

Aufgabe 4

- (a) Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, denn hier geht es darum, **wie** etwas berechnet wird, und nicht **was**.

Die Sprache L_1 ist rekursiv und kann durch eine TM M' wie folgt entschieden werden:

- 1) Berechne $(x := 2^{|\langle M \rangle|} - 1) - 1$
- 2) Simuliere M für x Schritte
- 3) Falls M terminiert, soll M' verwerfen
Falls M nicht terminiert hat, soll M' akzeptieren

Korrektheit:

- Falls $\langle M \rangle \notin L_1 \Rightarrow M$ hält nicht in weniger als $x := 2^{|\langle M \rangle|} - 1$ Schritten $\Rightarrow M'$ verwirft
- Falls $\langle M \rangle \in L_1 \Rightarrow M$ hält in weniger als $x := 2^{|\langle M \rangle|} - 1$ Schritten $\Rightarrow M'$ akzeptiert

- (b) Der Satz von Rice ist hier anwendbar, da es um eine partielle Funktion geht.

$$\begin{aligned} S &= \{f_M | f_M(\langle M \rangle) = 1\} \\ L_2 &= L(S) = \{\langle M \rangle | M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\ &= \{\langle M \rangle | M \text{ berechnet auf Eingabe } \langle M \rangle \text{ den Wert } 1\} \end{aligned}$$

$S \neq \emptyset$, da es in S eine TM M' gibt, die jede Eingabe löscht und dann genau eine 1 schreibt.

$S \neq R$, da es in R eine TM M'' gibt, die jede Eingabe löscht und dann genau eine 0 schreibt.

Gemäß Satz von Rice ist L_2 nicht entscheidbar.

- (c) Nicht entscheidbar

Aufgabe 5

- (a) Sei A ein Aufzähler von L mit Ausgabeband $Ausgabe_A$. Dann gibt es auch seinen Sparsamen Aufzähler SA mit:

- A
- Ausgabeband $Ausgabe_{SA}$

Unser Sparsame Aufzähler geht nun wie folgt vor:

- 1) A zählt neues Wort w von L auf seinem Band $Ausgabe_A$ auf.
- 2) SA liest nun w und überprüft nun, ob w auf $Ausgabe_{SA}$ schon steht.
 - \rightarrow Steht w schon auf $Ausgabe_{SA}$, fahre einfach mit 1) fort.
 - \rightarrow Steht w noch nicht auf $Ausgabe_{SA}$, schreibe es dort und fahre mit 1) fort.

Die Überprüfung, ob ein Wort w bereits auf $Ausgabe_{SA}$ steht, geht ja in linearer Zeit.

Damit gibt es für jede rekursiv aufzählbare Sprache L einen sparsamen Aufzähler.

- (b) Angenommen die Aussage gilt für rekursiv aufzählbare Sprachen L . Also gibt es für L einen kanonisch-organisierten Aufzähler koA . Nun kann man mit koA die Sprache L **entscheiden**, nicht nur erkennen:

Sei w das Wort, welches wir überprüfen wollen:

- Zählt koA das Wort w auf, so ist $w \in L$ (bekannt).
- Zählt koA das Wort w noch nicht auf, aber ein Wort w' , welches in kanonischer Reihenfolge nach w liegt, so wird w auch nie aufgezählt werden. So ist $w \notin L$.

Damit entscheidet koA L . Deswegen muss L rekursiv sein. \Rightarrow Widerspruch
Also ist die Aussage falsch.

Aufgabe 6

Das Allgemeine Halteproblem $H_{all} := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\}$ ist eine echte Obermenge von L , da:

- Alle $\langle M \rangle \in H_{all}$ entscheiden eine rekursive Sprache, da sie ja auf jeder Eingabe halten.
- Aus der Vorlesung ist bekannt, dass H_{all} nicht rekursiv aufzählbar ist. Da aber jedes L rekursiv aufzählbar ist, muss es immer eine TM M' geben, mit $\langle M' \rangle \in H_{all}$, $\langle M' \rangle \notin L$.