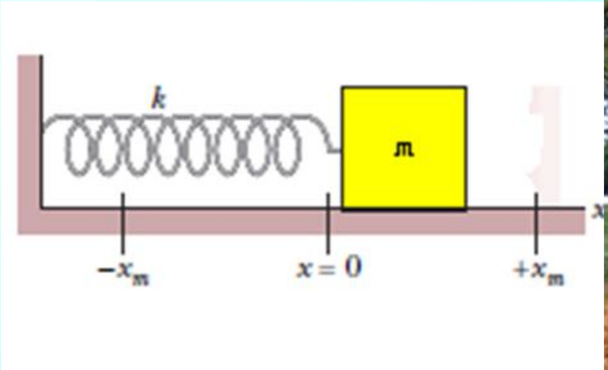
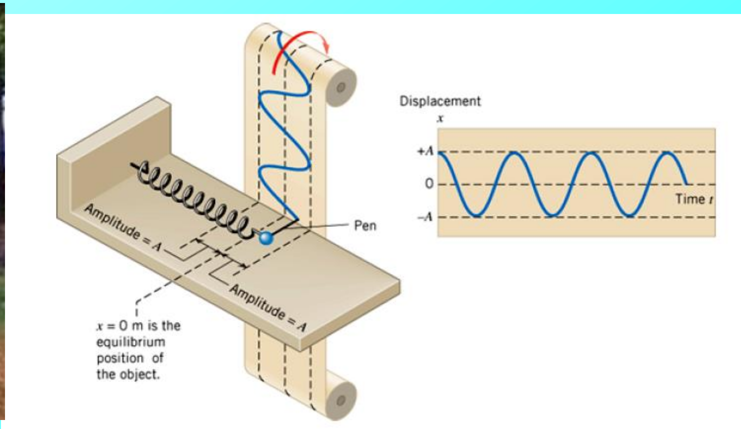
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif Delia





Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 7

2024-2025

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

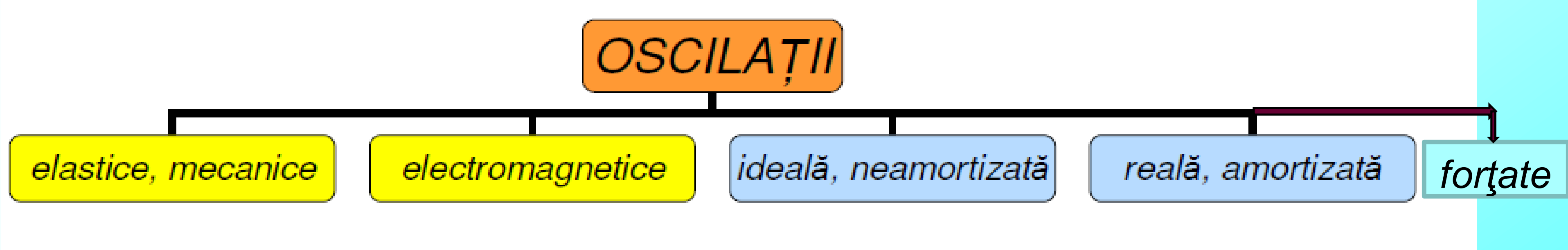
3.5. Analogie între oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa.

3.7. Consideraţii energetice

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale



Oscilaţia ideală – energia totală se conservă

Oscilaţia amortizată – energia totală se consumă în timp

Oscilaţia forţată – se furnizează energie din afara sistemului, pentru compensarea pierderilor

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Elongaţia mişcării (m)

Faza oscilaţiei (rad)

$$y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Amplitudinea mişcării (m)

Pulsaţia proprie a oscilatorului

Faza iniţială a mişcării (rad)

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată (reală)

