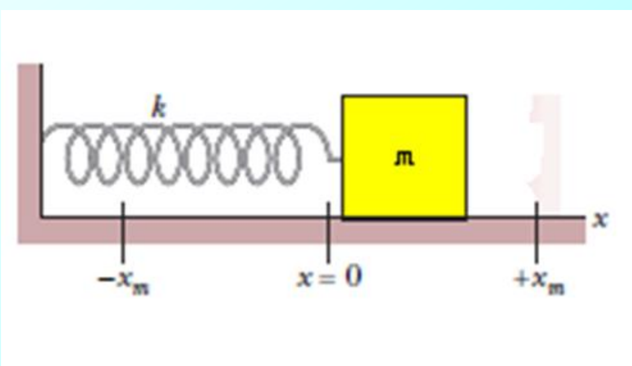
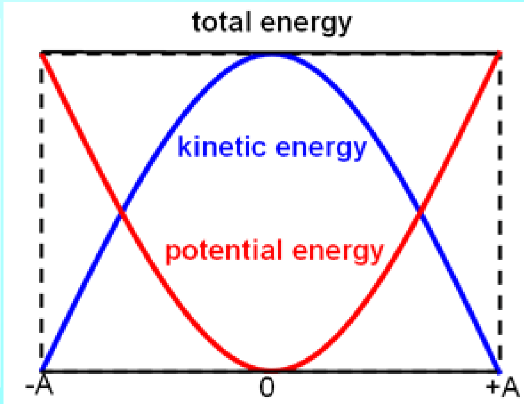
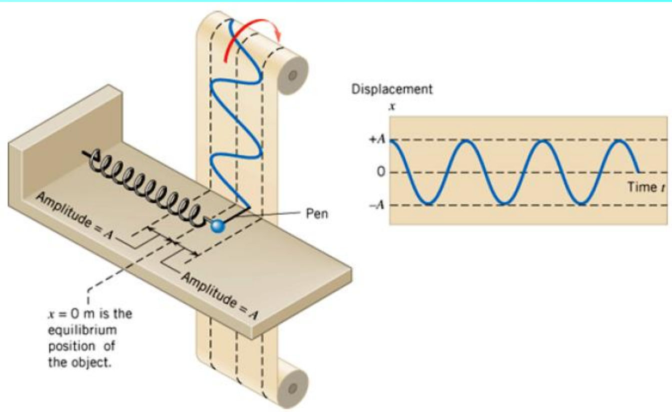
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de Trif-Tordai Delia







Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 5&6

2024-2025

3. *Oscilaţii mecanice*

3.1. Noţiuni generale

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

3.3. Compunerea oscilaţiilor armonice

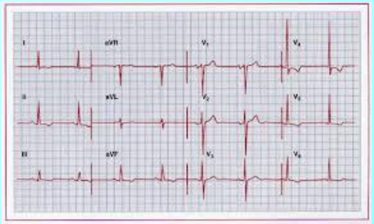
- 3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie
- 3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită
- 3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale

<u>Oscilaţia</u> = fenomenul fizic în decursul căruia o anumită mărime fizică prezintă o variaţie periodică sau pseudoperiodică

- Moleculele vibrează $\longrightarrow$ căldură
- Curenţii electrici oscilează: curentul altenativ
- Corzile unei chitare vibrează $\longrightarrow$ sunet
- Pendula unui orologiu oscilează
- Bătăile inimii



https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html
https://phet.colorado.edu/sims/pendulum-lab/pendulum-lab_en.html

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale. Clasificare:

a)D.p.d.v. al formei de energie dezvoltată în timpul oscilației

- OSCILAȚII
  - elastice, mecanice
  - electromagnetice
  - electromecanice

b) D.p.d.v. al conservării energiei sistemului oscilant

- OSCILAȚII
  - ideale
  - amortizate
  - forțate

3. Oscilaţii mecanice

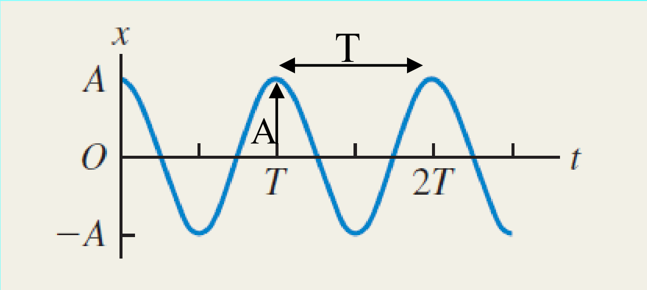
3.1.Noţiuni generale. Mărimi caracteristice oscilaților periodice

- Mărimea care variază în timpul fenomenului oscilator se numeşte <u>mărime caracteristica</u>. Valoarea la un moment dat a acestei mărimi poartă denumirea de <u>elongaţie</u>, iar valoarea maxima a elongaţiei se numeşte <u>amplitudine</u>.

- Durata minimă în decursul căreia se efectuează o oscilaţie completa se numeşte <u>perioadă</u> (T). $[T]_{SI} = 1\ s$

- <u>Frecvenţa</u> (f) = numărul de oscilaţii efectuate în timp de 1 s.

$f = \frac{1}{T} \quad [f]_{SI} = 1\ s^{-1} = 1Hz$



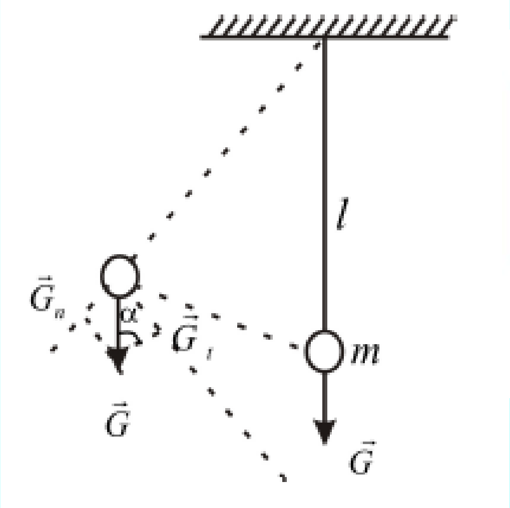
- <u>Pulsaţia</u> $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [\omega]_{SI} = 1\ rad/s$

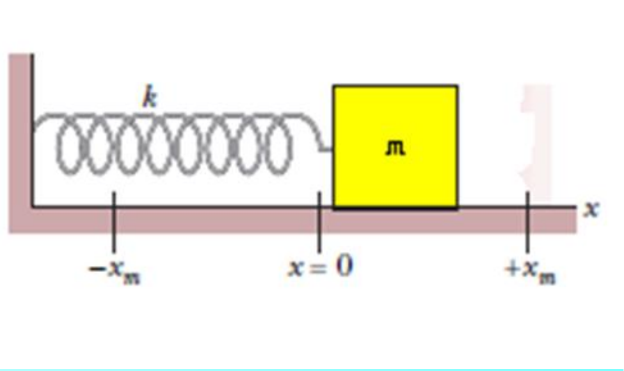
3. Oscilaţii mecanice

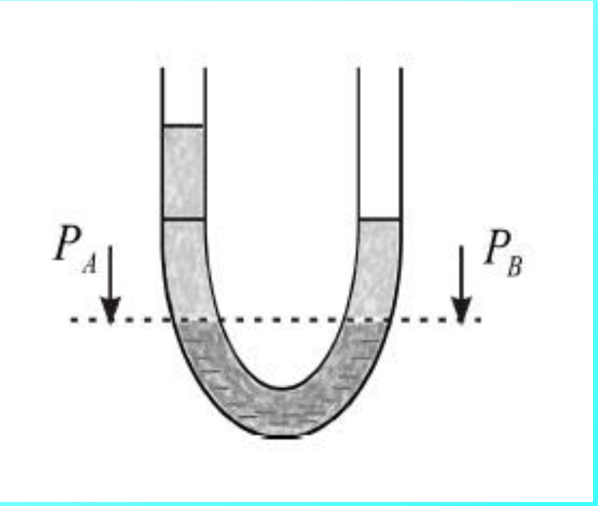
3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Oscilaţiile libere ideale (neamortizate) se produc în absenţa unor forţe de frecare sau de disipare a energiei, rezultă că energia totală a oscilatorului rămâne constantă în timp.

