Curs Nr. 7

Serii Taylor

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Serii Taylor

Fie $f \in C_I^n$ o funcţie de clasă C^n pe intervalul I şi x_0 un punct interior acestuia.

Definiţia 0.1.1 *Se numeşte polinom Taylor de ordinul n asociat funcţiei f pe vecinătatea $V_{x_0} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, polinomul*

$$T_n(f; x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \ \ x \in V_{x_0}.$$

Teorema 0.1.2 *(Taylor) Dacă f este o funcţie de clasă C^{n+1} pe vecinătatea $V_{x_0} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ atunci are loc descompunerea*

$$\boxed{f(x) = T_n(f; x, x_0) + R_n(f; x, x_0, \varepsilon)} \text{ unde}$$

$$R_n(f; x, x_0, \varepsilon) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

reprezintă restul de ordinul n sub forma Lagrange, iar $\xi = \theta x + (1 - \theta)x_0$, $\theta \in (0, 1)$ este un punct situat între x şi x_0.

În particular, dacă $0 \in V$, şi $x_0 = 0$, formula lui Taylor sub forma Lagrange se numeşte formula lui Mac-Laurin.

Observaţia 0.1.3 *Există şi rest "sub forma Cauchy", anume*

$$R_n(x) = \frac{(x - \xi)^n (x - x_0)}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

iar $\xi = \theta x + (1 - \theta)x_0$, $\theta \in (0, 1)$ este un punct situat între x şi x_0.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe I şi $x_0 \in I$. **Seria Taylor** centrată în x_0 asociată funcţiei f este o serie de puteri definită astfel

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.}$$

În cazul particular $x_0 = 0 \in I$ seria de mai sus devine

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots}$$

şi se numeşte **seria Mac-Laurin** asociată funcţiei f.

Care este legătura dintre funcţia f şi suma seriei Taylor centrată în x_0 asociată acestei funcţii?

Orice serie Taylor este, în caz particular, o serie de puteri, pentru care putem să determinăm mulţimea de convergenţă, notată în continuare cu A_c. Remarcăm faptul că mulţimea A_c nu este neapărat o submulţime a intervalului I pe care este definită funcţia f, seria Taylor fiind definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Astfel, suma seriei Taylor centrată în x_0 asociată funcţiei f este

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in A_c.$$

În general, suma seriei Taylor centrată într-un punct $x_0 \in I$ asociată funcţiei f nu coincide cu funcţia f pe mulţimea $A_c \cap I$. Chiar dacă seria Taylor este convergentă, aceasta poate să conveargă la o funcţie diferită de f. Mulţimea punctelor $x \in A_c \cap I$ pentru care suma seriei Taylor centrată în x_0 asociată funcţiei f coincide cu funcţia f, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

se numeşte domeniul de dezvoltabilitate al funcţiei f în serie Taylor (în jurul punctului x_0), mulţime pe care o vom nota în continuare cu D. Vom spune că f este dezvoltabilă în serie Taylor (în jurul punctului x_0) pe D. În cazul particular în care $x_0 = 0 \in I$, se obţine conceptul de dezvoltabilitate al unei funcţii în serie Mac-Laurin.

Remarcăm faptul că domeniul de dezvoltabilitate al unei funcţii f în serie Taylor este o submulţime atât a intervalului de definiţie al funcţiei f, cât şi a mulţimii de convergenţă a seriei Taylor asociate funcţiei f.

Teorema 0.1.4 *Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 \in I$ pe o mulţime $D \subset A_c \cap I$ dacă şi numai dacă şirul de funcţii (R_n), unde R_n este restul Taylor de ordinul n asociat funcţiei f în punctul x_0, converge punctual la 0 pe D, adică*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in D$.

Dezvoltările în serie Taylor a unor funcţii elementare

Exemplul 1 *Să se determine dezvoltările în serie Taylor în vecinătatea originii ale următoarelor funcţii elementare:*

i) $f(x) = e^x$, $(x \in \mathbb{R})$; **ii)** $f(x) = \cos x$, $(x \in \mathbb{R})$; **iii)** $f(x) = \sin x$, $(x \in \mathbb{R})$, **iv)** $f(x) = \ln(1+x), \in (-1, \infty)$.

