Gesamtpunkte:

MaLo SS 2021 1. Mai 2021	Übungsblatt 02	Marc Ludevid 405401 Andrés Montoya 405409 Til Mohr 405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

(a) Aus der VL wissen wir, dass $\{\neg, \land\}$ funktional vollständig ist.

- $\neg x \equiv m(x, x, x, x)$
- $x \land y \equiv m(x, x, y, m(x, x, x, x))$

Da $\{\neg, \land\}$ funktional vollständig ist und wir dies mit $\{m\}$ darstellen können, ist auch $\{m\}$ funktional vollständig.

(b) Wir zeigen mittels Induktion, dass die Boolsche Funktion $\neg$ sich nicht aus $\{\rightarrow, u, 1\}$ darstellen lässt.

I.A. Konstante 1
Ausgangsvariable $x \in \tau$

I.S. $\varphi = \psi \rightarrow \vartheta$, falls ψ und ϑ bereits gebildete Formeln sind
$\varphi = u(\psi, \vartheta, \lambda)$, falls ψ, ϑ und λ bereits gebildete Formeln sind

Hieraus erkennt man jedoch, dass φ nie $\neg$ darstellen kann, da:
$1 \rightarrow x \equiv x \rightarrow x \equiv x \equiv u(1, 1, x) \equiv u(1, x, 1) \equiv u(x, 1, 1) \equiv u(x, x, x)$
und
$x \rightarrow 1 \equiv 1 \equiv u(1, x, x) \equiv u(x, 1, x) \equiv u(x, x, 1)$
Aus diesem Grund ist $\{\rightarrow, u, 1\}$ nicht funktional vollständig.

(c)

Aufgabe 3

(a)

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \emptyset \\
M_1 &= \{B\} \\
M_2 &= \{B, D\} \\
M_3 &= \{B, D, F, A\} \\
M_4 &= \{B, D, F, A\} \coloneqq M
\end{aligned}
$$

Der Algorithmus terminiert.
Das Minimale Modell ist: $\mathfrak{I} : A \mapsto 1, B \mapsto 1, C \mapsto 0, D \mapsto 1, E \mapsto 0, F \mapsto 1$

(b) Φ ist offensichtlich äquivalent zu $\Phi' \coloneqq \{X \to Y, X \wedge Z \to Y\}$ und ψ äquivalent zu $\psi' \coloneqq (X \to X) \wedge (X \to Y) \wedge (X \to Z) = (X \to Y) \wedge (X \to Z)$
Φ' besteht also nur aus Horn-Formeln und ψ' selber ist eine Horn-Formel.
Da $\Phi \models \psi$ bzw. $\Phi' \models \psi'$ genau dann gilt, wenn jedes Modell von Φ' auch ein Modell von ψ' ist, und wir hier eben nur Horn-Formeln haben, gilt $\Phi \models \psi$ eben auch genau dann, wenn das minimale Modell von Φ dem von ψ entspricht.
Der Markierungsalgorithmus liefert uns für alle Horn-Formeln das minimale Modell $\mathfrak{I} : X, Y, Z \mapsto 0$. Also gilt $\Phi \models \psi$.

Aufgabe 4

(a) $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ mit $\varphi_i = \begin{cases} (\bigwedge_{j=1}^{m_i-1} X_{i,j}) \rightarrow X_{i,m} \\ \bigwedge_{j=1}^{m_i} X_{i,j} \end{cases}$.

Offensichtlich gilt für ein $\mathfrak{I} \models \varphi$ auch $\mathfrak{I} \models \varphi_i$ für alle i in φ.
Sei nun $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$, $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$. Für jedes i in φ unterscheiden wir nun 2 Fälle:

- Falls für alle $1 \leq j \leq m_i$ gilt: $\mathfrak{I}_1(X_{i,j}) = 1 = \mathfrak{I}_2(X_{i,j})$, dann ist auch $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(X_{i,j}) = 1$, weshalb $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ stimmt.
- Falls für ein $1 \leq j \leq m_i$ gilt: $\mathfrak{I}_1(X_{i,j}) = 0$ oder $\mathfrak{I}_2(X_{i,j}) = 0$, dann ist auch $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(X_{i,j}) = 0$, weshalb $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ stimmt.

Also gilt $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ für alle i in φ, weshalb auch $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \models \varphi$ gelten muss.

(b) Da Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, muss es auch immer ein eindeutiges kleinstes Modell zu einer Horn-Formel φ geben: Gäbe es kein eindeutiges kleinstes Modell, sondern 2 voneinander verschiedene minimale Modelle $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ so wäre $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \not\models \varphi$, da $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \leq \mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 \leq \mathfrak{I}_2$, jedoch $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ minimal sind, also insbesondere $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2$ nicht minimal.
Widerspruch!
Es muss immer ein eindeutiges kleinstes Modell zu einer Horn-Formel φ geben!

(c)
- $\mathfrak{I}_1 : T, R, U \mapsto 1; S \mapsto 0$ und $\mathfrak{I}_2 : T, S, R \mapsto 1; U \mapsto 0$ sind Modelle von φ_1, jedoch ist $\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2 : T, R \mapsto 1; S, U \mapsto 0$ kein Modell von φ_1. Da jedoch Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, ist φ_1 nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.
-
$$\begin{aligned} \varphi_2 &\equiv (\neq A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (\neq B \rightarrow (A \vee C)) \wedge (\neq C \rightarrow (A \vee B)) \\ &\equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \\ &\equiv A \vee B \vee C \end{aligned}$$

  Auch dies ist offensichtlich keine Horn-Formel aus derselben Begründung. Zudem darf eine Klausel in einer Horn-Formel höchstens ein positives Literal vorkommen. Hier sind es aber 3.

Aufgabe 5

(a) (i) Diese Aussage ist richtig.
Wie oben bereits gesagt, gilt $\Phi \models \psi$ offensichtlich für alle $\psi \in \Psi$, wenn $\Phi \models \bigwedge \Psi$ gilt. Also muss auch für jedes $\Psi_0 \subseteq \Psi$ $Phi \models \psi_0$ für alle $\psi_0 \in \Psi_0$ gelten, also auch $\Phi \models \Psi_0$.

(ii) Diese Aussage ist falsch.
Sei $\Phi = \Psi = \{X\}$ und $\Psi_0 = \{X, \neg X\}$. Es gilt zwar $\Phi \models \Psi$, jedoch nicht $\Phi \models \Psi_0$!

(b) Angenommen Φ ist erfüllbar und es gilt $\Phi \models \psi$. Dann gibt es also ein Modell $\mathfrak{I}$ zu Φ, welches auch Modell von ψ ist. Dann kann aber $\Phi \models \neg\psi$ nicht gelten, da dieses Modell $\mathfrak{I}$ kein Modell von $\neg\psi$ sein kann. Dies führt zum Widerspruch. Also kann Φ nicht erfüllbar sein.

(c) Da $\Psi_i \cap \Psi_{i+1} = \Psi_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i \models \vartheta$

Aufgabe 6

$\Phi \coloneqq \{X_u \oplus X_v | \{u, v\} \in E\}$
Wenn Kante zwischen u und v, dann muss einer der beiden in W_0 sein ($X_i = 0$), der andere in W_1 ($X_i = 1$).