<u>Obs.</u>: Mişcarea oscilatorie neamortizată este o mişcare ideală.



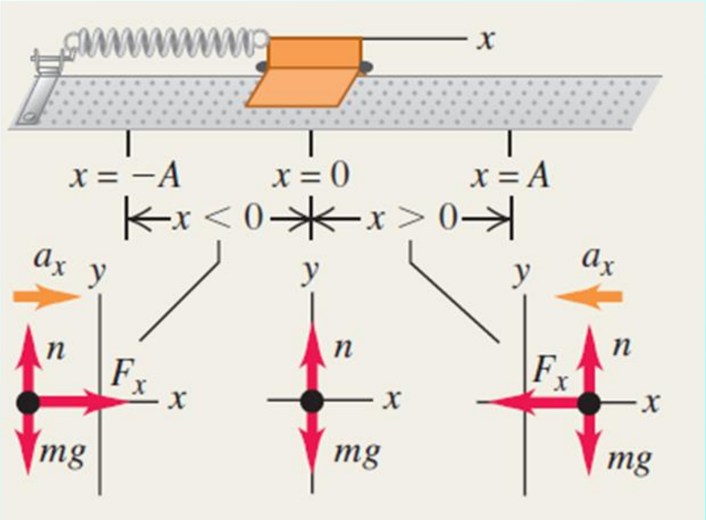


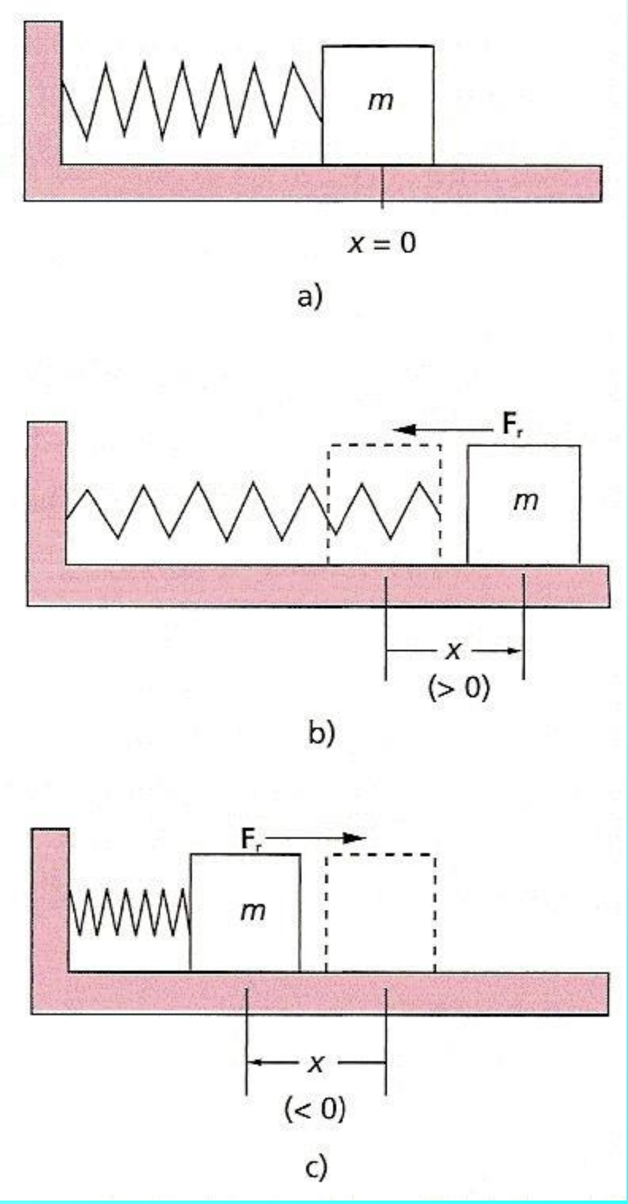


3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

- Oscilator mecanic: <u>resort elastic </u>(de constantă elastică *k*) şi un <u>PM</u> de masă *m*
- In absenţa frecărilor (oscilaţii ideale) rezultă o mişcare periodică în jurul poziţiei de echilibru.





Poziţia de repaus : x = 0

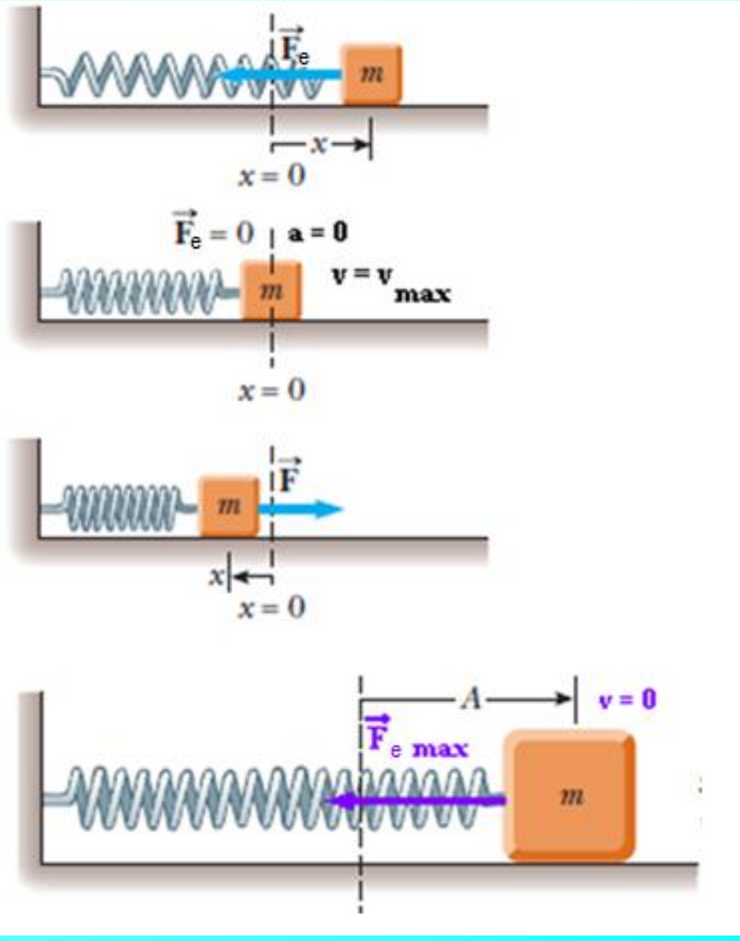
Scos din poziţia de repaus : x > 0 → forţa de revenire (forţa elastică): $\boxed{F_e = -kx}$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Forţa elastică din resort, este singura forţă din sistemul mecanic, iar conform principiului al doilea al mecanicii clasice:

$$-\boldsymbol{kx} = \boldsymbol{ma}$$



unde *x* – elongaţia mişcării
(alungirea resortului)

Ecuaţia de mişcare devine:

$$\boldsymbol{ma} + \boldsymbol{kx} = \boldsymbol{0}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ ecuatie diferentială de ordinul doi

Notăm cu $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsaţia proprie a oscilatorului (rad/s)

$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$

Soluţiile particulare sunt de forma: $x(t) = e^{\pm i\omega_0 t}$

Formulele lui Euler: $\rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a + ib,$ $\left|e^{i\varphi}\right|^2 = 1$

Soluţia generală este: $\mathrm{x}(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Elongaţia mişcării (m)

Faza oscilaţiei (rad)

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Amplitudinea mişcării (m)

