

MaLo
SS 2021
11. Juli 2021

Übungsblatt 11

Marc Ludevid 405401
Andrés Montoya 405409
Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Wir suchen ein unendliches Axiomensystem Ψ , welches die Klasse \mathcal{K} widerspricht. Ψ soll also genau die Klasse der ungerichteten Graphen G axiomatisieren, welche eine unendliche Clique enthalten. Enthält G eine unendliche Clique, so enthält G offensichtlich für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Clique der Länge n . Wir können Ψ also wie folgt aufstellen:

$$\Psi := \{\forall x(\neg Exx), \forall x\forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

, wobei $\psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge Ex_i x_j \right)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Hilfsformel für eine Clique der Länge n ist.

Nehmen wir nun an, es gibt ein Axiomensystem Φ , welches \mathcal{K} axiomatisiert. Dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach dem KS existiert eine endliche Teilmenge $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$, welches bereits unerfüllbar ist.

Sei $\Psi_0 := \Theta_0 \cap \Psi$. Es existiert wegen Endlichkeit ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\psi_n \notin \Psi_0$ für alle $n \geq m$. Es folgt $\Psi_0 \subseteq \{\forall x(\neg Exx), \forall x\forall y(Exy \rightarrow Eyx)\} \cup \{\psi_n \mid n < m\}$

Betrachte $\mathfrak{A} := (V := \mathbb{N}, E := \mathbb{N} \times \mathbb{N})$. \mathfrak{A} ist dann also ein ungerichteter Graph, welcher eine Clique mit unendlicher Länge ist. Es gilt also $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, weshalb auch $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt.

Jedoch gilt auch $\mathfrak{A} \models \Psi_0$ offensichtlich. Also folgt $\mathfrak{A} \models \Theta_0$. Jedoch soll Θ_0 unerfüllbar sein.

Dies ist ein Widerspruch. Also ist \mathcal{K} nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 3

(a)

(b)

$$\begin{aligned}\Phi_b := & \{\forall x \forall z \exists y (x + y = z), \\ & \exists x \forall y (x + y = y), \\ & \forall x \forall y (x + y = y + x), \\ & \exists x_1 \dots \exists x_n ((\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j) \wedge (\forall y \bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i))\}\end{aligned}$$

??? Darf man so Endlichkeit ausdrücken?

- (c) U muss hier einelementig sein. Angenommen U ist mindestens zweielementig, aber immer noch endlich. Dann gilt ja für alle $x, y \in U$ mit $x < y$, dass ein z existiert, sodass $x < z \wedge z < y$. Per Induktion stellt man schnell fest, dass U unendlich sein muss. Dies ist ein Widerspruch.

Man kann die Klasse \mathcal{K}_c axiomatisieren durch:

$$\Phi_c := \{\forall x \forall y (x = y)\}$$

- (d) Da $f(U) \subseteq U$, gilt auch $|f(U)| \leq |U|$. Da $f(U)$ unendlich ist, ist folglich auch U unendlich.

Sei φ_n eine Hilfsformel, dass mindestens n verschiedene Elemente in U existieren:

$$\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j)$$

Sei φ'_n eine Hilfsformel, dass mindestens n verschiedene Elemente in $f(U)$ existieren:

$$\varphi'_n := \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge f(x_i) \neq f(x_j))$$

Dann ist Φ_d ein unendliches Axiomensystem mit:

$$\Phi_d := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\varphi'_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

\mathcal{K}_d ist nach dem Kompaktheitssatz nicht endlich axiomatisierbar, weil keine endliche Teilmenge von Φ_d existiert, welches \mathcal{K}_d axiomatisiert.

Angenommen $\Phi_0 \subseteq \Phi_d$ sei eine Formel, die \mathcal{K}_d endlich axiomatisiert. Dann gibt es ein $m, m' \in \mathbb{N}$, sodass m der Index der größten Hilfsformel φ_n in Φ_0 ist. Wenn kein φ_n in Φ_0 ist, dann kann Φ_0 \mathcal{K}_d offensichtlich nicht axiomatisieren, weil die Unendlichkeit von U nicht gegeben ist. Sei m' der Index der größten Hilfsformel φ'_n in Φ_0 . Wenn kein φ'_n in Φ_0 ist, dann kann Φ_0 \mathcal{K}_d offensichtlich nicht axiomatisieren, weil die Unendlichkeit von $f(U)$ nicht gegeben ist.

Sei $\mathfrak{A} := (\{0, \dots, \max(m, m') + 1\}, \mathbb{1}, 0)$. Dann gilt offensichtlich $\mathfrak{A} \models \Phi_0$, aber, da \mathfrak{A} endlich ist, ist $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}_d$.

Nach dem KS ist \mathcal{K}_d nicht endlich axiomatisierbar.

(e)

(f)

- (g) Die Signatur ist mit $\tau_g := ((R_n)_{n \in \mathbb{N}})$ offensichtlich abzählbar. Wegen der Definition von R_n sind alle a_S unterscheidbar. Man kann also von jedem a_S auf ein $S \subseteq \mathbb{N}$ schließen (bijektiv). Deshalb gilt: $|A| = |\text{Pot}(\mathbb{N})|$ überabzählbar.

Satz von LS↓:

Angenommen es gibt ein Φ_g , welches \mathcal{K}_g axiomatisiert. Da die Signatur abzählbar ist, ist Φ_g abzählbar. Nach $\text{LS}\downarrow$ hat \mathcal{K}_g ein abzählbares Modell. Jedoch gibt es in \mathcal{K}_g keine endlichen Strukturen.
Widerspruch. \mathcal{K}_g ist nicht axiomatisierbar.

Aufgabe 4

Da die Klasse der Cliques aufzählbar ist (für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie genau ein Element in der Klasse der Cliques mit n Knoten) kann der Algorithmus einfach alle Cliques durchlaufen und wird auf jeden Fall die Clique G finden die φ erfüllt.

Zu klären ist aber noch wann dieser Algorithmus terminieren soll, wenn es solch eine Clique nicht gibt. Dafür verwenden wir den Quantorenrang des Satzes φ . Für Quantorenrang m kann der Algorithmus nach m Schritten aufhören, weil ...

Idee: Duplikatorin kann immer nachahmen solange es genügend Knoten zum auswählen gibt, weil es immer irrelevant ist welchen Knoten aus der Clique sie wählt weil alle isomorph zueinander sind.

Aufgabe 5*

- (a) (i) z.z.: Für alle $\mathfrak{A} \in K$ gilt: $\mathfrak{A} \in K^*$.
Folgt aus Definition von $\text{Th}(\mathcal{K})$. $\text{Th}(\mathcal{K}) := \{\varphi \in \text{FO}(\tau) \mid \mathfrak{A} \models \varphi, \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$, also gilt für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ offensichtlich auch $\mathfrak{A} \in \text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K}))$.
- (ii) z.z.: Für jedes Axiomensystem Φ sodass $K \subseteq \text{Mod}(\Phi)$ gilt auch $\text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K})) \subseteq \text{Mod}(\Phi)$.
Sei also Φ beliebig sodass für jedes $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann gilt für jedes $\varphi \in \text{Phi}$: $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{K})$ wegen definition von der Theorie einer Klasse. Also gilt offensichtlich auch $\text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K})) \subseteq \text{Mod}(\Phi)$
- (b)