Curs Nr. 10

Limita şi continuitatea funcţiilor de mai multe variabile

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Limita funcţiilor de mai multe variabile

Se consideră (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice, funcţia (legea) $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii A $(x_0 \in \mathrm{A}')$. Având în vedere că $x_0 \in \mathrm{A}'$, rezultă că ne putem apropia oricât de mult de punctul x_0, cu puncte $x \neq x_0$ din mulţimea A, deci are sens studiul valorilor funcţiei în orice vecinătate a punctului x_0.

Definiţia 0.1.1 *Se spune că funcţia $f : A \subset X \to Y$ are limită în punctul $x_0 \in A'$, dacă există un element $l \in Y$, astfel încât pentru orice vecinătate U a lui l, există o vecinătate V a lui x_0, astfel ca pentru orice $x \in (V \setminus \{x_0\}) \cap A$ să rezulte că $f(x) \in U$.*

Elementul $l \in Y$ se numeşte limita funcţiei f în punctul de acumulare $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi se notează $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Geometric, definiţia de mai sus este ilustrată în figura 4.1.

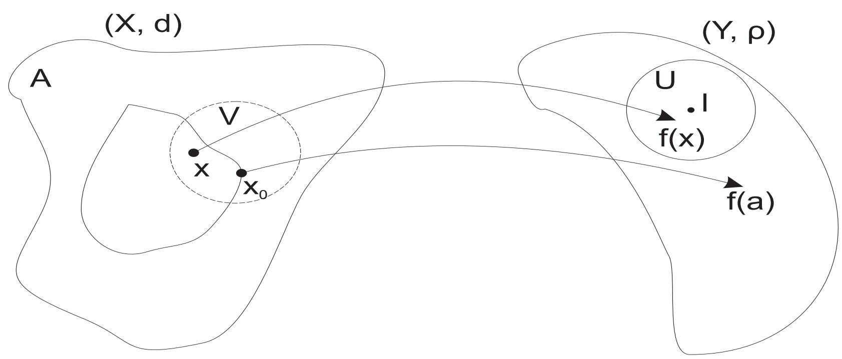

Figura 4.1

Propoziţia 0.1.2 ***(Unicitatea limitei)****. Dacă funcţia $f : A \subset X \to Y$ are limită în punctul $x_0 \in A'$, atunci limita sa este unică.*

Teorema 0.1.3 ***(Caracterizarea limitei punctuale)*** *Fie $(X, d), (Y, \rho)$ spaţii metrice, $A \subset X$, $x_0 \in A'$ şi funcţia $f : A \to Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *(caracterizarea limitei cu vecinătăţi);*

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ *cu* $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \rho(f(x), l) < \varepsilon$ *(caracterizarea limitei în limbajul $\varepsilon - \delta$).*

iii) $\forall x_n \in A \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow{(X,d)} x_0 \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow{(Y,\rho)} l$ *(caracterizarea limitei cu şiruri sau **teorema lui Heine**).*

Fie (X, d), (Y, ρ) spaţii metrice, $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{A}'$ şi $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ cu proprietatea că $x_0 \in \mathrm{B}'$. Mai considerăm funcţia $f_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \subset X \to Y$, în care $f_{\mathrm{B}}(x) = f(x)$, numită **restricţia funcţiei f la mulţimea** B.

Definiţia 0.1.4 *Se spune că funcţia f are limită relativă la mulţimea B în punctul $x_0 \in B'$ dacă restricţia sa f_B are limită în punctul x_0.*

Elementul $l \in Y$, unic determinat, cu proprietatea că el este limită a funcţiei f_{B} în $x_0 \in \mathrm{B}'$, se numeşte **limită relativă** la mulţimea B a funcţiei f în x_0 şi se notează $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{B}}} f(x) = l$.

Limitele relative ale unei funcţii într-un punct se folosesc pentru a arăta că funcţia nu are limită în acel punct. În acest sens se pot face următoarele precizări importante.

Observaţia 0.1.5 *i) Dacă funcţia $f : A \subset X \to Y$, $x_0 \in A'$ şi $B \subset A$, $x_0 \in B'$, are proprietatea că limita relativă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x)$ nu există, atunci f nu are limită în x_0.*

ii) Fie $f : A \subset X \to Y$, $x_0 \in A'$ şi $B \subset A$, $x_0 \in B'$. Dacă există limitele relative,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_1}} f(x) = l_1, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_2}} f(x) = l_2, l_1 \neq l_2,$$

atunci f nu are limită în punctul x_0.

