Gesamtpunkte:

MaLo
SS 2021
4. Juli 2021

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) $R^{\mathfrak{h}(T)} = \{c_0, f^2c_0\}$

(b) Nein. $\mathfrak{h}(T)$ ist ein Modell von $f^4c_0 \neq c_1$, jedoch ist $f^4c_0 = c_1 \in T$. (Skript Seite 99)

(c) Beobachtungen:

- Wegen $fc_0 = fc_1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $f^nc_0 = f^nc_1$
- Da $f^4c_0 = c_1$ gilt auch $f^4c_1 = c_1$. Es gilt also $f^4c_0 \overset{f}{\mapsto} c_1$ und $f^4c_1 \overset{f}{\mapsto} c_1$.
- Es gilt auch Rf^2c_1 und für alle $n \in N$: $Rf^{2+4\cdot n}c_0, Rf^{2+4\cdot n}c_0$.

Sei G_τ die Menge aller Grundterme über τ.

$$\begin{aligned}\Sigma = &\{t = t' \mid t, t' \in G_\tau, \text{ in } t \text{ bzw. } t' \text{ kommen } k \geq 1 \text{ bzw. } m \geq 1\ f \text{ vor, mit } k = 4 \cdot z \cdot m, z \in \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{t = c_1, c_1 = t \mid t \in G_\tau, \text{ in } t \text{ kommt } f\ k\text{-mal vor, mit } k = 4 \cdot (1+n), n \in \mathbb{N}\} \\ &\cup \{c_0 = c_0, c_1 = c_1\} \\ &\cup \{Rf^kc_0, Rf^kc_1 \mid k = 2 + 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}\} \\ &\cup \{Rc_0\}\end{aligned}$$

(d) Nein. $\mathfrak{h}(T)$ ist kein Modell von Rf^2c_1, $\mathfrak{h}(\Sigma)$ jedoch schon.

(e)

$$\begin{aligned}[c_0]_\sim &= \{c_0\} \\ [c_1]_\sim &= \{c_1, f^kc_0, f^kc_1 \mid k = 4 \cdot (n+1), n \in \mathbb{N}\} \\ [fc_0]_\sim &= \{f^kc_0, f^kc_1 \mid k = 4 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}\} \\ [f^2c_0]_\sim &= \{f^kc_0, f^kc_1 \mid k = 4 \cdot n + 2, n \in \mathbb{N}\} \\ [f^3c_0]_\sim &= \{f^kc_0, f^kc_1 \mid k = 4 \cdot n + 3, n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

$$R^{\mathfrak{A}(\Sigma)} = \{[c_0]_\sim, [f^2c_0]_\sim\}$$

$$\begin{aligned}f: &[c_0]_\sim \mapsto [fc_0]_\sim & [c_1]_\sim &\mapsto [fc_0]_\sim \\ &[fc_0]_\sim \mapsto [f^2c_0]_\sim & [f^2c_0]_\sim &\mapsto [f^3c_0]_\sim \\ &[f^3c_0]_\sim \mapsto [c_1]_\sim\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) (i) Wenn es ein $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cap \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ gäbe, dann würde ja $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \not\models \psi$ gelten. Dies ist ein Widerspruch. Folglich sind $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ disjunkt.

(ii) (1) Sei t ein beliebiger Term. Dann ist $t = t \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, denn $\mathfrak{A} \models t = t$, denn $t = t$ ist eine Tautologie.

(2) Seien t, t' beliebige Terme. Angenommen $t = t', \psi(t) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Dann ist auch $\psi(t') \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, denn es gilt: $\{t = t', \psi(t)\} \models \psi(t')$ und Theorien sind unter $\models$ abgeschlossen.

(iii) Sei $\neg\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Es gilt folglich $\mathfrak{A} \models \psi$. Angenommen es gilt aber $\psi \not\in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Da $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A}) = \mathrm{FO}(\tau)$ und beide disjunkt sind, muss $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, also $\mathfrak{A} \models \psi$. Da $\mathfrak{A}$ aber beliebig ist, ist dies ein Widerspruch. Folglich muss $\psi \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ Analog umgekehrt.

(iv) Sei $\psi \vee \vartheta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi \vee \vartheta$. $\mathfrak{A}$ ist also ein Modell von mindestens eins von beidem. Es muss also $\mathfrak{A} \models \psi$ oder $\mathfrak{A} \models \vartheta$ gelten. Folglich muss auch eines zu $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ gehören.
Sei $\psi \vee \vartheta \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$. Dann gilt ja $\mathfrak{A} \not\models \psi \vee \vartheta$. Ist nun einer der beiden Formeln nicht in $\overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$, so muss diese Formel dann in $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ sein. Dann ist aber $\mathfrak{A}$ ein Modell der Formel, weswegen $\mathfrak{A} \models \psi \vee \vartheta$ gelten müssten. Widerspruch. Folglich muss $\psi, \vartheta \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$ gelten.

