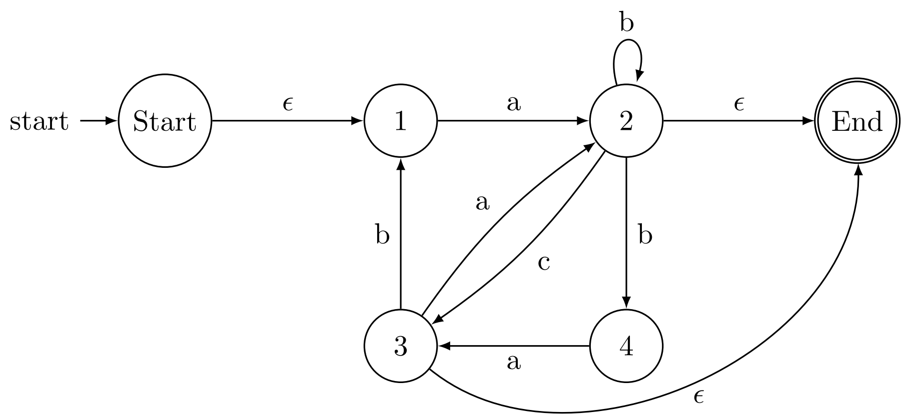
Formale Systeme, Automaten, Prozesse *Tim Luther, 410886*
Übungsblatt 5 *Til Mohr, 405959*
Tutorium 11 *Simon Michau, 406133*

Aufgabe H13 Da wir wissen, dass l eine reguläre Sprache ist, besitzt die Myhill-Nerode-Relation von L nur einen endlichen Index. Dies bedeutet, dass es ab einer bestimmten Wortlänge $n \in \mathbb{L}$ keine neuen Äquivalenzklassen gibt. Desweiteren muss es von jeder Äquivalenklassen einen Repräsentatanten geben, sodass alle bezüglich der Wortlänge benachbarte Repräsentanten sich maximal in der Länge eines Buchstabens unterscheiden. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man schließlich nicht mithilfe des Pumping-Lemmas einen Buchstaben pumpen, weswegen L nicht regulär wäre. Mithilfe dieser beiden Bedingungen kann man einen Algorithmus zum Finden aller Repräsentanten aufstellen. Es genügt, Schritt für Schritt die Wortlänge zu erhöhen, und dann für jedes Wort dieser Länge in L zu schauen, ob es hierfür schon einen Repräsentanten gibt (1. Bedingung). Wenn für eine Wortlänge kein Repräsentant gefunden werden konnte, gibt es auch nach der 2. Bedingung keinen weiteren Repräsentanten in längeren Wörtern:

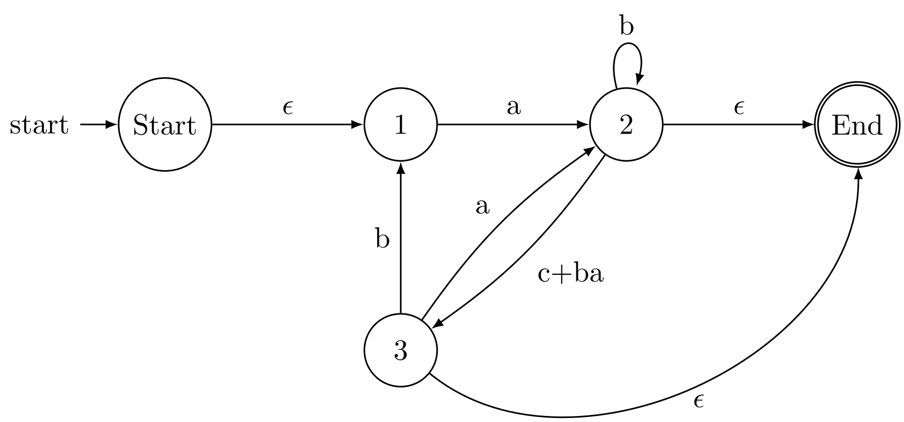
```
repraesentanten=∅
for (n ∈ ℕ) {
        gefunden=false
        for (w ∈ L ∧ |w| = n) {
                if (¬(∃v ∈ repraesentanten ∧ v ∼ w)) {
                        gefunden=true
                        repraesentanten=repraesentanten∩{w}
                }
        }
        if (¬gefunden) break
}
return repraesentanten
```

Aufgabe H14 Wir schreiben die Endzustände als Zustände mit einer ϵ-Transition zum Endzustand End, und den Startzustand als Zustand zu dem eine ϵ-Transition vom Startzustand Start hinführt.