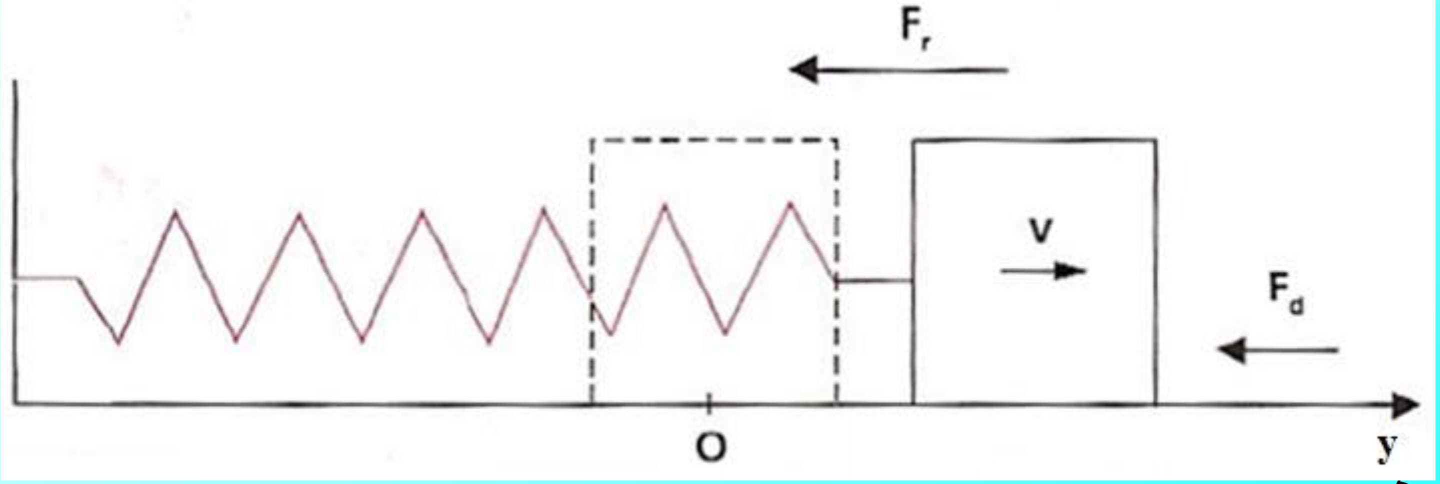
- Oscilator mecanic: resort elastic (k) şi un PM de masă m
- Datorită frecărilor, amplitudinea scade în timp. $A \Rightarrow 0$

➢ Forţa disipativă F_d este opusă vitezei şi proporţională cu ea:

$$F_d = -\rho\, v$$

ρ este coeficientul de rezistenta mecanica

$$[\rho]_{SI} = 1\frac{kg}{s}$$



3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Legea a II-a a dinamicii: $ma = -ky - \rho v$

Notăm : $2\beta = \frac{\rho}{m}$ Coeficientul de amortizare $[\beta]_{SI} = s^{-1}$

Ecuaţia diferenţială a mişcării: $\frac{d^2 y}{dt_2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Căutăm soluţii de forma: $y(t) = e^{rt}$

Ec. caracteristică a ecuaţiei diferenţiale: $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$

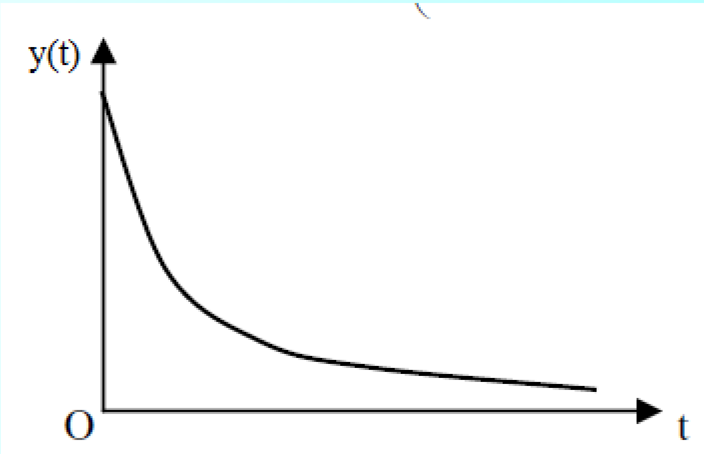
Soluţiile ecuaţiei caracteristice: $r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Cazuri particulare



a) **Dacă** $\boldsymbol{\beta > \omega_0} \Rightarrow \beta^2 - \omega_0^2 > \mathbf{0}$

(forţa de frecare este mare) $\exists\ r_1$ şi $r_2 \Rightarrow$

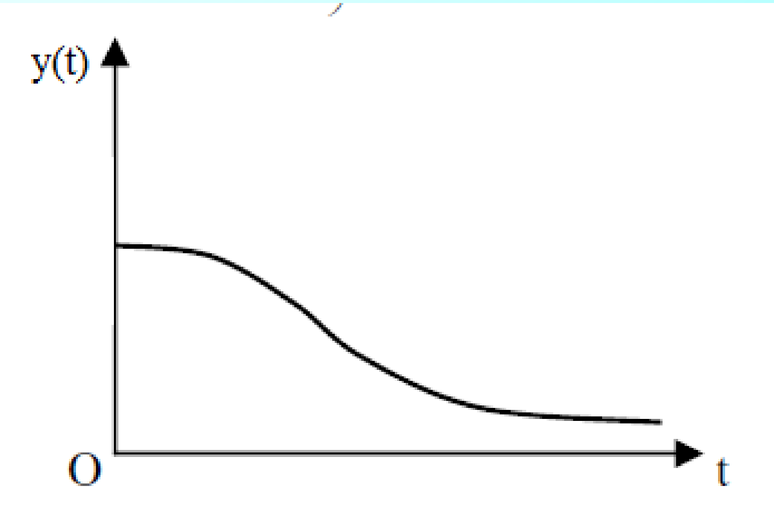
Elongaţia mişcării amortizate:

C_1, C_2 – constante de integrare

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t}$$

- Mişcarea este neperiodică, iar elongaţia tinde la zero, când timpul tinde la infinit, fără ca punctul material să oscileze.

