \coloneqq \forall y(\neg Eyx)$$

Aufgabe 4

(a) (i)

$$\psi_1(x) \coloneqq \forall y(x \circ y = y)$$

Die Konkatenation des Wortes x mit einem beliebigen Wort y ergibt genau dann y, wenn x das leere Wort ist.

(ii)

$$\psi_2(x) \coloneqq \forall y((x \simeq y) \to (x = y))$$

Es gilt nur für $x = \epsilon$, dass jedes Wort derselben Länge dann auch ϵ sein muss. Für $x = 1$ z.B. kann $y = 0$ sein und dann gilt die Aussage schon nichtmehr.

(b)

$$\psi_3(x, y) \coloneqq \exists z(x \circ z = y)$$

x ist genau dann ein Präfix von y, wenn es sein Subwort z von y gibt, sodass $x \circ z = y$.

(c) Hilffunktion $f_1(x) \coloneqq \exists x_1 \exists x_2(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \simeq x \wedge x_2 \simeq x \wedge \forall y_1((y \simeq x) \to (y = x_1 \vee y = x_2))$ besagt, dass $x \in \Sigma$.

$$\psi_4(x) \coloneqq f_1(x) \vee (\exists x_1 \exists x_2 \exists x'(f_1(x_1) \wedge f_1(x_2) \wedge x_1 \circ x_2 \circ x' = x \wedge \psi_4(x')))$$

Entweder ist x die Länge eins (also ungerade), oder wir können rekursiv immer 2 Zeichen von x entfernen, sodass die Funktion erfüllt ist.

(d)

$$\psi_{5n}(x) \coloneqq \exists x' \exists x_1 \ldots \exists x_n((x' \circ x_1 \circ \cdots \circ x_n = x) \to ((\bigwedge_{i=1}^{n}(f_1(x_i) \vee \psi_1(x_i))) \wedge \psi_1(x')))$$

Es existieren n Zeichen der Länge maximal 1, die mit Konkatenation zusammen x ergeben. x' dient für den Fall, dass $n = 0$.

(e)

$$\begin{aligned}\psi_6(x) \coloneqq &(\exists x_1 \ldots \exists x_5(f_1(x_1) \wedge \cdots \wedge f_1(x_5) \wedge x_1 \circ \cdots \circ x_5 = x)) \\ &\vee (\exists x_1 \ldots \exists x_7 \exists x'(f_1(x_1) \wedge \cdots \wedge f_1(x_7) \wedge x_1 \circ \cdots \circ x_7 \circ x' = x \wedge \psi_6(x')))\end{aligned}$$

Entweder ist x die Länge 5, oder wir können rekursiv immer 7 Zeichen von x entfernen, sodass die Funktion erfüllt ist.

Aufgabe 5