Formale Systeme, Automaten, Prozesse Tim Luther, 410886
Übungsblatt 10 Til Mohr, 405959
Tutorium 11 Simon Michau, 406133

Aufgabe H33 Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Grammatik G in CNF, sodass $L = L(G)$. Dann hat G also nur Produktionen der Form:

$$A \to BC$$
$$A \to a$$

L^R ist definiert als $\{w^R \mid w \in L\}$.
Beschreibe G^R, wieder als CNF, wie folgt:

$$A \to BC \in G \Rightarrow A \to CB \in G^R$$
$$A \to a \in G \Rightarrow A \to a \in G^R$$

Zeige nun: $L^R = L(G^R)$ Beweis per Induktion über Anzahl der Ableitungen:

I.A. 1) Sei $A \to a \in G$. Dann ist $(A \to a)^R = A \to a^R = A \to a \in G^R$.
2) Sei $A \to BC \in G$ und $B \to b, C \to c \in G \cap G^R$.
Dann ist $(A \to BC)^R = A \to B^R C^R \in G^R; B, C \in G$
$\Leftrightarrow A \to CB \in G^R; B, C \in G^R$.

I.V. Die Behauptung gelte für eine beliebige, aber feste Anzahl an Ableitungen.

I.S. Sei $X \to YZ \in G$ und $Y \to AB, Z \to CD \in G; A, B, C, D \in G$ mit $Y \to BA, Z \to DC \in G^R; A, B, C, D \in G^R$.
Dann gilt $(X \to YZ)^R = X \to Z^R Y^R \in G^R; YZ \in G$
$\Leftrightarrow X \to ZY \in G^R; YZ \in G^R$

Damit gilt $L^R = L(G^R)$, wodurch L^R durch eine CNF beschrieben werden kann, wodurch L^R kontextfrei ist, wodurch die kontextfreien Sprachen unter _Spiegelung_ abgeschossen sind.

Aufgabe H34 Die linearen Sprachen können mehr Sprachen als die regulären Sprachen darstellen. Aus der Vorlesung und vorigen Übungen ist bekannt, dass die Sprachen der Palindrome, also beispielsweise $L = \{uu^R \mid u \in \{a, b\}^*\}$, nicht zu den Regulären Sprachen gehört. Jedoch beschreibt folgende lineare Grammatik diese Sprache:

$$S \to aA \mid bB \mid \epsilon$$
$$A \to SaB \qquad\qquad \to Sb$$

Formale Systeme, Automaten, Prozesse
Übungsblatt 10
Tutorium 11

Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die linkslinearen Sprachen, also der Form $A \to a$ und $A \to aB$, **genau** die Regulären Sprachen bilden. Also kann man jede Reguläre Sprache auf eine (Links-)Lineare Sprache zurückführen, indem man zu der Regulären Sprache als ϵ-NFA darstellt, diesen so abändert, damit es nur einen Endzustand gibt, und dann die Transitionen als Linkslineare Grammatik aufschreibt (siehe VL).

Damit ist also bewiesen, dass die Linearen Sprache eine echte Obermenge der Regulären Sprachen bilden.

Aufgabe H35 Folgende Grammatik mit Startsymbol S beschreibt L:

$$S \to \epsilon \mid S' \qquad S' \to ABCS' \mid ABC$$

$$\begin{aligned}
//AB &\to BA & //BA &\to AB \\
AB &\to YB & BA &\to YA \\
YB &\to YZ & YA &\to YZ \\
YZ &\to YA & YZ &\to YB \\
YA &\to BA & YB &\to AB
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
//BC &\to CB & //CB &\to BC \\
BC &\to WC & CB &\to CX \\
WC &\to WX & CX &\to WX \\
WX &\to CX & WX &\to WC \\
XC &\to BC & WC &\to BC
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
//AC &\to CA & //CA &\to AC \\
AC &\to UC & CA &\to CV \\
UC &\to UV & CV &\to UV \\
UV &\to CV & UV &\to UC \\
CV &\to CA & UC &\to AC
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &\to a \\
B &\to b \\
C &\to c
\end{aligned}$$