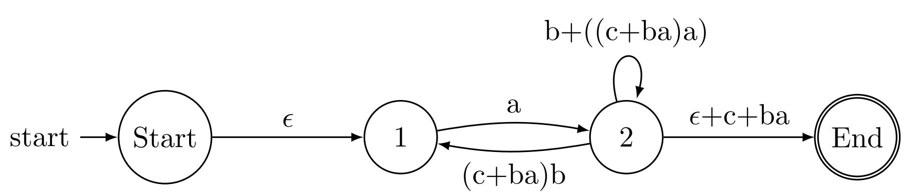
Formale Systeme, Automaten, Prozesse *Tim Luther, 410886*
Übungsblatt 5 *Til Mohr, 405959*
Tutorium 11 *Simon Michau, 406133*



Eliminiere zunächst Zustand 4:

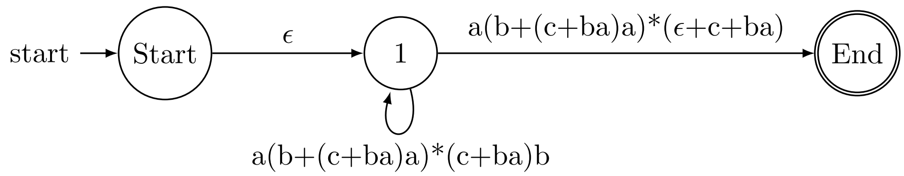


Eliminiere Zustand 3:

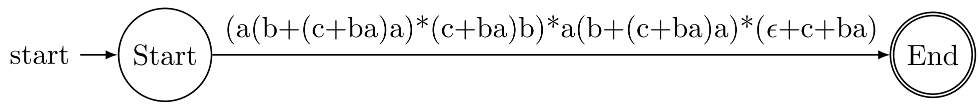


Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Eliminiere Zustand 2:



Eliminiere Zustand 1:



Somit erhalten wir also den regulären Ausdruck

$$(a\,(b+(c+ba)\,a)^*\,(c+ba)\,b)^*\,a\,(b+(c+ba)\,a)^*\,(\epsilon+c+ba)$$

Aufgabe H15

a) Sei L die Sprache mit Worten mit gleich vielen a's und b's.
<u>Annahme: L regulär</u>
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $w \in L$ mit $\#a = \#b = n, |w| \geq 2n$.
Sei w der Form $a^n b^n$.
Nach dem Pumping-Lemma kann man w in x, y, z zerlegen mit:

- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$

Damit ist $y = a^m, 0 < m \leq n$.
Nach dem Pumping-Lemma muss zudem gelten: $\forall i \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$.
Betrachte $i = 2$:

$$xy^2 z = a^{n-m} a^{2m} b^n = a^{n+m} b^n \notin L, \text{ da}$$
$$m > 0 \Rightarrow n + m \neq n \Rightarrow \#a \neq \#b.$$

Damit gilt das Pumping-Lemma nicht, weshalb L nicht regulär ist.

b) $L = \{w \mid w \in \Sigma_*, |w| Fibonaccizahl\}$
<u>Annahme: L regulär</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$, betrachte $fib(n)$. Dann existieren $w \in \text{Ł}$ mit $|w| \geq fib(n) + fib(n+1) = fib(n+2)$
Nach dem Pumping-Lemma kann man w in x, y, z zerlegen mit:

- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- $\forall i \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$

$\Rightarrow 0 < |y| \leq fib(n)$
Betrachte $i = 0$:

$$fib(n+2) = fib(n+1) + fib(n) = |w| = |xyz| > |xy^0 z|$$

$$= |xyz| - |y| > fib(n+1) + fib(n) - fib(n) = fib(n+1)$$

$\Rightarrow fib(n+1) < |xy^0 z| < fib(n+2)$
$\Rightarrow |xy^0 z|$ keine Fibonaccizahl
$\Rightarrow xy^0 z \notin L$
Damit gilt das Pumping-Lemma nicht, weshalb L nicht regulär ist.

c) $L = \{abca^n b^m cba \mid m \leq n\}$
Annahme: L regulär
Sei $z \in \mathbb{N}$. Dann existieren Wörter $w \in L$ der Form $abca^n b^n$ mit $|w| \geq 2z + 6, n \geq z$. Nach dem Pumping-Lemma kann man w in x, y, z zerlegen mit:

- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- $\forall i \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$

Fall 1: $z = 1$
Damit muss $x = \epsilon, y = a$ gelten. Betrachte $i = 0$. Dann ist $xy^i z = xy^0 z = bca^n b^n cba \notin L$.

Fall 2: $z = 2$
Analog zu [Fall 1]. y ist entweder a, ab oder b. Dann gilt auch für $i = 0$ $xy^0 z \notin L$.

Fall 3: $z = 3$
Analog zu [Fall 2]. y kann zusätzlich noch abc, bc oder c sein. Damit gilt auch hier für $i = 0$ auch $xy^0 z \notin L$.

Fall 4: $z > 3$

Fall 4.1: $0 \leq |x| < 3$ Dann beinhaltet y mindestens einer der ersten drei Buchstaben. Analog zu den Fällen zuvor gilt somit für $i = 0$ auch $xy^0z \notin L$.

Fall 4.2: $3 \leq |x| < z$ Dann liegt y in a^n, bzw. genauer in a^{z-3}. Sei y also $a^j, 0 < j \leq z - 3$.
Betrachte auch hier $i = 0$:

$$xy^iz = xy^0z = abca^{n-3-j}a^{0\cdot j}a^3b^ncba = abca^{n-j}b^ncba$$

Da $j > 0 \Rightarrow |a^{n-j}| < |b^n| \Rightarrow xy^0z \notin L$.

Damit ist gezeigt, dass das Pumping-Lemma nicht gilt. Daher ist L keine reguläre Sprache.