Curs Nr. 11

Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^p$

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Derivate parţiale de ordinul întâi. Matrice Jacobi

Înainte de a da definiţia riguroasă a derivatelor parţiale, vom căuta să ajungem la acestea folosind noţiunea de funcţie derivabilă din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală, noţiune care pemite înţelegerea mai uşoară a analizei multidimensionale. Astfel, reamintim că funcţia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte **derivabilă în punctul** $x_0 \in (a,b)$ dacă

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{not}{=} f'(x_0),$$

există şi este finită. Numărul $f'(x_0)$ se numeşte derivata funcţiei f în punctul x_0. Geometric, dacă f este derivabilă în $x_0 \in (a,b)$, atunci graficul său $G_f \subset (a,b)\times\mathbb{R}$ are tangentă unică în punctul $(x_0, f(x_0)) \in G_f$, a cărei ecuaţie este

$$y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0).$$

Interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii de forma $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este ilustrată în figura 1.

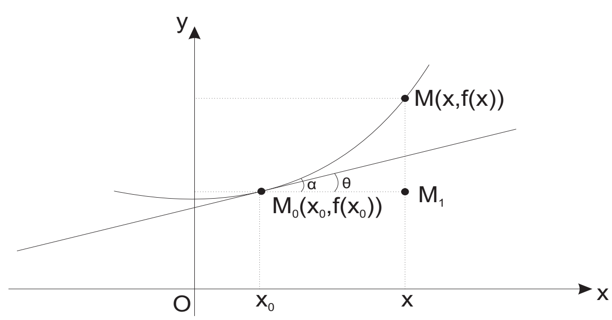

Figura 1

Din triunghiul $\mathrm{MM_0M_1}$ se observă că $tg\alpha = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; prin trecere la limită rezultă egalitatea, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim tg\alpha = tg\alpha = f'(x_0)$, care arată că derivata funcţiei f în punctul x_0 este tangenta trigonometrică a unghiului format de tangenta geometrică la graficul lui f în punctul M_0 şi axa Ox.

Din punct de vedere fizic, dacă $s = f(t)$ este traiectoria de mişcare a unui punct material care se mişcă din punctul $\mathrm{M}_0(t_0)$ în punctul $\mathrm{M}(t)$, atunci viteza media de mişcare din M_0 în M se defineşte prin relaţia $v_{M_0M} = \dfrac{s - s_0}{t - t_0}$, care prin trecerela limită conduce la egalitatea

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

În aceeaşi manieră se pote defini şi acceleraţia mişcării, anume, $a = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$. Tot cu ajutorul noţiunii de derivată se poate defini masa corpurilor, căldura specifică a corpurilor, etc.

Derivatele parţiale ale funcţiilor f :A$\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ (reale de variabilă vectorială) se definesc într-o manieră asemănătoare.

Se consideră f :A$\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in$A, ceea ce înseamnă că există un disc $D_e(x_0, r) \subset$A, figura 2.

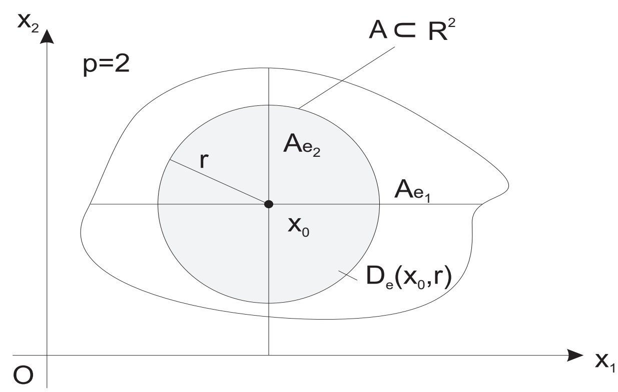

Figura 2

Considerând submulţimile $\mathrm{A}_{e_i} \subset \mathbb{R}^p, 1 \leq i \leq p$, în care

