Übungsblatt 04

Til Mohr, 405959
Andrés Montoya, 405409
Marc Ludevid Wulf, 405401

Aufgabe 4

Da $A \leq B$ gilt und B rekursiv aufzählbar ist, ist auch A rekursiv aufzählbar.
Damit also A entscheidbar ist, muss noch $\bar{A}$ rekursiv aufzählbar sein.
Jedoch kann $B \leq \bar{A}$ auch gelten, wenn $\bar{A}$ nicht rekursiv aufzählbar ist (beispielsweise wenn B nicht rekursiv ist):

$$\begin{aligned} B \text{ nicht rekursiv } &\Rightarrow \bar{A} \text{ nicht rekursiv} \\ &\Rightarrow \bar{A} \text{ nicht rekursiv aufzählbar (da A rekursiv aufzählbar)} \end{aligned}$$

Damit ist auch A nicht immer rekursiv.

Aufgabe 5

Zu zeigen: für eine berechenbare Funktion f gilt:
$x \in H_\epsilon \Leftrightarrow f(x) \in L_{111}$ und $x \notin H_\epsilon \Leftrightarrow f(x) \notin L_{111}$
Sei f:
$f(x) = \langle M' \rangle$ falls x Gödelnummer $\langle M \rangle$ wobei M' die TM ist die zunächst das ganze Band löscht und dann M ausführt.
$f(x) = \langle M'' \rangle$ falls x keine Gödelnummer ist, wobei M'' eine TM ist die nur einen Endlosschleife hat und somit nie terminiert.
f ist offensichtlich berechenbar, da das Bestimmen ob ein Eingabewort eine TM ist, das Löschen des Bandes und das Simulieren einer TM alles berechenbar ist.

$x \in H_\epsilon$
$\Leftrightarrow x$ ist Gödelnummer $\langle M \rangle$ und $\langle M \rangle$ hält auf ϵ
$\Leftrightarrow \langle M' \rangle$ hält auf jeder Eingabe somit auch die, die auf 111 enden.
$\Leftrightarrow \langle M' \rangle \in L_{111}$
$\Leftrightarrow f(x) \in L_{111}$

$x \notin H_\epsilon$
$\Leftrightarrow x$ ist keine Gödelnummer oder x ist Gödelnummer $\langle M \rangle$ und $\langle M \rangle$ hält nicht auf ϵ
$\Leftrightarrow f(x) = \langle M'' \rangle$ oder $f(x) = \langle M' \rangle$ wobei M' auf keiner Eingabe terminiert, somit auch die, die auf 111 enden.
$\Leftrightarrow f(x)$ terminiert nie.
$\Leftrightarrow f(x) \notin L_{111}$

Somit gilt: $H_\epsilon \leq L_{111}$

Aufgabe 6

a) Satz von Rice:

$$L_{\mathbb{P}} = \{\langle M \rangle | L(M) = \mathbb{P}\}$$
$$S = \{f_M | \forall_{p \in \mathbb{P}} : f_M(p) = 1 \land \forall_{q \notin \mathbb{P}} : f_M(q) = 0\}$$

$S \neq R$, da in S nicht die Funktion enthalten ist, die für alle Eingaben 0 ausgibt.
$S \neq \emptyset$, da es Algorithmen gibt um zu bestimmen, ob eine bestimmte Zahl x eine Primzahl ist.
Ausserdem macht die Sprache ausschliesslich eine Aussage über die Ausgabe der TM.
Nach dem Satz von Rice ist also $L_{\mathbb{P}} = L(S)$ nicht rekursiv.

b) Sei L_1 das Entscheidungsproblem: Gegeben eine TM M, akzeptiert diese jede Eingabe w? Also:

$$L_1 = \{\langle M \rangle | L(M) = \Sigma^*\}$$

Mit dem Satz von Rice ist schnell bewiesen, dass dieses Entscheidungsproblem unentscheidbar ist:
$S \neq R$, da in S nicht die Funktion enthalten ist, die für alle Eingaben 0 ausgibt.
$S \neq \emptyset$, da in S die Funktion enthalten ist, die fül alle Eingabe 1 ausgibt.
Da die Sprache ausschliesslich eine Aussage über die Ausgabe der TM macht, $S \neq R$ und $S \neq \emptyset$ gilt, besagt der Satz von Rice dass L_1 nicht entscheidbar ist.

