Seminar Nr. 7

Serii de puteri şi serii Taylor

Probleme rezolvate

1. a) *Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui x, funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

b) *Folosind seria obţinută la i) (numită şi seria binomială) să se dezvolte în serie de puteri ale lui x următoarele funcţii, precizând şi domeniul de convergenţă:*

i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, **ii)** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, **iii)** $f(x) = \sqrt{1+x}$,
iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, **v)** $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, **vi)** $f(x) = \dfrac{3x-1}{3x^2-2x-1}$.

Folosind rezultatele obţinute să se determine suma seriilor numerice:
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Soluţie. *a)* Calculăm derivatele de ordinul n pentru funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha$ şi avem

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ ...,\ f^n(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Conform formulei lui Taylor avem

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

deci

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad |x|<1.$$

b) **i)** În seria binomială

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad |x|<1,$$

considerăm $\alpha = -1$. Se obţine

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)(-3)...(-n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x|<1.$$

ii) Prin înlocuirea lui x cu $-x$ în seria obţinută la i) (lucru posibil, datorită simetriei intervalului de convergenţă) avem:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1.$$

iii) Pentru $\alpha = \dfrac{1}{2}$ în seria binomială, rezultă

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n, \quad |x|<1. \end{aligned}$$

Raza de convergenţă este 1, deoarece

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)!!}{(-1)^n (2n-1)!!} \cdot \frac{(2n-3)!!(-1)^{n-1}}{(2n)!!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n-1} = 1.$$

Dacă $x = -1$ în membrul drept obţinem seria numerică

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

care conform criteriului lui Raabe-Duhamel este convergentă.

Pentru $x = 1$, se obţine în membrul drept seria numerică

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

care este de asemenea o serie convergentă conform criteriului lui Leibniz.

Prin urmare, mulţimea de convergenţă este $A_c = [-1, 1]$.

Pentru $x = -1$ rezultă

$$\frac{-1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (-1)^n,$$

sau echivalent

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}.$$

De asemenea, pentru $x = 1$ avem

$$\frac{3}{2} - \sqrt{2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}.$$

iv) În seria binomială luând $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, avem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Raza de convergenţă este 1, deoarece

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1.$$

Pentru $x = 1$, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

este convergentă conform criteriului lui Leibniz, iar pentru $x = -1$ seria numerică obţinută

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

este divergentă conform criteriului lui Raabe-Duhamel. În acest caz, mulţimea de convergenţă este $(-1, 1]$.

În cazul în care $x = 1$ avem

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

sau echivalent

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

v) Înlocuind x cu $2x$ în seria obţinută la **i**), rezultă

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n,$$

iar raza de convergenţă este $R = \dfrac{1}{2}$. În acest caz mulţimea de convergenţă este $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

vi) Descompunând în fracţii simple obţinem

$$f(x) = \frac{3x-1}{3x^2-2x-1} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Prin identificarea coeficienţilor rezultă sistemul $\begin{cases} A+3B=3 \\ -A+B=-1 \end{cases}$, care admite soluţia $A=\frac{3}{2}$, $B=\frac{1}{2}$. Rezultă

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{3x^2-2x-1} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 3^{n+1}-1]x^n,\end{aligned}$$

care are raza de convergenţă $R=\frac{1}{3}$, iar mulţimea de convergenţă $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2. *Să se determine dezvoltările în serie Taylor în vecinătatea originii ale următoarelor funcţii elementare:*

i) $f(x)=e^x$, $(x\in\mathbb{R})$; **ii)** $f(x)=\cos x$, $(x\in\mathbb{R})$; **iii)** $f(x)=\sin x$, $(x\in\mathbb{R})$.