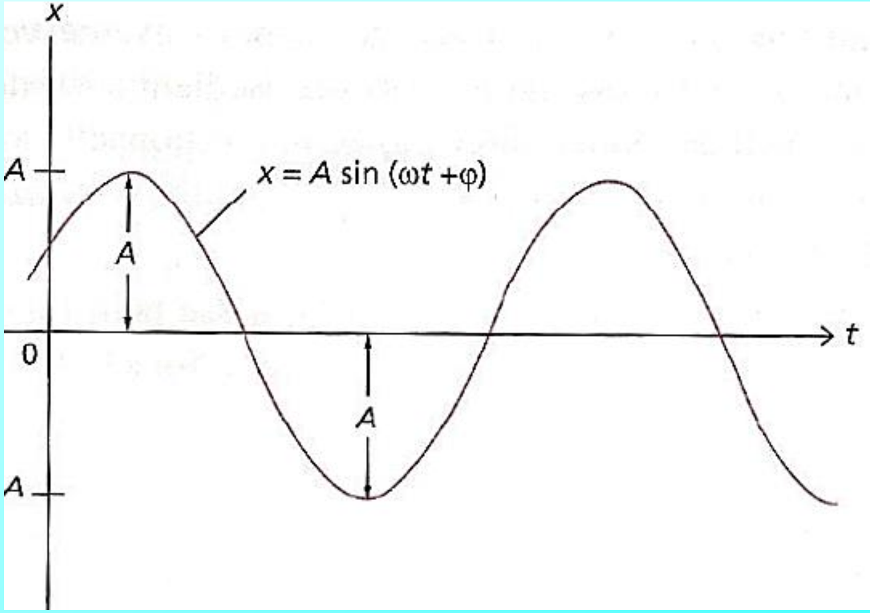
Pulsaţia proprie a oscilatorului

Faza iniţială a mişcării (rad)

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Din condiţiile iniţiale (la t=0, se cunosc poziţia şi viteza iniţială) se determină A şi φ_0



Dacă $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \mathrm{x}(t) = A sin(\omega_0 t)$

Dacă $t = T \Rightarrow x(t) = x(T)$

$\omega_0 T = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ f}$

ω_0 , T şi *f* nu depind de condiţiile iniţiale, ele sunt mărimi proprii ale sistemului oscilant.

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Aplicaţie: Un corp cu masa m = 5 kg este legat de un resort cu constanta elastică k = 20 N/m. Sistemul oscilează cu amplitudinea A = 2 cm, astfel încît la t = 0, x(0)=- A. Să se determine ecuaţia de mişcare x(t).

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(0) = -A = A\sin\varphi_0 \quad \Rightarrow \sin\varphi_0 = -1 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

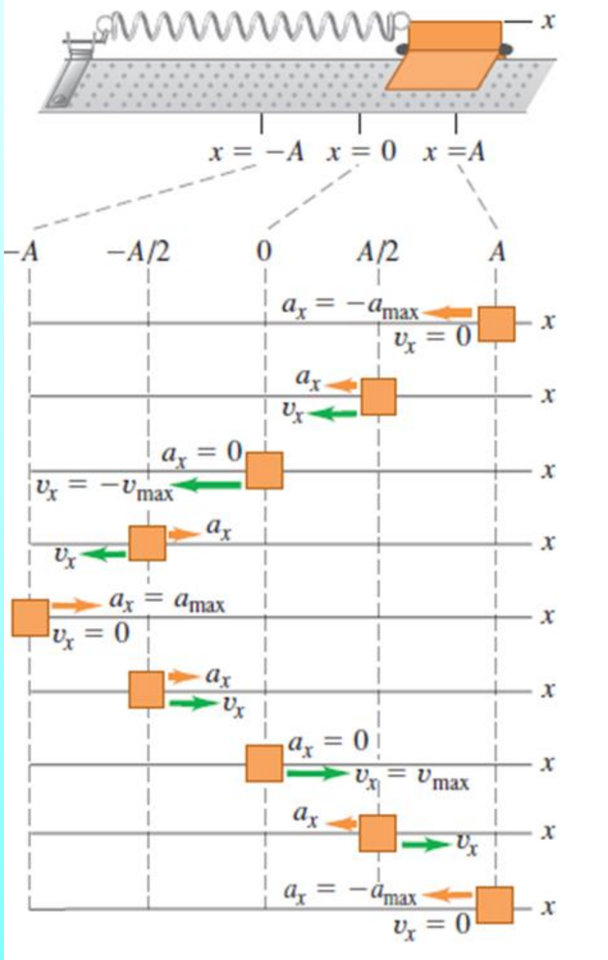
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2rad/s$$

$$\boxed{x(t) = 0{,}02\sin(2t + \frac{3\pi}{2})(m)}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

<u>*Viteza şi acceleraţia oscilatorului ideal*</u>



Elongaţia mişcării la un moment dat:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Viteza la un moment dat:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v_{max} = A\omega_0$$

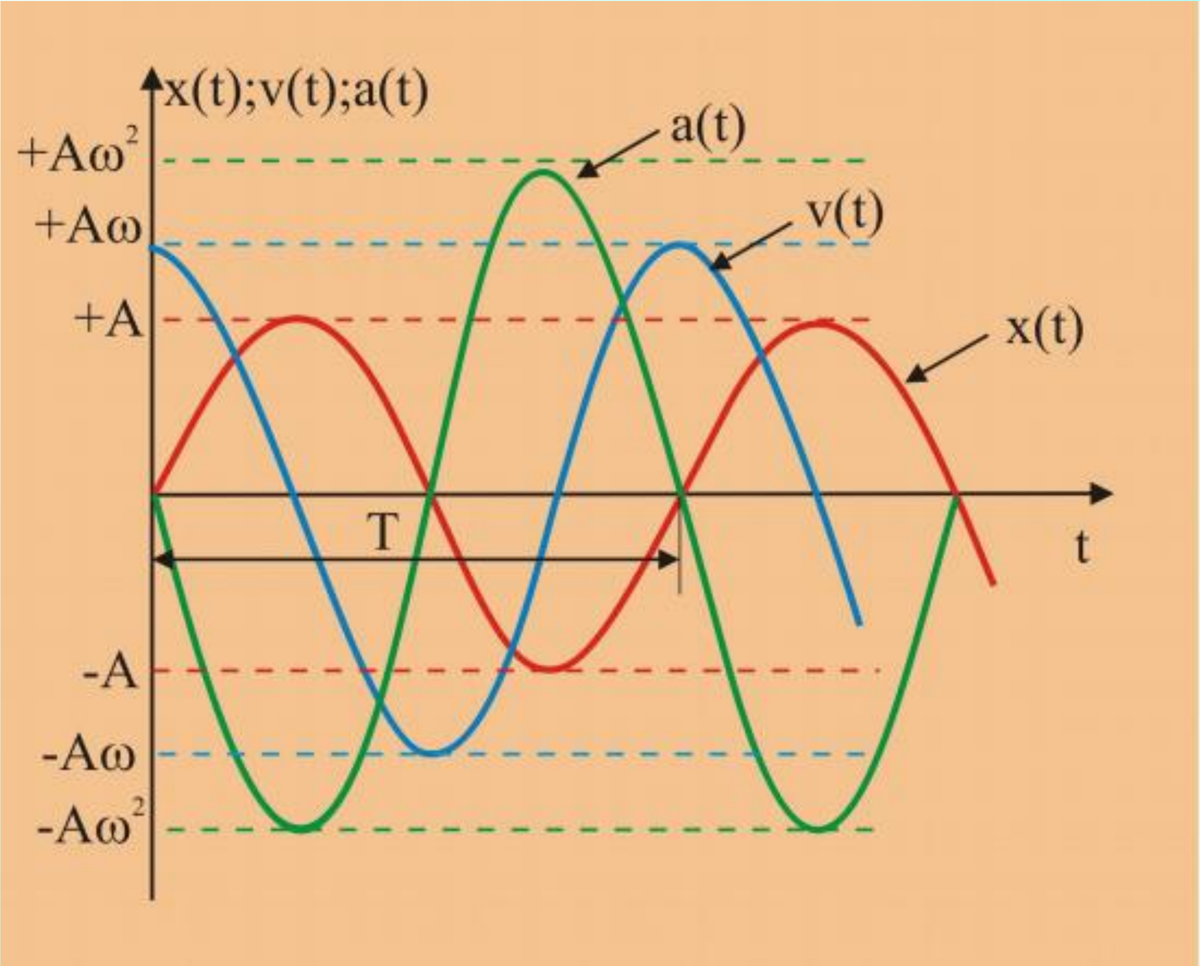
Acceleraţia la un moment dat: $$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a_{max} = A\omega_0^2$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Reprezentarea grafică a elongaţiei, vitezei şi acceleraţiei oscilatorului ideal în funcţie de timp