Soluţie. **i)** Avem

$$\begin{aligned} f'(x) = e^x, \quad f'(0) &= 1; \\ f''(x) = e^x, \quad f''(0) &= 1; \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Deoarece $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^M$, pe orice interval $[-M, M]$, rezultă conform teoremei de dezvoltare în serie Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Raza de convergenţă a seriei este $R = \infty$.

ii) Derivând funcţia $f(x) = \cos x$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ f''(x) &= -\cos x = \cos(x + \pi) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) \\ f'''(x) &= \sin x = \cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}) \\ f^{(4)}(x) &= \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

deci $|f^{(n)}(x)| = |\cos(x + n\frac{\pi}{2})| \leq 1$, pe orice interval $[-M, M]$. Se observă că în punctul $x_0 = 0$ derivatele de ordin impar sunt nule, iar derivatele de ordin par sunt egale cu 1, respectiv -1, deci

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Raza de convergenţă a seriei este $R = \infty$.

iii) Procedând analog ca la **ii)** se obţine

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Raza de convergenţă a seriei este $R = \infty$.

iv) Funcţia f este indefinit derivabilă pe $(-1, \infty)$ şi avem

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f'''(x) = (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, ..., f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Se obţine seria Mac-Laurin asociată funcţiei f în $x_0 = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1].$$

Exemplul 2. Să se calculeze prin două metode $e^{-0,2}$ cu 3 zecimale exacte.

Soluţie. **Met I. Folosind seria Taylor**

Fie $f(x) = e^{-x}$. Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii este

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Se ştie că $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$. Alegând $x = 0,2$ şi $x_0 = 0$, se obţine $f(0,2) = e^{-0,2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (0,2)^k + R_n(0,2)$.

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ deci $R_n(0,2) = \frac{(-1)^{n+1} e^{-c}}{(n+1)!} (0,2)^{n+1}$, c între x_0 şi x. Pentru a calcula $e^{-0,2}$ cu 3 zecimale exacte determinăm $n \in \mathbb{N}$ care verifică $|R_n(0,2)| < \frac{1}{10^4}$. Construcţia clasică a inegalităţii restului lui Lagrange:

- pornim de la punctul intermediar $0 \leq c \leq 0,2 \Leftrightarrow -0,2 \leq -c \leq 0$
- ţinând cont de monotonia funcţiei exponenţiale, rezultă $e^{-0,2} \leq e^{-c} \leq 1$, care înmulţită cu $\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$ conduce la

$$\frac{e^{-0,2}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \leq \frac{e^{-c}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

- determinăm cea mai mică valoare a lui $n \in \mathbb{N}$ care verifică

$$|R_n(0,2)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} < \frac{1}{10^4}.$$

Se obţine $n = 3$ deci

$$e^{-0,2} = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!}(0,2)^k = 0,818.$$

Metoda II. Folosind suma unei serii alternante

Pornim de la dezvoltarea cunoscută $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Înlocuind x cu $-x$ se obţine dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $e^{-x} = \sum\limits_{n=)}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$e^{-0,2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{5^n n!}.$$

Folosind aproximarea de la serii numerice alternante $|S - S_n| < a_{n+1}$, $a_{n+1} < \frac{1}{10^4}$ dând valori lui n rezultă că cea mai mică valoare care verifică inegalitatea anterioară este $n = 4$, deci $a_{n+1} = a_4$, adică $|S - S_3| < \frac{1}{10^4}$, şi prin urmare $S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = \frac{614}{750}$. Atunci $-\frac{1}{15000} + \frac{614}{750} < S < \frac{1}{15000} + \frac{614}{750}$, echivalent cu $0,818 < S < 0,81873$.

Derivatele de ordinul n ale unor funcţii elementare

- $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$;
- $(\sin(ax))^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$;
- $(\cos(ax))^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$;
- $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$;
- $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$;

- $(e^{ax}\sin bx)^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$, unde $\varphi \in [0,2\pi)$ cu $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- Formula lui Leibniz (a derivării de ordinul n a unui produs de funcţii)

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Exemplul 3. *Folosind formula lui Mac-Laurin, să se arate că:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1+2x-2x^2}{3x^3} = -\frac{4}{9}.$$

Soluţie. Aproximăm funcţia $f(x) = e^{-2x}$ prin polinomul său Mac-Laurin de ordinul 3. Avem $f(0)=1$, $f'(x) = -2e^{-2x}$, $f'(0) = -2$, $f''(x) = 4e^{-2x}$, $f''(0) = 4$, $f'''(x) = -8e^{-2x}$, $f'''(0) = -8$, deci

$$e^{-2x} \simeq 1-2x+\frac{x^2}{2!}\cdot 4+\frac{x^3}{3!}\cdot(-8) = 1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}.$$

Cu aceasta, limita din enunţ devine

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1+2x-2x^2}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}-1+2x-2x^2}{3x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{4x^3}{9x^3} = -\frac{4}{9}.$$