$$\mathrm{A}_{e_i} = \{x = x_0 + te_i \,|t \in \mathbb{R}\} \cap \mathrm{A} \tag{1}$$

atunci se observă că pentru orice $t \in \mathbb{R}$, cu condiţia $|t| < r$, rezultă că fiecare element $x = x_0 + te_i \in$A$, i = \overline{1,p}$. Pentru aceasta va trebui arătat că $d(x, x_0) <$ $< r$. Într-adevăr,

$$d_e(x, x_0) = \|x - x_0\| = \|x_0 + te_i - x_0\| = \|te_i\| = |t| \, \|e_i\| = |t| < r,$$

deci fiecare vector $x = x_0 + te_i \in D_e(x_0, r) \subset$A, $1 \leq i \leq p$.

Prin urmare are sens a defini funcţiile $R_i : (-r, r) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$R_i(t) = \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}, \qquad 1 \leq i \leq p. \tag{2}$$

Se observă că $t = 0$ este punct de acumulare pentru domeniul de definiţie al funcţiei R_i, deci are sens problema limitei funcţiei R_i $(1 \leq i \leq p)$ în acest punct. Cu aceste precizări suntem în măsură a defini derivatele parţiale ale funcţiei f :A$\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ într-un punct $x_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}$.

Definiţia 0.1.1 *Se spune că funcţia f are derivată parţială în raport cu variabila x_i în punctul x_0 dacă există $\lim\limits_{t\to 0} R_i(t)$ (finită sau nu). Această limită se numeşte derivata parţială de ordinul întâi a funcţiei f în raport cu variabila x_i în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^p$. Ea se notează $f'_{x_i}(x_0)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $1 \leq i \leq p$.*

În cele ce urmează vom **explicita expresia** $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t\to 0} R_i(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_p)}{t} \\
&= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)}{x_i - a_i} \\
&= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f_{i,x_0}(x_i) - f_{i,x_0}(a_i)}{x_i - a_i} = f'_{i,x_0}(a_i), \quad 1 \leq i \leq p,
\end{aligned}$$

adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f_{i,x_0}(x_i) - f_{i,x_0}(a_i)}{x_i - a_i},$$

în care $f_{i,x_0} : pr_i(\mathrm{A}_{e_i}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{i,x_0}(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p)$ este **funcţia parţială** în raport cu variabila x_i asociată funcţiei f în punctul $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}$.

În cazul particular $p = 2$, adică pentru $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (a, b) un punct din interiorul lui A şi $\overline{v} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j}$ un vector nenul din $\mathbb{R}^2$ avem

- **Definiţia derivatei după o direcţie** Funcţia f este derivabilă în (a,b) după direcţia $\overline{v}$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((a,b)+t(\alpha,\beta),b)-f(a,b)}{t}$$

există şi este finită. Valoarea acestei limite se numeşte derivata funcţiei f în punctul (a,b) după direcţia $\overline{v}$ şi se notează $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{v}}(a,b)$.

- **Definiţia derivatelor parţiale de ordinul întâi**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

Funţia f este derivabilă parţial pe mulţimea $D\subset A$ dacă şi numai dacă este derivabilă parţial în fiecare punct $(x,y)\in D$.

Interpretarea geometrică a derivatelor parţiale pentru funcţii de două variabile este ilustrat în figura 3. Aşadar, fie $z=f(x,y)$, $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ netedă pe D, adică $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ există şi sunt continue pe D. Dacă se consideră $y=b$(=constant) atunci se obţine funcţia $z=f(x,b)$, care este funcţia $f(x,y)$ considerată în planul $y=b$, paralel cu planul xOz. Graficul lui $f(x,b)$ (în planul $y=b$) este curba MN (figura 3) dată ca intersecţie a graficului suprafeţei $z=f(x,y)$ cu planul $y=b$. Derivata funcţiei $f(x,b)$ în raport cu variabila x în punctul A, adică derivata parţială în raport cu x în punctul $x_0=(a,b)$, este numărul

$$f'_x(a,b)=\left.\frac{df(x,b)}{dx}\right|_{x=a},$$

care reprezintă tangenta unghiului format de tangenta la curba MN în punctul P$(a,b,f(a,b))$ cu axa absciselor. O interpretare geometrică analoagă are şi derivata parţială în raport cu y în punctul $x_0=(a,b)$.

