

MaLo  
SS 2021  
6. Juli 2021

## Übungsblatt 11

Marc Ludevid 405401  
Andrés Montoya 405409  
Til Mohr 405959

### Aufgabe 1

E-Test

### Aufgabe 2

Wir suchen ein unendliches Axiomensystem  $\Psi$ , welches die Klasse  $\mathcal{K}$  widerspricht.  $\Psi$  soll also genau die Klasse der ungerichteten Graphen  $G$  axiomatisieren, welche eine unendliche Clique enthalten. Enthält  $G$  eine unendliche Clique, so enthält  $G$  offensichtlich für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  eine Clique der Länge  $n$ . Wir können  $\Psi$  also wie folgt aufstellen:

$$\Psi := \{\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

, wobei  $\psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge Ex_i x_j)$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  die Hilfsformel für eine Clique der Länge  $n$  ist.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Axiomensystem  $\Phi$ , welches  $\mathcal{K}$  axiomatisiert. Dann ist  $\Phi \cup \Psi$  unerfüllbar. Nach dem KS existiert eine endliche Teilmenge  $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$ , welches bereits unerfüllbar ist.

Sei  $\Psi_0 := \Theta_0 \cap \Psi$ . Es existiert wegen Endlichkeit ein  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sodass  $\psi_n \notin \Psi_0$  für alle  $n \geq m$ . Es folgt  $\Psi_0 \subseteq \{\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n < m\}$

Betrachte  $\mathfrak{A} := (V := \mathbb{N}, E := \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ .  $\mathfrak{A}$  ist dann also ein ungerichteter Graph, welcher eine Clique mit unendlicher Länge ist. Es gilt also  $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ , weshalb auch  $\mathfrak{A} \models \Phi$  gilt.

Jedoch gilt auch  $\mathfrak{A} \models \Psi_0$  offensichtlich. Also folgt  $\mathfrak{A} \models \Theta_0$ . Jedoch soll  $\Theta_0$  unerfüllbar sein.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist  $\mathcal{K}$  nicht axiomatisierbar.

### Aufgabe 3

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)
- (f)
- (g)

## Aufgabe 4

## Aufgabe 5\*

(a)

(b)