Fie $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{A}'$, $\overline{h} \in \mathbb{R}^p$, $\overline{h} \neq \theta_{\mathbb{R}^p}$ (vectorul nul din $\mathbb{R}^p$) şi considerăm mulţimea

$$\mathrm{A}_{\overline{h}} = \{x = x_0 + th \mid \ t \in \mathbb{R}\} \cap \ \mathrm{A}$$

pentru care mai presupunem că vectorul $x_0 \in \mathrm{A}'_h$.

Definiţia 0.1.6 *Se spune că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, are limită în punctul x_0 după direcţia h, dacă funcţia f are limită relativă la mulţimea A_h în punctul x_0. Aşadar, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A_h}} f(x)$ se numeşte **limita funcţiei f în punctul x_0 după direcţia** h.*

Observaţia 0.1.7 *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, are limită în punctul $x_0 \in A'$, atunci f are limită după orice direcţie în punctul $x_0 \in A_h'$ şi are loc egalitatea*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A_h}} f(x).$$

Reciproca acestei observaţii nu are loc, după cum se observă din următorul exemplu

Exemplul 1. Să se demonstreze că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

are limită în origine după orice direcţie $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dar limita lui f în origine nu există.

Soluţie. Într-adevăr, considerând mulţimea

$$\mathrm{A}_h = \left\{ \overline{x} = \overline{x_0} + t\overline{h} \mid \ t \in \mathbb{R} \right\} \cap D_f = \left\{ (x,y) = t\,(h_1, h_2) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cap D_f,$$

în care D_f este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f, este uşor de constatat că

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathrm{A}_h}} f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 h_1^2 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t h_1^2 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = 0,$$

pentru orice h_1, h_2 cu $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$, ceea ce înseamnă că f are limită în origine după orice direcţie $h \in \mathrm{A}_h$.

Pe de altă parte, dacă considerăm mulţimea arbitrară

$$\mathrm{B} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = mx^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

atunci,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \mathrm{B}}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx^2}} f(x, mx^2) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1 + m^2} \in \mathbb{R},$$

de unde rezultă că că $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ nu există.

Fie $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ baza canonică din spaţiul euclidian p-dimensional $\mathbb{R}^p$ şi $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, cu $x_0 \in \mathrm{A}'$. Dacă $e_i \in \mathcal{B}_c$, atunci notăm

$$\mathrm{A}_{e_i} = \{ x = x_0 + te_i \mid \ t \in \mathbb{R} \} \cap \ \mathrm{A}.$$

Definiţia 0.1.8 *Se numeşte limita parţială a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabila x_i, limita funcţiei f în punctul x_0 după direcţia e_i.*

Observaţia 0.1.9 *Au loc următoarele afirmaţii:*

1) *Dacă $x_0 \in A'_{e_i}$ şi nu există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A_{e_i}}} f(x)$, atunci f nu are limită în x_0.*

2) *Dacă $e_i \neq e_j, x_0 \in A'_{e_i} \cap A'_{e_j}$ şi dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A_{e_i}}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A_{e_j}}} f(x)$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nu există.*

Pentru a defini **limitele iterate ale unei funcţii** $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ într-un punct $x_0 \in \mathrm{A}'$ vom considera mulţimea

$$\mathrm{A}_i = pr_i \mathrm{A} = \{a_i \in \mathbb{R} \,|(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p) \in \mathrm{A}\}, i = \overline{1, p},$$

numită proiecţia de rang i a mulţimii A. Presupunem că $a_i^0 \in \mathrm{A}'_i$, $i = \overline{1, p}$ şi considerăm funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Fie de asemenea $\sigma \in \sigma_n$ o permutare oarecare a mulţimii $\{1, 2, 3, ..., p\}$.

Definiţia 0.1.10 . *Se spune că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, are limite iterate (succesive) în punctul $x_0 \in A'$, dacă există limitele succesive*

$$\lim_{x_{\sigma(p)} \to a^0_{\sigma(p)}} \left(... \lim_{x_{\sigma(1)} \to a^0_{\sigma(1)}} f(x_1, x_2, ..., x_p) ... \right) = l_\sigma$$

Elementul $l_\sigma \in \mathbb{R}$ se numeşte limita iterată a funcţiei f în punctul $x_0 = \left(a^0_1, a^0_2, ..., a^0_p\right)$.

Este evident că funcţia f poate avea cel mult $p!$ limite iterate.

În cazul particular $p = 2$, limitele iterate sunt

$$\lim_{y \to a^0_2} \left(\lim_{x \to a^0_1} f(x, y) \right) = l_{12}$$

şi

$$\lim_{x \to a^0_1} \left(\lim_{y \to a^0_2} f(x, y) \right) = l_{21}.$$

Limitele iterate l_{12} şi l_{21} nu sunt neapărat egale, iar dacă sunt egale **nu** rezultă existenţa limitei funcţiei în ansamblul variabilelor, aşa cum rezultă şi din exemplul următor.