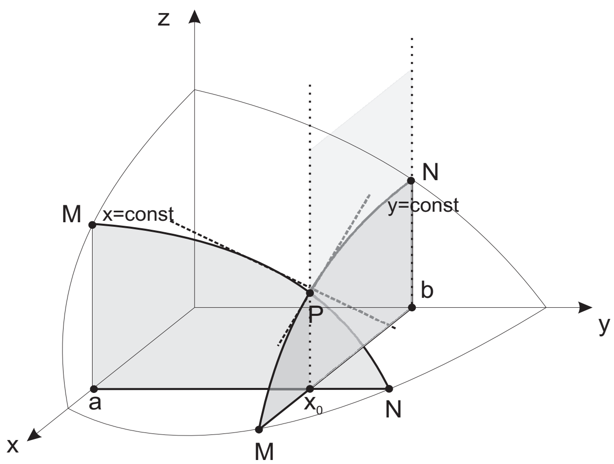

Figura 3

Observaţia 0.1.2 *i) Calculul derivatei parţiale în raport cu o variabilă se face după regulile de derivare ale unei funcţii de o variabilă, privind-o pe cealaltă ca pe o constantă.*

ii) (Formula de calcul a derivatei după o direcţie) *Dacă f este de clasă* C^1 *în vecinătatea punctului $(a,b) \in Int(A)$ atunci f este derivabilă în (a,b) după orice direcţie $\overline{v} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j}$, iar expresia derivatei $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{v}}(a,b)$ se calculează cu ajutorul derivatelor parţiale*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot \beta.$$

Definiţia 0.1.3 . *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ un con deschis şi conex (având sau neavând vârful în origine). Se spune că funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este omogenă de gradul $r \in \mathbb{Q}$, dacă pentru orice $t \in \mathbb{R}_+^*$ şi orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$, are loc*

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_p) = t^r f(x_1, x_2, ..., x_p).$$

Teorema 0.1.4 *(Identitatea lui Euler). Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe conul A deschis şi conex, cu sau fără vârf (adică $0 \in A$ sau $0 \notin A$). Condiţia necesară şi suficientă pentru ca f să fie funcţie omogenă de gradul r de omogenitate, este ca f să verifice identitatea lui Euler*

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_p)}{\partial x_i} = r f(x_1, x_2, ..., x_p).$$

Derivatele parţiale ale funcţiilor $F : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ **(vectoriale de variabilă vectorială)** se definesc pe componente. Fie $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p$ deschisă şi $F : \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicaţie cu valori vectoriale, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$. Aceasta înseamnă că funcţiile $f_i : \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq q$ sunt funcţii reale de variabilă vectorială $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathrm{A}$.

Definiţia 0.1.5 . *Se spune că aplicaţia* $F : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *este derivabilă într-un punct* $x_0 \in A$ *dacă fiecare din funcţiile componente* $f_1, f_2, ..., f_q$ *sunt derivabile parţial în* x_0 *în raport cu toate variabilele* $x_1, x_2, ..., x_p$.