3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

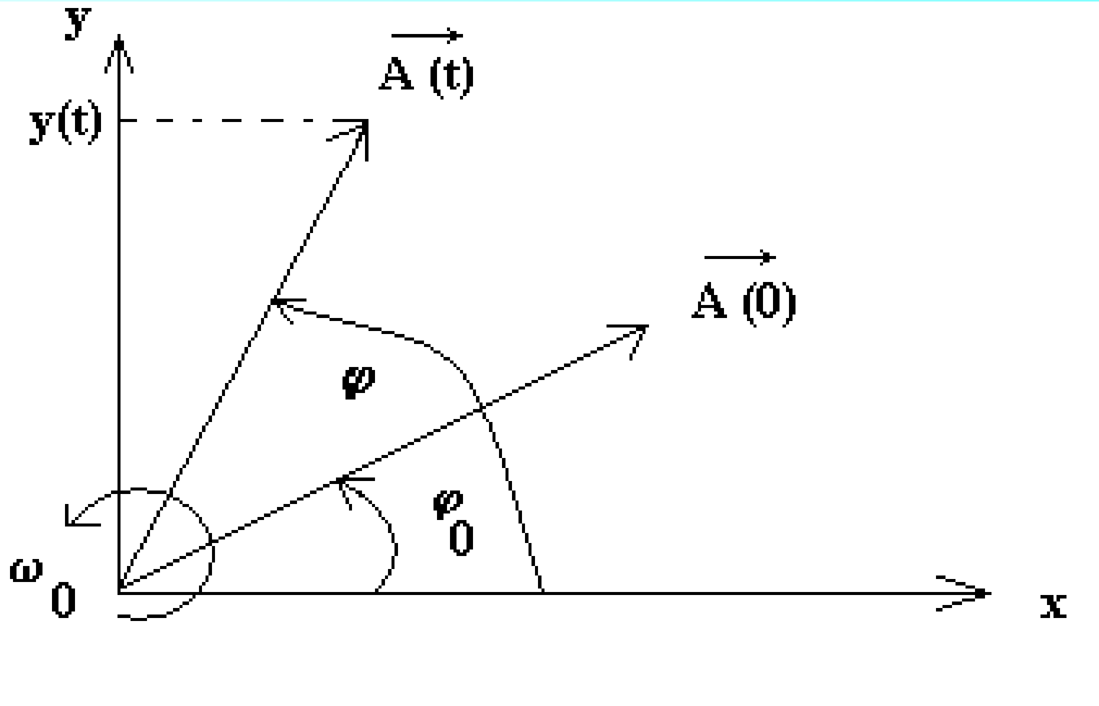
Reprezentarea fazorială a oscilaţiei

Fazor=vector rotitor în sens trigonometric +, cu vit. unghiulară ω_0
Lungimea fazorului = modulul vectorului pe care-l reprezintă, A
Faza vectorului = cu unghiul format de fazor cu axa orizontala, Ox
Vectorul reprezentat = cu proiectia fazorului pe axa verticala, Oy

$$y = A \sin \varphi(t)$$

unde

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$



3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Energia mecanică a mişcării oscilatorii armonice ideale

$$E_c = \frac{m\,v^2}{2} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m\,A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} k\,A^2$$

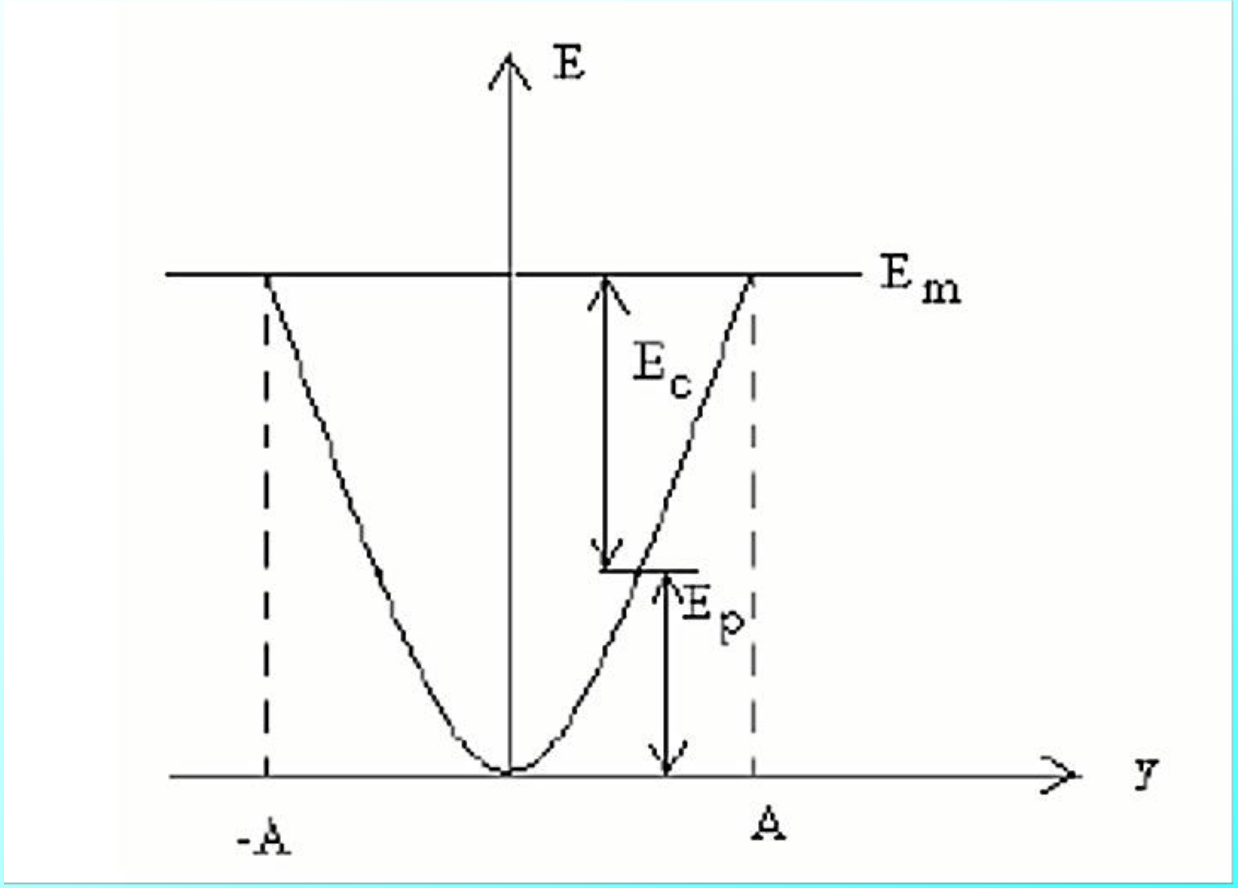
3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Legea conservarii energiei mecanice a oscilatorului ideal

Energia mecanică a oscilatorului armonic ideal se conservă.

