

MaLo  
SS 2021  
6. Juni 2021

## Übungsblatt 06

Marc Ludevid 405401  
Andrés Montoya 405409  
Til Mohr 405959

### Aufgabe 1

E-Test

### Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &:= Qy \vee \neg \forall x (Px \rightarrow \exists z \neg (Rfzz \wedge c < z)) \\
 &\equiv Qy \vee \exists x (\neg (Px \rightarrow \exists z \neg (Rfzz \wedge c < z))) \\
 &\equiv Qy \vee \exists x (\neg (\neg Px \vee \exists z \neg (Rfzz \wedge c < z))) \\
 &\equiv Qy \vee \exists x (Px \wedge \forall z (Rfzz \wedge c < z))
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &:= (\neg \exists x Pffx \vee \forall x (Qx \wedge Rxy)) \wedge x < y \wedge Rcz \\
 &\equiv (\forall a (\neg Pffa) \vee \forall b (Qb \wedge Rby)) \wedge x < y \wedge Rcz \\
 &\equiv \forall a \forall b (((\neg Pffa) \vee (Qb \wedge Rby)) \wedge x < y \wedge Rcz)
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

(a)

$$(\mathbb{N}, +, 0)$$

(b)

$$\varphi = \forall x (x + f(x) = 0)$$

$\varphi$  und  $\psi$  sind nicht logisch äquivalent.

(c)

$$\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, +, -, 0)$$

Dann kann man  $f$  wählen als  $f(x) = 0 - x$ . Dann gilt  $\mathfrak{B} \models \varphi$ .

- (d) Nein gibt es nicht. Jede Substruktur  $\mathfrak{C}$  von  $\mathfrak{B}$  muss  $\{+, -, 0\}$  abgeschlossen sein. Damit muss 0 immer im Universum enthalten sein. Es gilt jedoch  $(\{0\}, +, -, 0) \models \psi$  (da  $0 + 0 = 0$ ). Fügt man nur schon ein weiteres Element dem Universum hinzu, muss aufgrund der  $\{-\}$ -Abgeschlossenheit auch das additive Inverse hinzugefügt werden. Damit gilt für jede Substruktur  $\psi$

## Aufgabe 4

(a) (i)

$$\begin{aligned}
 \Phi_i := \{ & \forall x \forall y (x \circ y = y \circ x), & \text{kommutativ} \\
 & \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z), & \text{assoziativ} \\
 & \forall x (x \circ e = x), & \text{e ist neutrales Element} \\
 & \forall x \exists y (x \circ y = e), & \text{inverses Element} \\
 & \exists x_1 \dots \exists x_6 \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq i, j \leq 6 \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \right), & \text{mindestens 6 Elemente} \\
 & \forall x_1 \dots \forall x_{10} \left( \left( \bigwedge_{\substack{1 \leq i, j \leq 9 \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \right) \rightarrow \left( \bigvee_{1 \leq i \leq 9} x_i = x_{10} \right) \right) \} & \text{nicht mindestens 10 Elemente}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ii} := \{ & \forall x (x < x), & \text{reflexiv} \\
 & \forall x \forall y ((x < y \wedge y < x) \rightarrow x = y), & \text{asymmetrie} \\
 & \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \} & \text{transitiv}
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{iii} := \{ & \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y), & \text{injektiv} \\
 & \forall x \exists y (y = f(x) \wedge Oy), & f(U) \subseteq O \\
 & \forall y \exists x (Oy \rightarrow f(x) = y), & O \subseteq f(U) \\
 & \neg Os \} & s \notin O
 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{iv} := \{ & \forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx), & \text{Beidseitige Kantenrichtung} \\
 & \neg Ecd, & \text{c und d nicht verbunden} \\
 & \forall x_1 (\neg (Exx_1 \wedge Ex_1d)), & \text{c und d nicht über 1 Knoten verbunden} \\
 & \forall x_1 \forall x_2 (\neg (Exx_1 \wedge Ex_1x_2 \wedge Ex_2d)), & \text{c und d nicht über 2 Knoten verbunden} \\
 & \dots \} & \dots
 \end{aligned}$$

(b)  $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, f, \mathbb{N} \setminus \{0\}, 0)$  mit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}, x \mapsto x + 1$ .

Jedes Modell muss unendlich sein, da  $s \notin O = f(U)$ . Demnach ist  $|U| \geq |O| + 1$ . Dies ist nur erfüllt, wenn sowohl  $U$  als auch  $O$  unendlich sein.

(c) Bauch sagt ja.

## Aufgabe 5

(a) Sei  $\varphi = x \vee y$ ,  $\psi = \neg x \vee y$  und  $\Phi = \{y\}$ . Dann ist offensichtlich  $\varphi \not\equiv \psi$ , jedoch gilt  $\Phi \models \varphi \leftrightarrow \psi$ .

(b)

(c)