Gesamtpunkte:

MaLo		Marc Ludevid	405401
SS 2021	Übungsblatt 09	Andrés Montoya	405409
22. Juni 2021		Til Mohr	405959

Aufgabe 1

E-Test

Aufgabe 2

Aufgabe 3

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_2 < t_3 \qquad c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_3 < t_4}{c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1, t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4 \qquad t_2 < t_4, c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow}{(t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4, c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{(t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4, c_1 < c_2, c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}{(t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4, c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}$$

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{(t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4, c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_1 \Rightarrow t_1 < t_1}{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \neg(c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_1)}$$

$$(\Rightarrow\forall)\ \frac{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \neg(c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_1)}{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \forall y \neg(c_1 < y \wedge y < c_1)}$$

$$(\Rightarrow\forall)\ \frac{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \forall y \neg(c_1 < y \wedge y < c_1)}{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\neg t_1 < t_1, (t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4) \rightarrow t_2 < t_4 \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}{\neg t_1 < t_1, \forall z((t_2 < t_3 \wedge t_3 < z) \rightarrow t_2 < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\neg t_1 < t_1, \forall z((t_2 < t_3 \wedge t_3 < z) \rightarrow t_2 < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}{\neg t_1 < t_1, \forall y \forall z((t_2 < y \wedge y < z) \rightarrow t_2 < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\neg t_1 < t_1, \forall y \forall z((t_2 < y \wedge y < z) \rightarrow t_2 < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}{\neg t_1 < t_1, \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\neg t_1 < t_1, \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}{\forall x(\neg x < x), \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \Rightarrow \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x)}$$

Aufgabe 4

(a) (i)

(ii) Da g nicht in $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$ vorkommt, kann man g so wählen, dass $g(x)$ genau dem y aus der Konklusion entspricht. Gilt die Prämisse, so folglich auch die Konklusion, da wir y mit dem $g(x)$ “ersetzen” können.

(b) (i)

(ii)

Aufgabe 5

(a) (i) Damit $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist, muss sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

Für jedes $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt offensichtlich $A \sim A$, da $|A| = |A|$. $\sim$ ist also reflexiv.

Seien $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Angenommen es gilt $A \sim B$. Dann gilt $|A| = |B|$, welches äquivalent ist zu $|B| = |A|$. Folglich ist $\sim$ symmetrisch.

Seien $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Angenommen es gilt sowohl $A \sim B$ als auch $B \sim C$. Dann muss ja gelten, dass $|A| = |B|$ und $|B| = |C|$. Insbesondere gilt dann auch $|A| = |C|$. Folglich muss dann auch $A \sim C$ gelten. $\sim$ ist also transitiv.

Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(ii) Damit $\sim$ auf $\mathfrak{A}$ eine Kongruenzrelation ist, muss unter anderem $\cup$ mit $\sim$ verträglich sein.

Seien $A_1 := \{1, 2\}, A_2 := \{3, 4\}, B_1 := \{5, 6\}, B_2 := \{6, 7\}$.
Es gilt offensichtlich $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$. Jedoch gilt $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$ nicht, da $|A_1 \cup A_2| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4 \neq 3 = |\{5, 6, 7\}| = |B_1 \cup B_2|$.

Damit ist $\sim$ keine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.

(b) (i) Seien $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und gelte $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$. Wir müssen nun zeigen, dass $\cup$ und $\cap$ mit $\sim_2$ verträglich sind.

Es gelte $A_1 \cup A_2 \sim_2 B_1 \cup B_2$, denn:

$$\begin{aligned}
((A_1 \cup A_2) \cap 2\mathbb{N}) &= (A_1 \cap 2\mathbb{N}) \cup (A_2 \cap 2\mathbb{N}) \\
&\overset{*}{=} (B_1 \cap 2\mathbb{N}) \cup (B_2 \cap 2\mathbb{N}) \\
&= ((B_1 \cup B_2) \cap 2\mathbb{N})
\end{aligned}$$

$*$ gilt, da eben $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$.
Folglich ist $\cup$ mit $\sim$ verträglich.

Es gelte $A_1 \cap A_2 \sim_2 B_1 \cap B_2$, denn:

$$\begin{aligned}
((A_1 \cap A_2) \cap 2\mathbb{N}) &\overset{*}{=} (A_1 \cap A_2 \cap 2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}) \\
&= (A_1 \cap 2\mathbb{N}) \cap (A_2 \cap 2\mathbb{N}) \\
&\overset{**}{=} (B_1 \cap 2\mathbb{N}) \cap (B_2 \cap 2\mathbb{N}) \\
&\overset{*}{=} (B_1 \cap B_2 \cap 2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}) \\
&= ((B_1 \cap B_2) \cap 2\mathbb{N})
\end{aligned}$$

$*$ gilt, da eben $A_1 \sim_2 B_1, A_2 \sim_2 B_2$.
$**$ gilt, da offensichtlich für jede Menge X gilt: $X = X \cap X$.

Folglich ist $\cap$ mit $\sim$ verträglich.

Also ist $\sim_2$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.

(ii)