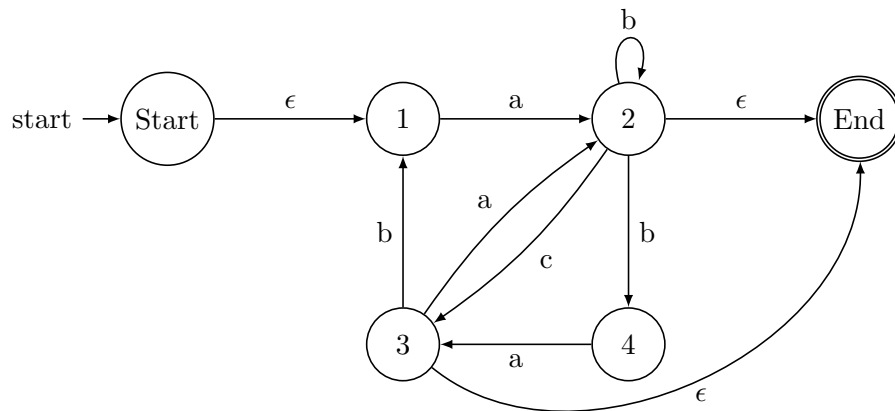


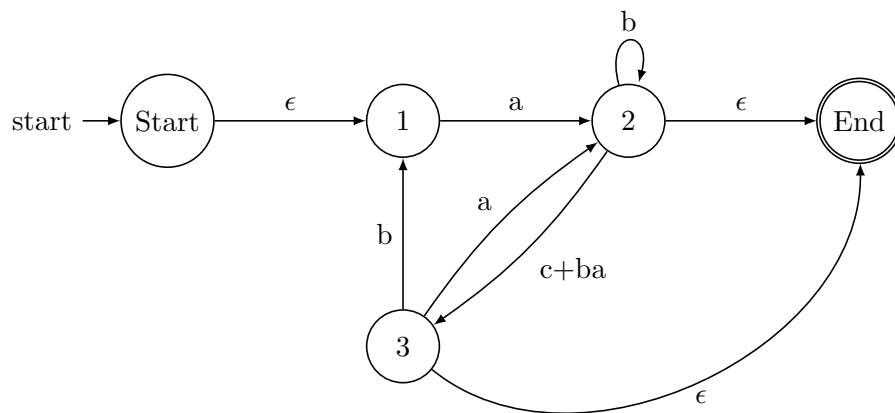
**Aufgabe H13** Da wir wissen, dass  $l$  eine reguläre Sprache ist, besitzt die Myhill-Nerode-Relation von  $L$  nur einen endlichen Index. Dies bedeutet, dass es ab einer bestimmten Wortlänge  $n \in \mathbb{N}$  keine neuen Äquivalenzklassen gibt. Desweiteren muss es von jeder Äquivalenzklassen einen Repräsentanten geben, sodass alle bezüglich der Wortlänge benachbarte Repräsentanten sich maximal in der Länge eines Buchstabens unterscheiden. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man schließlich nicht mithilfe des Pumping-Lemmas einen Buchstaben pumpen, weswegen  $L$  nicht regulär wäre. Mithilfe dieser beiden Bedingungen kann man einen Algorithmus zum Finden aller Repräsentanten aufstellen. Es genügt, Schritt für Schritt die Wortlänge zu erhöhen, und dann für jedes Wort dieser Länge in  $L$  zu schauen, ob es hierfür schon einen Repräsentanten gibt (1. Bedingung). Wenn für eine Wortlänge kein Repräsentant gefunden werden konnte, gibt es auch nach der 2. Bedingung keinen weiteren Repräsentanten in längeren Wörtern:

```
repraesentanten=∅
for (n ∈ ℕ) {
    gefunden=false
    for (w ∈ L ∧ |w| = n) {
        if (¬(∃v ∈ repraesentanten ∧ v ~ w)) {
            gefunden=true
            repraesentanten=repraesentanten ∪ {w}
        }
    }
    if (¬gefunden) break
}
return repraesentanten
```

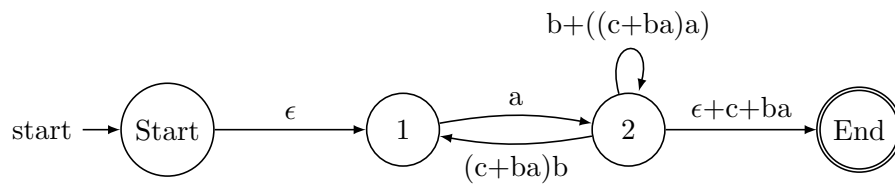
**Aufgabe H14** Wir schreiben die Endzustände als Zustände mit einer  $\epsilon$ -Transition zum Endzustand End, und den Startzustand als Zustand zu dem eine  $\epsilon$ -Transition vom Startzustand Start hinführt.



