Curs Nr. 8

Serii trigonometrice Fourier

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Serii trigonometrice Fourier

Definiţia 0.1.1 *Fie $\omega > 0$. O serie de funcţii de forma*

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}[a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)],\ x \in \mathbb{R}}$$

unde $a_n \in \mathbb{R}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, respectiv $b_n \in \mathbb{R}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte serie trigonometrică, iar termenul general de rang n al şirului sumelor parţiale asociat acestei serii

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x)],\ x \in \mathbb{R}$$

se numeşte polinom trigonometric de ordin n.

Reamintim că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică dacă există $T > 0$ astfel încât

$$f(x + T) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cel mai mic număr T care verifică relaţia de mai sus se numeşte perioadă principală.

Sistemul trigonometric fundamental pe intervalul $[a, b]$ este:

$$S_{[a,b]} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(b-a)}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\frac{2\pi x}{b-a}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\frac{2\pi x}{b-a}, \right.$$
$$\left. ..., \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\frac{2n\pi x}{b-a}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\frac{2n\pi x}{b-a}, ...|n \in \mathbb{N} \right\}$$

Definiţia 0.1.2 *Coeficienţii Fourier ataşaţi funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ în raport cu sistemul trigonometric fundamental sunt numerele reale*

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\frac{2n\pi x}{b-a} dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\frac{2n\pi x}{b-a} dx, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Definiţia 0.1.3 *Se numeşte* ***serie Fourier*** *ataşată funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ o serie de forma*

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right).}$$

Observaţia 0.1.4 *Dacă presupunem că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă principală T a cărei expresie analitică e dată pe un interval de lungime T atunci coeficienţii Fourier ataşaţi funcţiei f pe intervalul $[a, a+T)$ sunt daţi de formulele*

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos(n\omega x) dx, \qquad n \in \mathbb{N}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin(n\omega x) dx, \qquad n \in \mathbb{N}^*, \omega = \frac{2\pi}{T},$$

iar seria Fourier ataşată este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right), x \in (a, a+T).$$

Numărul ω se numeşte pulsaţie şi reprezintă frecvenţa unghiulară a unui semnal periodic şi se măsoară în radiani /secundă.

Proprietăţile coeficienţilor Fourier

i) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu $f(a) = f(b)$ şi $g(a) = g(b)$. Dacă cele două funcţii au aceiaşi coeficienţi Fourier, atunci ele coincid.

ii) **(egalitatea lui Parceval-Liapunov)**

Dacă funcţia integrabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ are proprietatea $f(a) = f(b)$ atunci are loc egalitatea

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx.$$

iii) **(inegalitatea lui Bessel)**

Coeficienţii Fourier ai funcţiei integrabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verifică inegalitatea

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx.$$

Fie $f : [0, l] \to \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă şi $\widetilde{f}$ o prelungire a sa după cum urmează:

- $\widetilde{f}_p$ este prelungirea prin **paritate** a lui f la intervalul simetric $[-l, l]$,

$$\widetilde{f}_p(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ f(-x), & x \in [-l, 0) \end{cases}$$

- $\widetilde{f}_i$ este prelungirea prin **imparitate** a lui f la intervalul simetric $[-l, l]$,

$$\widetilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ -f(-x), & x \in [-l, 0). \end{cases}$$

Definiţia 0.1.5 ***i)*** *Seria Fourier de cosinusuri ataşată funcţiei f pe intervalul $[0, l]$ este seria Fourier a prelungirii sale prin paritate:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x),$$

unde $a_n = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^l f(x) \cos(n\omega x) dx$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $T = 2l$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) *Seria Fourier de sinusuri ataşată funcţiei f pe intervalul $[0, l]$ este seria Fourier a prelungirii sale prin imparitate:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x),$$

unde $b_n = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^l f(x) \sin(n\omega x)$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $T = 2l$, $n \in N^*$.

