

Gesamtpunkte:

MaLo
SS 2021
22. Juni 2021

Übungsblatt 09

Marc Ludevid	405401
Andrés Montoya	405409
Til Mohr	405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Aufgabe 3

$$\begin{array}{l}
 (\Rightarrow \wedge) \frac{c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_2 < t_3 \quad c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_3 < t_4}{(\rightarrow \Rightarrow) \frac{c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4 \quad t_2 < t_4, c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}{(\wedge \Rightarrow) \frac{(t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4, c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}{(t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4, c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}} \\
 (\neg \Rightarrow) \frac{}{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \neg(c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_1)} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{}{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \forall y \neg(c_1 < y \wedge y < c_1)} \\
 (\Rightarrow \forall) \frac{}{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{}{\neg t_1 < t_1, \forall z((t_2 < t_3 \wedge t_3 < z) \rightarrow t_2 < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{}{\neg t_1 < t_1, \forall y \forall z((t_2 < y \wedge y < z) \rightarrow t_2 < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{}{\neg t_1 < t_1, \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)} \\
 (\forall \Rightarrow) \frac{}{\forall x(\neg x < x), \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}
 \end{array}$$

Aufgabe 4

(a) (i)

(ii)

(b) (i)

(ii)

Aufgabe 5

- (a) (i) Damit \sim eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist, muss sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

Für jedes $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt offensichtlich $A \sim A$, da $|A| = |A|$. \sim ist also reflexiv.

Seien $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Angenommen es gilt $A \sim B$. Dann gilt $|A| = |B|$, welches äquivalent ist zu $|B| = |A|$. Folglich ist \sim symmetrisch.

Seien $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Angenommen es gilt sowohl $A \sim B$ als auch $B \sim C$. Dann muss ja gelten, dass $|A| = |B|$ und $|B| = |C|$. Insbesondere gilt dann auch $|A| = |C|$. Folglich muss dann auch $A \sim C$ gelten. \sim ist also transitiv.

Damit ist \sim eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- (ii) Damit \sim auf \mathfrak{A} eine Kongruenzrelation ist, muss unter anderem \cup mit \sim verträglich sein.

Seien $A_1 := \{1, 2\}, A_2 := \{3, 4\}, B_1 := \{5, 6\}, B_2 := \{6, 7\}$.

Es gilt offensichtlich $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$. Jedoch gilt $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$ nicht, da $|A_1 \cup A_2| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4 \neq 3 = |\{5, 6, 7\}| = |B_1 \cup B_2|$.

Damit ist \sim keine Kongruenzrelation auf \mathfrak{A} .

- (b) (i) Seien $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und gelte $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$. Wir müssen nun zeigen, dass \cup und \cap mit \sim_2 verträglich sind.

Es gelte $A_1 \cup A_2 \sim_2 B_1 \cup B_2$, denn:

$$\begin{aligned} ((A_1 \cup A_2) \cap 2\mathbb{N}) &= (A_1 \cap 2\mathbb{N}) \cup (A_2 \cap 2\mathbb{N}) \\ &\stackrel{*}{=} (B_1 \cap 2\mathbb{N}) \cup (B_2 \cap 2\mathbb{N}) \\ &= ((B_1 \cup B_2) \cap 2\mathbb{N}) \end{aligned}$$

* gilt, da eben $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$.

Folglich ist \cup mit \sim verträglich.

Es gelte $A_1 \cap A_2 \sim_2 B_1 \cap B_2$, denn:

$$\begin{aligned} ((A_1 \cap A_2) \cap 2\mathbb{N}) &\stackrel{*}{=} (A_1 \cap A_2 \cap 2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}) \\ &= (A_1 \cap 2\mathbb{N}) \cap (A_2 \cap 2\mathbb{N}) \\ &\stackrel{**}{=} (B_1 \cap 2\mathbb{N}) \cap (B_2 \cap 2\mathbb{N}) \\ &\stackrel{*}{=} (B_1 \cap B_2 \cap 2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}) \\ &= ((B_1 \cap B_2) \cap 2\mathbb{N}) \end{aligned}$$

* gilt, da eben $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$.

** gilt, da offensichtlich für jede Menge X gilt: $X = X \cap X$.

Folglich ist \cap mit \sim verträglich.

Also ist \sim_2 eine Kongruenzrelation auf \mathfrak{A} .

(ii)