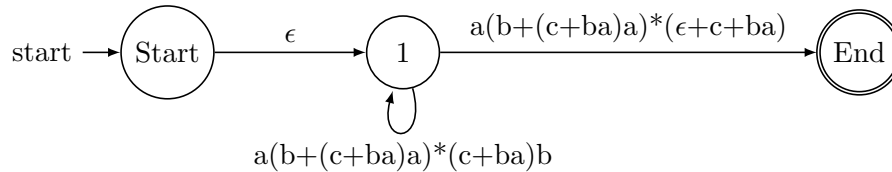
Eliminiere zunächst Zustand 4:



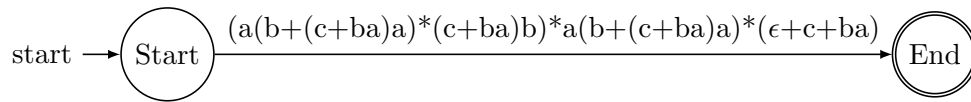
Eliminiere Zustand 3:



Eliminiere Zustand 2:



Eliminiere Zustand 1:



Somit erhalten wir also den regulären Ausdruck

$$(a(b+(c+ba)a)^*(c+ba)b)^*a(b+(c+ba)a)^*(\epsilon+c+ba)$$

### Aufgabe H15

- a) Sei  $L$  die Sprache mit Worten mit gleich vielen  $a$ 's und  $b$ 's.

Annahme:  $L$  regulär

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existieren  $w \in L$  mit  $\#a = \#b = n, |w| \geq 2n$ .

Sei  $w$  der Form  $a^n b^n$ .

Nach dem Pumping-Lemma kann man  $w$  in  $x, y, z$  zerlegen mit:

- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$

Damit ist  $y = a^m, 0 < m \leq n$ .

Nach dem Pumping-Lemma muss zudem gelten:  $\forall i \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$ .

Betrachte  $i = 2$ :

$$xy^2z = a^{n-m}a^{2m}b^n = a^{n+m}b^n \notin L, \text{ da} \\ m > 0 \Rightarrow n+m \neq n \Rightarrow \#a \neq \#b.$$

Damit gilt das Pumping-Lemma nicht, weshalb  $L$  nicht regulär ist.

- b)  $L = \{w \mid w \in \Sigma^*, |w| \text{ Fibonaccizahl}\}$

Annahme:  $L$  regulär

Sei  $n \in \mathbb{N}$ , betrachte  $\text{fib}(n)$ . Dann existieren  $w \in L$  mit  $|w| \geq \text{fib}(n) + \text{fib}(n+1) = \text{fib}(n+2)$

Nach dem Pumping-Lemma kann man  $w$  in  $x, y, z$  zerlegen mit:

- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- $\forall i \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$

$\Rightarrow 0 < |y| \leq \text{fib}(n)$

Betrachte  $i = 0$ :

$$\text{fib}(n+2) = \text{fib}(n+1) + \text{fib}(n) = |w| = |xyz| > |xy^0 z|$$

$$= |xyz| - |y| > \text{fib}(n+1) + \text{fib}(n) - \text{fib}(n) = \text{fib}(n+1)$$

$\Rightarrow \text{fib}(n+1) < |xy^0 z| < \text{fib}(n+2)$

$\Rightarrow |xy^0 z|$  keine Fibonaccizahl

$\Rightarrow xy^0 z \notin L$

Damit gilt das Pumping-Lemma nicht, weshalb  $L$  nicht regulär ist.

c)  $L = \{abca^n b^m cba \mid m \leq n\}$

Annahme:  $L$  regulär

Sei  $z \in \mathbb{N}$ . Dann existieren Wörter  $w \in L$  der Form  $abca^n b^n$  mit  $|w| \geq 2z+6, n \geq z$ . Nach dem Pumping-Lemma kann man  $w$  in  $x, y, z$  zerlegen mit:

- $w = xyz$
- $|xy| \leq n$
- $|y| > 0$
- $\forall i \in \mathbb{N} : xy^i z \in L$

**Fall 1:**  $z = 1$

Damit muss  $x = \epsilon, y = a$  gelten. Betrachte  $i = 0$ . Dann ist  $xy^i z = xy^0 z = bca^n b^n cba \notin L$ .

**Fall 2:**  $z = 2$

Analog zu [Fall 1].  $y$  ist entweder  $a$ ,  $ab$  oder  $b$ . Dann gilt auch für  $i = 0$   $xy^0 z \notin L$ .

**Fall 3:**  $z = 3$

Analog zu [Fall 2].  $y$  kann zusätzlich noch  $abc$ ,  $bc$  oder  $c$  sein. Damit gilt auch hier für  $i = 0$  auch  $xy^0 z \notin L$ .

**Fall 4:**  $z > 3$

**Fall 4.1:**  $0 \leq |x| < 3$  Dann beinhaltet  $y$  mindestens einer der ersten drei Buchstaben. Analog zu den Fällen zuvor gilt somit für  $i = 0$  auch  $xy^0z \notin L$ .

**Fall 4.2:**  $3 \leq |x| < z$  Dann liegt  $y$  in  $a^n$ , bzw. genauer in  $a^{z-3}$ . Sei  $y$  also  $a^j$ ,  $0 < j \leq z - 3$ . Betrachte auch hier  $i = 0$ :

$$xy^iz = xy^0z = abca^{n-3-j}a^{0 \cdot j}a^3b^ncba = abca^{n-j}b^ncba$$

$$\text{Da } j > 0 \Rightarrow |a^{n-j}| < |b^n| \Rightarrow xy^0z \notin L.$$

Damit ist gezeigt, dass das Pumping-Lemma nicht gilt. Daher ist  $L$  keine reguläre Sprache.