Aufgabe 4

a) Um zu zeigen, dass k-Independent Set in NP liegt, bauen wir uns einen Verifizierer:
Das Zertifikat hierbei ist eine Teilmenge von V, die wir V' nennen werden. V' soll hier genau k-viele Knoten besitzen und kann wie folgt kodiert werden:
$bin(u'_1)\$...bin(u'_i)\$...bin(u'_m)$, wobei alle u'_i Knoten aus V' sind, $0 \leq i \leq m \leq n := |V|$.
Der Verifizierer überprüft nun zuerst, ob die Codierung der Eingabe korrekt ist und, dass $m = k$ gilt. Anschließend wird für alle Paare $e := (u'_i, u'_j)$ aus $V' \times V'$ überprüft, ob $e \notin E$ gilt.
Damit liegt k-Independent Set in NP.

b)

Aufgabe 5

a) 1) Dieser Graph ist in 2-Colorability:

Knoten	Farbe
1	1
2	1
3	2
4	2
5	1
6	2
7	1

2) Dieser Graph ist nicht in 2-Colorability:
Würde man Knoten 1 als 1 färben (wobei es prinzipiell hier egal ist, als was wir den Knoten 1 färben), so müssen Knoten 3 und 7 als 2 gefärbt werden. Deswegen müssten Knoten 2, 4 und 6 wieder als 1 gefärbt werden. Jedoch sind dann aber Knoten 2 und 4 immer gleich gefärbt. Da sie aber eine Kante zwischen sich besitzen, ist der Graph nicht in 2-Colorability.

b) Eine einfache, leicht abgeänderte Breitensuche sollte hier genügen:

1) Färbe alle Knoten 0 (noch nicht gefunden)
2) Färbe den ersten Knoten k mit aktueller Farbe 0 aus V 1.
3) Führe `BFS` auf k aus. Färbe dabei alle benachbarten Knoten, die Farbe 0 sind, in der von sich selber verschiedenen Farbe. Ist ein benachbarter Knoten schon eine von sich selber verschiedene Farbe, so laufe über diesen nicht mehr (schon besucht). Ist ein benachbarter Knoten aber dieselbe Farbe wie die eigene, so **verwerfe**.
4) Falls noch Knoten in V als 0 gefärbt sind, kehre zu Schritt `2)` zurück.
5) **Akzeptiere**.

c) Um zu zeigen, dass 3-Colorability in NP liegt, bauen wir uns einen Verifizierer:
Das Zertifikat hierbei ist die Zuordnung von allen Knoten aus V zu den Farben $\{1, 2, 3\}$. Dabei das das Zertifikat folgende Kodierung:
$bin(k_0)\$bin(f_0)\$...bin(k_i)\$bin(f_i)\$...bin(k_n)\$bin(f_n)$, wobei $0 \leq i \leq n := |V|$ gilt.
Hierbei ist f_i die Farbe aus $\{1, 2, 3\}$, die dem jeweiligen Knoten k_i aus V zugeordnet wurde.
Der Verifizierer überprüft nun folgende Dinge:

- Zertifikat korrekt formatiert

- Für jede Kante $(k_i, k_j) \in E$ $(0 \leq i, j \leq n, i \neq j)$, ob $f_i \neq f_j$.

Damit liegt 3-Colorability in NP.

Aufgabe 6