Formale Systeme, Automaten, Prozesse *Tim Luther, 410886*
Übungsblatt 9 *Til Mohr, 405959*
Tutorium 11 *Simon Michau, 406133*

Aufgabe H30

1) Die Sprache ist kontextfrei, folgende CFG beschreibt diese Sprache:

$$S \to aSb \mid A \mid B$$

$$A \to aAa \mid M$$

$$B \to bBb \mid M$$

$$M \to bMa \mid \epsilon$$

2) Angenommen L_2 sei kontextfrei. Dann muss das Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen gelten:
Sei $n \in \mathbb{N}$, $z \in L_2$ mit $z = a^{2^n}$ und $|z| = 2^n \geq n$.
Dann muss es eine Zerlegung von z in $uvwxy$ geben mit:

   (1) $|vwx| \leq n$
   (2) $|vx| > 0$
   (3) $uv^iwx^iy \in L_2 \forall i \in \mathbb{N}$

   Betrachte $i = 2$:

$$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |v| + |x| = |z| + |vx| \leq 2^n + n < 2^{n+1}$$

   Damit ist $uv^2wx^2y \notin L_2$ also gilt das Pumpinglemma nicht und L_2 ist nicht kontextfrei.

3) Diese Sprache ist nicht kontextfrei. Angenommen sie sei kontextfrei. Dann muss das Pumpinglemma für kontextfreie Sprachen gelten:
Sei $n \in \mathbb{N}$, $z \in L_2$ mit $z = (ab)^n ac(bc)^n$ und $|z| = 2 \cdot n + 4 \geq n$.
Dann muss es eine Zerlegung von z in $uvwxy$ geben mit:

   (1) $|vwx| \leq n$
   (2) $|vx| > 0$
   (3) $z_i = uv^iwx^iy \in L_2 \forall i \in \mathbb{N}$

   Da alle Worte in L_3 eine Länge des Vielfaches von 2 sind, muss $|vx|$ auch ein Vielfaches von 2 sein. Dadurch werden für alle i eine gerade Anzahl an Buchstaben hinzugefügt ($i > 1$) oder gelöscht($i = 0$) (oder für $i = 1$ unverändert).

   Betrachte $i = 4$: $[m = 0.5 \cdot |z| = n + 1]$

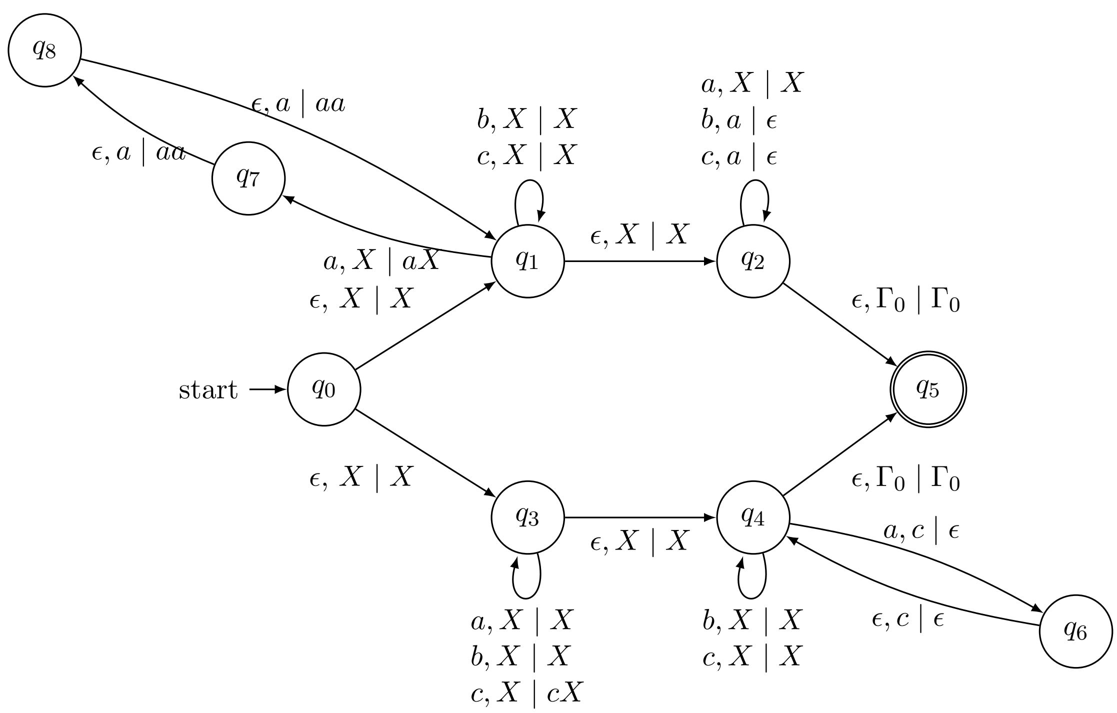
Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Wenn Terminale links von dem ersten c hinzugefügt werden, ist $z_3 \notin L_3$, da es mind. ein $w_j = a$ gibt, sodass $w_{j+m} = w_j = a$.
Wenn Terminale rechts von dem ersten c hinzugefügt werden, ist $z_3 \notin L_3$, da m-Positionen rechts von dem ersten c ebenfalls ein c stehen wird.
Wenn das erste c mit in vx steht, gelten Fall 1 und Fall 2 trotzdem.