Soluţie. i) Avem

$$\begin{aligned} f'(x)=e^x,\quad f'(0) &= 1; \\ f''(x)=e^x,\quad f''(0) &= 1; \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0) &= 1.\end{aligned}$$

Deoarece $|f^{(n)}(x)|=|e^x|\le e^M$, pe orice interval $[-M,M]$, rezultă conform teoremei de dezvoltare în serie Taylor

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Raza de convergenţă a seriei este $R=\infty$.

ii) Derivând funcţia $f(x) = \cos x$ avem

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\
f''(x) &= -\cos x = \cos(x + \pi) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
f'''(x) &= \sin x = \cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
f^{(4)}(x) &= \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \cos(x + n\frac{\pi}{2}),
\end{aligned}$$

deci $|f^{(n)}| = |\cos(x + n\frac{\pi}{2})| \leq 1$, pe orice interval $[-M, M]$. Se observă că în punctul $x_0 = 0$ derivatele de ordin impar sunt nule, iar derivatele de ordin par sunt egale cu 1, respectiv -1, deci

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Raza de convergenţă a seriei este $R = \infty$.

iii) Procedând analog ca la **ii)** se obţine

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Raza de convergenţă a seriei este $R = \infty$.

3. *Folosind dezvoltările în serie de puteri din exemplul anterior, să se dezvolte după puterile lui x funcţiile:*

i) $\sinh x$, **ii)** $\cosh x$; **iii)** $\cos^3 x$; **iv)** $\sin^2 x$.

Soluţie. i) Utilizând formulele $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ şi $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$ rezultă

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Analog cu **i)**, folosind formula $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, se obţine

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

iii) Din formulele trigonometrice cunoscute $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{4}\cos x$, şi $\cos 3x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$, rezultă

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3^{2n-1} + 1)}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

iv) Cum $\sin^2 x$ se poate exprima sub forma $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, iar $\cos 2x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$, rezultă

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \\ &= x^2 - \frac{8x^4}{4!} + \frac{32x^6}{6!} - ... + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + ...\end{aligned}$$

4. *Să se dezvolte în serie de puteri ale lui* $(x-a)$, $a \neq 0$, *funcţia* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soluţie. Pornim de la

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x-a)+a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}, \quad a \neq 0.$$

Utilizând dezvoltarea cunoscută $\dfrac{1}{1+y} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$, $y \in (-1, 1)$ prin înlocuirea lui y cu $\dfrac{x-a}{a}$ se obţine

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-a}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-a)^n}{a^{n+1}}$$

care este verificată oricare ar fi $x \in (a - |a|, a + |a|)$.

5. *Să se dezvolte după*

i) *puterile lui x funcţia* $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$, $x \neq -\dfrac{4}{3}$;

ii) *puterile lui $x-1$ funcţia* $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \neq -1$.

Soluţie. **i)** Din dezvoltarea cunoscută $\dfrac{1}{1+y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n$, $y \in (-1,1)$ prin înlocuirea lui y cu $\dfrac{3}{4}x$ avem:

$$\frac{1}{3x+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{3x}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{4^{n+1}} \cdot x^n,$$

oricare ar fi $x \in \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

ii) Funcţia $\dfrac{1}{1+x}$ poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{(x-2)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}.$$

În dezvoltarea $\dfrac{1}{1+y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n$, $y \in (-1,1)$ înlocuim pe y cu $\dfrac{x-2}{3}$ şi obţinem dezvoltarea în serie după puterile lui $x-2$ a funcţiei g :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{x-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}},$$

cu $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 1$, deci $x \in (-1, 5)$.

Pentru $x = -1$ se obţine seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ care e convergentă, iar pentru $x = 5$ se obţine seria convergentă $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$, deci mulţimea de convergenţă este $A_c = [-1, 5]$.

6. *Folosind formulele lui Taylor, respectiv Mac-Laurin, să se arate că:*

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2}{3x^3} = -\dfrac{4}{9}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{24\ln x + 6x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 96x + 50}{3(x-1)^5} = \dfrac{8}{5}$.

