Curs Nr. 2

Serii numerice

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Serii numerice

1. Serii convergente. Serii divergente. Serii absolut convergente. Condiţii de convergenţă.

Noţiunea de sumă finită (a unui număr finit de termeni) poate fi extinsă prin atribuirea sumei oricărui şir infinit de termeni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a unui număr unic folosind noţiunea de sumă a unei serii convergente. În realitate nu se pune problema calculului sumei unui număr infinit de termeni, ci de atribuirea a acestei sume unui număr bine determinat.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale căruia i se asociază şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ având termenul general

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

numit **şirul sumelor parţiale asociat şirului** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 2.1. Perechea de şiruri $(a_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, în care $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este definit de egalitatea (1), se numeşte **serie de termen general** a_n.

Seria se va nota prin unul din simbolurile: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\quad a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, etc.

Definiţia 2.2. Se spune că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă, dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, iar limita sa, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ se numeşte sumă a seriei şi se scrie $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă, dacă şirul sumelor parţiale este divergent sau nu are limită.

Dacă şirul sumelor parţiale nu are nici limită finită nici infinită, atunci seria se numeşte **oscilantă**. O serie oscilantă este divergentă.

Exemplul 1. Studiaţi cu ajutorul definiţiei natura seriei $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)}$.

Soluţie. Se observă că termenul general al seriei poate fi scris astfel:

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)} = \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)} \cdot \frac{n-2}{n-2} = \frac{2^{n-1}(n-2)}{n!} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2^n}{n!}.$$

Astfel, şirul sumelor parţiale devine

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{2^k}{k!} = 2 - \frac{2^n}{n!}.$$

Rezultă prin trecere la limită

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2,$$

deci seria $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)}$ este convergentă şi are suma 2.

Exemplul 2. Se consideră seria geometrică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, cu a şi $q \in \mathbb{R}$. În funcţie de parametrul q să se studieze convergenţa acestei serii.

Soluţie. Se observă că termenii acestei serii sunt în progresie geometrică, de unde şi numele de serie geometrică. Deoarece $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$, $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n$, rezultă egalitatea, $S_n - qS_n = a - aq^n$, de unde $S_n = \dfrac{a\,(1-q^n)}{1-q}$. Se observă că limita şirului (S_n) depinde de numărul real q.

a) Pentru $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, $S = \dfrac{a}{1-q}$.

b) Pentru $|q| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, seria este divergentă.

c) Pentru $q = 1$, avem $S_n = a + a + a + ... + a = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, după cum $a > 0$, sau $a < 0$.

d) Pentru $q = -1$, rezultă $S_n = a - a + a - a + ... + (-1)^{n-1} a$ şi astfel $S_{2m} = 0, S_{2m+1} = a$, ceea ce înseamnă că şirul sumelor parţiale nu are limită, deci seria este divergentă. Prin urmare, seria geometrică este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi are suma $S = \dfrac{a}{1-q}$ şi divergentă dacă $|q| \geq 1$.

Prin urmare am obţinut următorul rezultat

Seria geometrică este

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{este convergentă pentru } |q| < 1 \\ \text{este divergentă pentru } |q| \geq 1 \end{cases}}$$

Proprietăţile generale al seriilor

În cursul anterior, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui şir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergenţa unei serii este definită prin intermediul şirului sumelor parţiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură” înţelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeaşi natură” înţelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Teorema 2.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este $+\infty$ sau $-\infty$, aceasta nu se modifică.

- Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor) Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeaşi după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu anumite precauţii (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă şi pentru serii.

Teorema 2.4. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială şi aceeaşi sumă.

Proprietăţi generale ale seriilor convergente

- Asociativitate

  S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuşi, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu ajutorul parantezelor se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.

Teorema 2.5 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.

Condiţii necesare de convergenţă

Teorema 2.6.

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstraţie. Presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. Conform definiţiei unei serii convergente rezultă că şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{R}$. Atunci $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$, deci $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$.

Consecinţă. (criteriu de divergenţă) Dacă termenul general al unei serii **nu** converge la zero atunci seria e divergentă.

Teorema 2.7. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Atunci şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit.

Demonstraţie. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie convergentă şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar cum orice şir convergent este mărginit, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Reciproc, dacă şirul sumelor parţiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Consecinţă. (criteriu de divergenţă) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie dată şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exemplul 3. (Seria armonică)

Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (numită seria armonică) este divergentă.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este convergentă. Din definiţie rezultă că şirul sumelor parţiale $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ este convergent, deci $\exists S \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Rezultă, de asemenea, că $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, deci $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$.

Pe de altă parte, avem

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Am obţinut o contradiţie, deci presupunerea făcută este falsă şi prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Criteriul care urmează stabileşte **o condiţie necesară şi suficientă** de convergenţă a seriilor numerice.

Teorema 2.8 (Criteriul general al lui Cauchy). Pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă, este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_0, \ \forall\, p \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Presupunem că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, deci şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent, deci fundamental. Această afirmaţie este echivalentă cu faptul că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ să avem $|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$.

Exemplul 4. Studiaţi cu ajutorul criteriului general de convergenţă al lui Cauchy natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Soluţie. Şirul sumelor parţiale este

$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$

Rezultă inegalitatea $|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$, care demonstrează că şirul sumelor parţiale (S_n) nu este fundamental, deci divergent, aşa că seria este divergentă.