Exemplul 2. Fie $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Să se arate că limitele iterate există şi sunt egale, deşi limita în origine nu există.

Soluţie. Se constată fără dificultate că avem

$$\begin{aligned} l_{12} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0;\\ l_{21} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0, \end{aligned}$$

deci $l_{12}=l_{21}$, însă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

Se poate şi ca una din limitele iterate să existe, cealaltă să nu existe, iar limita în ansamblul variabilelor să existe, aşa cum rezultă din exemplul următor.

Exemplul 3. Să se studieze existenţa limitelor iterate şi limita în origine a funcţiei $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$.

Soluţie. Prin calcul direct se deduce uşor că $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,y\right)\right)=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f\left(x,y\right)\right)$ nu există. Totuşi, fără dificultate, limita funcţiei f în punctul $(0,0)$ este egală cu zero, adică $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Observaţia 0.1.11 . *Dacă există două limite iterate ale funcţiei f în punctul $x_0\in A'$ şi dacă ele sunt diferite, atunci funcţia f nu are limită în punctul x_0.*

Teorema cleştelui

Fie $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ şi $g:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ două funcţii definite pe acelaşi domeniu A şi (a,b) un punct de acumulare pentru A. Dacă

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=0$
- $\exists l\in\mathbb{R}$ astfel încât $|f(x,y)-l|\le g(x,y)$ pe $V_{(a,b)}\cap A$

  atunci $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$.

0.2 Funcţii continue pe spaţii metrice

Fie $(X, d), (Y, \rho)$ spaţii metrice şi funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$, iar $x_0 \in \mathrm{A}$.

Definiţia 2.1. Se spune că funcţia f **este continuă** în punctul x_0, dacă pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$ există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap \mathrm{A}$, $f(x) \in U$.

O exprimare echivalentă a definiţiei continuităţii unei funcţii într-un punct se poate formula şi astfel.

Se spune că funcţia $f : \mathrm{A} \to Y$ este continuă în punctul $x_0 \in \mathrm{A}$, dacă pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$ există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $f(V \cap \mathrm{A}) \subset U$.

Dacă f nu este continuă în punctul $x_0 \in \mathrm{A}$, atunci se spune că funcţia f este discontinuă în punctul x_0, sau că punctul x_0 este punct de discontinuitate al funcţiei f. Intuitiv, definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct este ilustrată în figura 4.2.

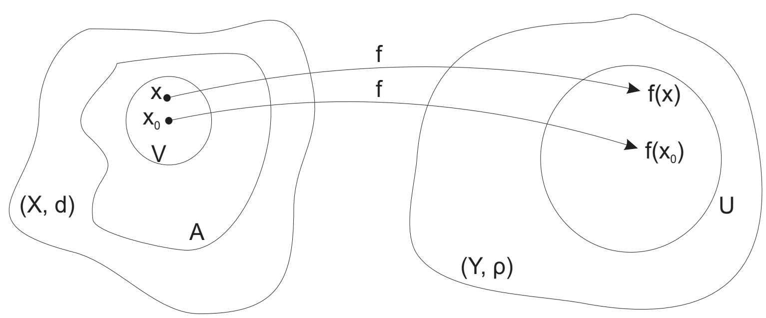

Figura 4.2

Din Def.2.1 a continuităţii unei funcţii într-un punct se observă că noţiunea de continuitate are caracter local. De aceea, în cele ce urmează, vom preciza un prim rezultat.

Propoziţia 2.1. Dacă $x_0 \in \mathrm{A}$ este punct izolat al domeniului de definiţie al funcţiei $f : \mathrm{A} \to Y$ atunci f este continuă în punctul x_0.

Din această propoziţie rezultă că problema continuităţii unei funcţii într-un punct se pune în punctele neizolate ale domeniului de definiţie. Ca şi în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală, are loc următorul rezultat.

Propoziţia 2.2. Fie $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'$ ($x_0 \in \mathrm{A}$ şi în acelaşi timp x_0 este punct de acumulare pentru A). Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observaţia 2.1. Din Prop.2.1 şi Prop.2.2 se deduce că f este continuă într-un punct x_0 dacă şi numai dacă: sau x_0 este unpunct izolat, sau dacă $x_0 \in \quad \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. În cazul $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'$, continuitatea lui f în x_0 se scrie sub forma

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right),$$

ceea ce înseamnă că în cazul continuităţii, operaţia de trecere la limită este permutabilă cu funcţia.