Nun zeigen wir, dass wenn es eine TM M_{comp} gäbe die die gegebene Sprache L_{comp} entscheidet man dann durch Unterprogrammtechnik auch L_1 mit der TM M_1 entscheiden könnte. Da wir gerade gezeigt haben, dass L_1 nicht entscheidbar ist kann L_{comp} also ebenfalls nicht entscheidbar sein.

Dafür definieren wir die TM M_0 welche jedes Wort verwirft.
Die TM M_1 gibt einfach $\langle M_0 \rangle$ und das Eingabewort in die TM M_{comp} ein und übernimmt dann die Ausgabe.

Korrektheit:

$\overline{L(M_0)} = \{\langle M \rangle | L(M) = \Sigma^*\} = L_1$

$x \in L_1$
$\Leftrightarrow x$ ist Gödelnummer $\langle M \rangle$ und $L(M) = L_1$
$\Leftrightarrow M_{comp}$ akzeptiert mit Eingaben $\langle M \rangle$ und $\langle M_0 \rangle$
$\Leftrightarrow M_1$ akzeptiert ebenfalls.
$\Leftrightarrow x \in L(M_1)$

$x \notin L_1$
$\Leftrightarrow x$ ist keine Gödelnummer oder x ist Gödelnummer $\langle M \rangle$ und $L(M) \neq L_1$
$\Leftrightarrow M_{comp}$ verwirft die Eingaben $\langle M \rangle$ und $\langle M_0 \rangle$
$\Leftrightarrow M_1$ verwirft ebenfalls.
$\Leftrightarrow x \notin L(M_1)$

Aufgabe 7

rekursiv aufzählbar = ra, rekursiv = r

a) "$\Rightarrow$" L ra $\Rightarrow$ Es gibt eine TM M, die für alle $x \in L$ hält und akzeptiert.
$\Rightarrow$ Konstruiere TM M', die M simuliert:

- M akzeptiert $\Rightarrow$ M' akzeptiert
- M hält nicht $\Rightarrow$ M' hält nicht
- M verwirft $\Rightarrow$ Setze M' in eine Endlosschleife $\Rightarrow$ M' hält nicht

$\Rightarrow L(M) = L(M')$
$\Rightarrow$ Es gibt also eine partielle berechenbare Funktion f, die von M' (bzw. gleich M) berechnet wird
$\Rightarrow \mathrm{Def}(f) = \{x | f(x) \neq \perp\} = L(M') = L(M) = L$

"$\Leftarrow$" f eine partielle berechenbare Funktion mit $L \coloneqq \mathrm{Def}(f) = \{x | f(x) \neq \perp\}$
$\Rightarrow$ Es gibt eine TM M, die f berechnet $\Rightarrow L(M) = L$, da:

- M hält auf x $\Leftrightarrow f(x) \neq \perp \Leftrightarrow x \in L$
- M hält nicht auf x $\Leftrightarrow f(x) = \perp \Leftrightarrow x \notin L$

Also ist L ra.

Damit ist die Aussage folglich bewiesen.

b) "$\Rightarrow$" L rekursiv aufzählbar:

1) Falls $L = \emptyset$ gilt (immer ra)
2) Falls $L \neq \emptyset$:
Es gibt ja $h : \Sigma^* \to \mathbb{N}$.
Zudem hat die ra Sprache L einen Aufzähler A, der Wörter $w \in L$ aufzählt.
$\Rightarrow$ Es gibt $g : \mathbb{N} \to L$, die eine Zuordnung von Zahlen zu den Wörter auf dem Ausgabeband von A ist $\Rightarrow f \coloneqq g \circ h$ ist somit eine totale Funktion von Σ^* nach L

"$\Leftarrow$"

1) $L = \emptyset \Rightarrow L$ r $\Rightarrow L$ ra (offensichtlich)
2) $f : \Sigma^* \to L$ solche totale Funktion
$\Rightarrow$ Sei T eine TM, die f berechnet für $w \in \Sigma^*$
$\Rightarrow$ Sei Z ein Aufzähler von Σ^*
$\Rightarrow$ Sei T' eine TM, die T und Z benutzt, keine Eingaben nimmt, jedes von Z geschriebene Wort in T füttert.
$\Rightarrow T'$ ist ein Aufzähler von L
$\Rightarrow L$ ist ra