Übungsblatt 3

Abgabetermin: Montag 30. November 2020

- Die Lösungen der Hausaufgaben werden online in RWTHmoodle abgegeben.
- Die Hausaufgaben müssen in Gruppen von je **drei Studierenden aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden.
- Einzelabgaben werden mit 0 (Null) Punkten bewertet. Bitte versucht immer zu dritt arbeiten und abzugeben, das heißt wenn ein Teammitglied aufhört, sucht euch bitte ein weiteres Teammitglied.
- **Nummer der Übungsgruppe**, **Nummer des Übungsblattes** und **Namen und Matrikelnummern** der Studierenden sind auf das erste Blatt jeder Abgabe aufzuschreiben
  - Auch wenn wir die Information zusätzlich über Moodle einsehen können macht das die Korrekturen sehr viel einfacher.
- Es wird nur eine PDF-Datei, maximale Größe 15 MB, akzeptiert, als Dateiname bitte `Blatt-XX_Tutorium-YY_Gruppe-ZZZ.pdf` mit der Nummer des aktuellen Blattes, des Tutoriums und der Abgabegruppe im Dateinamen.
- Die Lösungen zu den Hausaufgaben werden in Form von Videos in RWTHmoodle hochgeladen.

Tutoriumsaufgabe 1 (Diagonalisierung)

Sei

$$L := \{1^i \mid i \in \mathbb{N},\ M_i \text{ akzeptiert } 1^i \text{ nicht}\} \qquad \text{wobei } 1^i := \underbrace{11\ldots1}_{i \text{ mal}}.$$

Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass L nicht entscheidbar ist.

Tutoriumsaufgabe 2 (Entscheidbarkeit)

Formulieren Sie folgende Probleme als Sprache (z.B. $H := \{\langle M\rangle w \mid M \text{ terminiert bei Eingabe } w\}$ für das Halteproblem). Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgende Probleme entscheidbar sind. Zeigen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Beweise.

a) Eingabe: Eine TM M.

Frage: Stoppt M auf keiner Eingabe?

b) Eingabe: Eine TM M; ein Wort w.

Frage: Benutzt M jemals die Richtung L auf dem Eingabewort w?

c) Eingabe: Eine TM M.

Frage: Hält M nicht auf der Eingabe 110.

Tutoriumsaufgabe 3 (Spezielle Halteprobleme)

Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Probleme entscheidbar sind. Zeigen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Beweise.

a) $H_{\leq 97} \coloneqq \{\langle M\rangle w \mid M$ hält auf Eingabe w und zwar nach höchstens 97 Schritten$\}$

b) $H_{>97} \coloneqq \{\langle M\rangle w \mid M$ hält auf Eingabe w und zwar nach mehr als 97 Schritten$\}$

Hinweis: Überlegen Sie, falls das Problem unentscheidbar ist, ob sich der Satz von Rice benutzen lässt. Falls nein, warum nicht?

Aufgabe 4 (Entscheidbarkeit) **3+3+3 Punkte**

Formulieren Sie folgende Probleme als Sprache (z.B. $H \coloneqq \{\langle M\rangle w \mid M$ terminiert bei Eingabe $w\}$ für das Halteproblem). Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgende Probleme entscheidbar sind. Zeigen auch die Korrektheit Ihrer Beweise. Verwenden Sie nicht den Satz von Rice.

a) Eingabe: Eine TM M; ein Wort w; ein Zustand q.

Frage: Erreicht M jemals den Zustand q, wenn M auf dem Eingabewort w gestartet wird?

b) Eingabe: Eine TM M und ein Wort w.

Frage: Schreibt die TM M bei Eingabe w jemals ein $\#$ auf das Band?

c) Eingabe: Eine TM M.

Frage: Schreibt M jemals einen Buchstaben $a \in \Gamma$ mit $a \neq B$ aufs Band, wenn M mit dem leeren Eingabewort gestartet wird?

Aufgabe 5 (Entscheidbarkeit) **3+4 Punkte**

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Sprachen rekursiv sind. Sie können gegebenenfalls den Satz von Rice verwenden.

a) $L_1 \coloneqq \{\langle M\rangle \mid L(M)$ ist nicht entscheidbar$\}$.

b) $L_2 \coloneqq \{\langle M\rangle \mid$ es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, die die Länge aller ausgegebenen Wörter von M beschränkt$\}$.

Hinweis: Zu b): Die Turingmaschinen mit Gödelnummer $\langle M\rangle$ berechnen eine Funktion.

Aufgabe 6 (Turingmaschine) **4 Punkte**

Beweisen Sie:
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \Gamma, B, \overline{q})$ eine Turingmaschine, die auf Eingaben der Länge n nur die Bandzellen $1, \ldots, s(n)$ benutzt. Wenn M auf einer Eingabe der Länge n stoppt, dann stoppt M nach spätestens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n)$ Schritten.

Hinweis: Wann gerät M in eine Schleife?