Curs Nr. 5

Serii de funcţii

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Serii de funcţii

0.1.1 Punct de convergenţă. Mulţime de convergenţă. Suma unei serii de funcţii

Pentru a studia convergenţa seriilor de funcţii, vom utiliza noţiunile şi rezultatele menţionate anterior pentru şiruri de funcţii şi serii numerice.

Definiţia 0.1.1 *Se numeşte* ***serie de funcţii*** *de termen general f_n, perechea de şiruri $((f_n),(s_n))$, $n \in \mathbb{N}$. Şirul (s_n) se numeşte şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ şi $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.*

Definiţia 0.1.2 *Se spune că seria de funcţii notată $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ este* ***convergentă (punctual, uniform)*** *dacă şirul sumelor parţiale (s_n) este convergent (punctual, uniform).*

Mulţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ este, prin definiţie, mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(s_n(x))$. Dacă seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ este convergentă, iar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, pentru orice $x \in A_c \subset A$, atunci funcţia $s : A_c \to \mathbb{R}$ se numeşte ***suma seriei*** *şi se scrie $s(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$.*

Definiţia 0.1.3 *Fie $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea A. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ se va numi* ***absolut convergentă*** *dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} |f_n|$ este convergentă punctual.*

Observaţie. La fel ca şi în cazul seriilor numerice, dacă o serie de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă.

Exemplul 1 Fie seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $x \in (0,\infty)$. Să se arate că seria este uniform convergentă pe $(0,\infty)$.

Soluţie. Fie

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{n=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Rezultă $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,\infty)$ deci seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ e convergentă punctual la $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Deoarece $|s_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x+n} \leq \frac{1}{n+1}$ conform criteriului majorării rezultă că s_n e convergentă uniform la f deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ e uniform convergentă.

0.1.2 Criterii de convergenţă uniformă

Teorema 0.1.4 *Fie* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* A. *Atunci* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *este uniform convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *astfel încât*

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A.$$

Teorema 0.1.5 *(Criteriul lui Weierstrass) Fie* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* A. *Dacă există* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale pozitive astfel încât* $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ *e convergentă şi* $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$ *atunci seria de funcţii* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *este absolut şi uniform convergentă.*

Exemplul 2 Arătaţi că seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n^3 + x^2 + 1}$ este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Deoarece $\left| \frac{\cos nx}{n^3+x^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^3+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, iar $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^3+1}$ este o serie numerică convergentă, din criteriul lui Weierstrass rezultă că seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n^3+x^2+1}$ este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Teorema 0.1.6 *(Criteriul lui Dirichlet) Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* A *care are are şirul sumelor parţiale mărginit. Fie* $(g_n)_{n\geq 0}$ *un şir de funcţii definit pe* A *cu proprietăţile:*

- $g_n \to_u 0$ *pentru* $n \to \infty$;
- *şirul numeric* $(g_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător* $\forall x \in A$.

Atunci $\sum\limits_{n\geq 0} f_n g_n$ *este uniform convergentă pe* A.

Teorema 0.1.7 *(Criteriul lui Abel) Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* A *care este uniform convergentă. Fie* $(g_n)_{n\geq 0}$ *un şir de funcţii definit pe* A *cu proprietăţile:*

- $(g_n)_{n\geq 0}$ *este uniform mărginit;*
- *şirul numeric* $(g_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton* $\forall x \in A$.

Atunci $\sum\limits_{n\geq 0} f_n g_n$ *este uniform convergentă pe* A.

Teorema 0.1.8 *(Criteriul lui Leibniz) Fie* $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n f_n$ *o serie de funcţii definite pe mulţimea* A *care are proprietăţile:*

- $f_n \to_u 0$ *pentru* $n \to \infty$;
- *şirul numeric* $(f_n(x))_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător* $\forall x \in A$.

Atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n f_n$ *este uniform convergentă pe* A.

0.1.3 Transmiterea unor proprietăţi prin convergenţa uniformă

Prin analogie cu rezultatele corespunzătoare pentru şirurile de funcţii, se pot discuta continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea sumelor seriilor uniform convergente.

Teorema 0.1.9 *(Continuitate) Dacă seria de funcţii* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, *cu* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este uniform convergentă pe* A *către o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *atunci* f *este de asemenea continuă pe* A.

Teorema 0.1.10 *(Derivabilitate) Fie seria* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$
cu proprietăţile:

i) $f_n \in C^1[a,b]$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *este punctual convergentă pe* $[a,b]$ *având suma* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$;
iii) $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ *este uniform convergentă pe* $[a,b]$ *având suma* $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Atunci funcţia $s \in C^1[a,b]$ *şi* $s' = \sigma$.

Teorema 0.1.11 *(Integrabilitate) Dacă seria de funcţii* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, *cu* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funcţii integrabile este uniform convergentă pe* $[a,b]$ *având suma* s, *atunci suma sa* s *este integrabilă pe* $[a,b]$ *şi avem*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

0.2 Serii de puteri şi serii Taylor

Definiţia 0.2.1 *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, *se numeşte serie de puteri centrată în a; termenii şirului* (c_n) *reprezintă coeficienţii seriei. Mulţimea*

$$\mathrm{C} = \{x \in \mathbb{R} | \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \ \ \text{este convergentă}\}$$

se numeşte mulţime de convergenţă a seriei.

Definiţia 0.2.2 *Numărul (din* $\overline{\mathbb{R}}$*) definit prin*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

se numeşte raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$.

Remarcă. Dacă şirul coeficienţilor (c_n) are proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ există atunci raza de convergenţă a seriei se poate calcula cu formula $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Propoziţia 0.2.3 *Raza de convergenţă a seriei de puteri*

$$\sum_{n\le n_0} c_n (x-a)^{\alpha n+\beta}, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \alpha \ge 2, \beta = \overline{0, \alpha-1}$$

este acel element $R \in [0,\infty]$ *care verifică relaţia*

$$R^\alpha = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

în ipoteza în care limitele de mai sus există.

Remarcă Coefcientul de rang n al unei serii de puteri se poate defini pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, chiar dacă nu toţi coefcienţii seriei apar în mod explicit. De exemplu, coefcientul de rang n al seriei $\sum\limits_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!}$ este $c_n = \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$. Pentru seria $\sum\limits_{n\ge 1} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n}$, $c_0 = -1$ (c_0 este coeficientul termenului liber fără x obţinut considerând $n = 1$), $c_1 = \frac{1}{2}, ..., c_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$. Pentru seria

$$\sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

suntem tentaţi să considerăm $c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}$ ceea ce este fals, pentru că $c_0 = 0 \ne 1$, $c_1 = 1 \ne \frac{-1}{3!}$ (c_1 se obţine considerând $n = 0$.)