$$E_m = E_c + E_p = const.$$



$$E_m = \frac{1}{2} k\ A^2$$

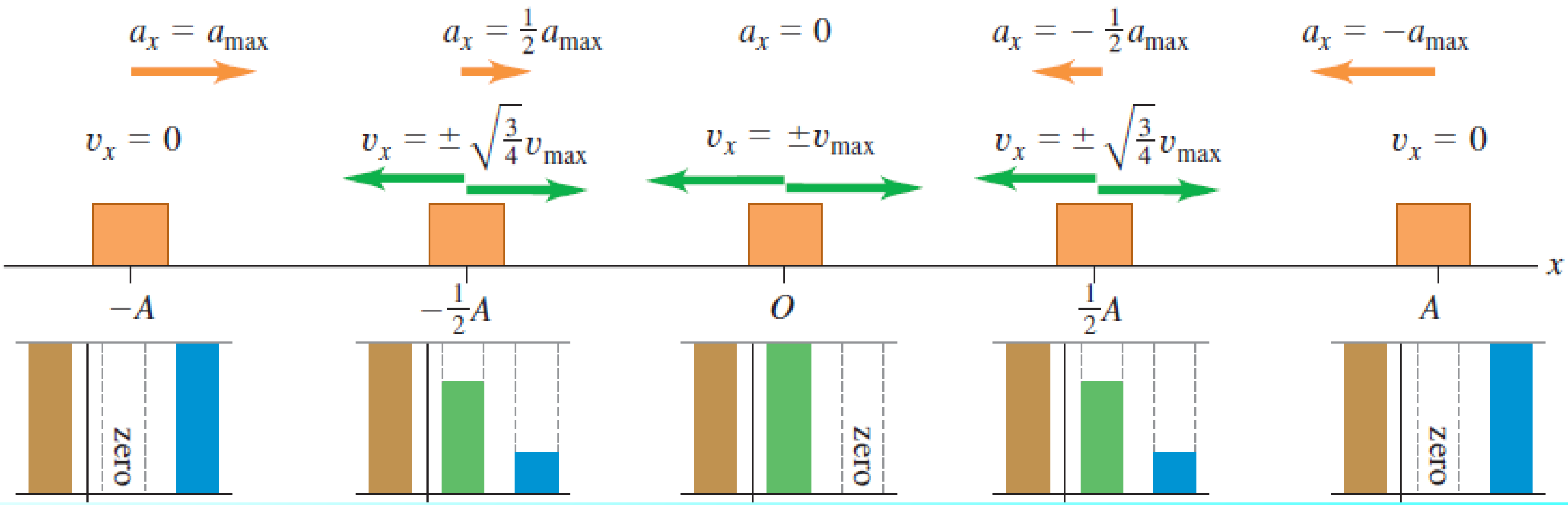
$$E_c = \frac{m\,v^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Energiei mecanice a oscilatorului ideal



$E = E_C + E_P$ $\quad$ $E = 0 + E_P$

$E = E_C + E_P$

$E = E_C + E_P$ $\quad$ $E = E_C + 0$

$E = E_C + E_P$

$E = E_C + E_P$ $\quad$ $E = 0 + E_P$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Aplicaţie:

Un corp de masă m=0,05 kg fixat de capătul unui resort execută o mişcare oscilatorie armonică de-a lungul axei Ox după legea: $x(t) = 0{,}05\sin(10t)$ (m). Să se determine:

a) Constanta elastică a resortului şi perioada oscilaţiilor;
b) Energia totală a corpului;
c) Momentele de timp la care energia cinetică este egală cu energia potenţială.

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

<u>Aplicaţie:</u>

a) $k = \omega^2 m = 5$ (N/m) $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ (s)

b) $E_t = \frac{kA^2}{2} = 6.25 \cdot 10^{-3}$ (J)

c) $E_c = E_p$

$tg^2 10t = 1$, dar $tg\frac{\pi}{4} = 1$ $\Rightarrow$ momemtele de timp $t_n = (2n+1)\frac{\pi}{40}$

3. Oscilaţii mecanice

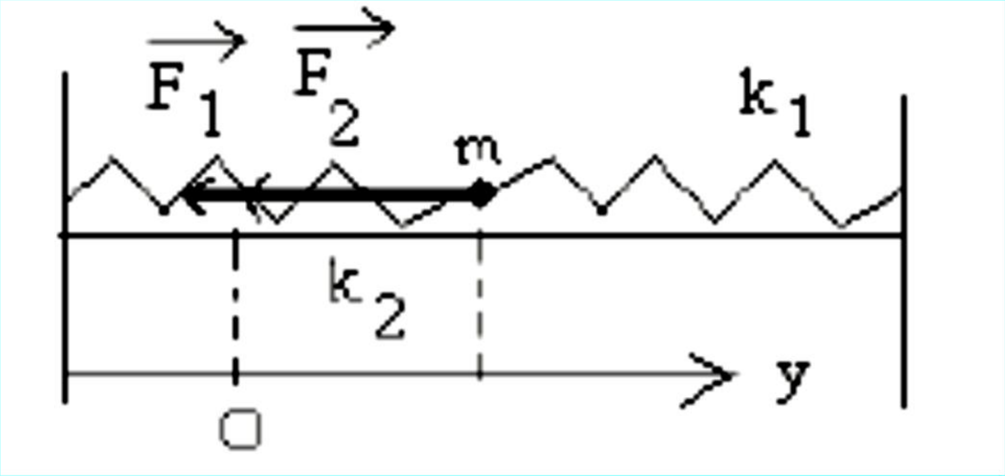
3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Să presupunem că un punct material de masă m este legat de două resorturi elastice, fiind supus simultan la două forţe elastice pe aceeaşi direcţie, dar în sensuri diferite.

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01})$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02})$$



Cele 2 resorturi elastice sunt identice, adică au aceeaşi $k_1 = k_2 = k$.

https://phet.colorado.edu/sims/normal-modes/normal-modes_en.html

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Oscilatia armonica rezultanta:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \qquad y(t) = \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Ne propunem să calculăm amplitudinea şi faza iniţială a mişcării compuse prin metoda fazorilor și prin metoda trigonometrică.

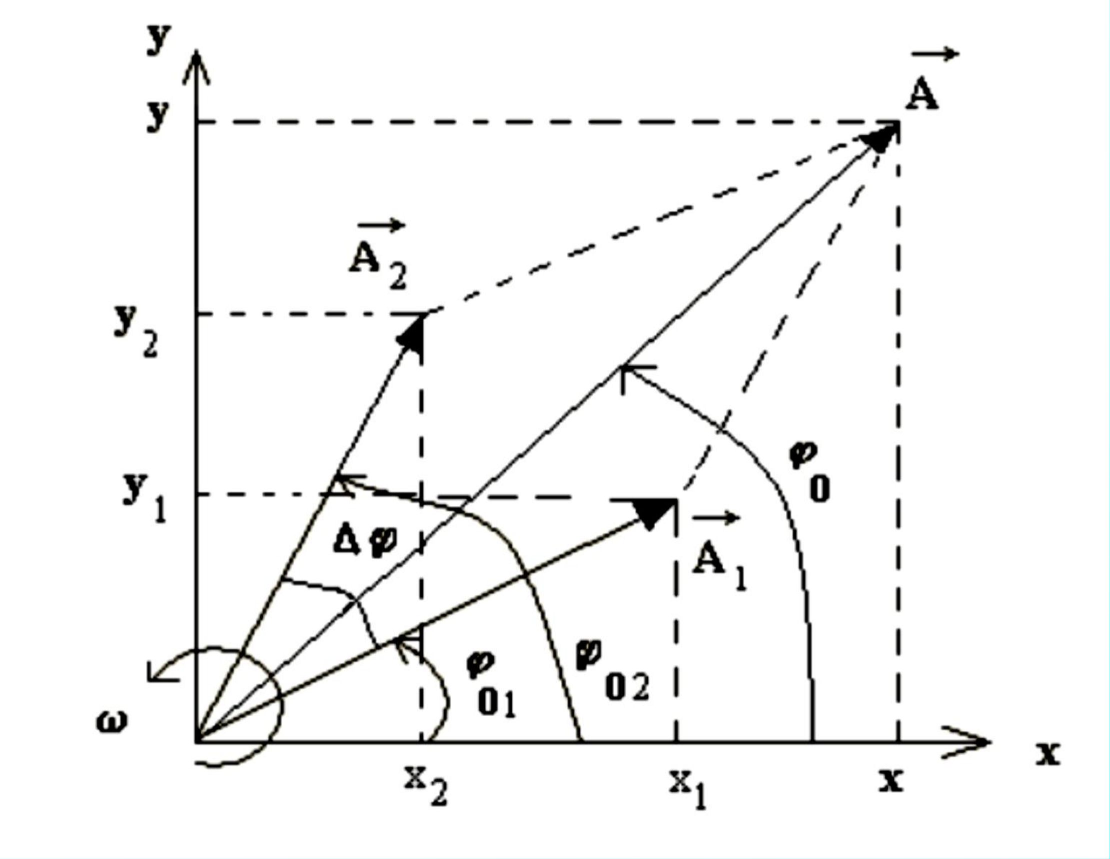
A_1, **A_2** - Fazorii corepunzători celor două oscilaţii, $y_1(t)$ şi $y_2(t)$, se rotesc în fază, deoarece au aceeaşi viteză unghiulară, ω.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Reprezentarea fazorială a compunerii oscilaţiilor paralele