Teorema 2.1 (Caracterizarea continuităţii punctuale). Fie funcţia $f : \mathrm{A} \subset X \to Y$ şi $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este continuă în x_0(definiţia cu vecinătăţi);

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (definiţia cu ajutorul limitei);

3) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in \mathrm{A}$ cu $d(x, x_0) < \delta$, să rezulte $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (definiţia în limbaj $\varepsilon - \delta$);

4) Pentru orice şir $x_n \in \mathrm{A}$, cu $x_n \overset{(X,d)}{\longrightarrow} x_0$, rezultă $f(x_n) \overset{(Y,\rho)}{\longrightarrow} f(x_0)$ (caracterizarea continuităţii cu teorema lui Heine).

Exemplul 2.1. Folosind caracterizarea continuităţii unei funcţii într-un punct în limbaj $\varepsilon - \delta$, demonstraţi că $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2 + 2y\right) = 5$. Este funcţia $f(x, y) = x^2 + 2y$ continuă în $x_0 = (1, 2)$?

Soluţie. Folosind caracterizarea în limbaj "$\varepsilon - \delta$", a limitei (Teor.1.1 **ii)**), trebuie arătat că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\left|x^2 + 2y - 5\right| <$
$< \varepsilon$, de îndată ce $|x - 1| < \delta, |y - 2| < \delta$. Din aceste inegalităţi este uşor de obţinut inegalităţile

$$1 - 2\delta + \delta^2 < x^2 < 1 + 2\delta + \delta^2 \text{ şi } 4 - 2\delta < 2y < 4 + 2\delta,$$

care adunate implică

$$5 - 4\delta + \delta^2 < x^2 + 2y < 5 + 4\delta + \delta^2, \text{ sau } -4\delta + \delta^2 < x^2 + 2y - 5 < 4\delta + \delta^2.$$

Dacă $\left|x^2+2y-5\right| < 5\delta$ $\left(\delta^2 < \delta,\text{ pentru } \delta < 1\right)$, atunci luând $5\delta = \varepsilon$, adică $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$, rezultă $\left|x^2+2y-5\right| < \varepsilon$, adică $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\left(x^2+2y\right) = 5$. Având în vedere că $f(1,2) = 5 = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\left(x^2+2y\right)$, rezultă că f este continuă în $x_0 = (1,2)$.

Anumite proprietăţi ale unei funcţii continue într-un punct pot fi extinse pe o întreagă vecinătate a acelui punct, fapt care ne conduce la studiul continuităţii pe o mulţime. În calcule aproximative este importantă propoziţia următoare.

În vederea caracterizării continuităţii pe o mulţime A $\subset (X,d)$, vom considera doar funcţii $f : X \to Y$ deoarece mulţimea A $\subset X$ poate fi privită ca spaţiu metric (A,d).

Definiţia 2.2. Se spune că funcţia f : A $\subset X \to Y$ este continuă pe mulţimea A, dacă f este continuă în orice punct din A.

Teorema 2.2 (Caracterizarea continuităţii pe o mulţime).

Fie $f : X \to Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este continuă pe mulţimea X;

2) Preimaginea oricărei submulţimi deschise a lui Y este o submulţime deschisă a lui X;

3) Preimaginea oricărei submulţimi închise a lui Y este o submulţime închisă a lui X.

Propoziţia 2.3 (Continuitatea funcţiilor reale de variabilă vectorială). Fie f : A $\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in$ A. Funcţia f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in$ A, cu $|x_i - a_i| < \delta$, pentru orice i, cu $1 \leq i \leq p$, rezultă $|f(x_1, x_2, ..., x_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)| < \varepsilon$.

Această propoziţie se observă că este un caz particular al Teor.2.1, aşa că demonstraţia sa urmează acelaşi procedeu. Un caz particular al Teor.2.1 este şi propoziţia următoare.

Propoziţia 2.4 (Continuitatea funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială). Fie F : A $\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q, F = (f_1, f_2, ..., f_q)$ şi $x_0 \in$ A. Funcţia vectorială F este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in$ A, cu $\|x - x_0\| < \delta$, rezultă că $\|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$.

Din această propoziţie se deduce că o funcţie vectorială $F = (f_1, f_2, ..., f_q)$ de varibilă vectorială $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ este continuă în $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p)$ dacă şi numai dacă componentele sale $f_1, f_2, ..., f_q$ sunt continue în x_0.

