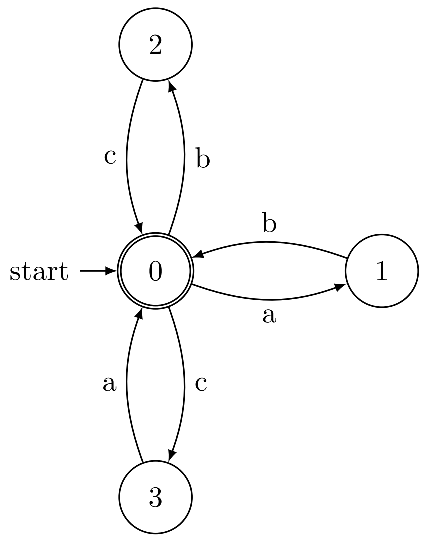
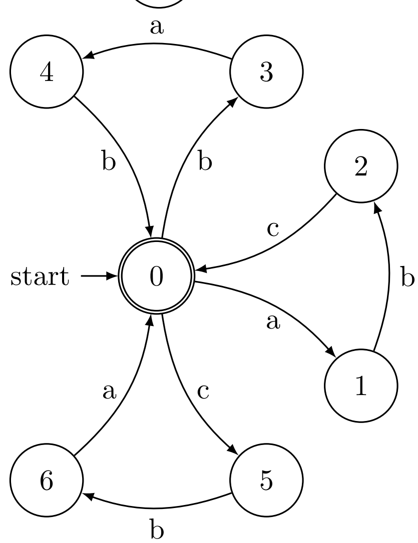
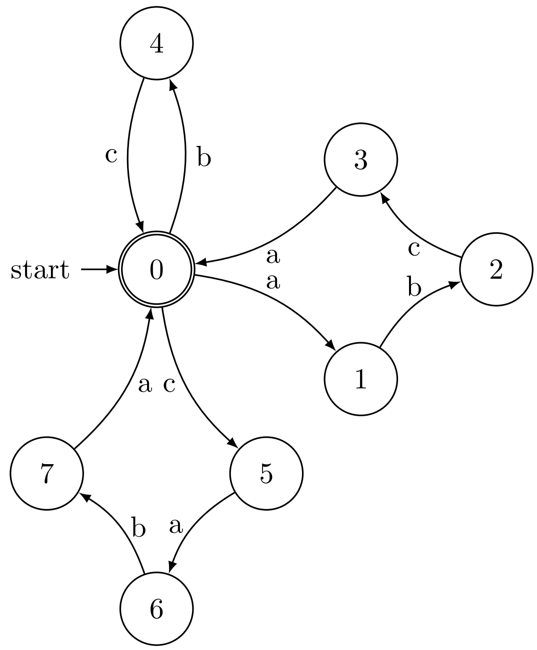
Formale Systeme, Automaten, Prozesse *Tim Luther, 410886*
Übungsblatt 6 *Til Mohr, 405959*
Tutorium 11 *Simon Michau, 406133*

Aufgabe H16 $(ab + bc + ca)^* \cap (abc + bab + cba)^* \cap (abca + bc + caba)^*$ ist der Schnitt aus drei Sprachen. Bilde NFAs für diese 3 Sprachen:

