Formale Systeme, Automaten, Prozesse
Übungsblatt 1
Tutorium 11

Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Aufgabe H1 Gegeben ist $v, w \in \Sigma^*, vw = w^R v, |w| \geq |v|$.

Fall 1: $|w| = |v|$

$\Rightarrow v = w^R, w = v \Rightarrow w = w^R \Rightarrow |w| = 1 \vee |w| = 0$

Fall 1.1: $|w| = 0$

$\Rightarrow v = w = \varepsilon$
Also ist $(\varepsilon\varepsilon)^R = \varepsilon\varepsilon$ wahr.

Fall 1.2: $|w| = 1$

$\Rightarrow v = w, v, w \in \Sigma$
Sei $f := v = w \in \Sigma$
Also ist $(ff)^R = ff$ wahr.

Fall 2: $|w| > |v|$

$\Rightarrow |w| = |v| + 1$, da sonst Anfangsbedingung nicht erfüllt.

Fall 2.1: $|w| + |v|$ ungerade

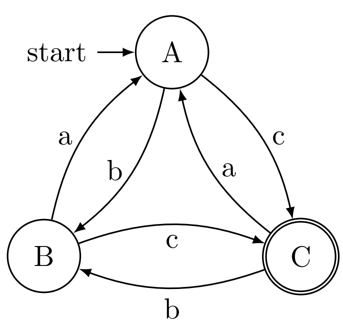
$\Rightarrow$ Ersetze w durch cw' mit $c \in \Sigma, w = cw'$
$\Rightarrow v = (w')^R$, da $vw = w^R v \Leftrightarrow vcw' = (cw')^R v = (w')^R cv$
Also ist $(vw)^R = ((w')^R cw')^R = (w')^R c^R (w')^R = w'^R cw' = vw$ wahr.

Fall 2.2: $|w| + |v|$ gerade

$\Rightarrow v = w^R$
Also ist $(vw)^R = (w^R w)^R = w^R (w^R)^R = vw$ wahr.

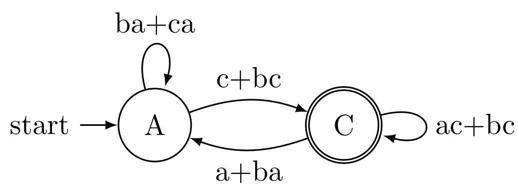
$\square$

Aufgabe H2 Wir konstruieren einen Automaten, der das Problem modelliert. Dabei stehen a,b und c für den Übergang zum jeweiligen Zielzustand.



Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Wir reduzieren nun diesen Automaten um einfacher einen regulären Ausdruck für den Automaten ablesen zu können.



Damit der Automat wie in der Aufgabenstellung gewünscht funktioniert, nehmen wir an dass es der Anfangszustand A durch einen nicht eingezeichneten Übergang **a** erreicht wird.
Vom Zustand A aus kann der Automat zunächst beliebig oft zwischen einem anderen Raum und A hin- und herspringen, solange er am Ende wieder im Zustand A angelangt **(ba+ca)***,
allerdings muss er irgendwann durch den Übergang **(c+bc)** zum Zustand C gelangen, weil dies der einzige gültige Endzustand ist.
nun kann der Automat entweder im Zustand C verbleiben und somit enden, oder
beliebig oft durch den Übergang **(a+ba)** zurück nach A springen, solange er letztenendes wieder durch **(c+bc)** wieder im Endzustand landet. Hierbei kann der Automat wieder beliebig oft den Übergang **(ba+ca)** verwenden, wenn er sich im Zustand A befindet.
Setzt man nun alle Ausdrücke zusammen, erhält man den Ausdruck

A (BA+CA)* (C+BC) (AC+BC+(A+BA)(BA+CA)*(C+BC))*

welcher jeden nicht leeren Pfad durch das Museum beschreibt.

Aufgabe H3 Es gilt wieder der Homomorphismus $h : a \mapsto b, b \mapsto ab$.
Wenden wir also nun h an um die Sprache zu bestimmen:

$$\text{h}(\{\text{a,b}\}^*) = \text{h}(\{\text{a,b}\})^* \stackrel{h}{=} \{\text{b,ab}\}^*$$

Als regulärer Ausdruck ergibt sich also (b+ab)*, die Sprache aus den Alphabetsymbolen a und b, in denen das Unterwort aa nicht vorkommt.

Leite nun regulären Ausdruck für h(h({a,b}*)) her.

$$\text{h}(\text{h}(\{\text{a,b}\}^*)) = \text{h}(\{\text{b,ab}\}^*) = \text{h}(\{\text{b,ab}\})^* \stackrel{h}{=} \{\text{ab,bab}\}^*$$

Als regulärer Ausdruck also (ab+bab)*.