3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Diferenţa de fază dintre cele două oscilaţii este independentă de timp:

$$\triangle\varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \omega t + \varphi_{02} - \omega t - \varphi_{01} = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}$$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante se obţine din formula generalizată a lui Pitagora:

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

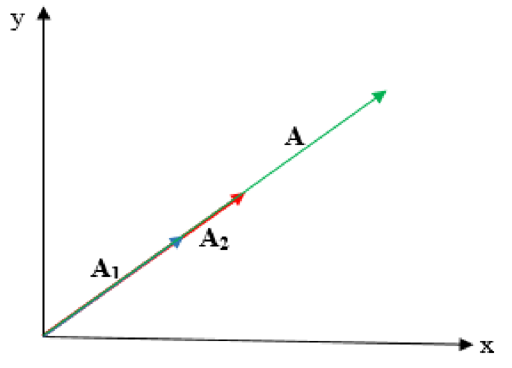
3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Faza iniţială a oscilaţiei rezultante este:

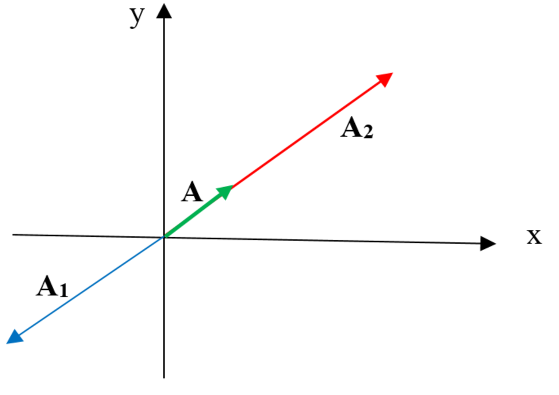
$$tg\varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}}{A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}}$$



Cazuri particulare:

a) Dacă $\Delta\varphi = 0 \rightarrow$ oscilatorii sunt in fază

$A = A_1 + A_2$ *amplitudinea rezultantă este maximă*



b) Daca $\Delta\varphi = \pi \rightarrow$ oscilatorii sunt în opoziţie de fază

$A = |A_1 - A_2|$ *amplitudinea rezultantă este minimă*

3. Oscilaţii mecanice

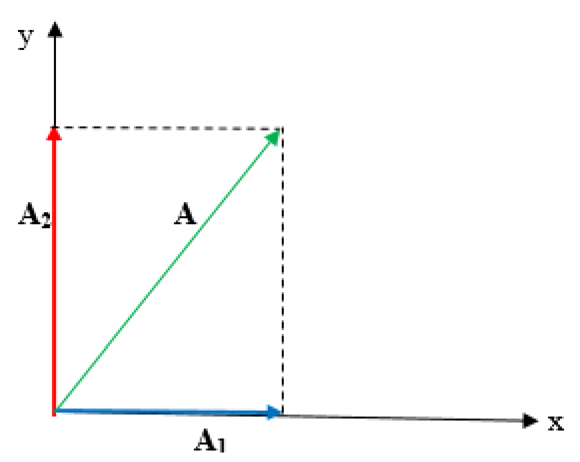
3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Cazuri particulare:

c) Daca $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ oscilaţiile sunt în cuadratură de fază

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2}$$



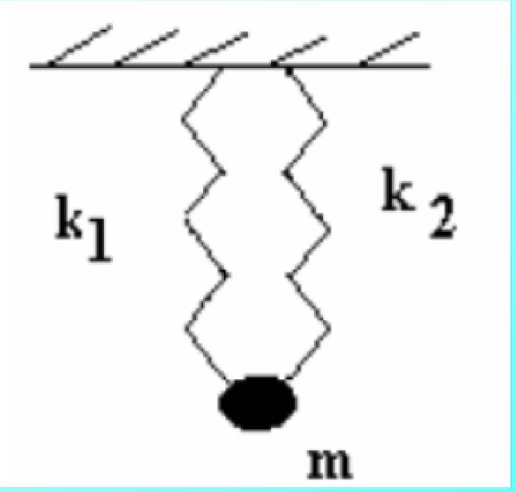
d) Dacă $\Delta\varphi = \pi$ si $A_1 = A_2$ oscilaţiile sunt în opoziţie de fază, oscilaţia se stinge

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Elongaţiile celor două oscilaţii armonice sunt:



$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Elongaţia oscilaţiei rezultante este de forma:

$$y(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

Notăm: $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ si $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$

$\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ pulsaţia cu care va oscila *y(t)*

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Înlocuim pulsaţia obţinută în ecuaţia celor două elongaţii $y_1(t)$ si $y_2(t)$

$$y_1(t) = A_1 \sin[(\omega + \Delta\omega)t + \varphi_1]$$

$$y_2(t) = A_2 \sin[(\omega - \Delta\omega)t + \varphi_2]$$

Rezultă: $y = y_1 + y_2 = A_1 \sin[\omega t + (\Delta\omega t + \varphi_1)] + A_2 \sin[\omega t + (-\Delta\omega t + \varphi_2)]$

Folosim: $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Se obţine:

$$y = A_1\left[\sin\omega t\cos(\Delta\omega t+\varphi_1)+\cos\omega t\sin(\Delta\omega t+\varphi_1)\right]+$$
$$+A_2\left[\sin\omega t\cos(-\Delta\omega t+\varphi_2)+\cos\omega t\sin(-\Delta\omega t+\varphi_2)\right]$$

$$y = \left[\,A_1\cos(\Delta\omega t+\varphi_1)+A_2\,\cos(\Delta\omega t-\varphi_2)\right]\sin\omega t+$$
$$+\left[\,A_1\sin(\Delta\omega t+\varphi_1)-A_2\,\sin(+\Delta\omega t-\varphi_2)\right]\cos\omega t$$

dar $$y(t) = A\sin(\omega t+\varphi) = A\sin\omega t\cos\varphi + A\cos\omega t\sin\varphi$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Se obţine:

(*)
$$A\cos\varphi = A_1\cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\Delta\omega t - \varphi_2)$$
$$A\sin\varphi = A_1\sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)}{A_1\cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\Delta\omega t - \varphi_2)}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Ec. (*) se ridică la pătrat şi se adună

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left[\cos(\Delta\omega t + \varphi_1)\cos(\Delta\omega t - \varphi_2) - \sin(\Delta\omega t + \varphi_1)\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)\right]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[(\Delta\omega t + \varphi_1) + (\Delta\omega t - \varphi_2)\right]$$

Iar $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante este de forma:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[2\Delta\omega t + \varphi_1 - \varphi_2\right]$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Cazuri particulare:

a) Dacă $\omega_1 = \omega_2$ atunci $\Delta\omega = 0$ amplitudinea si faza iniţială ale oscilaţiei rezultante sunt identice cu cele de la compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie.

