Curs Nr. 3

Serii numerice

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Serii numerice

0.1.1 Criterii de convergenţă ale seriilor cu termeni pozitivi

În această secţiune vom considera serii numerice cu termeni pozitivi şi vom stabili criterii cu ajutorul cărora se poate studia natura seriei date prin compararea sa cu alte serii convergente sau divergente.

Definiţia 1 Se numeşte **serie cu termeni pozitivi** (sau cu semn constant) o serie a căror termeni, cu excepţia unui număr finit, sunt pozitivi.

Propoziţia 2 O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit.

Demonstraţie. Şirul monoton al sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită finită (seria este convergentă) dacă şi numai dacă el este mărginit.

Propoziţia 3 **(Criteriul condensării Cauchy).** Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir descrescător de numere reale pozitive. Atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeaşi natură.

Exemplul 1. **(Seria armonică generalizată sau seria lui Riemann).** Să se studieze natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluţie. Seria lui Riemann, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^{\alpha}}$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$, care este seria geometrică cu raţia $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Ea este convergentă dacă raţia $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, echivalent cu $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$, de unde $\alpha > 1$ şi este divergentă dacă $q \geq 1$, adică $\alpha \leq 1$. Prin urmare avem

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ este convergentă pentru } \alpha > 1; \text{ divergentă pentru } \alpha \leq 1.}$$

Propoziţia 4 (Criteriul de comparaţie I). Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ astfel ca între termenii lor să avem

$$0 < a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Atunci au loc următoarele situaţii:

1°. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

2°. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Demonstraţie. **1**°. Notăm cu (s_n) şi (σ_n) şirurile sumelor parţiale ale celor două serii şi presupunem că $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă. Atunci şirul sumelor parţiale (σ_n) este convergent, deci mărginit. Rezultă că există $\alpha > 0$ astfel ca $\sigma_n \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece (1) are loc, rezultă că $s_n \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că şi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi fiind crescător, el este convergent, deci există $\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2°. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă şi am admite că $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nu ar fi divergentă (în ipoteza (3.24)), atunci din convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ potrivit cazului 1°), ar rezulta că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e convergentă, ceea ce este contrar ipotezei.

Exemplul 2. Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 4n^2 + n - 1}$.

Soluţie. Termenul general al seriei $a_n = \dfrac{1}{n^3+4n^2+n-1}$ pate fi majorat cu $b_n = \dfrac{1}{n^3}$. Cum $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ este convergentă rezultă din criteriul I de comparaţie că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+4n^2+n-1}$ este convergentă.

Propoziţia 5 (Criteriul comparaţiei II). Fie seriile cu termeni pozitivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, astfel ca între termenii lor are loc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Atunci au loc următoarele afirmaţii:

a) Dacă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) Dacă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Demonstraţie. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, inegalitatea (2) se scrie succesiv sub forma inegalităţilor separate,

$\dfrac{a_2}{a_1} \leq \dfrac{b_2}{b_1}, \dfrac{a_3}{a_2} \leq \dfrac{b_3}{b_2}, \dfrac{a_4}{a_3} \leq \dfrac{b_4}{b_3}, ..., \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \leq \dfrac{b_n}{b_{n-1}},$

care înmulţite membru cu membru conduc la inegalitatea

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \text{ sau, } a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

a) Potrivit Criteriului de comparaţie I, dacă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ este convergentă, deci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\displaystyle\frac{a_1}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, deci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, fapt care încheie demonstraţia.

Propoziţia 6 **(Criteriul de comparaţie la limită sau câtului).** Fie seriile cu termeni pozitivi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Au loc următoarele afirmaţii:

a) Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, cu $0 < l < \infty$, atunci seriile au aceeaşi natură (sunt sau convergente, sau divergente).

b) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, atunci se deosebesc cazurile:

i) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

ii) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă;

c) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, atunci se deosebesc cazurile:

j) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă;

jj) dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemplul 3. Studiaţi natura seiei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+5}{8n^2+3n-5}$.

Soluţie. Fie $a_n = \frac{7n+5}{8n^2+3n-5}$ şi $b_n = \frac{1}{n}$. Aplicând criteriu de comparaţie la limită avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{7n^2+5n}{8n^2+3n-5} = \frac{7}{8} \in (0, \infty)$$

deci seriile $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n$ au aceeaşi natură, adică sunt divergente.

Propoziţia 7 **(Criteriul rădăcinii al lui Cauchy).** Dacă pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, atunci:

i) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă $l < 1$;

ii) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă dacă $l > 1$;

iii) Pentru $l = 1$ criteriul nu dă răspuns, seria putând fi convergentă sau divergentă (cazul de îndoială).

Exemplul 4. Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^5+n^4+2}{n^5+n^3+3}\right)^{n^2}$.

Soluţie. Aplicând criteriul rădăcinii al lui Cauchy avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^5+n^4+2}{n^5+n^3+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5+n^4+2}{n^5+n^3+3}\right)^{n} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n^4-n^3-1}{n^5+n^3+3}\right)^{\frac{n^5+n^3+3}{n^4-n^3-1}}\right]^{\frac{n^5-n^4-n}{n^5+n^3+3}} = e.$$

Conform criteriului rădăcinii, cum $e > 1$ rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^5+n^4+2}{n^5+n^3+3}\right)^{n^2}$ este divergentă.

Propoziţia 8 (Criteriul raportului al lui D'Alembert). Dacă pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finită sau infinită, atunci:

i) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

ii) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă;

iii) Dacă $l = 1$, atunci are loc cazul de îndoială.

Exemplul 5. Să se studieze naura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+1)(n+2)...(n+n)}$.

Soluţie. Fie $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)(n+2)...(n+n)}$. Aplicând criteriul raportului se obţine

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)(n+3)...(2n+2)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)...(n+n)}{n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Conform criteriului lui D'Alembert rezultă că seria dată este convergentă.

Propoziţia 9 **(Criteriul lui Raabe-Duhamel).** Dacă există limita finită sau infinită, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$, atunci au loc următoarele:

i) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă $l>1$;

ii) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă dacă $l<1$;

iii) Pentru $l=1$ criteriul nu dă răspuns, seria putând fi convergentă sau divergentă (cazul de îndoială).

Exemplul 6. Să se studieze naura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a>0$.

Soluţie. Se aplică criteriul lui Raabe-Duhamel şi se obţine

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n+1)}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\dfrac{n}{n+1}}\cdot\ln\frac{n}{n+1}=\ln a\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n}{n+1}\\ &= \ln a\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=-\ln a.\end{aligned}$$

- Dacă $-\ln a>1$ rezută $a<\dfrac{1}{e}$ deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, este convergentă.
- Dacă $-\ln a<1$ rezută $a>\dfrac{1}{e}$ deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, este divergentă.

- Dacă $-\ln a = 1$ rezută $a = \dfrac{1}{e}$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ care este divergentă.

Propoziţia 10 **(Criteriul logaritmic la limită).** Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = l.$$

i) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

ii) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ atunci criteriul logaritmic nu decide natura seriei.

Exemplul 7. Folosind criteriul logaritmic să se stabilească natura seriei

$$\sum_{n\geq 1} 4^{-\ln n^3}.$$

Soluţie. Termenul general al seriei este $a_n = 4^{-\ln n^3}$, iar din criteriul logaritmic avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{1}{4^{-\ln n^3}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^{\ln n^3}}{\ln n} = 3\ln 4 > 1$$

şi prin urmare seria este convergentă.

Temă

1) Se consideră seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ce puteţi afirma despre natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$?

2) Se consideră seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ce puteţi afirma despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?