Gesamtpunkte:


MaLo
SS 2021
19. Juni 2021

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959


# Übungsblatt 08

## Aufgabe 1

E-Test

## Aufgabe 2

(a) Folgt aus Skript Lemma 3.14: Eine Theorie ist genau dann vollständig, wenn alle ihre Modelle elementar äquivalent sind. Aus der Aufgabenstellung folgt, dass alle Modelle von der Theorie elementar äquivalent zu $(\mathbb{N}, \cdot, <)$ sind und somit gilt: alle Modelle sind elementar äquivalent und deswegen ist die Theorie vollständig.

(b) Nach Skript Definition 3.12: die Theorie von jeder Struktur $\mathfrak{A}$ist öffensichtlich"vollständig, also auch $\mathrm{Th}((\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot))$

(c) (i)

(ii)

(d) Alle zu $(\mathbb{Z}, <)$ isomorphen Strukturen sind implizit auch elementar äquivalent. Deswegen folgt wie in a), dass die Theorie vollständig sein muss.

## Aufgabe 3

(a) $\mathfrak{A} \coloneqq (\{q \mid q \in \mathbb{Q}, 0 \leq q \leq 1\}, <)$
$\mathfrak{B} \coloneqq (\{r \mid r \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq 1\}, <)$

(b)

(c)

# Aufgabe 4

(a) $m = 4$:
Strategie des Herausforderers für $m = 4$:
Wähle $v$. Um die Kantenrelation (Selbstkante) nicht zu verletzen, muss die Duplikatorin nun 6 auswählen. Anschließend wählt der Herausforderer $p$ aus. Da es eine Kante zwischen $v$ und $p$ gibt, muss $p$ auf einen Knoten abgebildet werden, sodass dieser auch mit 6 verbunden ist. Die Duplikatorin wählt also 1 aus. Nun wählt der Herausforderer $r$ aus. $r$ steht nicht in der Kantenrelation bezüglich $p$ oder $v$, folglich muss die Duplikatorin entweder 3 oder 4 auswählen. Unabhängig davon, was gewählt wird, wählt der Herausforderer nun $t$, welcher ebenfalls keine Kante zu den anderen Knoten hat. Die Duplikatorin kann nun aber nichtmehr einen Knoten auswählen.

Strategie der Duplikatorin für $m = 3$:
Egal welche Knoten der Herausforder wählt, kann die Duplikatorin immer einen passenden Knoten finden, sodass die Kantenrelationen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen.

(b) $m = 2$:
Strategie des Herausforderers für $m = 2$:
Wähle $\{0, 1\}$, dann ist es egal welchen knoten $k \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ die Duplikatorin wählt weil eine beliebige Obermenge von k von dem Herausforderer im zweiten Schritt ausgewählt werden kann und dies von der Duplikatorin in $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ nicht nachmachen kann.

Strategie der Duplikatorin für $m = 1$:
Egal was gewählt wird einfach irgend ein Element aus der anderen Potenzmenge wählen.

(c) $m = 2$:
$\varphi = \exists x \exists y (M(x, x, x) \wedge M(y, y, x) \wedge x \neq y)$
Für $\mathbb{Z}$ geht das für $x = 1, y = -1$.
Für $\mathbb{N}$ geht das nicht, denn $x$ müsste 0 oder 1 sein aber es gibt keine Zahl $y$ unterschiedlich zu $x$ die multipliziert mit sich selber $x$ ergibt.

Strategie der Duplikatorin für $m = 1$:
Falls der Herausforderer 0 oder 1 wählt, nehme die selbe Zahl im anderen Universum. Andernfalls wähle die 2 im entsprechenden Universum.

## Aufgabe 5

Sei $B$ ein unendlicher ungerichtete Graph, sodass es einen Knoten $k$ gibt, der zu allen anderen Knoten verbunden ist, ohne dass diese anderen unter sich verbunden sind (Sterförmig). Dieser Graph ist offensichtlich nicht in $\mathcal{K}$, weil $k$ einen unendlichen Grad hat.
Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ sei $A_m$ ein Graph mit $m+1$ Knoten. $A_m$ hat ebenfalls einen zentralen Knoten $k'$ und weitere $m$ Peripherieknoten, die alle mit dem zentralen Knoten verbunden sind, ohne untereinander verbunden zu sein. Egal welche $m$ Knoten der Herausforderer in einem der beiden Graphen auswählt, die Duplikatorin kann immer einen entsprechenden Peripherieknoten bzw. den zentralen Knoten im anderen Graphen finden und trotzdem die Kantenrelation nicht verletzen.
Da alle $A_m$ in der Klasse $\mathcal{K}$ liegen und alle $A_m$ $m$-equivalent zu $B$ sind, ist $\mathcal{K}$ nicht FO-axiomatisierbar.