b) Considerăm amplitudinile egale $A_1 = A_2 = A_0$ şi fazele iniţiale nule $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$A = A_0\sqrt{1+1+2\cos(2\Delta\omega t)} = 2A_0\cos(\Delta\omega t)$$

$$1+\cos(2a) = 2\cos^2 a$$

$$y = 2A_0\cos(\Delta\omega t)\sin(\omega t)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$y = 2A_0\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

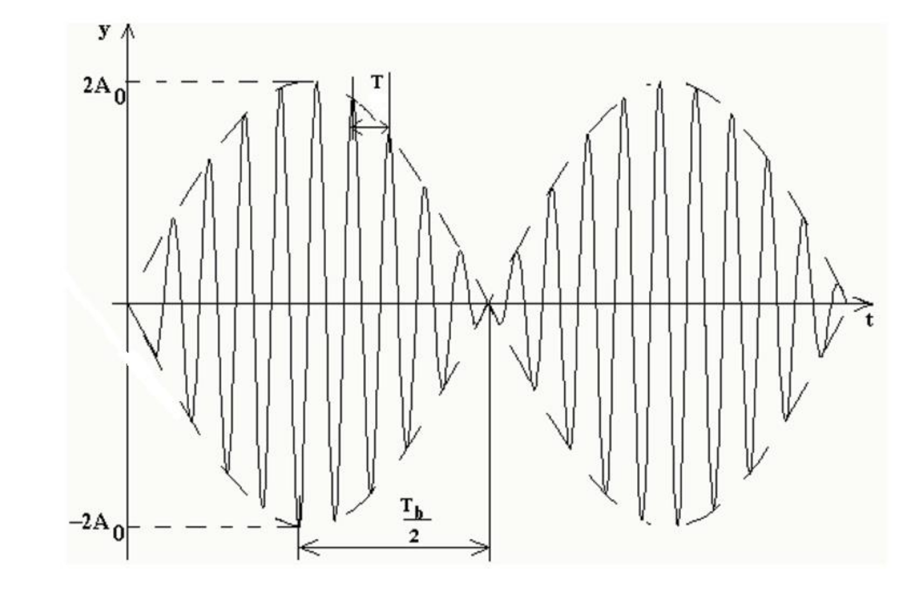
Fenomenul de bătăi:

$$T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}$$

T_b - perioada bătăilor

$$\nu_b = \frac{1}{T_b}$$

frecventa de modulație



Graficul elongaţiei oscilaţiei rezultante în funcţie de timp

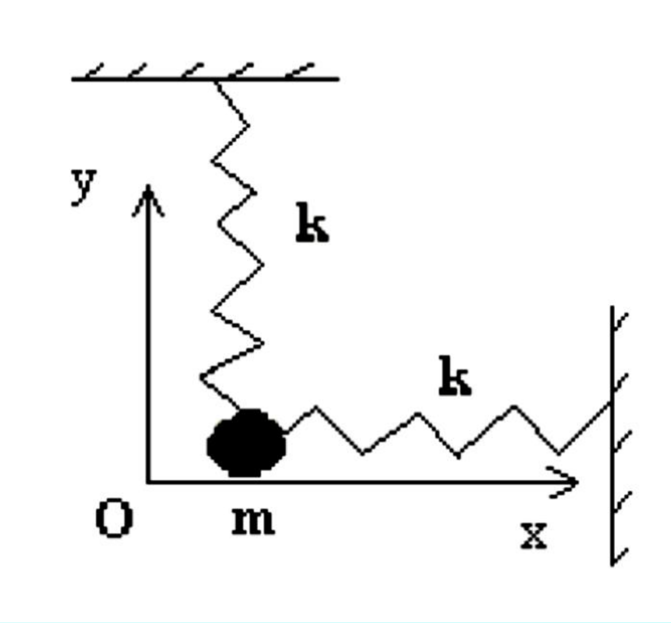
Perioada bătăilor este intervalul de timp între două treceri succesive ale amplitudinii rezultante prin valoarea minimă sau maximă.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Ecuaţiile elongaţiilor pe cele două direcţii sunt de forma:



$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Ne propunem să determinăm ecuaţia traiectoriei punctului material.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Se elimină timpul din cele 2 ec.

a) $$\frac{x(t)}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_1) = \sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1$$

b) $$\frac{y(t)}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_2) = \sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2$$

Înmulţim ecuaţia (a) cu *cos* φ_2, iar ecuaţia (b) cu *cos* φ_1. După aceea, le scădem şi dăm factor comun *cos ωt* si se obține:

(1*) $$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \cos\omega t\left(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1\right)$$

Se stie: $$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 = -\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Înmulţim ecuaţia (a) cu sinφ2, iar ecuaţia (b) cu sinφ1. După aceea, le scădem şi dăm factor comun sin ωt si se obține:

(2*) $$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \sin\omega t\left(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1\right)$$

Se stie: $$\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Se ridică la pătrat ecuaţiille (1*) şi (2*) şi se adună. Se obţine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)=$$
$$=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)$$

Adică: ec. (3) $$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

Ecuaţia (3) constituie *ecuaţia traiectoriei punctului material* supus simultan la două mişcări oscilatorii armonice pe direcţii perpendiculare.

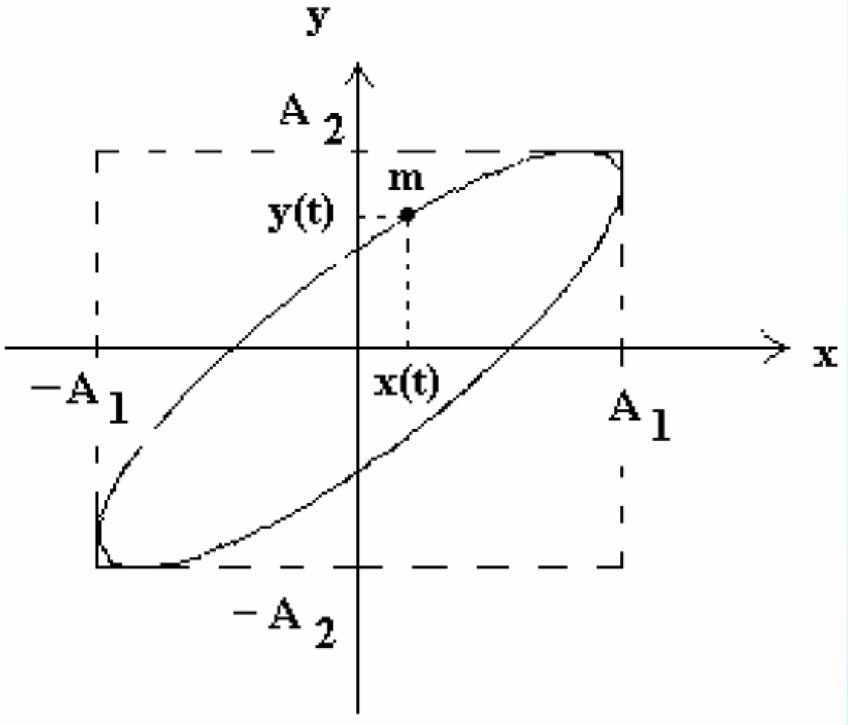
3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Ec. generalizată a elipsei



Traiectorie eliptică rotită faţă de axe

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

a) Dacă diferenţa fazelor iniţiale este un multiplu par de π, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, atunci oscilaţiile sunt în fază, iar ecuaţia traiectoriei devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

În acest caz, oscilaţia se desfăşoară de-a lungul unei drepte de ecuaţie:

$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

Amplitudinea mişcării oscilatorii:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

