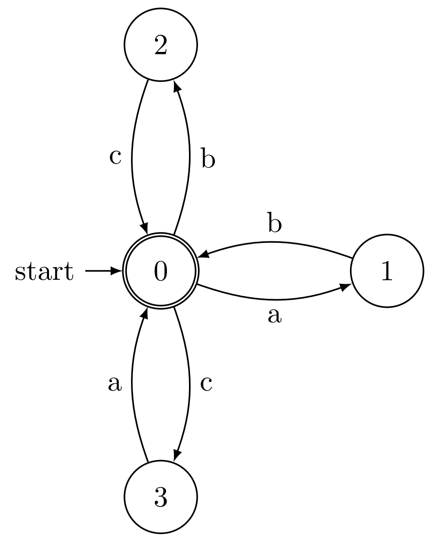
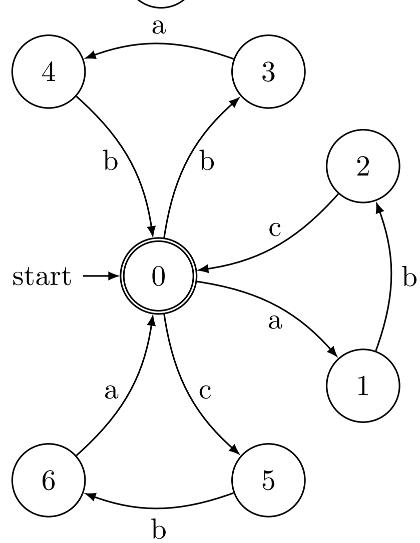
Formale Systeme, Automaten, Prozesse
Übungsblatt 6
Tutorium 11

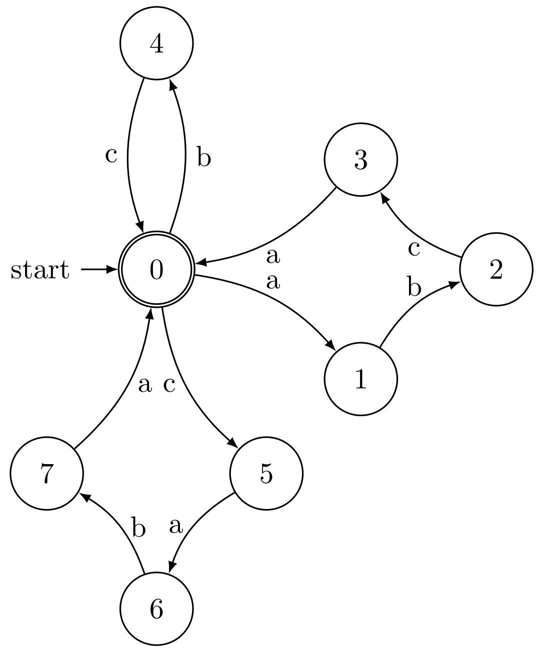
Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Aufgabe H16 $(ab + bc + ca)^* \cap (abc + bab + cba)^* \cap (abca + bc + caba)^*$ ist der Schnitt aus drei Sprachen. Bilde NFAs für diese 3 Sprachen:

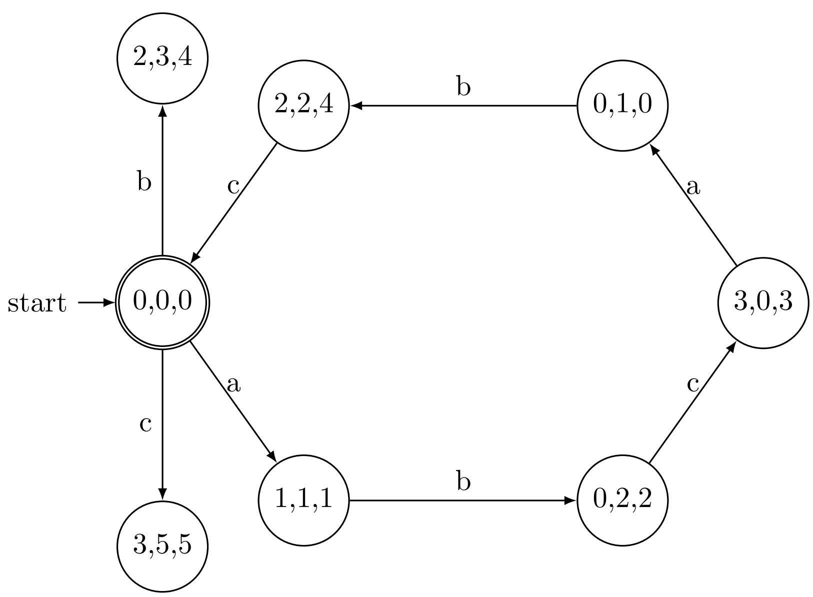




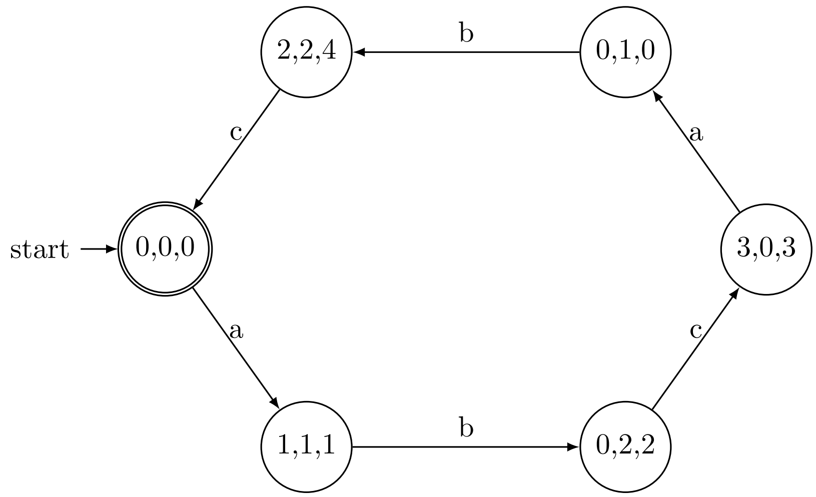
Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133



Aus diesen 3 NFAs kann man nun einen Produktautomaten bilden (den Schnitt):



Minimiert ergibt das:



Daraus folgt, dass $(ab+bc+ca)^* \cap (abc+bab+cba)^* \cap (abca+bc+caba)^* = (abcabc)^*$ ist.

Aufgabe H17

a)
- S ist das Startsymbol, und ist daher auch erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow BDA$ gibt, ist A erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow BDA$ gibt, ist B erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow DC$ gibt, ist C erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow DC$ gibt, ist D erreichbar.

Damit sind alle $X \in N$ erreichbar. Die Menge der unerreichbaren Symbole von G ist also Ø.

b)
- Das Nichtterminal A ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $A \Rightarrow a$ gibt.
- Das Nichtterminal B ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $B \Rightarrow \epsilon$ gibt.
- Das Nichtterminal C ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $C \Rightarrow a$ gibt.
- Das Nichtterminal D ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $D \Rightarrow aA$ gibt, und A selber auch produktiv ist.
- Das Nichtterminal S ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $S \Rightarrow DC$ gibt, und sowohl C als auch D selber produktiv sind.

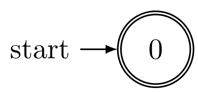
Damit ist die Menge der unproduktiven Symbole von G gleich Ø.

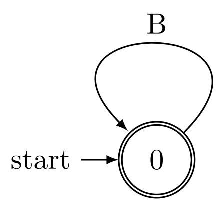
Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

c) Nein, $L(G) = \emptyset$ gilt nicht, da es z.B. die Ableitung $S \Rightarrow BDA \Rightarrow \epsilon DA \Rightarrow aAA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$ gibt. Damit enthält $L(G)$ also mind. ein Wort und ist somit ungleich $\emptyset$.

d) Damit $\epsilon \in L(G)$ gilt, muss es eine Ableitung $S \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$ geben. Da nur B eine Ableitung nach ϵ enthält (siehe Teilaufgabe e)), muss auch $S \overset{*}{\Rightarrow} B \Rightarrow \epsilon$ gelten. S hingegen kann nicht direkt auf B ableiten, und da es keine unproduktiven Symbole in G gibt, gilt $S \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$ nicht, wodurch $\epsilon \notin L(G)$ gilt.

e) Erstelle $pre^*_G(\epsilon)$:





Also ist die Menge der nullierbaren Symbole $\{B\}$.

f) Da es keine unnerreichbaren oder unproduktiven Symbole in G gibt, muss man G nur bezüglich den nullierbaren Symbolen - also B - anpassen. Die einfachste Möglichkeit ist, alle Vorkommen von B in den Ableitungen anzupassen:
$G' : S \to DA \mid ScDA \mid cDDA \mid ADDA \mid DAC \mid DC$
$A \to SA \mid aA \mid a \mid d \mid b$
$C \to aD \mid dA \mid bC \mid a \mid d \mid b$
$D \to S \mid ScS \mid cDS \mid ADS \mid cC \mid aA$