3. Oscilaţii mecanice



3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

<u>Cazuri particulare</u>

b) Dacă $\boldsymbol{\beta = \omega_0}$ $\quad \Rightarrow \quad r = -\beta$

Elongaţia mişcării amortizate:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

C_1, C_2 – constante de integrare

- Mişcarea este neperiodică, numită şi *mişcare aperiodică critică*.
- Elongaţia, având un singur maxim, tinde asimptotic la zero, dar fără ca punctul material să efectueze oscilaţii elastice.

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Cazuri particulare

c) Dacă $\boldsymbol{\beta < \omega_0}$ (forţele de amortizare sunt slabe)

Notăm: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ pseudo-*pulsaţia oscilatorului amortizat*

⇒ ec. caracteristică are soluţii complexe: $r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$

Ec. elongaţiei oscilatorului amortizat:

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t}$$

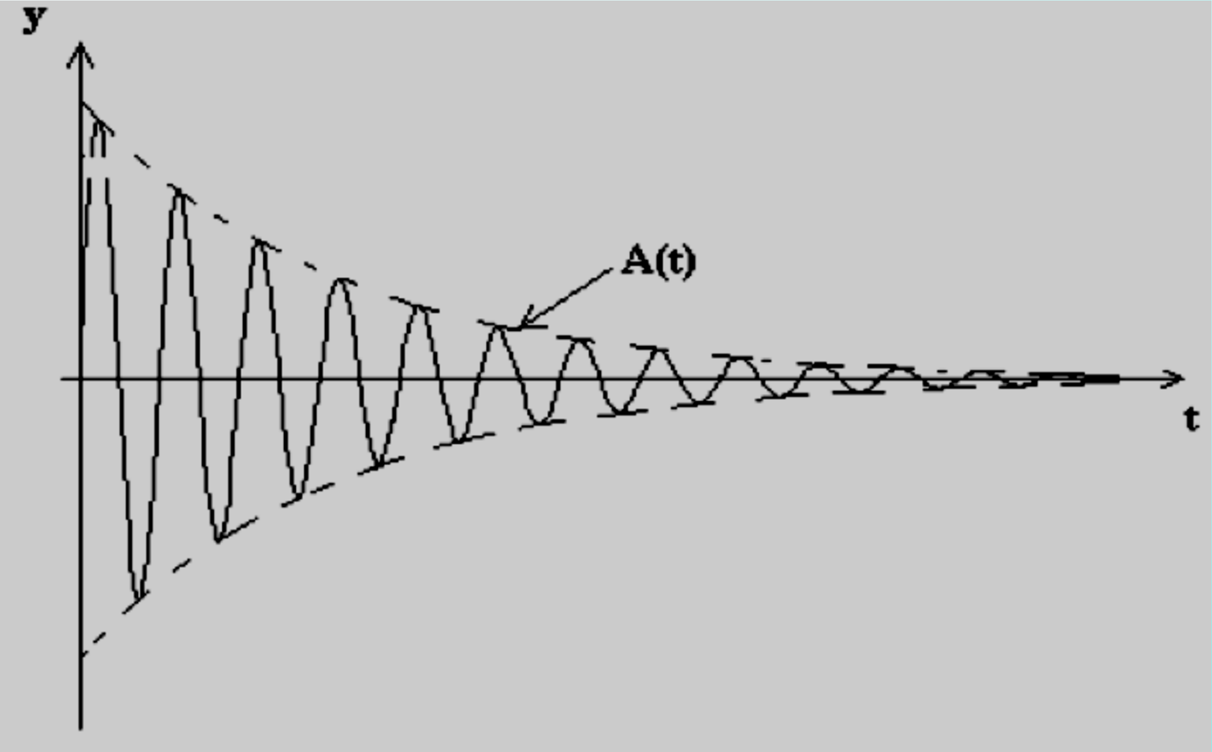
Formulele Euler: $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\ sin\varphi$

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

<u>Cazuri particulare: </u> **c) Dacă $\beta < \omega_0$**

Elongaţia oscilatorului armonic amortizat: $y(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$



Elongaţia şi amplitudinea oscilatorului armonic amortizat în funcţie de timp.

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Cazuri particulare **c) Dacă $\beta < \omega_0$**

Descreşterea amplitudinii mişcării oscilatorii amortizate este caracterizată de mărimea numită ***decrement logaritmic***.

