Gesamtpunkte:

MaLo	Übungsblatt 06	Marc Ludevid	405401
SS 2021		Andrés Montoya	405409
7. Juni 2021		Til Mohr	405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &:= Qy \lor \neg\forall x(Px \rightarrow \exists z \neg(Rfzz \land c < z)) \\ &\equiv Qy \lor \exists x(\neg(PX \rightarrow \exists z \neg(Rfzz \land c < z))) \\ &\equiv Qy \lor \exists x(\neg(\neg PX \lor \exists z \neg(Rfzz \land c < z))) \\ &\equiv Qy \lor \exists x(PX \land \forall z(Rfzz \land c < z))\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &:= (\neg\exists x Pffx \lor \forall x(Qx \land Rxy)) \land x < y \land Rcz \\ &\equiv (\forall a(\neg Pffa) \lor \forall b(Qb \land Rby)) \land x < y \land Rcz \\ &\equiv \forall a \forall b(((\neg Pffa) \lor (Qb \land Rby)) \land x < y \land Rcz)\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a)

$$(\mathbb{N}, +, 0)$$

(b)

$$\varphi = \forall x(x + f(x) = 0)$$

φ und ψ sind nicht logisch äquivalent.

(c)

$$\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}, +, -, 0)$$

Dann kann man f wählen als $f(x) = 0 - x$. Dann gilt $\mathfrak{B} \models \varphi$.

(d) Nein gibt es nicht. Jede Substruktur $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ muss $\{+, -, 0\}$ abgeschlossen sein. Damit muss 0 immer im Universum enthalten sein. Es gilt jedoch $(\{0\}, +, -, 0) \models \psi$ (da $0 + 0 = 0$). Fügt man nur schon ein weiteres Element dem Universum hinzu, muss aufgrund der $\{-\}$-Abgeschlossenheit auch das additive Inverse hinzugefügt werden. Damit gilt für jede Substruktur ψ

Aufgabe 4

(a) (i)

$$\begin{aligned}
\Phi_i \coloneqq \{&\forall x \forall y (x \circ y = y \circ x), && \text{kommutativ}\\
&\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z), && \text{assoziativ}\\
&\forall x (x \circ e = x), && \text{e ist neutrales Element}\\
&\forall x \exists y (x \circ y = e), && \text{inverses Element}\\
&\exists x_1 \dots \exists x_6 (\bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le 6 \\ i \ne j}} x_i \ne x_j), && \text{mindestens 6 Elemente}\\
&\forall x_1 \dots \forall x_{10} ((\bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le 9 \\ i \ne j}} x_i \ne x_j) \to (\bigvee_{1 \le i \le 9} x_i = x_{10}))\} && \text{nicht mindestens 10 Elemente}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\Phi_{ii} \coloneqq \{&\forall x (x < x), && \text{reflexiv}\\
&\forall x \forall y ((x < y \land y < x) \to x = y), && \text{asymmetrie}\\
&\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \to x < z)\} && \text{transitiv}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\Phi_{iii} \coloneqq \{&\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y), && \text{injektiv}\\
&\forall x \exists y (y = f(x) \land Oy), && f(U) \subseteq O\\
&\forall y \exists x (Oy \to f(x) = y), && O \subseteq f(U)\\
&\neg Os\} && s \notin O
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\Phi_{iv} \coloneqq \{&\forall x \forall y (Exy \to Eyx), && \text{Beidseitige Kantenrichtung}\\
&\neg Ecd, && \text{c und d nicht verbunden}\\
&\forall x_1 (\neg (Ecx_1 \land Ex_1 d)), && \text{c und d nicht über 1 Knoten verbunden}\\
&\forall x_1 \forall x_2 (\neg (Ecx_1 \land Ex_1 x_2 \land Ex_2 d)), && \text{c und d nicht über 2 Knoten verbunden}\\
&\dots\} && \dots
\end{aligned}$$

(b) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, f, \mathbb{N} \setminus \{0\}, 0)$ mit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}, x \mapsto x + 1$.
Jedes Modell muss unendlich sein, da $s \notin O = f(U)$. Demnach ist $|U| \geq |O| + 1$. Dies ist nur erfüllt, wenn sowohl U als auch O unendlich sein.

(c) $\varphi_n := \forall x_1 \dots \forall x_n (\neg Exx_1 \land (\bigwedge_{1 \le i < n} Ex_i x_{i+1} \land Ex_n y))$ gibt an ob für beliebige Knoten x und y gilt, dass y durch $n + 1$ Schritte von x erreichbar ist.
$\Phi_c = \{\forall x \forall y (Exy \to Eyx)\} \cup \{\exists x \exists y (\varphi_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ist somit das Axiomensystem für K.

Aufgabe 5

(a) Sei $\varphi = x \vee y$, $\psi = \neg x \vee y$ und $\Phi = \{y\}$. Dann ist offensichtlich $\varphi \not\equiv \psi$, jedoch gilt $\Phi \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

(b)

(c) Für $(\mathbb{N}, >, 0)$ sei $\varphi = 0 > x \vee y = 0$.
$\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi$ gilt offensichtlich, denn in beiden Fällen gibt es Werte für die φ nicht gilt und somit sind beide Aussagen falsch und äquivalent. $\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi$ gilt hingegen nicht, denn $y = 0$ erfüllt die rechte Seite, doch die linke ist immer noch unerfüllbar.