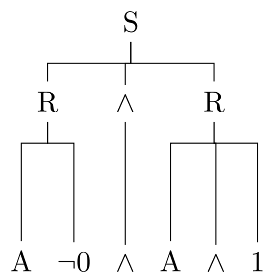
Aufgabe H18

1. $G_1 : S \to (S) \mid S \wedge S \mid S \vee S \mid \neg S \mid 0 \mid 1$

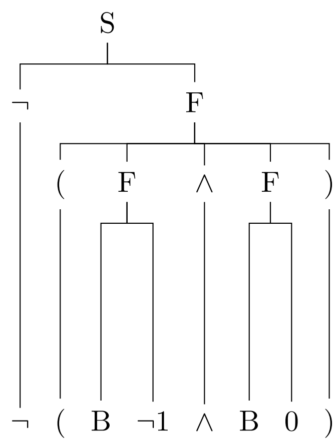
2. $G_2 : S \to R \wedge R \mid R \vee F \mid F \vee R \mid R \vee R \mid \neg F \mid A$
$R \to (R \wedge R) \mid (R \vee F) \mid (F \vee R) \mid (R \wedge R) \mid \neg(F) \mid A$
$F \to (F \wedge F) \mid (F \wedge R) \mid (R \wedge F) \mid (F \vee F) \mid B \mid \neg(R)$
$A \to \neg 0 \mid 1$
$B \to \neg 1 \mid 0$

Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

3. Ableitungsbaum für $\neg 0 \wedge 1$:



Ableitungsbaum für $\neg(\neg 1 \wedge 0)$:



Die Grammatik aus 2. ist im Allgemeinen in Terme aufgeteilt, die zu 1 auswerten (R) und solche, die zu 0 auswerten (F). Da jeder Ausdruck der kontextfreien Grammatik zu 1 auswerten soll, sind im Folgenden die Ergebnisse von allen UND beziehungsweise ODER VErknüpfungen tabellarisch dargestellt:

$\wedge$	R	F
R	R	F
F	F	F

$\vee$	R	F
R	R	R
F	R	F

$\neg$	
R	F
F	R

Die Grammatik besteht aus 5 Nichtterminalsymbolen, von denen sich einzig die A und B direkt auf Terminalsymbole ableiten lassen. A erzeugt hierbei Terminalsymbole, die 1 ergeben und B erzeugt diejenigen, die 0 ergeben. Des Weiteren gibt es die Nichterminalsymbole R und F. R erzeugt alle Terme, die zu 1 evaluiert werden mithilfe der logischen Verknüpfungen(UND/ODER/NEG)

aus der Tabelle. Analog dazu erzeugt das Nichtterminalsymbol F alle logischen Terme, die zu 0 auswerten. Das Startsymbol S lässt sich entweder direkt zu A ableiten oder es erzeugt alle Verknüpfungen der logischen Tabelle, die den Wahrheitswert 1 haben. Somit ist gewährleistet, dass die Grammatik einzig Ausdrücke erzeugt, die zu 1 evalueirt werden.
Auf diese Art lassen sich alle Grammatikregeln nach Wahrheitswert trennen. Startet man also mit einem S als Startsymbol lassen sich nach den Regeln der Aussagenlogik nur Ausdrücke ableiten deren Wahrheitswert ebenfalls 1 entspricht.
Betrachten wir nun einige Beispiele um dies zu zeigen:

Bsp. 1: 0 sollte nicht durch die Grammatik erzeugbar sein:
$S \rightarrow$ Scheitert, da keine Zuweisung auf ein Nichtterminalsymbol getätigt werden kann, die nicht gleichzeitig die Anzahl der Zeichen erhöht.

Bsp. 2: $0 \wedge 1$ sollte nicht durch die Grammatik erzeugbar sein:
$S \rightarrow S \wedge S \rightarrow S \wedge 1 \rightarrow$ Scheitert, aus selbem Grund wie Bsp. 1

Bsp. 3: $0 \wedge (1 \vee 0)$ sollte nicht durch die Grammatik erzeugbar sein:
Versuche: $S \rightarrow S \wedge S \rightarrow S \wedge (S) \rightarrow S \wedge (S \vee F) \rightarrow S \wedge (1 \vee 0)$
Scheitert, da 0 nicht durch S erzeugbar ist (siehe Bsp. 1).
Versuche $S \rightarrow S \vee S \rightarrow S \wedge S \vee S$
Scheitert, da korrekte Klammerung nicht erzeugbar ist und 0 wieder nicht durch S erzeugbar ist
Da dies die einzigen beiden Wege sind aus S einen Ausdruck mit genau einem $\wedge$ und genau einem $\vee$ zu erzeugen, ist es unmöglich diesen Ausdruck zu erzeugen.

Bsp. 4: $1 \vee (0 \wedge \neg 0)$ sollte erzeugbar sein:
$S \rightarrow S \vee F \rightarrow 1 \vee F \rightarrow 1 \vee (F) \rightarrow 1 \vee (F \wedge S) \rightarrow 1 \vee (0 \wedge S) \rightarrow 1 \vee (0 \wedge \neg F) \rightarrow 1 \vee (0 \wedge \neg 0)$ $\square$

Bsp. 5: $1 \wedge 0 \vee 1$, sollte erzeugbar sein:
$S \rightarrow S \wedge S \rightarrow S \wedge F \vee S \rightarrow 1 \wedge 0 \vee 1$