Gesamtpunkte:

MaLo		Marc Ludevid 405401
SS 2021	Übungsblatt 07	Andrés Montoya 405409
11. Juni 2021		Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a)

$$W_0 = \{7, 9\}$$
$$W_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Position	Spieler 0	Spieler 1
0	-	0
1	-	1
2	-	2
3	-	4
4	-	3
5	-	0
6	-	-
7	1	-
8	-	-
9	0	-

(b) $\mathcal{G}$ ist nicht fundiert weil es im Graphen einen Zykel gibt (Knoten 6 und 8). $\mathcal{G}$ ist ebenfalls nicht determiniert weil der Knoten 6 in keiner Gewinnregion ist und die Vereinigungsmenge von den Gewinnregionen nicht alle Knoten enthält. Dass Knoten 6 in keiner Gewinnregion ist liegt daran, dass im Knoten 6 Spieler 0 nach Knoten 8 gehen würde. Dort würde jedoch Spieler 1 wieder nach 6 zurückwollen, da Knoten 7 in der Gewinnregion von Spieler 0 liegt.

(c) Spieler 0 wird einen der Knoten aus seiner Gewinnmenge wählen wollen. Somit muss Spieler 1 versuchen diese zu leeren. Wenn Spieler 1 nicht den Knoten 9 entfernt, dann wählt Spieler 0 Knoten 9 und hat somit direkt gewonnen. Also muss Spieler 1 Knoten 9 entfernen. Danmit ist auch Knoten 7 kein Knoten der Gewinnmenge mehr, denn da Knoten 9 nicht mehr zur Verfügung steht muss in diesem Knoten Spieler 0 die Kante nach Knoten 5 wählen welches ein Siegesknoten von Spieler 1 ist.

Aufgabe 3

(a) $v_s := 2$

$$f_0 : 1 \mapsto 0, 3 \mapsto 2, 6 \mapsto 8, 7 \mapsto 9$$
$$f_1 : 2 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 6$$

Spieler 1 gewinnt.

$v_s := 2$

$$f_0 : 1 \mapsto 0, 3 \mapsto 2, 6 \mapsto 8, 7 \mapsto 9$$
$$f_1 : 2 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 6$$

Unentschieden. Spieler 0 muss zu 8 gehen, da sonst verloren. Spieler 8 muss zurück zu 6 gehen, da sonst verloren (Spieler 0 kann sonst von 7 zu 9).

(b) Um zu beweisen, dass jeder abgeschnittenes Spiel für jeden Startknoten entweder eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler gibt oder dass beide Spieler ein Remis erzwingen können unterscheiden wir für alle Startknoten zwei Fälle:

- Fall $v_s \in V$ hat Gewinnstrategie für einen der Spieler: Aussage gilt trivialerweise.
- Fall $v_s \in V$ hat keine Gewinnstrategie für beide Spieler: z.z. Es gibt eine Strategie für beide Spieler um ein Remis zu erzwingen. Dazu konstruieren wir zwei neue zykelfreie Graphen in denen ein Remis jeweils als Gewinn für einen der beiden Spieler gilt. Diese neue Graphen entstehen durch eine Tiefensuche über den ursprünglichen Graphen. Man startet beim Startknoten v_s, fügt diesen zu den neuen Graphen hinzu und sucht alle Nachfolgeknoten $v_i \in v_s E$. Für jeden dieser Nachfolgeknoten $v_i \in v_s E$ fügt man einen Knoten $v_{s,i}$ in die neuen Graphen hinzu. Dabei ist $v_{s,i} \in V_0$ des neuen Graphens falls $v_i \in V_0$ im alten Graphen galt. Ebenso gilt $v_{s,i} \in V_1$ falls $v_i \in V_1$. An dem Index der neuen Knoten kann man erkennen welche Knoten des ursprünglichen Graphens durchlaufen wurden. Somit ist ein Knoten genau dann ein Remis wenn ein Indize doppelt vorkommt. In diesen Fällen liegt $v_{s,i} \in V_1$ im ersten neuen Graphen und $v_{s,i} \in V_0$ im zweiten neuen Graphen. Dies ist hier natürlich nur möglich wenn $s = i$ also wenn der Knoten v_s eine Kante zu sich selber hat. Für alle anderen Knoten wird die Tiefensuche gleichermassen fortgeführt. Zusammenfassend haben wir zwei zykelfreien Graphen in dem jeweils der Spieler 0 oder 1 bei Remis gewinnt. Bis auf das Verhalten bei Remis verhalten sich diese zwei Graphen offensichtlich genau gleich wie der ursprüngliche Graph, denn es werden alle möglichen Spiele aufgelistet die dort möglich gewesen wären, wobei das Gewinnverhalten bis auf das Remis beibehalten bleibt.
  Betrachtet man nun den ersten neuen Graphen fallen zwei neue Eigenschaften auf:
  - Da der Graph zykelfrei ist, ist er fundiert und somit determiniert. Dementsprechen gilt: $W_0 \cup W_1 = V$.
  - Weil es für v_s keine Gewinnstrategie für Spieler 1 im ursprünglichen Graphen gab gilt auch in diesem neuen Graphen $v_s \notin W_1$, denn es wurden keine neuen Knoten hinzugefügt die zu einem Gewinn von Spieler 1 führen.