Teorema 2.9. (Criteriul lui Dirichlet).

Dacă $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale monoton descrescător şi convergent la zero, iar $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ este o serie de numere reale având şirul sumelor parţiale (s_n) mărginit, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Şirul (S_n) fiind mărginit, rezultă că există $M > 0$ astfel ca $|S_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Potrivit criteriului lui Cauchy, este uşor de observat că

$\forall\ n, p \in \mathbb{N}$ avem $|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + ... + \alpha_{n+p}u_{n+p}| =$

$|\alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \alpha_{n+2}(S_{n+2} - S_{n+1}) + ... + \alpha_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1})| =$

$|-\alpha_{n+1}S_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) S_{n+1} + ... + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) S_{n+p-1} + \alpha_{n+p}S_{n+p}| \leq$

$\alpha_{n+1}|S_n| + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})|S_{n+1}| + ... + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})|S_{n+p-1}| + \alpha_{n+p}|S_{n+p}| \leq$

$M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+2} - \alpha_{n+3} + ... + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) \leq 2M\alpha_{n+1}.$

Prin ipoteză $\alpha_{n+1} \overset{(\mathbb{R},|\cdot|)}{\to} 0$, ceea ce înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$ pentru orice $n \geq n_0(\varepsilon)$ şi orice $p \in \mathbb{N}$.
Rezultă că putem scrie

$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + ... + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \leq 2M\alpha_{n+1} < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$

deci $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n$ satisface criteriul lui Cauchy, deci este convergentă.

Teorema 2.10. **(Criteriul lui Abel).**

Dacă $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale monoton şi mărginit, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind monoton şi mărginit, el este convergent. Dacă, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, atunci şirul $\beta_n = \alpha_n - \alpha$ are limita zero. Dacă (α_n) este un şir descrescător de numere reale pozitive, atunci (β_n) este un şir de numere pozitive monoton descrescător şi convergent la zero.

Deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, rezultă că şirul sumelor sale parţiale este mărginit. Atunci potrivit criteriului lui Dirichlet, seria
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha)\, u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$, este convergentă, din care rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n - \alpha)\, u_n + \alpha u_n]$ este convergentă.

Definiţia 2.11. Se spune că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă, dacă seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă; dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este semiconvergentă (condiţionat convergentă).

Remarcă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca în general nu este valabilă.

Definicţia 2.12. O serie de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **alternantă,** dacă şi numai dacă produsul oricăror doi termeni consecutivi este negativ: $a_n a_{n+1} < 0, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.13 **(Criteriul lui Leibniz).**

Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător şi convergent la 0, atunci

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

Deoarece $S_{2k}=1$, $S_{2k+1}=0$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă.

Exemplul 5. (serie convergentă care nu e absolut convergentă)

Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este semiconvergentă.

Soluţie. Cum şirul $y_n=\frac{1}{n}$ este descrescător cu limita zero, conform criteriului lui Leibniz rezultă că seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este convergentă. De asemenea seria modulului termenului general este $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, (fiind seria armonică), deci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ nu e absolut convergentă. Rezultă că această serie este semiconvergentă.

Operaţii cu serii convergente

Întrucât, aşa cum s-a menţionat anterior, convergenţa unei serii se defineşte prin intermediul convergenţei şirului sumelor sale parţiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă şi produs cu o constantă.

Teorema 2.14 Fie $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}y_n$ două serii convergente de numere reale astfel ca $\sum_{n=0}^{\infty}x_n=A$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}y_n=B$. Atunci seria sumă $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)$ şi seria produs cu o constantă $\sum_{n=0}^{\infty}c\cdot x_n$, $c\in\mathbb{R}$ sunt convergente. În plus, au loc relaţiile

- $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$

- $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot x_n = c \sum_{n=0}^{\infty} x_n = c \cdot A.$

Demonstraţia este imediată, utilizând proprietăţile operaţiilor cu şiruri convergente.

Produsul după Cauchy a două serii

Definiţia 2.15 Fie seriile cu termeni oarecare $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Vom numi **seria produs după Cauchy** a celor două serii seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ definită prin

$$z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + ... + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k},$$

pentru care z_n, termenul de ordin n, conţine suma tuturor produselor de forma $x_k y_l$ în care suma indicilor celor doi factori x_k şi y_l este n.

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ conţine într-adevăr toate produsele de forma $x_k y_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, câte o singură dată, un astfel de produs fiind un termen al sumei prin care este definit z_{k+l}. şi numai al acesteia.

Totuşi, acest procedeu de sumare nu asigură proprietatea de păstrare a convergenţei a două serii. Mai precis, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ nu este neapărat convergentă. În acest sens, considerăm exemplul seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \text{cu } x_n = y_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Conform criteriului lui Leibniz aceste serii sunt convergente şi, în plus,

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Cum $\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1$, rezultă

$$|z_n| = \left| (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \right| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ este divergentă, deoarece termenul general z_n nu tinde la 0.

Totuşi, convergenţa seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă. În acest sens, are loc teorema lui Mertens.

Teorema 2.16 **(Teorema lui Mertens)**

Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, măcar una dintre ele fiind şi absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

Teorema 2.17 **(Teorema lui Cauchy)**

Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.