Gesamtpunkte:

MaLo | Übungsblatt 04 | Marc Ludevid 405401
SS 2021 | | Andrés Montoya 405409
17. Mai 2021 | | Til Mohr 405959

Übungsblatt 04

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) Falls φ_1 unerfüllbar ist, dann muss $\varphi_1 \Rightarrow \emptyset$ gültig sein.

$$
(\land\Rightarrow)\,\dfrac{(\land\Rightarrow)\,\dfrac{(\neg\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\land)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{X \lor Y \Rightarrow X, Y \qquad (\lor\Rightarrow)\,\dfrac{X, Z \Rightarrow Y \qquad Y, Z \Rightarrow Y}{X \lor Y, Z \Rightarrow Y}\,(*)}{X \lor Y, X \to Z \Rightarrow Y} \qquad X \lor Y, X \to Z \Rightarrow \neg Z}{X \lor Y, X \to Z \Rightarrow Y \land \neg Z}}{\neg(Y \land \neg Z), X \lor Y, X \to Z \Rightarrow \emptyset}}{\neg(Y \land \neg Z), (X \lor Y) \land (X \to Z) \Rightarrow \emptyset}}{\neg(Y \land \neg Z) \land ((X \lor Y) \land (X \to Z)) \Rightarrow \emptyset}
$$

$(*)$ liefert uns jedoch die falsifizierende Interpretation $\mathfrak{I} : X, Z \mapsto 1, Y \mapsto 0$, die also ein Modell für φ_1 ist.

(b) Falls φ_2 eine Tautologie ist, muss $\emptyset \Rightarrow \varphi_2$ gültig sein.

$$
(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\land\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\lor)\,\dfrac{(\Rightarrow\neg)\,\dfrac{(\neg\Rightarrow)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\lor)\,\dfrac{(\lor\Rightarrow)\,\dfrac{C \Rightarrow C, A, B \qquad B \Rightarrow C, A, B}{C \lor B \Rightarrow C, A, B}}{C \lor B \Rightarrow C, A \lor B} \qquad C \lor B, C \Rightarrow C}{(A \lor B) \to C, C \lor B \Rightarrow C}}{(A \lor B) \to C, C \lor B, \neg C \Rightarrow C}}{(A \lor B) \to C, C \lor B \Rightarrow C, \neg\neg C}}{(A \lor B) \to C, C \lor B \Rightarrow C \lor \neg\neg C}}{((A \lor B) \to C) \land (C \lor B) \Rightarrow C \lor \neg\neg C}}{\emptyset \Rightarrow (((A \lor B) \to C) \land (C \lor B)) \to (C \lor \neg\neg C)}
$$

Da alle Blätter Axiome sind, ist die Sequenz bewiesen und φ_2 also eine Tautologie.

Aufgabe 3

(a)

(b)

Aufgabe 4

(a)

$$(\leftrightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi \qquad \Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\leftrightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

(b) (i) Sei $\Gamma = \emptyset = \Delta, \psi = x, \vartheta = \neg x$. Die Prämisse $x, \neg x \Rightarrow \emptyset$ ist offensichtlich gültig, da die linke Seite unerfüllbar ist. Die Konklusion ist jedoch ungültig, da $x \vee \neg x$ erfüllbar ist.
Somit ist $(\vee \Rightarrow)'$ nicht korrekt.

(ii) Fall 1: Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig. Dann sind offensichtlich beide Prämissen und die Konklusion gültig.
Fall 2: Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nicht gültig. Damit die Prämissen gültig sind, muss $\Gamma \Rightarrow \psi$ und $\Gamma \Rightarrow \vartheta$ gelten. Dann ist ja auch $\Gamma \Rightarrow \psi \vee \vartheta$ gültig.
Damit ist $(\Rightarrow \vee)'$ korrekt.

Damit ist der Sequenzenkalkül immer noch korrekt, wenn wir die Benutzung der Schlussregel $(\Rightarrow \vee)'$ erlauben, denn, angenommen es wäre nicht korrekt, würden wir auf einen Widerspruch laufen:
Sei der Sequenzenkalkül also nicht korrekt. Dann gibt es eine nicht-gültige Sequenz, die trotzdem als gültig abgeleitet werden kann. Dann sind die Prämissen von $(\Rightarrow \vee)'$ gültig. Da aber $(\Rightarrow \vee)'$ korrekt ist, muss auch die Konklusion gültig sein. Dies führt zu einem Widerspruch.

