

MaLo
SS 2021
6. Juli 2021

Übungsblatt 11

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Wir suchen ein unendliches Axiomensystem Ψ , welches die Klasse \mathcal{K} widerspricht. Ψ soll also genau die Klasse der ungerichteten Graphen G axiomatisieren, welche eine unendliche Clique enthalten. Enthält G eine unendliche Clique, so enthält G offensichtlich für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Clique der Länge n . Wir können Ψ also wie folgt aufstellen:

$$\Psi := \{\forall x(\neg Exx), \forall x\forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

, wobei $\psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge Ex_i x_j \right)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Hilfsformel für eine Clique der Länge n ist.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Axiomensystem Φ , welches \mathcal{K} axiomatisiert. Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach dem KS existiert eine endliche Teilmenge $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$, welches bereits unerfüllbar ist.

Sei $\Psi_0 := \Theta_0 \cap \Psi$. Es existiert wegen Endlichkeit ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\psi_n \notin \Psi_0$ für alle $n \geq m$. Es folgt $\Psi_0 \subseteq \{\forall x(\neg Exx), \forall x\forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n < m\}$

Betrachte $\mathfrak{A} := (V := \mathbb{N}, E := \mathbb{N} \times \mathbb{N})$. \mathfrak{A} ist dann also ein ungerichteter Graph, welcher eine Clique mit unendlicher Länge ist. Es gilt also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, weshalb auch $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt.

Jedoch gilt auch $\mathfrak{A} \models \Psi_0$ offensichtlich. Also folgt $\mathfrak{A} \models \Theta_0$. Jedoch soll Θ_0 unerfüllbar sein.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist \mathcal{K} nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 3

- (a)
- (b)
- (c) U muss hier leer sein oder einelementig sein. Angenommen U ist mindestens zweielementig, aber immer noch endlich. Dann gilt ja für alle $x, y \in U$ mit $x < y$, dass ein z existiert, sodass $x < z \wedge z < y$. Per Induktion stellt man schnell fest, dass U unendlich sein muss. Dies ist ein Widerspruch.
Man kann die Klasse \mathcal{K}_c axiomatisieren durch:

$$\Phi_c := \{\forall x \forall y (x = y)\}$$

- (d) Da $f(U) \subseteq U$, gilt auch $|f(U)| \leq |U|$. Da $f(U)$ unendlich ist, ist folglich auch U unendlich.
- (e)
- (f) $\Phi_f = \text{Th}(\mathfrak{A})$?
- (g) $|A| = |\text{Pot}(\mathbb{N})|$

Aufgabe 4

Aufgabe 5*

(a)

(b)