- Decrementul logaritmic este egal cu logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive:

$$\Delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

3. Oscilaţii mecanice

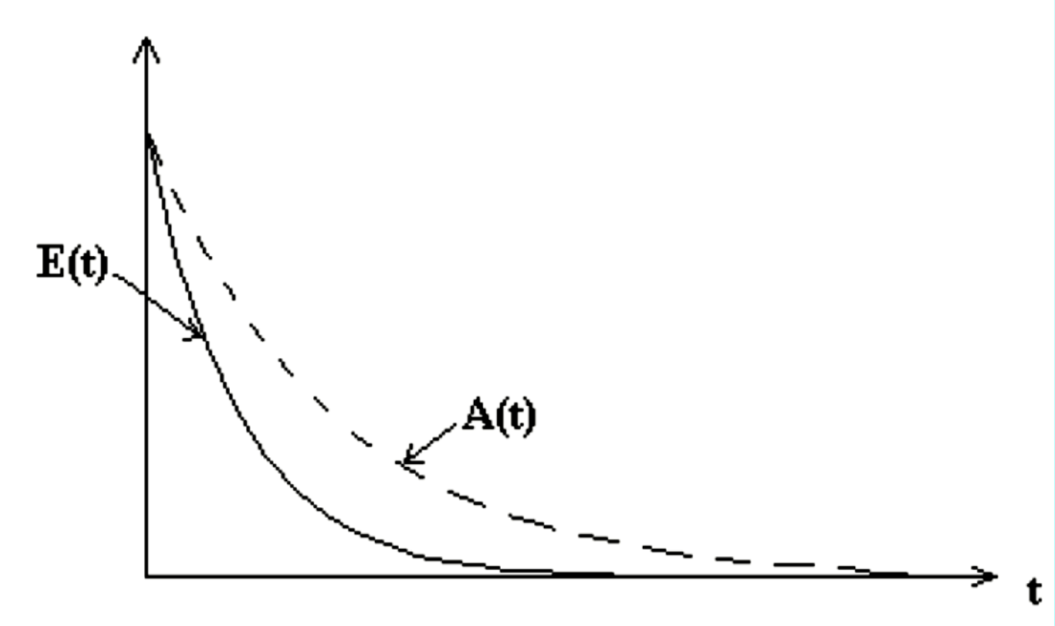
3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Viteza oscilatorului armonic amortizat:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -A_0\beta e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi) + A_0\omega e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Energia totală a oscilatorului armonic amortizat:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t}$$



3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

- Timpul caracteristic pentru scăderea energiei mecanice a oscilatorului amortizat se numeşte *timp de relaxare*, notat τ

- Timpul de relaxare τ este intervalul de timp după care energia mecanică scade de e = 2.718 ori (*ln e = 1*):

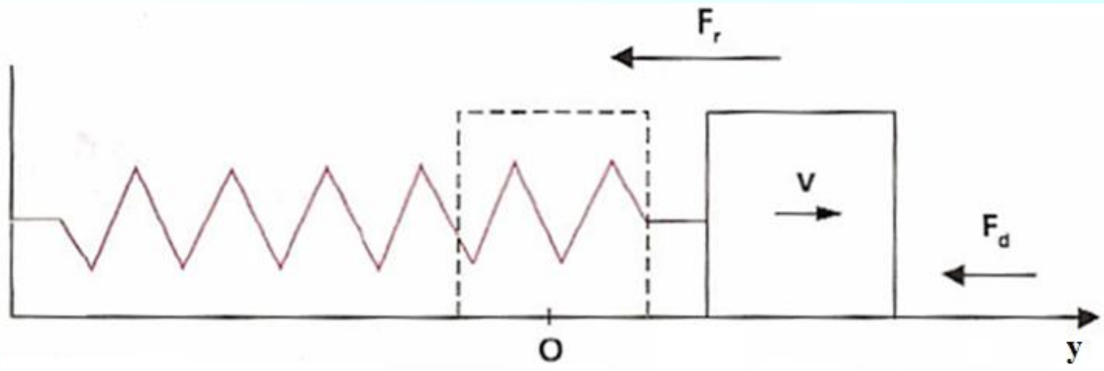
$$\frac{E(t)}{E(t+\tau)} = 2.718 = e \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{\rho}$$

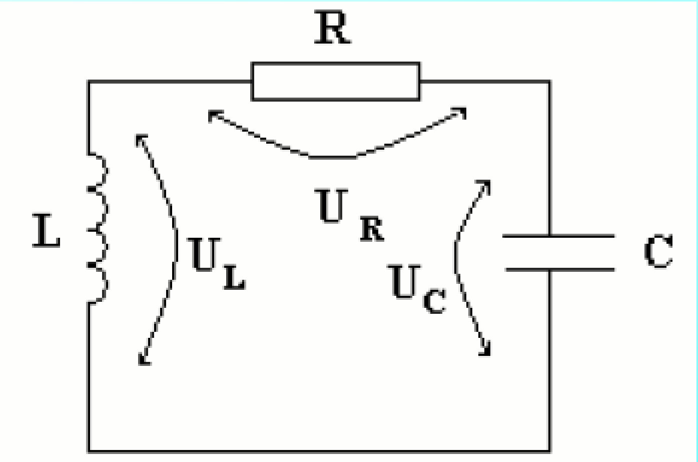
- Perioada oscilaţiilor amortizate:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} > T_0$$