Soluţie. **i)**Aproximăm funcţia $f(x) = e^{-2x}$ prin polinomul său Mac-Laurin de ordinul 3. Avem $f(0) = 1$, $f'(x) = -2e^{-2x}$, $f'(0) = -2$, $f''(x) = 4e^{-2x}$, $f''(0) = 4$, $f'''(x) = -8e^{-2x}$, $f'''(0) = -8$, deci

$$e^{-2x} \simeq 1 - 2x + \frac{x^2}{2!}\cdot 4 + \frac{x^3}{3!}\cdot(-8) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3}.$$

Cu aceasta, limita din enunţ devine

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - 1 + 2x - 2x^2}{3x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{4x^3}{9x^3} = -\frac{4}{9}.$$

ii) Scriem formula lui Taylor de ordinul 5 asociată funcţiei $f(x) = \ln x$ în punctul $x = 1$. Se obţine

$$\ln x \simeq (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^5.$$

Formula lui Taylor de ordinul 4 asociată funcţiei $g(x) = 6x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 96x + 50$ în punctul $x = 1$ este

$$g(x) = -24(x-1) + 12(x-1)^2 - 8(x-1)^3 + 6(x-1)^4,$$

deci

$$\lim_{x\to 1} \frac{24\ln x + 6x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 96x + 50}{3(x-1)^5} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{24}{5}(x-1)^5}{3(x-1)^5} = \frac{8}{5}.$$

Probleme propuse

1. *Să se dezvolte după puterile lui x funcţia:* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

Folosind rezultatele obţinute să se determine apoi, suma seriei numerice: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

2. *Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţiile:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$;

ii) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$;

iii) $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x)$.

Folosind rezultatele obţinute să se determine apoi, suma seriilor numerice: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. *Pornind de la dezvoltarea în serie de puteri ale lui x a funcţiei* $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $|x| \le 1$, *să se deducă suma seriei numerice*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

4. *Să se dezvolte după puterile lui x, respectiv $x+1$ funcţiile*

i) $f(x) = \dfrac{1}{3x+5}$, $x \neq -\dfrac{5}{3}$;

ii) $g(x) = \dfrac{1}{4x+3}$, $x \neq -\dfrac{3}{4}$.

5. *Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile următoare, specificându-se intervalul pe care are loc dezvoltarea:*

i) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$ *după puterile lui x şi $x-2$;*

ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{4}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{4x+7}$ *după puterile lui x, $x+2$ şi $x-1$;*

iii) $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5-3x}$ *după puterile lui x şi $x-1$;*

iv) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$ *după puterile lui* x, $x+4$ *şi* $x-5$;

v) $f : \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$ *după puterile lui* x *şi* $x-3$;

vi) $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, -8\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+11}{x^2+11x+24}$ *după puterile lui* $x+1$;

vii) $f : \mathbb{R} \setminus \{5, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{6-2x}{x^2-6x+5}$ *după puterile lui* $x+2$.

6. *Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii:*

i) $f(x) = \ln(15-7x),\ x < \dfrac{15}{7}$ *după puterile lui* $x-2$;

ii) $f(x) = \ln(10-3x),\ x < \dfrac{10}{3}$ *după puterile lui* $x-3$;

iii) $f(x) = \ln(5x-24),\ x > \dfrac{24}{5}$ *după puterile lui* $x-5$;

iv) $f(x) = \ln(2x+9),\ x > -\dfrac{9}{2}$ *după puterile lui* $x+4$;

v) $f(x) = \ln(6x-23),\ x > \dfrac{23}{6}$ *după puterile lui* $x-4$.

7. *Folosind formulele lui Taylor, respectiv Mac-Laurin, să se arate că:*

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3} = 4$,

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^5}\left[12\ln x + 3x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 48x + 25\right] = \dfrac{12}{5}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2}{3x^3} = -\dfrac{4}{9}$, **iv)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{48\cos x^2 - 48 + 24x^4}{x^8} = 2$,

v) $\lim\limits_{x\to\infty} x[3 - 4x + 6x^2 - 12x^3 + 12x^4(\ln(1+x) - \ln x)] = \dfrac{12}{5}$,

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{60\ln(x+1) - 60x + 30x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 12x^5 + 24x^6}{17x^6} = \dfrac{14}{17}$,

vii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{18\ln(x+2) - 18\ln 3 + 11 - 20x + 13x^2 - 4x^3}{6(x-1)^3} = -\dfrac{17}{27}$.