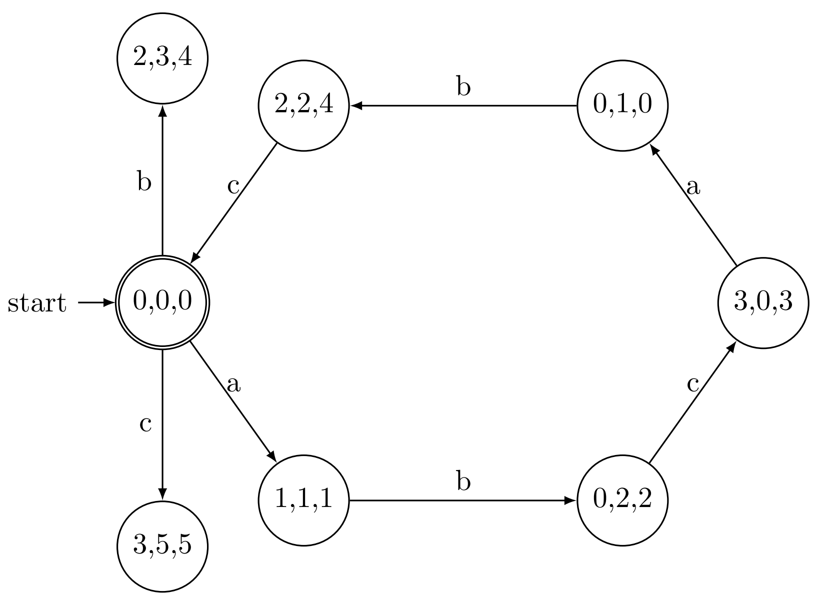




Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

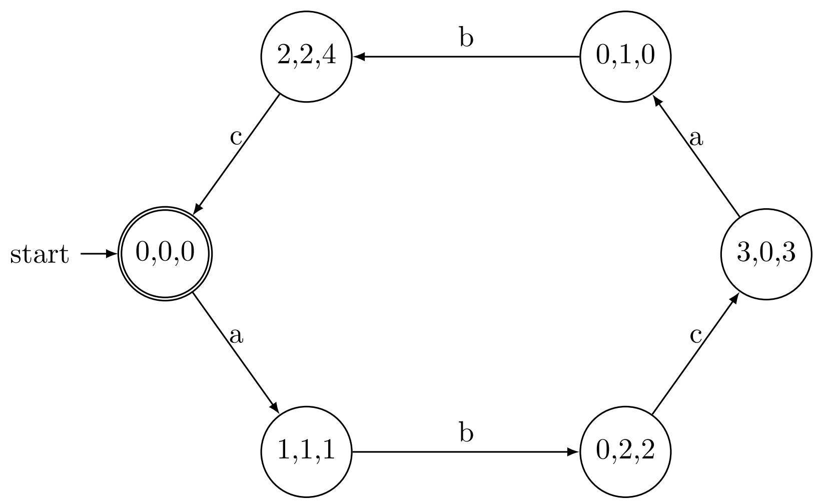


Aus diesen 3 NFAs kann man nun einen Produktautomaten bilden (den Schnitt):



Minimiert ergibt das:

Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133



Daraus folgt, dass $(ab + bc + ca)^* \cap (abc + bab + cba)^* \cap (abca + bc + caba)^* = (abcabc)^*$ ist.

Aufgabe H17

a)
- S ist das Startsymbol, und ist daher auch erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow BDA$ gibt, ist A erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow BDA$ gibt, ist B erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow DC$ gibt, ist C erreichbar.
- Da es die Ableitungs $S \Rightarrow DC$ gibt, ist D erreichbar.

Damit sind alle $X \in N$ erreichbar. Die Menge der unerreichbaren Symbole von G ist also Ø.

b)
- Das Nichtterminal A ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $A \Rightarrow a$ gibt.
- Das Nichtterminal B ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $B \Rightarrow \epsilon$ gibt.
- Das Nichtterminal C ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $C \Rightarrow a$ gibt.
- Das Nichtterminal D ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $D \Rightarrow aA$ gibt, und A selber auch produktiv ist.
- Das Nichtterminal S ist produktiv, da es z.B. die Ableitung $S \Rightarrow DC$ gibt, und sowohl C als auch D selber produktiv sind.

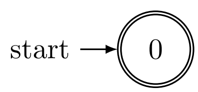
Damit ist die Menge der unproduktiven Symbole von G gleich Ø.