Damit gilt das Pumping-Lemma nicht und L_3 ist nicht kontextfrei.

Aufgabe H31

a) Kellerautomat für L:



b) Zu zeigen: Wort w wrd vom PDA angenommen $\Leftrightarrow w \in L$.

"$\Leftarrow$" Sei w ein beliebiges Wort aus L.
Dann gilt: $w = uv$ mit $3 \cdot |u|_a = |v|_b + |v|_c \vee |u|_c = 2 \cdot |v|_a$.
Falls $3 \cdot |u|_a = |v|_b + |v|_c$ gilt, dann wird w angenommen, da q_1 u so erstellt, dass jedes mal wenn a hinzufefügt wird, drei a's auf

den Keller abgelegt werden. q_3 erstellt v dann so, dass jedes mal, wenn ein b oder ein c gelesen wird, ein a vom Keller genommen wird. Da der Keller am Ender leer ist, wird das Wort dann in q_5 angenommen.
Falls $|u|_c = 2 \cdot |v|_a$ gilt, dann wird w angenommen, da q_2 u so erstellt, dass jedes mal, wenn ein c gelesen wird, ein c auf den Kellerspeicher abgelegt wird. q_3 erstellt dann v so, dass jedes mal wenn ein a gelesen wird, zewei dieser c vom Keller gelöscht werden. Da der Keller am Ende dann leer ist, wird das Wort dann in q_5 angenommen.

" $\Rightarrow$ " Sei w ein beliebiges Wort, dass vom PDA angenommen wird. Dann wurde w entweder in q_1 und q_3 oder in q_2 und q_4 erstellt.
Falls w in q_1 und q_3 erstellt wurde, gilt $3 \cdot |u|_a = |v|_b + |v|_c$ für $w = uv$, denn in q_1 wird sichergestellt, dass jedes mal in u ein a hinzugefügt wird, drei a's auf den Keller abgelegt werden, welche dann in q_3 durch b's oder c's gelöscht werden.
Falls w inq_2 und q_4 erstellt wurde, gilt $|u|_c = 2 \cdot |v|_a$ für $w = uv$, denn in q_2 wird sichergestellt, dass jedes mal, wenn ein c gelesen wird, ein c auf dem Keller abgelegt wird. Zwei dieser c's werden dann in q_4 verbraucht, wenn ein a gelesen wird.

Somit ist die Korrektheit und Vollständigkeit des Automaten bewiesen.

Aufgabe H32 Für jede Kontextfreie Sprache gibt es eine Kontextfreie Grammatik. Sei L diese Kontextfreie Sprache.
Falls $\epsilon \notin L$:

Wandle $CFG(L)$ in die Greibachsche Normalform um. Sei S das Startsymbol der Grammatik. Erstelle dann einen ϵ-freien Kellerautomaten mit genau 3 Zuständen (q_0, q_1, q_2), der akzeptiert, wenn der Keller leer ist:
Füge Produktionsregeln der Form $S \to x$, wobei x ein Terminal ist, als Transition von q_0 zu q_2 hinzu, ohne den Keller zu verändern: $x, \Sigma_0 \mid \Sigma_0$.
Füge Produktionsregeln der Form $S \to xM$, wobei x ein Terminal ist und M eine nichtleere Menge von Nichtterminalen ist, als Transition von q_0 zu q_1 hinzu, die wie folgt aussehen: $x, \Sigma_0 \mid M\Sigma_0$.
Alle restlichen Produktionsregeln werden wie folt eingefügt:
Sei $X \to x$, wobei x ein Terminal und $X \in N \setminus \{S\}$ ein Nichtterminal ist. Da dies also bei einem Ableitungsbaum die letzte Ableitung darstellen kann, muss es eine Transition von q_1 zu q_2 geben: $x, X\Sigma_0 \mid \Sigma_0$. Zudem muss es auch eine Schleife um q_1 geben: $x, XV \mid V$, wobei V eine Variable ist.

Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Sei $X \to xM$, wobei x ein Terminal, $X \in N \setminus \{S\}$ ein Nichtterminal und M eine nichtleere Menge an Nichtterminalen ist, füge eine Schleife an q_1 ein: $x, XV \mid MV$.

Damit kann man alle kontextfreien Sprachen, die ϵ nicht enthalten, auch mithilfe der veränderten Übergangsfunktion darstellen.
Über die kontextfreien Sprachen, die auch ϵ erhalten, kann man den Startzustand q_0 ebenfalls als Startzustand markieren.

Damit verändert sich die Menge der Sprachen, die den leeren Keller akzeptieren, nicht.