

Aufgabe 4

Da $A \leq B$ gilt und B rekursiv aufzählbar ist, ist auch A rekursiv aufzählbar.

Damit also A entscheidbar ist, muss noch \bar{A} rekursiv aufzählbar sein.

Jedoch kann $B \leq \bar{A}$ auch gelten, wenn \bar{A} nicht rekursiv aufzählbar ist (beispielsweise wenn B nicht rekursiv ist):

$$\begin{aligned} B \text{ nicht rekursiv} &\Rightarrow \bar{A} \text{ nicht rekursiv} \\ &\Rightarrow \bar{A} \text{ nicht rekursiv aufzählbar (da } A \text{ rekursiv aufzählbar)} \end{aligned}$$

Damit ist auch A nicht immer rekursiv.

Aufgabe 5

Aufgabe 6

a) Satz von Rice:

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{P}} &= \{\langle M \rangle \mid L(M) = \mathbb{P}\} \\ S &= \{f_M \mid \forall p \in \mathbb{P} : f_M(p) = 1 \wedge \forall q \notin \mathbb{P} : f_M(q) = 0\} \end{aligned}$$

$S \neq R$, da in S nicht die Funktion enthalten ist, die für alle Eingaben 0 ausgibt.

$S \neq \emptyset$, da es Algorithmen gibt um zu bestimmen, ob eine bestimmte Zahl x eine Primzahl ist.

Nach dem Satz von Rice ist also $L_{\mathbb{P}} = L(S)$ nicht rekursiv.

b)

Aufgabe 7

rekursiv aufzählbar = ra, rekursiv = r

- a) \Rightarrow " L ra \Rightarrow Es gibt eine TM M , die für alle $x \in L$ hält und akzeptiert.
 \Rightarrow Konstruiere TM M' , die M simuliert:
- M akzeptiert $\Rightarrow M'$ akzeptiert
 - M hält nicht $\Rightarrow M'$ hält nicht
 - M verwirft \Rightarrow Setze M' in eine Endlosschleife $\Rightarrow M'$ hält nicht
- $\Rightarrow L(M) = L(M')$
 \Rightarrow Es gibt also eine partielle berechenbare Funktion f , die von M' (bzw. gleich M) berechnet wird
 $\Rightarrow \text{Def}(f) = \{x | f(x) \neq \perp\} = L(M') = L(M) = L$
- " \Leftarrow " f eine partielle berechenbare Funktion mit $L := \text{Def}(f) = \{x | f(x) \neq \perp\}$
 \Rightarrow Es gibt eine TM M , die f berechnet $\Rightarrow L(M) = L$, da:
- M hält auf $x \Leftrightarrow f(x) \neq \perp \Leftrightarrow x \in L$
 - M hält nicht auf $x \Leftrightarrow f(x) = \perp \Leftrightarrow x \notin L$

Also ist L ra.

Damit ist die Aussage folglich bewiesen.

b) \Rightarrow " L rekursiv aufzählbar:

- 1) Falls $L = \emptyset$ gilt (immer ra)
- 2) Falls $L \neq \emptyset$:
Es gibt ja $h : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$.
Zudem hat die ra Sprache L einen Aufzähler A , der Wörter $w \in L$ aufzählt.
 \Rightarrow Es gibt $g : \mathbb{N} \rightarrow L$, die eine Zuordnung von Zahlen zu den Wörter auf dem Ausgabeband von A ist $\Rightarrow f := g \circ h$ ist somit eine totale Funktion von Σ^* nach L

- " \Leftarrow " 1) $L = \emptyset \Rightarrow L \text{ r} \Rightarrow L \text{ ra}$ (offensichtlich)
- 2) $f : \Sigma^* \rightarrow L$ solche totale Funktion
 \Rightarrow Sei T eine TM, die f berechnet für $w \in \Sigma^*$
 \Rightarrow Sei Z ein Aufzähler von Σ^*
 \Rightarrow Sei T' eine TM, die T und Z benutzt, keine Eingaben nimmt, jedes von Z geschriebene Wort in T füttert.
 $\Rightarrow T'$ ist ein Aufzähler von L
 $\Rightarrow L$ ist ra