Gesamtpunkte:

MaLo
SS 2021
30. Juni 2021

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) $R^{\mathfrak{h}(T)} = \{c_0, f^2c_0\}$

(b) Nein. $\mathfrak{h}(T)$ ist ein Modell von $f^4c_0 \neq c_1$, jedoch ist $f^4c_0 = c_1 \in T$. (Skript Seite 99)

(c) Beobachtungen:

- Wegen $fc_0 = fc_1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $f^n c_0 = f^n c_1$
- Da $f^4c_0 = c_1$ gilt auch $f^4c_1 = c_1$. Es gilt also $f^4c_0 \overset{f}{\mapsto} c_1$ und $f^4c_1 \overset{f}{\mapsto} c_1$.
- Es gilt auch Rf^2c_1 und für alle $n \in N$: $Rf^{2+4\cdot n}c_0, Rf^{2+4\cdot n}c_0$.

Sei G_τ die Menge aller Grundterme über τ, $F_\tau \subseteq G_\tau$ Menge aller funktionalen Grundterme, $R_\tau \subseteq G_\tau$ Menge aller relationalen Grundterme.

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&t = t' \mid t, t' \in F_\tau, \text{ in } t \text{ bzw. } t' \text{ kommen } k \geq 1 \text{ bzw. } m \geq 1\ f \text{ vor, mit } k = 4 \cdot z \cdot m, z \in \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{t = c_1, c_1 = t \mid t \in F_\tau, \text{ in } t \text{ kommt } f\ k\text{-mal vor, mit } k = 4 \cdot (1+n), n \in \mathbb{N}\} \\ &\cup \{c_0 = c_0, c_1 = c_1\} \\ &\cup \{Rf^k c_0, Rf^k c_1 \mid k = 2 + 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}\} \\ &\cup \{Rc_0\}\end{aligned}$$

(d) Nein. $\mathfrak{h}(T)$ ist kein Modell von Rf^2c_1, $\mathfrak{h}(\Sigma)$ jedoch schon.

(e)

$$\begin{aligned}[c_0]_\sim &= \{c_0\} \\ [c_1]_\sim &= \{c_1, f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot (n+1), n \in \mathbb{N}\} \\ [fc_0]_\sim &= \{f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}\} \\ [f^2c_0]_\sim &= \{f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot n + 2, n \in \mathbb{N}\} \\ [f^3c_0]_\sim &= \{f^k c_0, f^k c_1 \mid k = 4 \cdot n + 3, n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

$$R^{\mathfrak{A}(\Sigma)} = \{[c_0]_\sim, [f^2c_0]_\sim\}$$

$$\begin{aligned}f :&[c_0]_\sim \mapsto [fc_0]_\sim & [c_1]_\sim &\mapsto [fc_0]_\sim \\ &[fc_0]_\sim \mapsto [f^2c_0]_\sim & [f^2c_0]_\sim &\mapsto [f^3c_0]_\sim \\ &[f^3c_0]_\sim \mapsto [c_1]_\sim\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) (i) Wenn es ein $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ gäbe, dann würde ja $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \not\models \psi$ gelten. Dies ist ein Widerspruch. Folglich sind $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ disjunkt.

(ii)

(iii) Sei $\neg\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Es gilt folglich $\mathfrak{A} \models \psi$. Angenommen es gilt aber $\psi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Da $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A}) = \mathrm{FO}(\tau)$ und beide disjunkt sind, muss $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, also $\mathfrak{A} \models \psi$. Da $\mathfrak{A}$ aber beliebig ist, ist dies ein Widerspruch. Folglich muss $\psi \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ Analog umgekehrt.

(iv) Sei $\psi \vee \vartheta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi \vee \vartheta$. $\mathfrak{A}$ ist also ein Modell von mindestens eins von beidem. Es muss also $\mathfrak{A} \models \psi$ oder $\mathfrak{A} \models \vartheta$ gelten. Folglich muss auch eines zu $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ gehören.
Sei $\psi \vee \vartheta \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$. Dann gilt ja $\mathfrak{A} \not\models \psi \vee \vartheta$. Ist nun einer der beiden Formeln nicht in $\overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$, so muss diese Formel dann in $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ sein. Dann ist aber $\mathfrak{A}$ ein Modell der Formel, weswegen $\mathfrak{A} \models \psi \vee \vartheta$ gelten müssten. Widerspruch. Folglich muss $\psi, \vartheta \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ gelten.

(b) Wenn $\psi \wedge \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehören ψ und ϑ zu Γ^*. Wenn $\psi \wedge \vartheta \in \Delta^*$, dann gehört ψ oder ϑ zu Δ^*.

(c) Wenn $\psi \to \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehört ψ zu Δ^* oder ϑ zu Γ^*. Wenn $\psi \to \vartheta \in Delta^*$, dann gehören ψ zu Γ^* und ϑ zu Δ^*.

Sei $\psi \to \vartheta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Dann ist entweder $\mathfrak{A}$ kein Modell von ψ. Also gilt $\mathfrak{A} \not\models \psi$, weshalb $\psi \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$. Oder $\mathfrak{A}$ ist Modell von sowohl ψ als auch ϑ. Dann ist folglich $\vartheta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, da ja $\mathfrak{A} \models \vartheta$.
Sei $\psi \to \vartheta \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$. Dann ist ja $\mathfrak{A}$ zwar ein Modell von ψ, aber keines von ϑ. Deshalb gilt $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \not\models \vartheta$, also ist $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, aber $\psi \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$.

(d)

Aufgabe 4

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)