

MaLo  
SS 2021  
2. Mai 2021

## Übungsblatt X

Marc Ludevid 405401  
Andrés Montoya 405409  
Til Mohr 405959

### Aufgabe 1

E-Test

### Aufgabe 2

(a) Zu zeigen ist, dass man mit  $m$  sowohl  $\neg$  als auch  $\wedge$  dargestellt werden kann, da bekannt ist, dass diese beiden Operatoren zusammen funktional vollständig sind.

- $\neg X \equiv m(X, 0, 0, X)$
- $X \wedge Y \equiv m(1, X, Y, 0)$

(b) Damit eine Menge von Booleschen Funktionen funktional vollständig ist muss es auch den Wert 0 produzieren können (Negation einer Tautologie, also Unerfüllbarkeit). Wir zeigen nun, dass dies mit der gegebenen nicht Menge nicht möglich ist. Wir zeigen also, dass jede aus dieser Menge von Operatoren und einer beliebigen Menge von Variablen konstruierten AL erfüllbar ist.

Induktionsanfang:

- 1 ist offensichtlich erfüllbar.
- $X$  ist ebenfalls offensichtlich erfüllbar.

Induktionsschritt:

$\rightarrow$ : Seien erfüllbare AL-Formeln  $\varphi$  und  $\psi$  gegeben. Dann ist  $\varphi \rightarrow \psi$  ebenfalls erfüllbar, da jede Interpretation die  $\psi$  erfüllt auch  $\varphi \rightarrow \psi$  erfüllt, weil sowohl  $0 \rightarrow 1$  als auch  $1 \rightarrow 1$  equivalent zu 1 sind.

Damit ist bewiesen, dass der Wert 0 nicht produziert werden kann und somit ist die gegebene Menge nicht funktional vollständig.

(c) Für  $f \in B^n$  beliebig gilt laut Aufgabenstellung, dass  $f$  nicht monoton, also gibt es  $a, b \in \{0, 1\}^n$  mit  $a \leq b$  für die gilt:  $f(a) \not\leq f(b)$ , also  $f(a) > f(b)$  bzw.  $f(a) = 1$  und  $f(b) = 0$ . Sei ein Paar  $a, b$  gegeben die diese Bedingung erfüllen. Wenn es mehrere gibt wähle eins, sodass  $b$  minimal ist wenn dieses als Binärzahl interpretiert wird. Da  $a$  und  $b$  nicht gleich sind (andernfalls wäre  $f(a) = f(b)$ ) gilt  $a < b$  und somit gibt es einen Index  $0 \leq i < n$  sodass  $a_i < b_i$ . Dementsprechen ist  $a_i = 0$  und  $b_i = 1$ .

Ausserdem wissen wir, dass aufgrund der Minimalität von  $b$ , wenn man  $b$  so zu  $b_{i=0}$  abwandelt dass man an der Stelle mit Index  $i$  eine 0 einfügt, dann  $f(b_{i=0}) = 1$ . Beweis: Andernfalls wäre  $a, b_{i=0}$  ebenfalls ein Paar, für das sowohl  $a \leq b_{i=0}$ , wegen  $a_i = 0$ , als auch  $f(a) \not\leq f(b_{i=0})$  gilt, weil  $f(b_{i=0}) = 0$  wäre.  $b_{i=0}$  ist als Binärzahl kleiner als  $b$  was der Voraussetzung widerspricht, dass  $b$  minimal gewählt wurde.

Schliesslich definieren wir die Funktion  $b' : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  sodass  $b'(X) = f(b_{i=X})$  wobei  $b_{i=X}$  ein abgeändertes  $b$  ist, wobei  $b_i$  auf den Wert  $X$  gesetzt wurde.

Wir wissen also:

- $b'(1) \equiv 0$ , denn für jedes Paar  $a, b$  für das die Bedingungen der nicht-Monotonie gelten,  $b_i = 1$  sein muss. Somit ist  $b'(1) = f(b)$  denn  $b$  wird nicht abgeändert.
- $b'(0) \equiv 1$ , denn wenn  $b'(0) \equiv 0$  gelten würde,  $a, b_{i=0}$  ein Paar wäre das die Bedingung der nicht-Monotonie erfüllt und somit  $b$  nicht minimal im Sinne einer binären Zahl wäre.

Es gilt also:

$$\neg X = b'(X) \tag{1}$$

Somit haben wir die Negation aus  $b'$  und implizit aus  $f$  abgeleitet und somit ist die gegebene Menge funktional vollständig.