0.2.1 Continuitatea parţială

Fie $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathrm{A}$. Considerăm un vector arbitrar $h \in \mathbb{R}^p$, $h \neq \theta_{\mathbb{R}^p}$ şi fie mulţimea vectorilor ce trec prin x_0 având direcţia h, adică

$$\mathrm{A}_h = \{x = x_0 + th \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \mathrm{A}.$$

Cu acestea se poate defini **continuitatea în x_0 după direcţia h**.

Definiţia 2.3. Se spune că f este continuă în $x_0 \in \mathbb{R}^p$ după direcţia $h \in \mathbb{R}^p, h \neq \theta_{\mathbb{R}^p}$, dacă restricţia lui f la mulţimea A_h este continuă în x_0.

Observaţia 2.3. Din Def.1.3 a limitei după direcţie şi din Teor.2.1 rezultă că funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'_h$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{A}_h}} f(x) = f(x_0)$.

În cele ce urmează vom considera ca direcţie h, direcţiile versorilor din baza canonică $\mathcal{B}_c$ din $\mathbb{R}^p$, adică $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ şi vom defini **continuitatea parţială a lui f în punctul x_0**.

Definiţia 2.4. Se spune că funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă parţial în raport cu variabila x_i $(1 \leq i \leq p)$ în punctul $x_0 \in \mathrm{A}$ dacă f este continuă în x_0 după direcţia versorului $\overline{e_i} \in \mathcal{B}_c$.

Ca şi în cazul continuităţii după direcţie şi în cazul continuităţii parţiale se poate preciza următoarea remarcă.

Observaţia 2.4. Fie $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in \mathrm{A} \cap \mathrm{A}'_{e_i}$, cu $1 \leq i \leq p$. Funcţia f este continuă parţial în x_0 în raport cu variabila x_i dacă şi numai dacă

$$\lim_{x_i \to a_i} f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) = f(a_1, ..., a_i, ..., a_p) = f(x_0).$$

Cu privire la continuitatea lui f într-un punct x_0 şi continuitatea sa parţială în acel punct are loc următoarea aserţiune.

Propoziţia 2.8. Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in \mathrm{A}$, atunci f este continuă parţial în x_0 în raport cu fiecare variabilă $x_i, i = \overline{1,p}$.

Demonstraţie. Fie f continuă în x_0; atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in \mathrm{A}$, cu $|x_i - a_i| < \delta, (1 \leq i \leq p)$, rezultă că

$$|f(x_1, x_2, ..., x_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)| < \varepsilon.$$

Atunci în particular, considerând $x = (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) \in \mathrm{A}$, cu $|x_j - a_j| <$ $< \delta, (1 \leq j \leq p)$, rezultă că

$$|f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că f este continuă parţial în x_0 în raport variabila x_j, $1 \leq j \leq p$.

Reciproca Prop.2.8 nu este adevărată, aşa cum se va vedea şi în exemplul următor.

Exemplul 2.4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că f este continuă parţial atât în raport cu x, cât şi în raport cu y, dar nu este continuă în origine, neavând limită în origine.

Soluţie. Într-adevăr, calculând limitele parţiale în origine rezultă,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0} = 0 = f(0,0); \\ \lim_{y \to 0} f(0,y) &= \lim_{y \to 0} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0 = f(0,0), \end{aligned}$$

deci f este continuă parţial în origine atât în raport cu x, cât şi în raport cu y. Pentru studiul limitei în origine a funcţiei f, calculăm

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx^2}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x^4}{x^4 (1 + m^2)} = \frac{m^2}{1 + m^2} \in \mathbb{R},$$

deci f nu are limită în origine, deci nu poate fi continuă în origine.

Observaţia 2.5. Dacă funcţia $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ nu este continuă parţial în x_0 în raport cu una din variabile, atunci f nu e continuă în x_0.

Exemplul 2.5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că f nu este continuă parţial în origine în raport cu variabila y, deci f nu este continuă în origine.

Soluţie. Într-adevăr,

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq f(0,0) = 1,$$

deci f nu este continuă parţial în origine în raport cu variabila y şi atunci potrivit Obs.2.5. f nu este continuă în origine.

Prelungirea prin continuitate

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi (a,b) un punct de acumalare al său. Dacă au loc:

- (a,b) este situat în afara domeniului de definiţie A
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ există şi este finită

atunci f se poate prelungi în mod natural la $A \cup \{(a,b)\}$ prin:

$$\widetilde{f} : A \cup \{(a,b)\} \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ l, & (x,y) = (a,b) \end{cases}.$$

$\widetilde{f}$ se numeşte prelungirea prin continuitate a funcţiei f la $A \cup \{(a,b)\}$.