3. Oscilaţii mecanice

3.5. Analogie între oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice





Ambele sisteme suferă oscilaţii amortizate

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\rho\frac{dy}{dt}+ky=0$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

$$y(t)=A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$i(t)=A_0\, e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.5. Analogie între oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice

Oscilații electromagnetice		Oscilații elastice	
Mărimea electrică	*Simbol*	*Mărimea mecanică*	*Simbol*
Intensitatea istantanee a curentului electric	$i\,(t)$	Elongația mișcării oscilatorii armonice	$y(t)$
Inductanța bobinei	L	Masa oscilatorului elastic	m
Rezistența electrică	R	Rezistența mecanică	ρ
Inversul capacității electrice	$\frac{1}{C}$	Constanta elestică	k
Coeficientul de amortizare	$\frac{R}{L} = 2\beta$	Coeficientul de amortizare	$\frac{\rho}{m} = 2\beta$
Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{\rho}\sqrt{mk}$

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Pentru a compensa pierderile de energie datorate forţelor disipative, asupra oscilatorului trebuie acţionat cu o forţă perturbatoare exterioară.



- Dacă forţa perturbatoare exterioară este continuă, oscilaţiile se numesc *oscilaţii întreţinute*, de exemplu oscilaţiile unui ceas.

- Dacă forţa perturbatoare exterioară este periodică, oscilatorul va executa un nou tip de oscilaţii numite *oscilaţii forţate*, de exemplu legănarea într-un balansoar, sau vibraţiile geamurilor de la ferestre când pe stradă trec utilaje foarte grele.

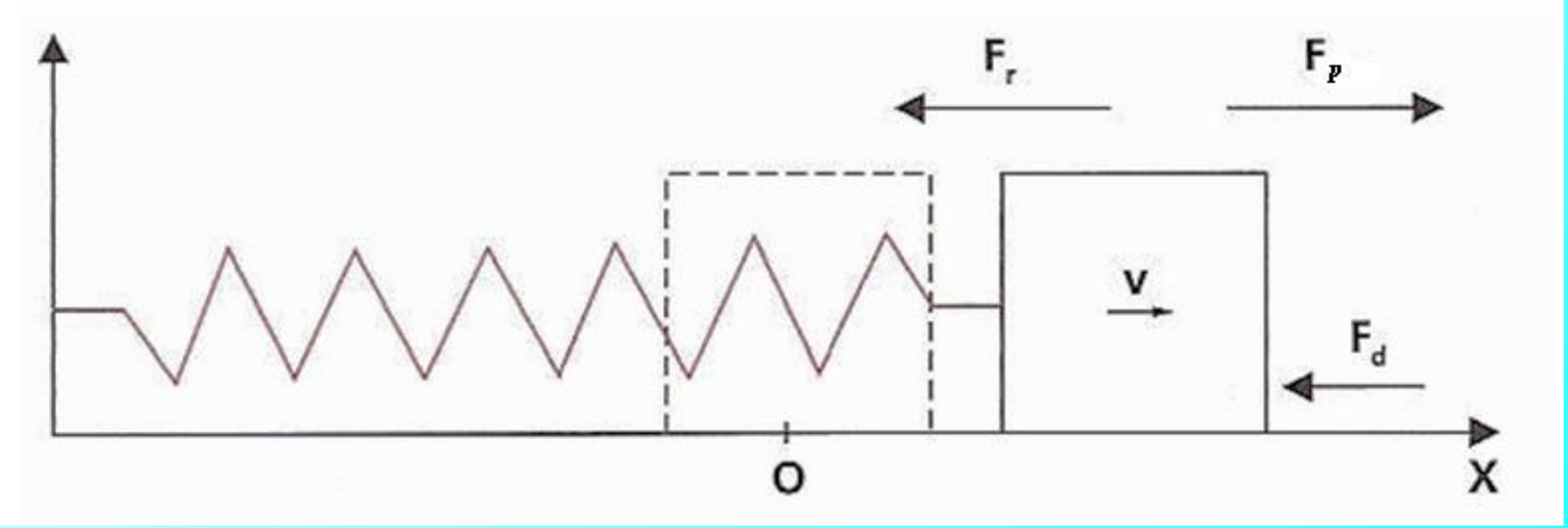
3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Se aplica forţe exterioare de forțare (perturbatoare) ⇒ oscilații “forțate”

- <u>Oscilator mecanic</u> (resort + PM) care oscilează forţat sub acţiunea unei forţe exterioare perturbatoare de tip armonic:

$$F_p = F_0 \sin\left(\omega_p t\right)$$



3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Ecuaţia de mişcare oscilatorie forţată: $m\,a = -k\,y - \rho\,v + F_0 \sin\left(\omega_p t\right)$