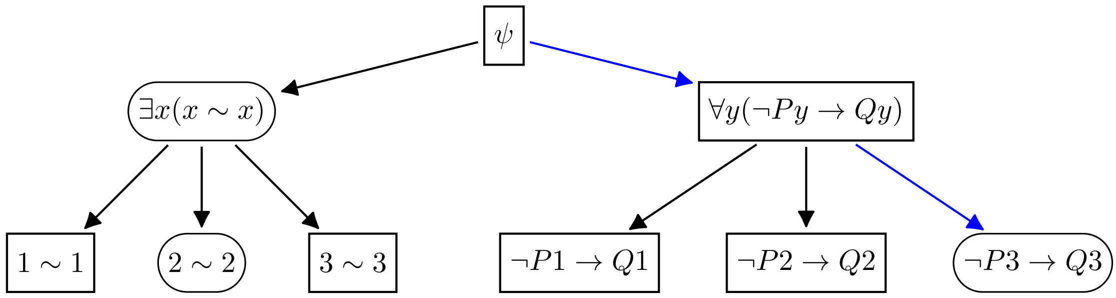
  Daraus folgt dass $v_s \in W_0$ und da $v_s \notin W_0$ im ursprünglichen Graphen galt, muss die Gewinnstrategie zu einem Remis führen. Somit hat Spieler 0 eine Spielstrategie das ein Remis erzwingt.

Das selbe Argument gilt für Spieler 1 und dem zweiten neuen Graphen. Deswegen hat auch Spieler 1 eine Spielstrategie um ein Remis zu erzwingen.

Da die Aussge für beide Fälle gilt, ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 4

$\mathfrak{A} \models \psi$ kann als folgendes Auswertungsspiel $MC(\mathfrak{A}, \psi)$ modeliert werden:



Der Falsifizierer hat eine Gewinnstrategie von der Ausgangsposition aus: siehe blaue Pfeile. Also gilt $\mathfrak{A} \models \psi$ nicht.

Aufgabe 5

(a) (i) Sei π die Abbildung die jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ in seine Primfaktoren zerlegt, jedes Vorkommen von 2 durch eine 3 ersetzt und jedes Vorkommen von einer 3 durch eine 2 ersetzt und diese Faktoren dann wieder aufmultipliziert. Diese Abbildung ist bijektiv, weil $a \neq b \Rightarrow \pi(a) \neq \pi(b)$, denn wegen $a \neq b$ sind auch die Primfaktorenzerlegungen unterschiedlich und auch nach dem Vertauschen von 2 und 3 diese unterschiedlich sein müssen und somit $\pi(a) \neq \pi(b)$ gelten muss, und $\forall y \exists x(y = \pi(x))$ indem man $x = \pi(y)$ wählt, da $\pi(\pi(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Nun muss noch gezeigt werden, dass für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ gilt: $\pi(a_1 \cdot a_2) = \pi(a_1) \cdot \pi(a_2)$. Das ist jedoch offensichtlich, da bei Multiplikation die Primfaktoren beider Zahlen erhalten bleiben und es somit irrelevant ist ob die Vertauschung der Primfaktoren vor oder nach der Multiplikation stattfindet.

Somit ist π ein nicht-trivialer Automorphismus von $(\mathbb{N}, \mathbb{P}, \cdot)$.

Not sure ob wir noch zeigen müssen dass das auch für die Nullstelligen Funktionen aka $\mathbb{P}$ gilt????

(ii) Es gibt den folgenden nicht-trivialen Automorphismus: $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 4$, $\pi(4) = 2$ und $\pi(3) = 3$.

Beweis??? Intuitiv gilt: 1 und 3 sind unterscheidbar (einer hat nur ausgehende Kanten, der andere nur eingehende) aber 2 und 4 sind genau gleich (Empfangen eine Kante von 1, haben eine zu 3 und haben jeweils eine Kante zum jeweils anderen). Beweis muss zeigen, dass jegliche FO diese beiden nicht unterscheiden kann. Wahrscheinlich per strukturelle Induktion aber keine Ahnung.

(iii) Angenommen es gäbe eine Permutation π die ein nicht-trivialer Automorphismus ist. $\pi(-1) = -1$ denn sonst $\exists x(-1 < x \wedge x < 0)$. Selbe Argument lässt sich für alle negativen Zahlen fortführen. Ausserdem gilt $\pi(1) = 1$ denn sonst $\exists x(0 < x \wedge x < 1$. Dieses Argument lässt sich für alle positiven Zahlen fortführen. Schliesslich muss $\pi(0) = 0$ sein weil kein anderes Bild mehr zur verfügung steht. Somit ist π aber der triviale Automorphismus.

(b)

(c)

Aufgabe 6

(a)

(b)

(c)

(d)