Observaţia 0.1.6 *Orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se poate prelungi prin periodicitate (cu perioada principală $b - a$) pe toată axa reală:*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a + k(b - a), b + k(b - a)],$$

$$\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \overline{f}(x) = f(x - k(b - a)), \quad \forall x \in [a + k(b - a), b + k(b - a)].$$

Teorema 0.1.7 ***(Teorema lui Dirichlet)*** *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *îndeplineşte condiţiile:*

i) f *e integrabilă pe* $[a, b]$,

ii) f *are un număr finit de discontinuităţi de speţa întâi pe* $[a, b]$

iii) f *are derivate latrale finite pe* $[a, b]$

atunci seria Fourier ataşată lui f *este simplu convergentă. Mai mult, suma seriei este* $s : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ punct de continuitate al lui } f \\ \dfrac{f(a+0) + f(b-0)}{2}, & x = a \text{ sau } x = b \\ \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ punct de discontinuitate al lui } f \end{cases}$$

şi au loc identităţile

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right), \quad x \in [a, b]$$

respectiv

$$\overline{s}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 0.1.8 *(condiţie suficientă pentru convergenţa uniformă)*
Orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *care îndeplineşte condiţiile:*

i) f *este derivabilă pe* $[a, b]$

ii) f' *este integrabilă pe* $[a, b]$

iii) $f(a) = f(b)$

este dezvoltabilă în serie Fourier pe $[a, b]$*. Mai mult, seria Fourier ataşată lui* f *converge uniform pe* $\mathbb{R}$ *la* $\overline{f}$*, prelungita sa prin periodicitate:*

$$\overline{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right).$$

Exemplul 1. *Fie* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ *o funcţie periodică. Se cere:*

i) *Determinaţi coeficienţii Fourier ai lui* f *pe* $[0, \pi]$ *şi construiţi seria Fourier ataşată.*

ii) *Să se dezvolte* f*, periodică de perioadă* $T = 2\pi$ *în serie Fourier de sinusuri.*

iii) *Să se dezvolte* f*, periodică de perioadă* $T = 2\pi$ *în serie Fourier de cosinusuri.*

iv) *Calculaţi suma următoarelor serii numerice:* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$.

Soluţie. **i)** Funcţia f este reprezentată în figura 3.1.a)

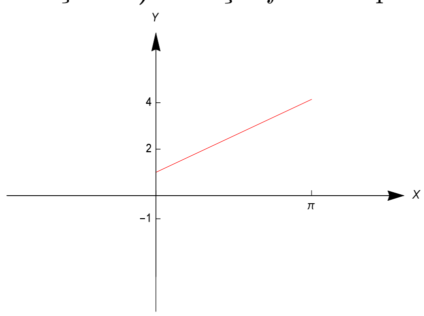

Figura 3.1.a)

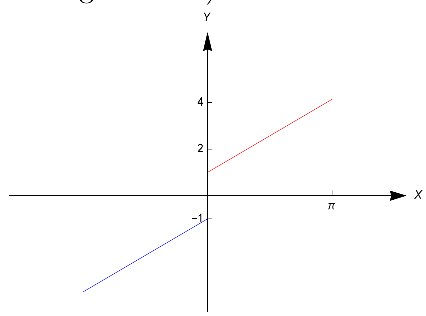

Figura 3.1.b)

Coeficienţii Fourier pe intervalul $[0,\pi]$ sunt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx = \frac{2}{\pi}(\frac{x^2}{2}+x)\Bigg|_0^{\pi} = \pi + 2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)' dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{2n}dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right)' dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[-(x+1)\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx}{2n}dx\right] =$$
$$-\frac{2}{\pi}(\pi+1)\frac{\cos 2n\pi}{2n} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2}\sin 2nx\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} - \frac{\pi+1}{n\pi} = -\frac{1}{n}.$$

Se obţine dezvoltarea funcţiei f în serie trigonometrică Fourier

$$f(x) \to \frac{\pi+2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx,$$

care conform teoremei lui Dirichlet e convergentă în fiecare punct din intervalul $(0,\pi)$ cu suma $f(x)$. Deci $s(x) = f(x) = x+1$, pentru $x \in (0,\pi)$, iar la extremităţi conform teoremei lui Dirichlet avem

$$s(0) = s(\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(0+0)}{2} = \frac{\pi+1+1}{2} = \frac{\pi}{2}+1.$$