Ecuaţia de mişcare este o ec. diferenţială neomogenă de ordinul II:

$$\ddot{y} + 2\beta\,\dot{y} + +\omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin\omega_p t$$

Experienţa arată că o mişcare periodică întreţinută prezintă un *regim tranzitoriu*, după trecerea căruia se instalează *regimul permanent*. Regimul tranzitoriu este de scurtă durată, iar regimul permanent se manifestă prin oscilaţii întreţinute.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Soluţia: $y(t) = y_o(t) + y_p(t)$

$y_o(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$ ⇒ regim tranzitoriu (sol. omogenă)

$y_p(t) = A_p \sin(\omega_p t - \varphi)$ ⇒ regim permanent (sol. neomogenă)

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Amplitudinea şi faza iniţială oscilaţiilor întreţinute:

$$A_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\beta\omega_p)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega_p}{(\omega_0^2 - \omega_p^2)}$$

- Amplitudinea regimului permanent:
  - nu depinde de timp;
  - depinde de pulsaţia forţei care o întreţine.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

Rezonanţa este fenomenul fizic de apariţie a maximului amplitudinii oscilaţiei întreţinute.

- Condiţia de maxim a unei funcţii: *anularea derivatei de ordinul 1*.

$$\frac{dA_p}{d\omega_p} = 0$$

$$A_{p,rez} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

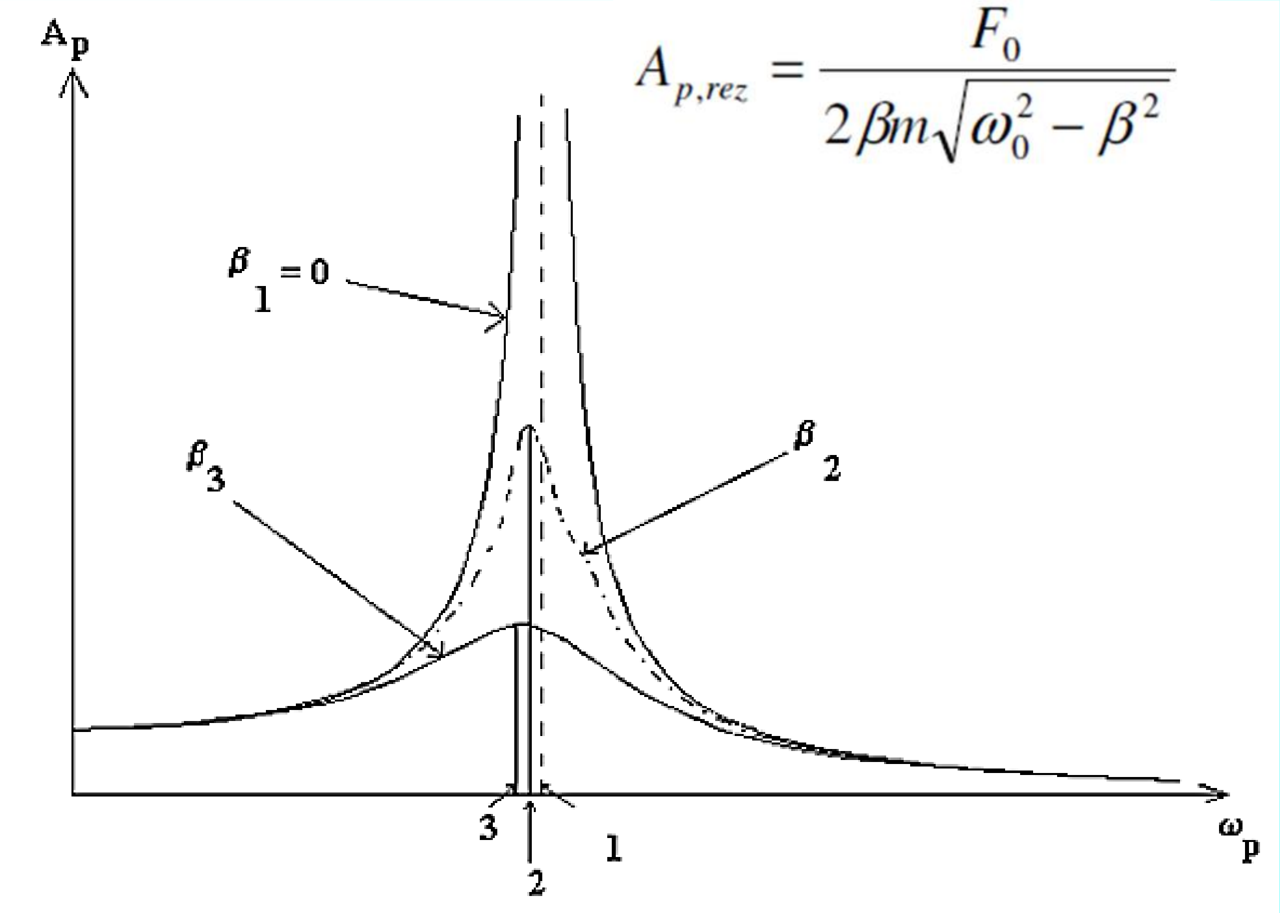
Amplitudinea de rezonanţă

Notăm: $\omega_p = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$ pulsaţia de rezonanţă

http://www.scientia.ro/stiinta-la-minut/56-fizica-distractiva/808-poate-vocea-umana-sa-sparga-un-pahar.html