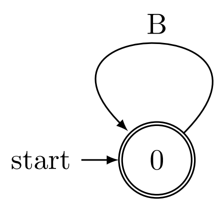
Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

c) Nein, $L(G) = \emptyset$ gilt nicht, da es z.B. die Ableitung $S \Rightarrow BDA \Rightarrow \epsilon DA \Rightarrow aAA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaa$ gibt. Damit enthält $L(G)$ also mind. ein Wort und ist somit ungleich $\emptyset$.

d) Damit $\epsilon \in L(G)$ gilt, muss es eine Ableitung $S \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$ geben. Da nur B eine Ableitung nach ϵ enthält (siehe Teilaufgabe e)), muss auch $S \overset{*}{\Rightarrow} B \Rightarrow \epsilon$ gelten. S hingegen kann nicht direkt auf B ableiten, und da es keine unproduktiven Symbole in G gibt, gilt $S \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon$ nicht, wodurch $\epsilon \notin L(G)$ gilt.

e) Erstelle $pre_G^*(\epsilon)$:





Also ist die Menge der nullierbaren Symbole $\{B\}$.

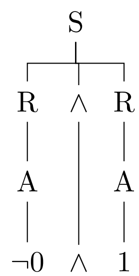
f) Da es keine unnerreichbaren oder unproduktiven Symbole in G gibt, muss man G nur bezüglich den nullierbaren Symbolen - also B - anpassen. Die einfachste Möglichkeit ist, alle Vorkommen von B in den Ableitungen anzupassen:

$G' : S \to DA \mid ScDA \mid cDDA \mid ADDA \mid DAC \mid DC$
$A \to SA \mid aA \mid a \mid d \mid b$
$C \to aD \mid dA \mid bC \mid a \mid d \mid b$
$D \to S \mid ScS \mid cDS \mid ADS \mid cC \mid aA$

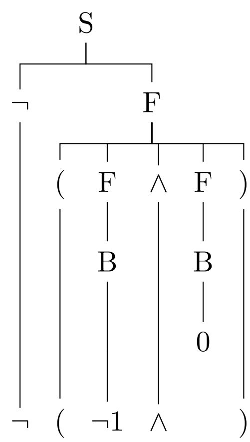
Aufgabe H18

1. $G_1 : S \to (S) \mid S \wedge S \mid S \vee S \mid \neg S \mid 0 \mid 1$
2. $G_2 : S \to R \wedge R \mid R \vee F \mid F \vee R \mid R \vee R \mid \neg F \mid A$
   $R \to (R \wedge R) \mid (R \vee F) \mid (F \vee R) \mid (R \wedge R) \mid \neg(F) \mid A$
   $F \to (F \wedge F) \mid (F \wedge R) \mid (R \wedge F) \mid (F \vee F) \mid B \mid \neg(R)$
   $A \to \neg 0 \mid 1$
   $B \to \neg 1 \mid 0$

3. Ableitungsbaum für $\neg 0 \land 1$:



Ableitungsbaum für $\neg(\neg 1 \land 0)$:



Die Grammatik aus 2. ist im Allgemeinen in Terme aufgeteilt, die zu 1 auswerten (R) und solche, die zu 0 auswerten (F). Da jeder Ausdruck der kontextfreien Grammatik zu 1 auswerten soll, sind im Folgenden die Ergebnisse von allen UND beziehungsweise ODER Verknüpfungen aus wahren Termen (R) und unwahren Termen (F), sowie der Negation, tabellarisch dargestellt:

$\land$	R	F
R	R	F
F	F	F

$\lor$	R	F
R	R	R
F	R	F

$\neg$	
R	F
F	R

Die Grammatik besteht aus 5 Nichtterminalsymbolen, von denen sich einzig A und B direkt auf Terminalsymbole ableiten lassen. A erzeugt hierbei Terminalsymbole, die 1 ergeben und B erzeugt diejenigen, die 0 ergeben. Des Weiteren gibt es die Nichterminalsymbole R und F. R erzeugt alle Terme

