

MaLo  
SS 2021  
19. April 2021

## Übungsblatt X

Marc Ludevid 405401  
Andrés Montoya 405409  
Til Mohr 405959

### Aufgabe 1

E-Test

### Aufgabe 2

- (a) Zu Beginn weisen wir jedem der Module “Algebra”, “Computeralgebra”, “Ethik”, “Formale Systeme” und “Grundlagen der Mathematik” eine Aussagenvariable zu. Wir bekommen also:

$$\tau := \{A, C, E, F, G\}$$

Diese Variablen haben folgende Semantik. Definieren wir  $J$ , die aussagenlogische Interpretation. Dann gilt:

- $J(A)$  gdw. “Algebra” belegt wurde
  - $J(C)$  gdw. “Computeralgebra” belegt wurde
  - $J(E)$  gdw. “Ethik” belegt wurde
  - $J(F)$  gdw. “Formale Systeme” belegt wurde
  - $J(G)$  gdw. “Grundlagen der Mathematik” belegt wurde
- (b)
- $\varphi_i := \neg(A \wedge C \wedge E \wedge F \wedge G) \wedge (A \vee C \vee E \vee F \vee G)$
  - $\varphi_{ii} := C \rightarrow (E \wedge F)$
  - $\varphi_{iii} := (A \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow A)$
  - $\varphi_{iv} := A \rightarrow C$
  - $\varphi_v := \neg F$
  - $\varphi_{vi} := G$
  - $\varphi_{vii} := ((\neg F) \vee G) \wedge \neg((\neg F) \wedge G)$
- (c) Aus (b) können wir nun  $\varphi$  definieren:

$$\varphi := \varphi_i \wedge \varphi_{ii} \wedge \varphi_{iii} \wedge \varphi_{iv} \wedge \varphi_v \wedge \varphi_{vi} \wedge \varphi_{vii} \wedge$$

Fall 1

### Aufgabe 3

Einige offensichtliche Zwischenschritte werden wir hier zur Übersicht überspringen.

- (a) (i) (1)  $J(\varphi) = 1$  gdw.  $J((A \oplus B) \oplus (C \oplus D)) = 1 = J((\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(C \rightarrow D)))$

(2)  $J((\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(C \rightarrow D))) = 1$  gdw.  $J(A) = 0 = J(C)$  und  $J(B) = 1 = J(D)$

(3)  $J((A \oplus B) \oplus (C \oplus D)) = 1$  gdw. genau eine Variable  $X \in \{A, B, C, D\}$   $J(X) = 1$ , alle anderen Variablen  $Y \in A, B, C, D, Y \neq X$   $J(Y) = 0$

(2) und (3) stehen aber im Widerspruch. Daher ist  $\varphi$  unerfüllbar.

(ii) (1)  $J(\varphi) = 1$  gdw.  $J((X \rightarrow \neg X) \vee (Y \rightarrow \neg Y)) = 1 = J((X \rightarrow 0) \oplus (1 \rightarrow Y))$

(2)  $J((X \rightarrow \neg X) \vee (Y \rightarrow \neg Y)) = 1$  gdw. nicht sowohl  $J(X) = 1$  und  $J(Y) = 1$

(3)  $J((X \rightarrow 0) \oplus (1 \rightarrow Y)) = 1$  gdw. sowohl  $J(X) = 1$  und  $J(Y) = 1$  ODER  $J(X) = 0$  und  $J(Y) = 0$

$\varphi$  ist also genau dann erfüllt, wenn  $J(X) = 0$  und  $J(Y) = 0$ .

Betrachte  $\neg\varphi$ :  $\neg\varphi$  ist genau dann erfüllt, wenn  $\varphi$  nicht erfüllt ist. Folglich ist  $J(\neg\varphi) = 1$  gdw.  $J(X) = 1$  und  $J(Y) = 0$  ODER  $J(X) = 1$  und  $J(Y) = 1$  ODER  $J(X) = 0$  und  $J(Y) = 1$ .

Da sowohl  $\varphi$  als auch  $\neg\varphi$  erfüllbar sind, ist  $\varphi$  nicht-trivial.

(b)

$$\begin{aligned}
 (\neg C \rightarrow A) \wedge ((\neg A \rightarrow C) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg D)) &\Leftrightarrow (C \vee A) \wedge ((A \vee C) \wedge (A \vee D)) \\
 &\Leftrightarrow (C \vee A) \wedge (A \vee (C \wedge D)) \\
 &\Leftrightarrow A \vee (C \wedge (C \wedge D)) \\
 &\Leftrightarrow A \vee (C \wedge D) \\
 &\Leftrightarrow (A \wedge 1) \vee (C \wedge D) \\
 &\Leftrightarrow (A \wedge (0 \rightarrow B)) \vee (C \wedge D) \\
 &\Leftrightarrow (A \wedge (1 \vee B)) \vee (C \wedge D) \\
 &\Leftrightarrow ((A \wedge 1) \vee (A \wedge B)) \vee (C \wedge D) \\
 &\Leftrightarrow (A \vee (A \wedge B)) \vee (C \wedge D)
 \end{aligned} \tag{1}$$

## Aufgabe 4

(a)  $\varphi := \neg X_{11} \wedge X_{12} \wedge X_{13} \wedge \neg X_{21} \wedge X_{22} \wedge \neg X_{23} \wedge \neg X_{31} \wedge X_{32} \wedge \neg X_{33}$

(b)  $\varphi := \bigvee_{0 \leq i, j < n} (X_{ij} \wedge X_{ji})$

Mit dieser Formel muss mindestens ein Knotenpaar  $\{i, j\}$  beide Kanten  $(i, j)$  und  $(j, i)$  zwischen sich haben. Also gibt es immer mindestens einen Kreis der Länge 2 als induzierten Teilgraphen  $H = (\{i, j\}, \{(i, j), (j, i)\})$ .

(c) asdasd

## Aufgabe 5\*