(iii) Es ist plausibel, dass $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ keine falsifizierende Interpretationen sind, da der erweiterte Sequenzenkalkül nicht vollständig ist. Es gibt also Sequenzen, die gültig sind, jedoch nicht als gültig abgeleitet werden:

Das erweiterte Sequenzenkalkül ist jedoch nicht korrekt.
Sei $\Gamma = \{x\}, \Delta = \emptyset, \psi = x, \vartheta = \neg x$. Dann ist $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta$ nach dem unveränderten Sequenzenkalkül offensichtlich gültig:

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{x \Rightarrow x, \neg x}{x \Rightarrow x \vee \neg x}$$

Unter Verwendung von $(\Rightarrow \vee)'$ erhalten wir jedoch eine falsifizierende Interpretation $\mathfrak{I}$:

$$(\Rightarrow \vee)'\ \frac{x \Rightarrow x \qquad (\Rightarrow \neg)\ \dfrac{x \Rightarrow \emptyset}{x \Rightarrow \neg x}}{x \Rightarrow x \vee \neg x}$$

$\mathfrak{I} : x \mapsto 1$

Da wir nun aus einer gültigen Sequenz Ungültigkeit ableiten können, ist das erweiterte Sequenzenkalkül nicht vollständig.

Damit beide Interpretationen falsifizierend sind, müsste der erweiterte Sequenzenkalkül vollständig sein.

Aufgabe 5

Sei der Baum T folgendermassen definiert:

Jeder Knoten im Baum ist eine Fliesenverlegung $f : (\{0, ..., n\}, \{0, ..., n\}) \to \{0, ..., m\}$ wobei n der Tiefe der Tiefe des Knotens im Baum entspricht. Für die Wurzel gilt also $f_w : (\{\}, \{\}) \to \{0, ..., m\}$, was die eindeutige Fliesenverlegung für einen Raum der Grösse 0×0 ist.

Für jeden Knoten mit der Fliesenverlegung f und einer Tiefe n bilden wir die möglichen Kinderknoten f' folgendermassen:

$f' : (\{0, ..., n, n+1\}, \{0, ..., n, n+1\}) \to \{0, ..., m\}$ wobei gelten muss $f'(x, y) = f(x, y)$ für alle $0 \leq x, y \leq n$.

Jeder Kinderknoten ist also eine Erweiterung der Fliesenverlegung auf eine Reihe und eine Spalte mehr.

Für die restlichen $f'(x, y)$ für $x = n + 1$ oder $y = n + 1$ muss sichergestellt werden, dass die Fliesenverlegungsregeln eingehalten werden. Für $f'(x, y)$ und $0 \leq x, y \leq n$ gelten die Fliesenverlegungsregeln bereits wegen dem induktiven Aufbau des Baums.

Da nicht sichergestellt ist das es so eine Fliesenverlegung f' existiert kann es Knoten geben die keine Kinder haben und somit ein Blatt sind.

Um das Lemma von König anwenden zu können müssen wir noch zeigen, dass alle Knoten endliche Unterknoten haben. Das ist natürlich offensichtlich da jeder Knoten der Tiefe i höchstens m^{2i+1} Kinderknoten haben kann.

Also können wir das Lemmma von König anwenden. Wenn es also für m verschiedene Fliesen möglich ist für jedes beliebiges n eine Fliesenverlegung f zu finden, dann gibt es im Baum T ebenfalls diese Fliesenverlegung f. Aufgrund der Konstruktion hat f die Tiefe n und somit gibt es in T für jedes beliebige n einen Weg $(f_0, f_1, ..., f_n)$ der Länge n. Das Lemma von König folgert nun, dass es somit auch einen unendlichen Weg $(f_0, f_1, ...)$ in T gibt. Dauraus folgt, dass es eine Fliesenverlegung $f : (\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to \{0, ..., m\}$ gibt indem man $f(x, y) = f_{max\{x,y\}}(x, y)$ nutzt.