(b) Wenn $\psi \wedge \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehören ψ und ϑ zu Γ^*. Wenn $\psi \wedge \vartheta \in \Delta^*$, dann gehört ψ oder ϑ zu Δ^*.

(c) Wenn $\psi \to \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehört ψ zu Δ^* oder ϑ zu Γ^*. Wenn $\psi \to \vartheta \in \Delta^*$, dann gehören ψ zu Γ^* und ϑ zu Δ^*.

Sei $\psi \to \vartheta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Dann ist entweder $\mathfrak{A}$ kein Modell von ψ. Also gilt $\mathfrak{A} \not\models \psi$, weshalb $\psi \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$. Oder $\mathfrak{A}$ ist Modell von sowohl ψ als auch ϑ. Dann ist folglich $\vartheta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, da ja $\mathfrak{A} \models \vartheta$.
Sei $\psi \to \vartheta \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$. Dann ist ja $\mathfrak{A}$ zwar ein Modell von ψ, aber keines von ϑ. Deshalb gilt $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \not\models \vartheta$, also ist $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, aber $\psi \in \overline{\mathrm{Th}}(\mathfrak{A})$.

(d) Offensichtlich ist $\exists x \psi(x) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ mit $\psi := 2 = x \cdot x$ $(x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{2})$. Jedoch sind alle Grundterme rationale Zahlen. Es gibt also keinen Grundterm t, bei dem $\mathfrak{A} \models \psi(t)$. Folglich ist $\psi(t) \not\in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

Aufgabe 4

(a)

(b)

(c) Falsch!
Seien $\tau := \{<\}$, $\Phi := \{\exists x \forall y(x = y \lor x < y), \exists x \forall (x = y \lor y < x)\}$.
Φ axiomatisiert also die Klasse der τ-Strukturen mit kleinstem und größtem Element.
$\mathrm{Mod}(\varphi_1)$ axiomatisiert nur die Klasse der τ-Strukturen mit kleinstem Element, $\mathrm{Mod}(\varphi_2)$ axiomatisiert nur die Klasse der τ-Strukturen mit größtem Element.
Widerspruch!

(d) Gegenbeispiel: Die Klasse der Endlichen Linearen Ordnungen welche endlich axiomatisierbar ist durch $\varphi = \forall x(\forall y(y < x \lor y = x) \lor \exists y(x < y \land \neg \exists z(x < z < y))) \land \exists x(\forall y(x < y \lor x = y) \land \forall x \forall y \forall z(x < y \land y < z \Rightarrow x < z) \land \forall x \forall y(x < y \lor y < x \lor x = y)$
Also gibt es ein kleinstes und grösstes Element und jedes Element hat einen eindeutigen Nachfolger.
Aber für das unendliche Axiomensystem Ψ gibt es keine endliche Teilmenge, die die Klasse axiomatisiert und somit auch keine Konjunktion von Sätzen in Ψ, die die Klasse axiomatisiert.
Sei $\psi_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(x_1 \neq x_2 \land x_1 \neq x_3 \land \cdots \land x_1 \neq x_n \land x_2 \neq x_3 \land \cdots \land x_{n-1} \neq x_n \land \forall y((y = x_1 \lor y = x_2 \lor \cdots \lor y = x_n) \land x_1 < x_2 \land x_2 < x_3 \land \cdots \land x_{n-1} < x_n) \land \forall x \forall y \forall z(x < y \land y < z \Rightarrow x < z) \land \forall x \forall y(x < y \lor y < x \lor x = y)$

ψ_n axiomatisiert die Lineare Ordnung mit n Elementen. Also ist $\Psi = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein unendliches Axiomensystem für die Endlichen Linearen Ordnungen. Jegliche endliche Untermenge von Ψ hat ein ψ_m für maximales m. Somit kann eine Lineare Ordnung gewählt werden mit $m + 1$ Elementen und diese wird kein Modell von besagten Untermenge sein.

(e) Richtig!
Es gibt ein endliches Axiomensystem Φ' für K. K ist also auch axiomatisierbar durch $\varphi := \bigwedge \Phi'$. Für jede Struktur $\mathfrak{A} \in K$ muss also gelten $\mathfrak{A} \models \varphi$ und für jede Struktur $\mathfrak{B} \notin K$ ($\mathfrak{B} \in \overline{K}$) $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Folglich muss für $\mathfrak{B}$ dann gelten $\mathfrak{B} \models \overline{\varphi}$ mit $\overline{\varphi} := \neg\varphi = \neg \bigwedge \Phi = \bigvee_{\varphi' \in \Phi} \neg\varphi'$. Folglich ist $\{\overline{\varphi}\}$ ein endliches Axiomensystem von $\overline{K}$.