Gesamtpunkte:

MaLo SS 2021 11. Juli 2021	Übungsblatt 11	Marc Ludevid 405401 Andrés Montoya 405409 Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Wir suchen ein unendliches Axiomensystem Ψ, welches die Klasse $\mathcal{K}$ widerspricht. Ψ soll also genau die Klasse der ungerichteten Graphen G axiomatisieren, welche eine unendliche Clique enthalten. Enthält G eine unendliche Clique, so enthält G offensichtlich für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Clique der Länge n. Wir können Ψ also wie folgt aufstellen:

$$\Psi := \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \to Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

, wobei $\psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge Ex_ix_j)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Hilfsformel für eine Clique der Länge n ist.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Axiomensystem Φ, welches $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach dem KS existiert eine endliche Teilmenge $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$, welches bereits unerfüllbar ist.
Sei $\Psi_0 := \Theta_0 \cap \Psi$. Es existert wegen Endlichkeit ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\psi_n \notin \Psi_0$ für alle $n \geq m$. Es folgt $\Psi_0 \subseteq \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \to Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n < m\}$
Betrachte $\mathfrak{A} := (V := \mathbb{N}, E := \mathbb{N} \times \mathbb{N})$. $\mathfrak{A}$ ist dann also ein ungerichteter Graph, welcher eine Clique mit unendlicher Länge ist. Es gilt also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, weshalb auch $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt.
Jedoch gilt auch $\mathfrak{A} \models \Psi_0$ offensichtlich. Also folgt $\mathfrak{A} \models \Theta_0$. Jedoch soll Θ_0 unerfüllbar sein.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 3

(a)

(b)

$$
\begin{aligned}
\Phi_b :=\{&\forall x \forall z \exists y(x+y=z),\\
&\exists x \forall y(x+y=y),\\
&\forall x \forall y(x+y=y+x),\\
&\exists x_1 \ldots \exists x_n((\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_y) \wedge (\forall y \bigvee_{1\leq i\leq n} y = x_i))\}
\end{aligned}
$$

??? Darf man so Endlichkeit ausdrücken?

(c) U muss hier einelementig sein. Angenommen U ist mindestens zweielementig, aber immer noch endlich. Dann gilt ja für alle $x, y \in U$ mit $x < y$, dass ein z existiert, sodass $x < z \wedge z < y$. Per Induktion stellt man schnell fest, dass U unendlich sein muss. Dies ist ein Widerspruch.
Man kann die Klasse $\mathcal{K}_c$ axiomatisieren durch:

$$\Phi_c := \{\forall x \forall y(x=y)\}$$

(d) Da $f(U) \subseteq U$, gilt auch $|f(U)| \leq |U|$. Da $f(U)$ unendlich ist, ist folglich auch U unendlich.
Sei φ_n eine Hilfsformel, dass mindestens n verschiedene Elemente in U existieren:
$\varphi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n(\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j)$
Sei φ'_n eine Hilfsformel, dass mindestens n verschiedene Elemente in $f(U)$ existieren:
$\varphi'_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n(\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j \wedge f(x_i) \neq f(x_j))$
Dann ist Φ_d ein unendliches Axiomensystem mit:

$$\Phi_d := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\varphi'_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

$\mathcal{K}_d$ ist nach dem Kompaktheitssatz nicht endlich axiomatisierbar, weil keine endliche Teilmenge von Φ_d existiert, welches $\mathcal{K}_d$ axiomatisiert.
Angenommen $\Phi_0 \subseteq \Phi_d$ sei eine Formel, die $\mathcal{K}_d$ endlich axiomatisiert. Dann gibt es ein $m, m' \in \mathbb{N}$, sodass m der Index der größten Hilfsformel φ_n in Φ_0 ist. Wenn kein φ_n in Φ_0 ist, dann kann Φ_0 $\mathcal{K}_d$ offensichtlich nicht axiomatisieren, weil die Unendlichkeit von U nicht gegeben ist. Sei m' der Index der größten Hilfsformel φ'_n in Φ_0. Wenn kein φ'_n in Φ_0 ist, dann kann Φ_0 $\mathcal{K}_d$ offensichtlich nicht axiomatisieren, weil die Unendlichkeit von $f(U)$ nicht gegeben ist.
Sei $\mathfrak{A} := (\{0, \ldots, \max(m, m') + 1\}, \mathbb{1}, 0)$. Dann gilt offensichtlich $\mathfrak{A} \models \Phi_0$, aber, da $\mathfrak{A}$ endlich ist, ist $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}_d$.
Nach dem KS ist $\mathcal{K}_d$ nicht endlich axiomatisierbar.

(e)

(f)

(g) Die Signatur ist mit $\tau_g := ((R_n)_{n\in\mathbb{N}})$ offensichtlich abzählbar. Wegen der Definition von R_n sind alle a_S unterscheidbar. Man kann also von jedem a_S auf ein $S \subseteq \mathbb{N}$ schließen (bijektiv). Deshalb gilt: $|A| = |\operatorname{Pot}(\mathbb{N})|$ überabzählbar.
Satz von LS$\downarrow$:

Angenommen es gibt ein Φ_g, welches $\mathcal{K}_g$ axiomatisiert. Da die Signatur abzählbar ist, ist Φ_g abzählbar. Nach LS$\downarrow$ hat $\mathcal{K}_g$ ein abzählbares Modell. Jedoch gibt es in $\mathcal{K}_g$ keine endlichen Strukturen.
Widerspruch. $\mathcal{K}_g$ ist nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 4

Da die Klasse der Cliquen aufzählbar ist (für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie genau ein Element in der Klasse der Cliquen mit n Knoten) kann der Algorithmus einfach alle Cliquen durchlaufen und wird auf jeden Fall die Clique G finden die φ erfüllt.
Zu klären ist aber noch wann dieser Algorithmus terminieren soll, wenn es solch eine Clique nicht gibt. Dafür verwenden wir den Quantorenrang des Satzes φ. Für Quantorenrang m kann der Algorithmus nach $m + 1$ Schritten aufhören. Angenommen es gibt eine Lösung $\mathcal{G}$ mit mehr als $m + 1$ Knoten. Dann ist $\mathcal{G}'$ mit $m + 1$ Knoten ebenfalls eine Lösung, denn es gilt $\mathcal{G} \equiv_m \mathcal{G}'$. Dies liegt daran, dass die Duplikatorin für beliebigen Knoten in $\mathcal{G}$ oder $\mathcal{G}'$ jeweils einen beliebig noch nicht ausgesuchten Knoten aus dem anderen Graphen wählen kann weil alle Knoten einer Clique isomorph zueinander sind.

Aufgabe 5*

(a) (i) z.z.: Für alle $\mathfrak{A} \in K$ gilt: $\mathfrak{A} \in K^*$.
Folgt aus Definition von $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$. $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) := \{\varphi \in \mathrm{FO}(\tau) \mid \mathfrak{A} \models \varphi, \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$, also gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ offensichtlich auch $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$.

(ii) z.z.: Für jedes Axiomensystem Φ sodass $K \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi)$ gilt auch $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi)$.
Sei also Φ beliebig sodass für jedes $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann gilt für jedes $\varphi \in Phi$: $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ wegen definition von der Theorie einer Klasse. Also gilt offensichtlich auch $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi)$

(b)