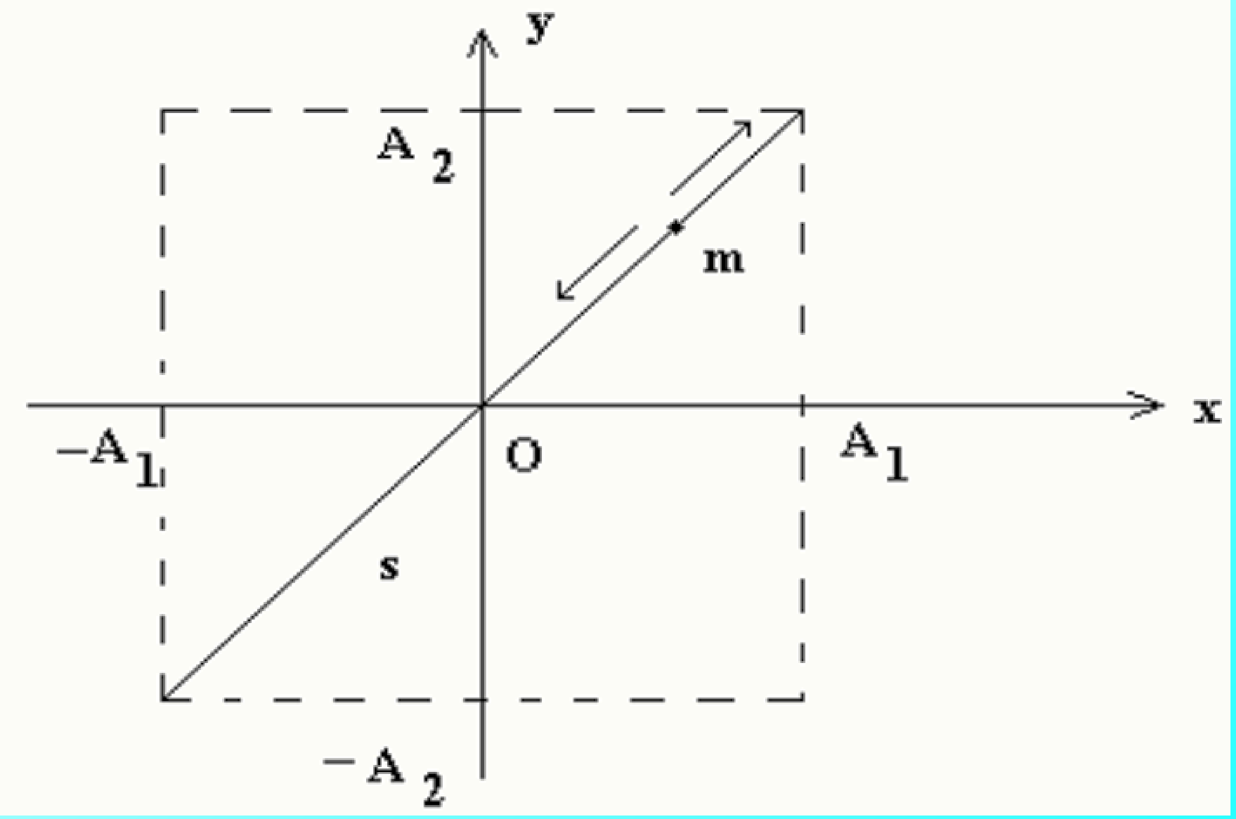
3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Ec. elongaţiei mişării rezultante:

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1)$$



3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

b) Dacă diferenţa fazelor iniţiale este un multiplu impar de π $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$ oscilaţiile sunt în opoziţie de fază, iar ecuaţia traiectoriei devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \longrightarrow \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

Oscilaţia se desfăşoară de-a lungul unei dreapte (pe cea de-a doua diagonală) de ecuaţie:

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

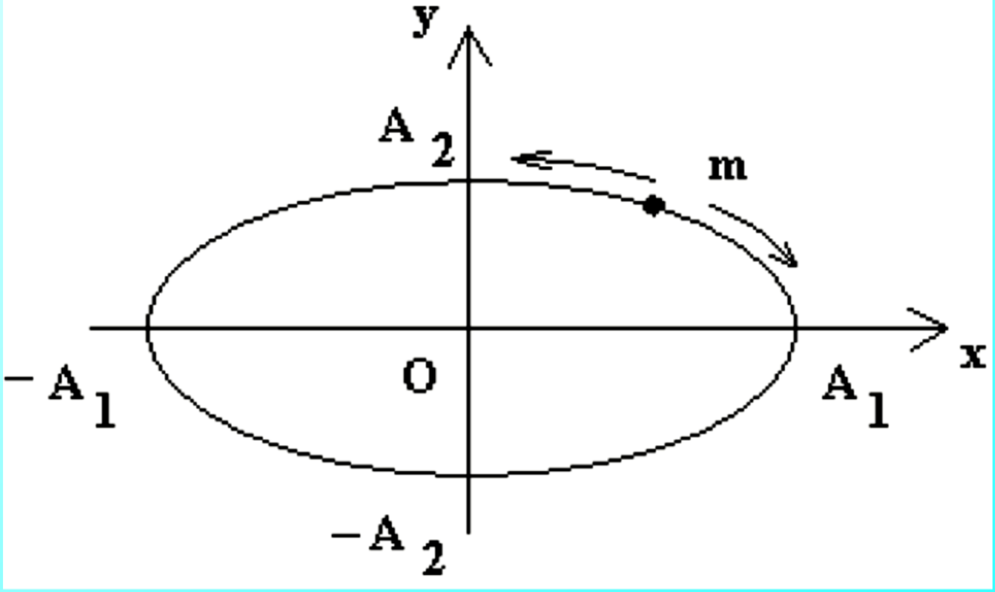
3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

c) Dacă diferenţa fazelor iniţiale este $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

⇒ oscilaţiile sunt în cuadratură

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1$$



Elipsa care descrie traiectoria particulei nu mai este rotită faţă de axele de coordonate

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

d) Dacă $A_1 = A_2 = A_0$ şi sunt în cuadratură de fază

⇒ ecuaţia traiectoriei punctului material devine:

$$\left(\frac{x}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = A_0^2$$

Mişcarea punctului material este circulară, cercul având raza A_0.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

Aplicaţie: Un corp cu masă m=10 kg este legat de două resorturi identice fiecare având constanta de elasticitate k=2000N/m. Se deplasează corpul cu distanţa A=8 cm faţă de poziţia de echilibru şi i se dă drumul. Considerând ca origine a timpului momentul când i se dă drumul şi ca origine a coordonatelor poziţia de echilibru, neglijând frecările, să se calculeze:

a) Ecuaţia de mişcare a corpului;
b) Viteza şi acceleraţia maximă a corpului;
c) Energia cinetică şi potenţială în punctul y(t)=4cm;

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

<u>Aplicaţie:</u>

a) $y(t) = 0.08\sin(20t + \frac{\pi}{2})$ (m)

b) $v_{max} = A\omega = 1,6$ (m/s)

$a_{max} = \omega^2 A = 32$ (m/s²)

c) $E_c = 9,6$ (J) $E_p = 3,2$ (J)

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definească oscilaţiile, precizând mărimile care le caracterizează;
- Determine ecuaţia mişcării oscilatorului armonic ideal;
- Definească energia cinetică, potenţială şi mecanică pentru un oscilator ideal.
- Enunţe teorema conservării energiei mecanice pentru oscilaţiile armonice ideale.
- Să compună oscilaţiile paralele de aceeaşi pulsaţie.
- Să utilizeze metoda fazorială.
- Să definească perioada bătăilor.
- Să compună oscilaţiile paralele de frecvenţă diferită.
- Să compună oscilaţiile perpendiculare.

BIBLIOGRAFIE

- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, in format electronic, pentru studenţii din învăţământul tehnic din Timişoara, F. Barvinschi, site: http://www.et.upt.ro/etf/index.php?link=2&sublink=1203&pag=1&lang=ro
- **Fizica. Elemente fundamenale pentru ingineri,** N. Pop, Ed. Politehnica, 2013;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Editura Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008.
- Fizică, F. W. Sears, M. Zemansky, H. Young, Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.