Gesamtpunkte:

MaLo
SS 2021
11. Juli 2021

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Wir suchen ein unendliches Axiomensystem Ψ, welches die Klasse $\mathcal{K}$ widerspricht. Ψ soll also genau die Klasse der ungerichteten Graphen G axiomatisieren, welche eine unendliche Clique enthalten. Enthält G eine unendliche Clique, so enthält G offensichtlich für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Clique der Länge n. Wir können Ψ also wie folgt aufstellen:

$$\Psi := \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

, wobei $\psi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge Ex_i x_j)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Hilfsformel für eine Clique der Länge n ist.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Axiomensystem Φ, welches $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach dem KS existiert eine endliche Teilmenge $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$, welches bereits unerfüllbar ist.
Sei $\Psi_0 := \Theta_0 \cap \Psi$. Es existert wegen Endlichkeit ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\psi_n \notin \Psi_0$ für alle $n \geq m$. Es folgt $\Psi_0 \subseteq \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n < m\}$
Betrachte $\mathfrak{A} := (V := \mathbb{N}, E := \mathbb{N} \times \mathbb{N})$. $\mathfrak{A}$ ist dann also ein ungerichteter Graph, welcher eine Clique mit unendlicher Länge ist. Es gilt also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, weshalb auch $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt.
Jedoch gilt auch $\mathfrak{A} \models \Psi_0$ offensichtlich. Also folgt $\mathfrak{A} \models \Theta_0$. Jedoch soll Θ_0 unerfüllbar sein.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 3

(a)

(b)

(c) U muss hier leer sein oder einelementig sein. Angenommen U ist mindestens zweielementig, aber immer noch endlich. Dann gilt ja für alle $x, y \in U$ mit $x < y$, dass ein z existiert, sodass $x < z \wedge z < y$. Per Induktion stellt man schnell fest, dass U unendlich sein muss. Dies ist ein Widerspruch.
Man kann die Klasse $\mathcal{K}_c$ axiomatisieren durch:

$$\Phi_c \coloneqq \{\forall x \forall y (x = y)\}$$

(d) Da $f(U) \subseteq U$, gilt auch $|f(U)| \leq |U|$. Da $f(U)$ unendlich ist, ist folglich auch U unendlich.

(e)

(f) $\Phi_f = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$?

(g) Die Signatur ist mit $\tau_g \coloneqq ((R_n)_{n \in \mathbb{N}})$ offensichtlich abzählbar. Wegen der Definition von R_n sind alle a_S unterscheidbar. Man kann also von jedem a_S auf ein $S \subseteq \mathbb{N}$ schließen (bijektiv). Deshalb gilt: $|A| = |\operatorname{Pot}(\mathbb{N})|$ überabzählbar.
Satz von LS$\downarrow$:
Angenommen es gibt ein Φ_g, welches $\mathcal{K}_g$ axiomatisiert. Da die Signatur abzählbar ist, ist Φ_g abzählbar. Nach LS$\downarrow$ ein abzählbares Modell. Jedoch gibt es in $\mathcal{K}_g$ keine endlichen Strukturen.
Widerspruch. $\mathcal{K}_g$ ist nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 4

Aufgabe 5*

(a)

(b)