Prin urmare, din definiţia de mai sus, se deduce că derivata parţială a unei funcţii vectoriale $F = (f_1, f_2, ..., f_q)$ în raport cu o anumită variabilă x_k, $k = \overline{1,p}$, este un vector din $\mathbb{R}^q$ ce are drept componente derivatele parţiale ale componentelor funcţiei vectoriale F în raport cu acea variabilă x_k, adică

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x), ..., \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(x) \right),\ k = \overline{1,q}, x = (x_1, x_2, ..., x_p)$$

Din aceste consideraţii rezultă că fiecărei funcţii vectoriale $F \in C^1(\mathrm{A})$,
$F : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$,$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$, $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathring{\mathrm{A}}$, i se poate asocia în fiecare punct $x_0 \in \mathring{\mathrm{A}}$ o matrice cu p coloane şi q linii,

$$J_F(x_0) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x_0) \\ .... & .... & ... & .... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}$$

numită **matricea jacobiană (matricea Jacobi)** a lui F în punctul $x_0 \in \mathring{\mathrm{A}}$.

Dacă $p = q$, atunci matricea $J_F(x_0)$ este pătratică, iar determinantul ei se numeşte **determinantul funcţional** al funcţiilor $f_1, f_2, ..., f_p$ în raport cu variabilele $x_1, x_2, ..., x_p$ în punctul x_0 şi se notează prin

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_p)}{D(x_1, x_2, ..., x_p)}(x_0) = \det J_F(x_0).$$

Fie D un domeniu (mulţime conexă, deschisă) în spaţiul euclidian real p dimensional $\mathbb{R}^p$ cu $p = 1, 2$ sau 3.

Definiţia 0.1.6 *Se numeşte* ***câmp scalar*** *orice funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$.

Funcţia $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ *(sau* $\mathbb{R}^3$*) se numeşte* ***câmp vectorial*** *şi se notează, având în vedere dimensiunea codomeniului:*

$$\mathbf{F} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j},$$

în cazul $p = 2$ *sau, respectiv,*

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

în cazul $p = 3$ *unde* P *şi* Q*, respectiv,* P, Q *şi* R*,* ***componentele (coordonatele)*** *lui* $\mathbf{F}$ *sunt câmpuri scalare pe mulţimea* D.

În cele ce urmează, abordăm doar cazul câmpurilor în spaţiul fizic tridimensional. Lăsăm pe seama cititorului să reformuleze rezultatele ce urmează în cazul bidimensional. Spunem că f şi $\mathbf{F}$ sunt **câmpuri de clasă** $\mathcal{C}^n$ pe mulţimea deschisă D dacă f respectiv P, Q şi R sunt funcţii de clasa $\mathcal{C}^n$ pe D.

Definiţia 0.1.7 ***Gradientul*** *câmpului scalar* f *(câmp de clasă cel puţin* 1 *pe* D*) este câmpul vectorial*

$$\boxed{\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.}$$

Gradientul unui câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^n$ este un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^{n-1}$.

Definiţia 0.1.8 ***Divergenţa*** *câmpului vectorial de clasă* $\mathcal{C}^1$, $\boldsymbol{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *este câmpul scalar*

$$\boxed{\mathbf{div}\, \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Divergenţa unui câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^n$ este un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^{n-1}$.

Definiţia 0.1.9 ***Rotorul*** *câmpului vetorial* $\boldsymbol{F}$ *este câmpul vectorial*

$$\boxed{\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.}$$

Rotorul unui câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^n$ este un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^{n-1}$.

Formele diferencţiale de clasă C^n se pot diferenţia, obţinând o altă formă diferenţială, de ordin superior, dar de clasă C^{n-1}.

Observaţia 0.1.10 ***Vectorul nabla ("operatorul" nabla)***

$$\nabla\Box = \frac{\partial\Box}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Box}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Box}{\partial z}\mathbf{k}$$

permite exprimarea unitară a operatorilor diferenţiali după cum urmează:

$$\mathbf{grad} f = \nabla f \qquad \text{(produs cu "scalarul" } f\text{)},$$

$$\mathbf{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} \qquad \text{(produsul scalar cu } \boldsymbol{F}\text{)},$$

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} \qquad \text{(produsul vectorial cu } \boldsymbol{F}\text{)},$$

Definiţia 0.1.11 . *Se spune că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, dacă există o funcţională liniară (formă liniară) $\Phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega_{x_0} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă şi nulă în x_0, astfel încât pentru orice $x \in A$ are loc egalitatea*

$$f(x) = f(x_0) + \Phi(x - x_0) + \|x - x_0\| \, \omega_{x_0}(x)$$

Funcţionala liniară $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ care satisface egalitatea de mai sus se numeşte diferenţiala funcţiei f în x_0 şi se notează $d_{x_0} f = \Phi$.