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa



1. $\beta_1 = 0$

2. $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2}$

3. $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_3^2}$

$\beta_3 > \beta_2$

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

In anul 1985, clădirile de înalţime medie s-au prăbuşit in Mexico City, în urma unui cutremur cu epicentrul la 350 km în largul coastei mexicane.
Clădirile înalte şi cele mici au rămas intacte. Înălțimea clădirii este o măsură a frecvenței de rezonanță a unei clădiri.

In general, clădirile din zonele seismice sunt construite, astfel încât să nu se producă fenomenul de rezonanța. Atunci cand se contruieste o cladire se tine cont de frecvența produsa de undele seismice.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

Din cauza vibrațiilor s-a produs fenomenul de rezonanță, care a distrus podul Tacoma Narrows din statul Washington,în 1940. Vântul nu a fost deosebit de puternic, dar vibraţiile generate de el podului au avut frecvența egală cu cea a podului.

3. Oscilaţii mecanice

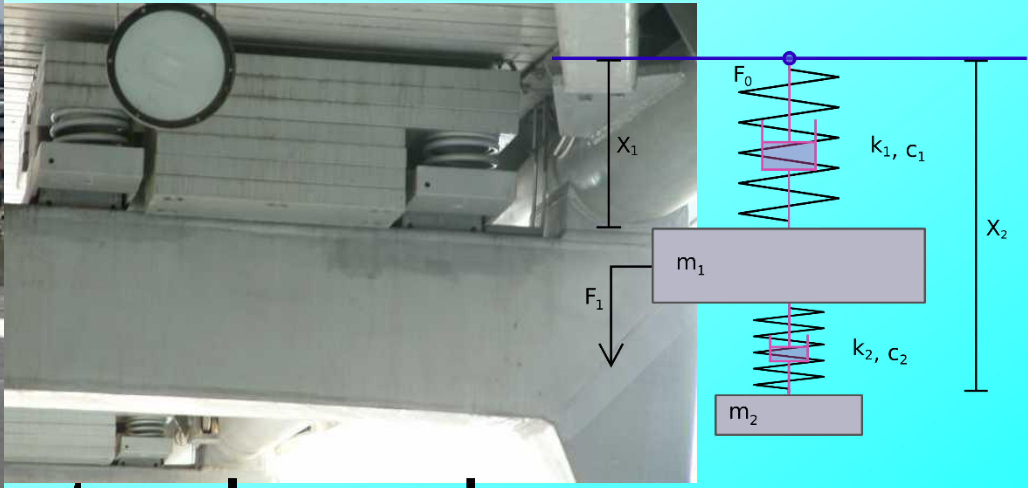
3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

In 1831 podul Broughton s-a prăbușit, din cauza marșului soldaților. Frecvenţa proprie de oscilație a podului a coincis cu frecvenţa imprimată de paşii cadențați, astfel s-a produs fenomenul de rezonanţă. Amplitudinea devine maximă, iar transferul de energie care se produce este maxim.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

Millenium Bridge din Londra a fost dat in folosinţă in 2000. Podul din oţel destinat exclusiv circulaţiei pietonilor a avut o problema, atunci când era traversat de prea multă lume se misca destul de tare. Podul Mileniului a fost redeschis în februarie 2002, după ce proiectanţii au adaugat dispozitive de atenuare a vibraţiilor.

