### Ge samt punkte:

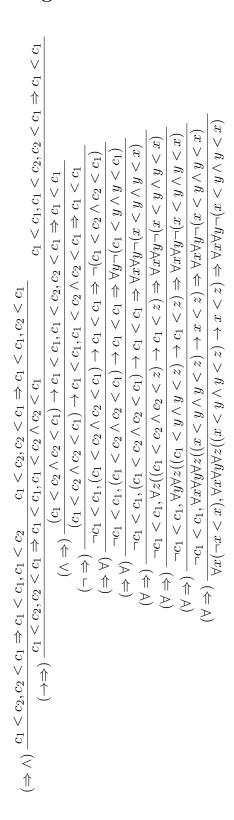
MaLo		Marc Ludevid	405401
SS 2021	Übungsblatt 09	Andrés Montoya	405409
26. Juni 2021	_	Til Mohr	405959

## Aufgabe 1

E-Test

# Aufgabe 2

### Aufgabe 3



Da alle Blätter Axiome sind, ist die Sequenz gültig.

### Aufgabe 4

- (a) (i)
  - (ii) Dagnicht in  $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$ vorkommt, kann man gso wählen, dass g(x)genau dem yaus der Konklusion entspricht. Gilt die Prämisse, so folglich auch die Konklusion, da wir ymit dem g(x) "ersetzen" können.
- (b) (i)
  - (ii)

#### Aufgabe 5

(a) (i) Damit  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  ist, muss sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

Für jedes  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  gilt offensichtlich  $A \sim A$ , da |A| = |A|.  $\sim$  ist also reflexiv.

Seien  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Angenommen es gilt  $A \sim B$ . Dann gilt |A| = |B|, welches äquivalent ist zu |B| = |A|. Folglich ist  $\sim$  symmetrisch.

Seien  $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Angenommen es gilt sowohl  $A \sim B$  als auch  $B \sim C$ . Dann muss ja gelten, dass |A| = |B| und |B| = |C|. Insbesondere gilt dann auch |A| = |C|. Folglich muss dann auch  $A \sim C$  gelten.  $\sim$  ist also transitiv.

Damit ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

(ii) Damit  $\sim$ auf  ${\mathfrak A}$ eine Kongruenz<br/>relation ist, muss unter anderem  $\cup$ mit <br/>  $\sim$ verträglich sein.

Seien 
$$A_1 := \{1, 2\}, A_2 := \{3, 4\}, B_1 := \{5, 6\}, B_2 := \{6, 7\}.$$
  
Es gilt offensichtlich  $A_1 \sim B_1$  und  $A_2 \sim B_2$ . Jedoch gilt  $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$   
nicht, da  $|A_1 \cup A_2| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4 \neq 3 = |\{5, 6, 7\}| = |B_1 \cup B_2|$ .

Damit ist  $\sim$  keine Kongruenzrelation auf  $\mathfrak{A}$ .

(b) (i) Seien  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  und gelte  $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$ . Wir müssen nun zeigen, dass  $\cup$  und  $\cap$  mit  $\sim_2$  verträglich sind.

Es gelte  $A_1 \cup A_2 \sim_2 B_1 \cup B_2$ , denn:

$$((A_1 \cup A_2) \cap 2\mathbb{N}) = (A_1 \cap 2\mathbb{N}) \cup (A_2 \cap 2\mathbb{N})$$

$$\stackrel{*}{=} (B_1 \cap 2\mathbb{N}) \cup (B_2 \cap 2\mathbb{N})$$

$$= ((B_1 \cup B_2) \cap 2\mathbb{N})$$

\* gilt, da eben  $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$ . Folglich ist  $\cup$  mit  $\sim$  verträglich.

Es gelte  $A_1 \cap A_2 \sim_2 B_1 \cap B_2$ , denn:

$$((A_1 \cap A_2) \cap 2\mathbb{N}) \stackrel{*}{=} (A_1 \cap A_2 \cap 2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N})$$

$$= (A_1 \cap 2\mathbb{N}) \cap (A_2 \cap 2\mathbb{N})$$

$$\stackrel{**}{=} (B_1 \cap 2\mathbb{N}) \cap (B_2 \cap 2\mathbb{N})$$

$$\stackrel{*}{=} (B_1 \cap B_2 \cap 2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N})$$

$$= ((B_1 \cap B_2) \cap 2\mathbb{N})$$

\* gilt, da eben  $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$ .

\*\* gilt, da offensichtlich für jede Menge X gilt:  $X = X \cap X$ .

Folglich ist  $\cap$  mit  $\sim$  verträglich.

Also ist  $\sim_2$  eine Kongruenz relation auf  ${\mathfrak A}.$ 

(ii)