Propoziţia 0.1.12 *Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, atunci funcţionala liniară $\Phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface relaţia din definiţia de mai sus este unică.*

Propoziţia 0.1.13 ***(legătura între diferenţiabilitate, continuitate şi derivata după direcţie)*** *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, atunci f este continuă în punctul x_0.*

Propoziţia 0.1.14 *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, atunci f este derivabilă în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ după orice direcţie $h \in \mathbb{R}^p, h \neq \theta_{\mathbb{R}^p}$ şi are loc egalitatea*

$$d_{x_0} f(h) = \frac{\partial f}{\partial h}(x_0) \text{ (derivata Frechet)}$$

Teorema 0.1.15 ***(Reprezentarea diferenţialei)***. *Dacă funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă în punctul* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, *atunci diferenţiala sa* $d_{x_0}f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *este definită pentru orice vector nenul* $h \in \mathbb{R}^p$ *şi are loc reprezentarea*

$$\begin{aligned} d_{x_0}f(h) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\, h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\, h_p \\ &= < h, grad_{x_0} f >=< h, (\nabla f)_{x_0} > . \end{aligned}$$

Observaţia 0.1.16 *Este uşor de constatat că aplicaţiile "proiecţiile canonice",* $pr_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, *definite prin* $pr_i x = x_i$, *oricare ar fi* $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in$ $\in \mathbb{R}^p$, *sunt aplicaţii liniare* $(1 \leq i \leq p)$. *Rezultă uşor* $dpr_i x = dx_i = x_i, (1 \leq i \leq p)$. *Dacă* $h \in \mathbb{R}^p, h = (h_1, h_2, ..., h_p)$ *un vector arbitrar, atunci* $dh_i = h_i$ *şi astfel reprezentarea diferenţialei devine*

$$d_{x_0}f(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dh_i.$$

Considerând acum un punct arbitrar $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ *(ale cărui coordonate sunt componentele vectorului de poziţie* $\overrightarrow{OM}$, $M(x_1, x_2, ..., x_p)$*) rezultă succesiv egalităţile*

$$d_{x_0}f(x) = d_{x_0}f(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i d_{x_0}f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, x_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i,$$

care arată că diferenţiala de ordinul întâi admite reprezentarea

$$d_{x_0}f\,(x_1, x_2, ..., x_p) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i.$$

Teorema 0.1.17 ***(Criteriu de diferenţiabilitate)***. *Dacă funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *admite derivate parţiale în raport cu fiecare variabilă* x_i $(1 \leq i \leq p)$ *pe o anumită vecinătate* V_{x_0} *a punctului* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ *şi acestea sunt continue în* x_0, *atunci* f *este diferenţiabilă în* x_0 *şi are loc aproximarea*

$$f(x) \simeq f(x_0) + d_{x_0}f(x - x_0) \simeq f(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i, \ \forall x \in V_{x_0}.$$

Observaţia 0.1.18 *i) În cazul particular al funcţiilor reale de două variabile, expresia* $f(x,y)-f(x_0,y_0)+(x-x_0)$ *reprezintă creşterea funcţiei în punctul* (x_0,y_0), *iar* $x-x_0$, $y-y_0$ *sunt creşterile variabilelor în* (x_0,y_0). *Pentru orice funcţie diferenţiabilă în* (x_0,y_0) *are loc formula de aproximare liniară*

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

ii) Diferenţiala totală a lui f *este*

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$