Analiză Matematică - SETUL 5
Spaţii metrice

1. Fie X o mulţime nevidă. Arătaţi că funcţia

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x = y \\ 1, & \text{dacă} \quad x \neq y \end{cases}$$

este o metrică pe X.

2. Fie $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}$ şi funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |\sin(x-y)|$. Să se arate că d este o metrică pe X şi să se calculeze $d(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$.

3. Arătaţi că dacă $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este o metrică pe X, atunci funcţia $\rho : X \times X \to [0,\infty)$, definită prin

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + kd(x,y)}, \quad k \in [0,\infty)$$

este de asemenea o metrică pe X.

4. Fie $d_i : C_{[a,b]} \times C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$, $(i = 1,2)$ definite prin:

$$d_1(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|, \quad d_2(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Să se arate că d_1 şi d_2 sunt metrici $C_{[a,b]}$, (unde prin $C_{[a,b]}$ am notat mulţimea funcţiilor continue definite pe $[a,b]$).

5. Să se arate că funcţia $d : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, definită prin

$$d(x,y) = \left| ln \left| \frac{x}{y} \right| \right| + |\mathrm{sgn}(x) - \mathrm{sgn}(y)|$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^*$, unde

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$