

MaLo
SS 2021
30. April 2021

Übungsblatt 01

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) Aus der VL wissen wir, dass $\{\neg, \wedge\}$ funktional vollständig ist.

- $\neg x \equiv m(x, x, x, x)$
- $x \wedge y \equiv m(x, x, y, m(x, x, x, x))$

Da $\{\neg, \wedge\}$ funktional vollständig ist und wir dies mit $\{m\}$ darstellen können, ist auch $\{m\}$ funktional vollständig.

(b)

(c)

Aufgabe 3

(a)

$$M_0 = \emptyset$$

$$M_1 = \{B\}$$

$$M_2 = \{B, D\}$$

$$M_3 = \{B, D, F, A\}$$

$$M_4 = \{B, D, F, A\} := M$$

Der Algorithmus terminiert.

Das Minimale Modell ist: $\mathfrak{J} : A \mapsto 1, B \mapsto 1, C \mapsto 0, D \mapsto 1, E \mapsto 0, F \mapsto 1$

(b) Φ ist offensichtlich äquivalent zu $\Phi' := \{X \rightarrow Y, X \wedge Z \rightarrow Y\}$ und ψ äquivalent zu $\psi' := (X \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z) = (X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z)$

...

Aufgabe 4

$$(a) \quad \varphi = \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i \text{ mit } \varphi_i = \begin{cases} (\bigwedge_{j=1}^{m_i-1} X_{i,j}) \rightarrow X_{i,m_i} \\ \bigwedge_{j=1}^{m_i} X_{i,j} \end{cases}.$$

Offensichtlich gilt für ein $\mathfrak{I} \models \varphi$ auch $\mathfrak{I} \models \varphi_i$ für alle i in φ .

Sei nun $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$, $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$. Für jedes i in φ unterscheiden wir nun 2 Fälle:

- Falls für alle $1 \leq j \leq m_i$ gilt: $\mathfrak{I}_1(X_{i,j}) = 1 = \mathfrak{I}_2(X_{i,j})$, dann ist auch $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(X_{i,j}) = 1$, weshalb $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ stimmt.
- Falls für ein $1 \leq j \leq m_i$ gilt: $\mathfrak{I}_1(X_{i,j}) = 0$ oder $\mathfrak{I}_2(X_{i,j}) = 0$, dann ist auch $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(X_{i,j}) = 0$, weshalb $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ stimmt.

Also gilt $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ für alle i in φ , weshalb auch $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi$ gelten muss.

- (b) Da Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, muss es auch immer ein eindeutiges kleinstes Modell zu einer Horn-Formel φ geben: Gäbe es kein eindeutiges kleinstes Modell, sondern 2 voneinander verschiedene minimale Modelle $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ so wäre $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \not\models \varphi$, da $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \leq \mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \leq \mathfrak{I}_2$, jedoch $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ minimal sind, also insbesondere $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2$ nicht minimal.

Widerspruch!

Es muss immer ein eindeutiges kleinstes Modell zu einer Horn-Formel φ geben!

- (c) • $\mathfrak{I}_1 : T, R, U \mapsto 1; S \mapsto 0$ und $\mathfrak{I}_2 : T, S, R \mapsto 1; U \mapsto 0$ sind Modelle von φ_1 , jedoch ist $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 : T, R \mapsto 1; S, U \mapsto 0$ kein Modell von φ_1 . Da jedoch Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, ist φ_1 nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.
-

$$\begin{aligned} \varphi_2 &\equiv (\neg A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (\neg B \rightarrow (A \vee C)) \wedge (\neg C \rightarrow (A \vee B)) \\ &\equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \\ &\equiv A \vee B \vee C \end{aligned}$$

Auch dies ist offensichtlich keine Horn-Formel aus derselben Begründung. Zudem darf eine Klausel in einer Horn-Formel höchstens ein positives Literal vorkommen. Hier sind es aber 3.

Aufgabe 5

- (a) (i) Diese Aussage ist richtig.
 Wie oben bereits gesagt, gilt $\Phi \models \psi$ offensichtlich für alle $\psi \in \Psi$, wenn $\Phi \models \bigwedge \Psi$ gilt. Also muss auch für jedes $\Psi_0 \subseteq \Psi$ $\Phi \models \psi_0$ für alle $\psi_0 \in \Psi_0$ gelten, also auch $\Phi \models \Psi_0$.
- (ii) Diese Aussage ist falsch.
 Sei $\Phi = \Psi = \{X\}$ und $\Psi_0 = \{X, \neg X\}$. Es gilt zwar $\Phi \models \Psi$, jedoch nicht $\Phi \models \Psi_0$!
- (b) Angenommen Φ ist erfüllbar und es gilt $\Phi \models \psi$. Dann gibt es also ein Modell \mathcal{I} zu Φ , welches auch Modell von ψ ist. Dann kann aber $\Phi \models \neg\psi$ nicht gelten, da dieses Modell \mathcal{I} kein Modell von $\neg\psi$ sein kann. Dies führt zum Widerspruch. Also kann Φ nicht erfüllbar sein.
- (c) Da $\Psi_i \cap \Psi_{i+1} = \Psi_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i \models \vartheta$

Aufgabe 6

$$\Phi := \{X_u \oplus X_v \mid \{u, v\} \in E\}$$

Wenn Kante zwischen u und v , dann muss einer der beiden in W_0 sein ($X_i = 0$), der andere in W_1 ($X_i = 1$).