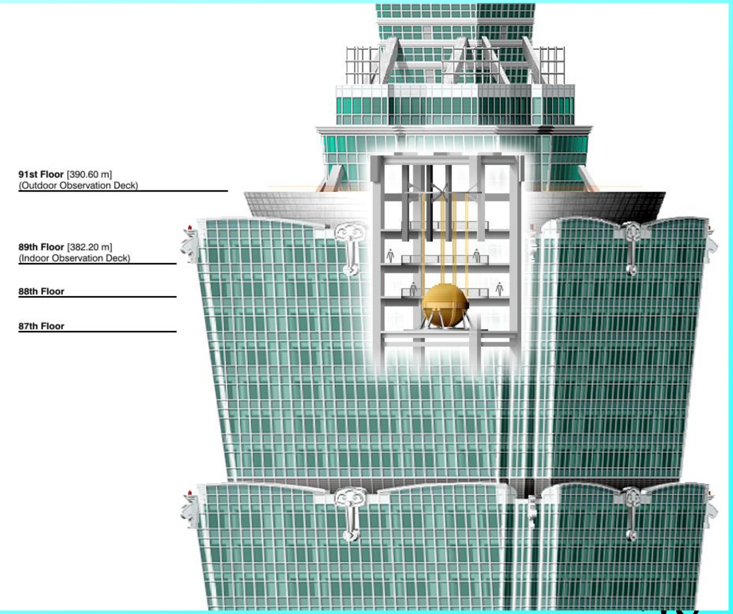


tuned mass damper

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

In construirea unor structuri: poduri, turnuri și clădiri, ca o contramăsură, amortizoare pot fi amplasate ca să absoarbă frecvențele rezonante și astfel să disipeze energia acumulată. Taipei 101, un zgârie-nori de 509 metri se bazează pe un pendul de 660 de tone ca să amortizeze rezonanța.



3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

a) Puterea instantanee absorbită de sistemul oscilant întreţinut:

$$P_{abs}(t) = \frac{dL_{abs}}{dt} = F_p \frac{dy_p}{dt} = F_0 \omega_p A_p \sin \omega_p t \cdot \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

b) Puterea medie absorbită în decursul unei perioade:

$$\langle P_{abs} \rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P_{abs}(t) dt = \beta \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2 \omega_p^2}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

c) Puterea instantanee disipată sub formă de căldură de către forţa de frecare:

$$P_{dis}(t) = \frac{dL_{dis}}{dt} = -F_r \frac{dy_p}{dt} = 2m\beta\left(\frac{dy_p}{dt}\right)^2$$

d) Puterea medie disipată sub formă de căldură într-o perioada:

$$\langle P_d(t)\rangle = \overline{P_d} = 2\beta m A_p^2 \omega_p^2 \frac{1}{T_p}\int_o^{T_p} \cos^2(\omega_p t - \varphi)dt = \beta m A_p^2 \omega_p^2$$

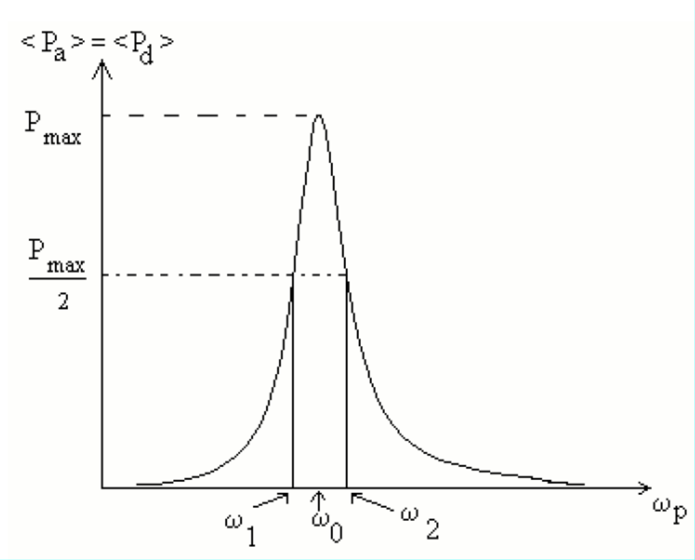
3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

e) Puterea maximă

Pentru $\omega_p = \omega_0$ puterea medie absorbita este egala cu puterea medie disipata si egale cu *puterea maxima* atinsa:

$$P_{max} = \frac{F_0^2}{4\beta m}$$



3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

e) Puterea efectivă

$$P_{ef} = \frac{P_{max}}{2} = \frac{F_0^2}{8\beta m}$$

$$\Delta\omega_{rex} = 2\beta = \frac{1}{\tau}$$

f) Energia medie

$$\langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{m}{2}\langle v^2 \rangle + \frac{k}{2}\langle x^2 \rangle = \frac{m}{4}\left(\omega_0^2 + \omega_p^2\right) A_p^2$$

g) Factorul de calitate

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{rez}} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Cunoască diferenţele dintre oscilaţiile ideale, amortizate şi forţate;
- Determine ecuaţia mişcării oscilatorului amortizat;
- Determine amplitudinea şi faza iniţială în cazul oscilatorului amortizat.
- Definească energia totală a oscilatorului armonic amortizat.
- Definească decrementul logaritmic.
- Definească timpul de relaxare.
- Cunoască analogia dintre oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice.
- Determine amplitudinea şi faza iniţială în cazul oscilaţiilor forţate.
- Definească fenomenul de rezonanţă.
- Cunoască consideraţiile energetice ale oscilaţiilor forţate.

BIBLIOGRAFIE

➢**Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;

➢**Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;

➢**Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;

➢**Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;

➢**Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.

➢**Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.

➢**Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008

➢**PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.

➢**Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012