Gesamtpunkte:

MaLo		Marc Ludevid	405401
SS 2021	Übungsblatt 11	Andrés Montoya	405409
11. Juli 2021		Til Mohr	405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Wir suchen ein unendliches Axiomensystem Ψ, welches die Klasse $\mathcal{K}$ widerspricht. Ψ soll also genau die Klasse der ungerichteten Graphen G axiomatisieren, welche eine unendliche Clique enthalten. Enthält G eine unendliche Clique, so enthält G offensichtlich für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Clique der Länge n. Wir können Ψ also wie folgt aufstellen:

$$\Psi \coloneqq \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

, wobei $\psi_n \coloneqq \exists x_1 \dots \exists x_n(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge Ex_ix_j)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Hilfsformel für eine Clique der Länge n ist.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Axiomensystem Φ, welches $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach dem KS existiert eine endliche Teilmenge $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$, welches bereits unerfüllbar ist.

Sei $\Psi_0 \coloneqq \Theta_0 \cap \Psi$. Es existert wegen Endlichkeit ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\psi_n \notin \Psi_0$ für alle $n \geq m$. Es folgt $\Psi_0 \subseteq \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n < m\}$

Betrachte $\mathfrak{A} \coloneqq (V \coloneqq \mathbb{N}, E \coloneqq \mathbb{N} \times \mathbb{N})$. $\mathfrak{A}$ ist dann also ein ungerichteter Graph, welcher eine Clique mit unendlicher Länge ist. Es gilt also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, weshalb auch $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt.

Jedoch gilt auch $\mathfrak{A} \models \Psi_0$ offensichtlich. Also folgt $\mathfrak{A} \models \Theta_0$. Jedoch soll Θ_0 unerfüllbar sein.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 3

(a)

(b)

$$
\begin{aligned}
\Phi_b \coloneqq \{ & \forall x \forall z \exists y (x + y = z), \\
& \exists x \forall y (x + y = y), \\
& \forall x \forall y (x + y = y + x), \\
& \exists x_1 \dots \exists x_n ((\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_y) \wedge (\exists y \bigvee_{1 \le i \le n} y = x_i))\}
\end{aligned}
$$

??? Darf man so Endlichkeit ausdrücken?

(c) U muss hier leer sein oder einelementig sein. Angenommen U ist mindestens zweielementig, aber immer noch endlich. Dann gilt ja für alle $x, y \in U$ mit $x < y$, dass ein z existiert, sodass $x < z \wedge z < y$. Per Induktion stellt man schnell fest, dass U unendlich sein muss. Dies ist ein Widerspruch.
Man kann die Klasse $\mathcal{K}_c$ axiomatisieren durch:

$$\Phi_c \coloneqq \{\forall x \forall y (x = y)\}$$

(d) Da $f(U) \subseteq U$, gilt auch $|f(U)| \le |U|$. Da $f(U)$ unendlich ist, ist folglich auch U unendlich.

(e)

(f)

(g) Die Signatur ist mit $\tau_g \coloneqq ((R_n)_{n \in \mathbb{N}})$ offensichtlich abzählbar. Wegen der Definition von R_n sind alle a_S unterscheidbar. Man kann also von jedem a_S auf ein $S \subseteq \mathbb{N}$ schließen (bijektiv). Deshalb gilt: $|A| = |\operatorname{Pot}(\mathbb{N})|$ überabzählbar.
Satz von LS$\downarrow$:
Angenommen es gibt ein Φ_g, welches $\mathcal{K}_g$ axiomatisiert. Da die Signatur abzählbar ist, ist Φ_g abzählbar. Nach LS$\downarrow$ ein abzählbares Modell. Jedoch gibt es in $\mathcal{K}_g$ keine endlichen Strukturen.
Widerspruch. $\mathcal{K}_g$ ist nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 4

Da die Klasse der Cliquen aufzählbar ist (für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie genau ein Element in der Klasse der Cliquen mit n Knoten) kann der Algorithmus einfach alle Cliquen durchlaufen und wird auf jeden Fall die Clique G finden die φ erfüllt.
Zu klären ist aber noch wann dieser Algorithmus terminieren soll, wenn es solch eine Clique nicht gibt. Dafür verwenden wir den Quantorenrang des Satzes φ. Für Quantorenrang m kann der Algorithmus nach m Schritten aufhören, weil ...
Idee: Duplikatorin kann immer nachahmen solange es genügend Knoten zum auswählen gibt, weil es immer irrelevant ist welchen Knoten aus der Clique sie wählt weil alle isomorph zueinander sind.

Aufgabe 5*

(a) (i) z.z.: Für alle $\mathfrak{A} \in K$ gilt: $\mathfrak{A} \in K^*$.
Folgt aus Definition von $Th(K)$. $Th(K) \coloneqq \{\varphi \in FO(\tau) \mid \mathfrak{A} \models \varphi f ür alle \mathfrak{A} \in K\}$, also gilt für alle $\mathfrak{A} \in K$ offensichtlich auch $\mathfrak{A} \in Mod(Th(K))$.

(ii) z.z.: Für jedes Axiomensystem Φ sodass $K \subseteq Mod(\Phi)$ gilt auch $Mod(Th(K)) \subseteq Mod(\Phi)$.
Sei also Φ beliebig sodass für jedes $\mathfrak{A} \in K$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann gilt für jedes $\varphi \in Phi$: $\varphi \in Th(K)$ wegen definition von der Theorie einer Klasse. Also gilt offensichtlich auch $Mod(Th(K)) \subseteq Mod(\Phi)$

(b)