În concluzie se obţine

$$\frac{\pi+2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx = \begin{cases} x+1, x \in (0,\pi) \\ \dfrac{\pi}{2}+1, x \in \{0,\pi\} \end{cases}. \qquad (1)$$

Pentru $x = \frac{\pi}{4}$ rezultă $\frac{\pi}{4}+1 = \frac{\pi}{2}+1-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ şi cum

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, n = 2m \\ (-1)^{n-1}, n = 2m-1 \end{cases},$$

în seria (1) rămân doar termenii de rang impar, adică $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ sau, echivalent, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

ii) Dezvoltarea în serie de sinusuri cere ca funcţia să fie impară pe domeniu. Cum acest lucru în cazul nostru nu se întâmplă, prelungim funcţia prin imparitate pe intervalul $[-\pi,\pi]$, ca în figura 3.1.b), astfel $\widetilde{f}_i : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0,\pi] \\ -f(-x), x \in [-\pi,0] \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \in [0,\pi] \\ x-1, x \in [-\pi,0) \end{cases}$. Coeficienţii Fourier ai funcţiei $\widetilde{f}_i$ pe intervalul $[-\pi,\pi]$ sunt $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_i(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cdot\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[-(x+1)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi+1}{n}\cos n\pi + \frac{\cos 0}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] =$$
$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{\pi+1}{n}(-1)^n\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} + \frac{\pi+1}{n}(-1)^{n+1}\right)$$

Funcţia $\widetilde{f}_i$ îndeplineşte condiţiile teoremei lui Dirichlet, deci seria Fourier obţinută

$$\widetilde{f}_i(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1+(-1)^{n+1}(\pi+1))\sin nx$$

este convergentă cu suma $\widetilde{s} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{s}(x) = \begin{cases} \widetilde{f}_i(x), x \in (-\pi,0)\cup(0,\pi) \\ 0, x \in \{-\pi,0,\pi\} \end{cases}$.

iii) Dezvoltarea în serie de cosinusuri cere ca funcţia să fie pară pe domeniu. Cum acest lucru în cazul nostru nu se întâmplă, prelungim funcţia prin paritate pe intervalul $(-\pi,\pi)$ astfel $\widetilde{f}_p : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}_p(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0,\pi] \\ f(-x), x \in [-\pi,0) \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \in [0,\pi] \\ -x+1, x \in [-\pi,0) \end{cases}$$

ca în figura 3.1.c).

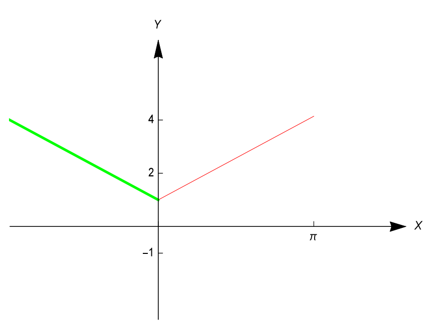

Figura 3.1.c)

Coeficienţii Fourier sunt $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi + 2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi} =$$
$$\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Rezultă $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$, $\forall n \geq 1$. Funcţia $\widetilde{f_p}$ îndeplineşte condiţiile teoremei lui Dirichlet, deci seria Fourier obţinută

$$f(x) = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,$$

este convergentă cu suma $s : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $s(x) = f(x)$ Prin urmare, se obţine

$$x + 1 = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, \quad \forall x \in [0,\pi]. \quad (2)$$

iv) Pentru $x = \pi$ în (2) rezultă

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Folosim identitatea Parseval-Liapunov:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} s^2(x)dx,$$

unde $s(x)$ este funcţia sumă, care e integrabilă pe $[0, \pi]$. Se obţine

$$\frac{(\pi+2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1)^2 dx,$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$