Gesamtpunkte:

MaLo	Übungsblatt 04	Marc Ludevid	405401
SS 2021		Andrés Montoya	405409
16. Mai 2021		Til Mohr	405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) Falls φ_1 unerfüllbar ist, dann muss $\varphi_1 \Rightarrow \emptyset$ gültig sein.

$$
(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\neg\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{X\vee Y\Rightarrow X,Y \qquad (\vee\Rightarrow)\,\dfrac{X,Z\Rightarrow Y \qquad Y,Z\Rightarrow Y}{X\vee Y,Z\Rightarrow Y}\,(*)}{X\vee Y,X\to Z\Rightarrow Y} \qquad X\vee Y,X\to Z\Rightarrow\neg Z}{X\vee Y,X\to Z\Rightarrow Y\wedge\neg Z}}{\neg(Y\wedge\neg Z),X\vee Y,X\to Z\Rightarrow\emptyset}}{\neg(Y\wedge\neg Z),(X\vee Y)\wedge(X\to Z)\Rightarrow\emptyset}}{\neg(Y\wedge\neg Z)\wedge((X\vee Y)\wedge(X\to Z))\Rightarrow\emptyset}
$$

$(*)$ liefert uns jedoch die falsifizierende Interpretation $\mathfrak{I} : X, Z \mapsto 1, Y \mapsto 0$, die also ein Modell für φ_1 ist.

(b) Falls φ_2 eine Tautologie ist, muss $\emptyset \Rightarrow \varphi_2$ gültig sein.

$$
(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{(\Rightarrow\neg)\,\dfrac{(\neg\Rightarrow)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{C\Rightarrow C,A,B \qquad B\Rightarrow C,A,B}{C\vee B\Rightarrow C,A,B}}{C\vee B\Rightarrow C,A\vee B} \qquad C\vee B,C\Rightarrow C}{(A\vee B)\to C,C\vee B\Rightarrow C}}{(A\vee B)\to C,C\vee B,\neg C\Rightarrow C}}{(A\vee B)\to C,C\vee B\Rightarrow C,\neg\neg C}}{(A\vee B)\to C,C\vee B\Rightarrow C\vee\neg\neg C}}{((A\vee B)\to C)\wedge(C\vee B)\Rightarrow C\vee\neg\neg C}}{\emptyset\Rightarrow(((A\vee B)\to C)\wedge(C\vee B))\to(C\vee\neg\neg C)}
$$

Da alle Blätter Axiome sind, ist die Sequenz bewiesen und φ_2 also eine Tautologie.

Aufgabe 3

(a)

(b)

Aufgabe 4

(a)

$$(\leftrightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi \qquad \Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\leftrightarrow)\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

(b) (i) Sei $\Gamma = \emptyset = \Delta, \psi = x, \vartheta = \neg x$. Die Prämisse $x, \neg x \Rightarrow \emptyset$ ist offensichtlich gültig, da die linke Seite unerfüllbar ist. Die Konklusion ist jedoch ungültig, da $x \vee \neg x$ erfüllbar ist.
Somit ist $(\vee \Rightarrow)'$ nicht korrekt.

(ii) Fall 1: Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig. Dann sind offensichtlich beide Prämissen und die Konklusion gültig.
Fall 2: Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nicht gültig. Damit die Prämissen gültig sind, muss $\Gamma \Rightarrow \psi$ und $\Gamma \Rightarrow \vartheta$ gelten. Dann ist ja auch $\Gamma \Rightarrow \psi \vee \vartheta$ gültig.
Damit ist $(\Rightarrow \vee)'$ korrekt.

Damit ist der Sequenzenkalkül immer noch korrekt, wenn wir die Benutzung der Schlussregel $(\Rightarrow \vee)'$ erlauben, denn, angenommen es wäre nicht korrekt, würden wir auf einen Widerspruch laufen:
Sei der Sequenzenkalkül also nicht korrekt. Dann gibt es eine nicht-gültige Sequenz, die trotzdem als gültig abgeleitet werden kann. Dann sind die Prämissen von $(\Rightarrow \vee)'$ gültig. Da aber $(\Rightarrow \vee)'$ korrekt ist, muss auch die Konklusion gültig sein. Dies führt zu einem Widerspruch.

(iii) Es ist plausibel, dass $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ keine falsifizierende Interpretationen sind, da der erweiterte Sequenzenkalkül nicht vollständig ist. Es gibt also Sequenzen, die gültig sind, jedoch nicht als gültig abgeleitet werden:

Das erweiterte Sequenzenkalkül ist jedoch nicht korrekt.
Sei $\Gamma = \{x\}, \Delta = \emptyset, \psi = x, \vartheta = \neg x$. Dann ist $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta$ nach dem unveränderten Sequenzenkalkül offensichtlich gültig:

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{x \Rightarrow x, \neg x}{x \Rightarrow x \vee \neg x}$$

Unter Verwendung von $(\Rightarrow \vee)'$ erhalten wir jedoch eine falsifizierende Interpretation $\mathfrak{I}$:

$$(\Rightarrow \vee)'\ \frac{x \Rightarrow x \qquad (\Rightarrow \neg)\ \dfrac{x \Rightarrow \emptyset}{x \Rightarrow \neg x}}{x \Rightarrow x \vee \neg x}$$

$\mathfrak{I} : x \mapsto 1$

Da wir nun aus einer gültigen Sequenz Ungültigkeit ableiten können, ist das erweiterte Sequenzenkalkül nicht vollständig.

Damit beide Interpretationen falsifizierend sind, müsste der erweiterte Sequenzenkalkül vollständig sein.

Aufgabe 5