Übungsblatt 04

Til Mohr, 405959
Andrés Montoya, 405409
Marc Ludevid Wulf, 405401

Aufgabe 4

Da $A \leq B$ gilt und B rekursiv abhängig ist, ist auch A rekursiv abhängig.
Damit also A entscheidbar ist, muss noch $\bar{A}$ rekursiv abhängig sein.
Jedoch kann $B \leq \bar{A}$ auch gelten, wenn $\bar{A}$ nicht rekursiv abhängig ist (beispielsweise wenn B nicht rekursiv ist):

$$\begin{aligned} B \text{ nicht rekursiv } &\Rightarrow \bar{A} \text{ nicht rekursiv} \\ &\Rightarrow \bar{A} \text{ nicht rekursiv abhängig} \end{aligned}$$

Damit ist auch A nicht immer rekursiv.

Aufgabe 5

Aufgabe 6

a) Satz von Rice:

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{P}} &= \{\langle M\rangle | L(M) = \mathbb{P}\} \\ S &= \{f_M | \forall_{p \in \mathbb{P}} : f_M(p) = 1 \land \forall_{q \notin \mathbb{P}} : f_M(q) = 0\} \end{aligned}$$

$S \neq R$, da in S nicht die Funktion enthalten ist, die für alle Eingaben 0 ausgibt.
$S \neq \emptyset$, da es Algorithmen gibt um zu bestimmen, ob eine bestimmte Zahl x eine Primzahl ist.
Nach dem Satz von Rice ist also $L_{\mathbb{P}} = L(S)$ nicht rekursiv.

b)

Aufgabe 7

rekursiv abhängig = ra, rekursiv = r

a) "$\Rightarrow$" L ra $\Rightarrow$ Es gibt eine TM M, die für alle $x \in L$ hält und akzeptiert.
Angenommen M hält auch für $w \notin L$ (sonst überspringe diesen Teil), und verwirft diese w.
$\Rightarrow$ Konstruiere TM M', die M simuliert:

- M akzeptiert $\Rightarrow$ M' akzeptiert
- M hält nicht $\Rightarrow$ M' hält nicht
- M verwirft $\Rightarrow$ Setze M' in eine Endlosschleife $\Rightarrow$ M' hält nicht

$\Rightarrow L(M) = L(M')$
$\Rightarrow$ Es gibt also eine partielle berechenbare Funktion f, die von M' (bzw. gleich M) berechnet wird
$\Rightarrow \mathrm{Def}(f) = \{x | f(x) \neq \perp\} = L(M') = L(M) = L$

"$\Leftarrow$" f eine partielle berechenbare Funktion mit $L := \mathrm{Def}(f) = \{x | f(x) \neq \perp\}$
$\Rightarrow$ Es gibt eine TM M, die f berechnet $\Rightarrow L(M) = L$, da:

- M hält auf x $\Leftrightarrow f(x) \neq \perp \Leftrightarrow x \in L$
- M hält nicht auf x $\Leftrightarrow f(x) = \perp \Leftrightarrow x \notin L$

Also ist L ra.

Damit ist die Aussage folglich bewiesen.

b) "$\Rightarrow$" L rekursiv aufzählbar:

1) Falls $L = \emptyset \Rightarrow L$ r $\Rightarrow L$ ra

2) Falls $L \neq \emptyset$:
Es gibt ja $h : \Sigma^* \to \mathbb{N}$.
Zudem hat die ra Sprache L einen Aufzähler A, der Wörter $w \in L$ aufzählt.
$\Rightarrow$ Es gibt $g : \mathbb{N} \to L$, die eine Zuordnung von Zahlen zu den Wörter auf dem Ausgabeband von A ist $\Rightarrow f : g(h)$ ist somit eine totale Funktion von Σ^* nach L

"$\Rightarrow$" 1) $L = \emptyset \Rightarrow L$ r $\Rightarrow L$ ra

2) $f : \Sigma^* \to L$ solche totale Funktion $\Rightarrow$ Sei T eine TM, die f berechnet für $w \in \Sigma^* \Rightarrow$ Sei Z ein Aufzähler von $\Sigma^* \Rightarrow$ Sei T' eine TM, die T und Z benutzt, keine Eingaben nimmt, jedes von Z geschriebene Wort in T füttert. $\Rightarrow T'$ ist ein Aufzähler von $L \Rightarrow L$ ist ra