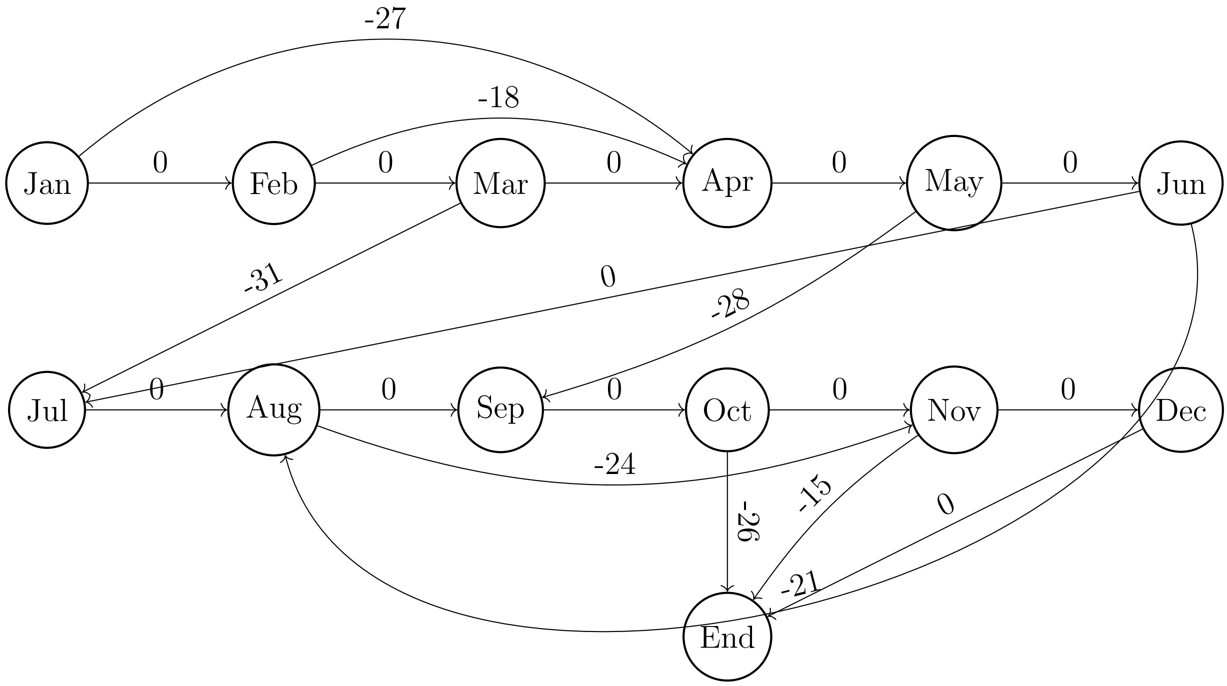
Aufgabe 19

Wir modellieren das Problem als kürzeste Wege Problem in einem gewichteten, gerichteten Graphen $G = (V, E), c$ mit:

- $V := \{Jan, Feb, Mar, Apr, May, Jun, Jul, Aug, Sep, Oct, Nov, Dec\} \cup \{End\}$, wobei hier der Knoten End das Ende des Jahres darstellen soll.
- $E \widehat{=}$ Aufträge, also:
  $E := \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j,$ Es existiert ein Auftrag, welcher im Monat i beginnt, und im Monat j bzw. End endet.$\} \cup \{(i, j) |$Monat j folgt auf Monat $i\} \cup \{(Dec, End)\}$
- $c_{(i,j)} = \begin{cases} -p, & (i,j) \text{ ist einem Auftag zugeordnet mit Profit p} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Das Beispiel aus der Aufgabenstellung liefert also folgenden Graphen:



Eine zulässige Lösung des kürzeste Wege Problems auf G von Jan nach End entspricht also einer optimalen Wahl der Aufträge in diesem Jahr.
Der Graph G ist immer zusammenhängend und sogar azyklisch, folglich gibt es immer einen kürzesten Weg von Jan nach End. Wählt man keinen Auftrag aus, so führt der Weg durch alle Knoten und hat eine Länge von 0. Mit jedem angenommenen Auftrag verkürzt sich der Weg in Anbetracht auf besuchte Knoten und Länge (verkürzt sich immer um den Profit von dem Auftrag).

Somit ist also die optimale Auswahl von Aufträgen immer die, mit welchen den Aufträgen zugeordneten Kanten der kürzeste Weg in G existiert.