aus kleineren Teiltermen, die zu 1 evaluiert werden mithilfe der logischen Verknüpfungen(UND/ODER/NEG) aus der Tabelle. Analog dazu erzeugt das Nichtterminalsymbol F alle logischen Terme, die zu 0 auswerten. Das Startsymbol S lässt sich entweder direkt zu A ableiten oder es erzeugt alle Verknüpfungen der logischen Tabelle, die den Wahrheitswert 1 haben. Somit ist gewährleistet, dass die Grammatik einzig Ausdrücke erzeugt, die zu 1 evalueirt werden.
Auf diese Art lassen sich alle Grammatikregeln nach Wahrheitswert trennen. Startet man also mit einem S als Startsymbol lassen sich nach den Regeln der Aussagenlogik nur Ausdrücke ableiten deren Wahrheitswert ebenfalls 1 entspricht.
Betrachten wir nun einige Beispiele um dies zu zeigen:

Bsp. 1: 0 sollte nicht durch die Grammatik erzeugbar sein:
$S \rightarrow$ Scheitert, da die einzige Möglichkeit von S ein einzelnes Terminalsymbol abzuleiten, die Ableitung nach A ist. A wird ausschließlich zu Terminalsymbolen evaluiert, deren Wahrheitswert in der Booleschen Algebra 1 entspricht. Bei allen anderen Ableitungen für S hat man mindestens zwei Terminalsymbole, die somit nicht zur 0 evaluiert werden können.

Bsp. 2: $0 \wedge 1$ sollte nicht durch die Grammatik erzeugbar sein:
$S \rightarrow R \wedge R \rightarrow$ Scheitert, weil R nicht nach 0 abgeleitet werden kann, aus dem selben Grund wie bei 1).

Bsp. 3: $1 \wedge (0 \vee 0)$ sollte nicht durch die Grammatik erzeugbar sein:
Hierbei ist die äußerste Verknüpfung $\wedge$. Da die Grammatik die Terme von außen nach innen konstruiert, ist die einzig mögliche Ableitung $S \rightarrow R \wedge R$.
Versuche somit : $S \rightarrow R \wedge R \rightarrow A \wedge R \rightarrow 1 \wedge R \rightarrow 1 \wedge (R \vee F) \rightarrow 1 \wedge (R \vee B) \rightarrow 1 \wedge (R \vee 0)$
Da R unter keinen Umständen nach 0 abgeleitet werden kann, scheitert dieser Ableitungsversuch.

Bsp. 4: $1 \vee (0 \wedge \neg 0)$ sollte erzeugbar sein:
$S \rightarrow R \vee F \rightarrow A \vee F \rightarrow A \vee (F \wedge R) \rightarrow 1 \vee (F \wedge R) \rightarrow 1 \vee (0 \wedge R) \rightarrow 1 \vee (0 \wedge A) \rightarrow 1 \vee (0 \wedge \neg 0)$ $\square$

Bsp. 5: $1 \wedge (0 \vee 1)$, sollte erzeugbar sein:
$S \rightarrow R \wedge R \rightarrow R \wedge (F \vee R) \rightarrow A \wedge (F \vee R) \rightarrow 1 \wedge (F \vee R) \rightarrow 1 \wedge (B \vee R) \rightarrow 1 \wedge (0 \vee R) \rightarrow 1 \wedge (0 \vee A) \rightarrow 1 \wedge (0 \vee 1)$

Tim Luther, 410886
Til Mohr, 405959
Simon Michau, 406133

Bsp. 6: $\neg(1 \wedge (0 \vee \neg 1))$, sollte erzeugbar sein:
$S \to \neg F \to \neg(R \wedge F) \to \neg(A \wedge F) \to \neg(1 \wedge F) \to \neg(1 \wedge (F \vee F)) \to$
$\neg(1 \wedge (B \vee F)) \to \neg(1 \wedge (0 \vee F)) \to \neg(1 \wedge (0 \vee B)) \to \neg(1 \wedge (0 \vee \neg 1))$