

Curs Nr. 6

Serii de puteri

**Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA**

0.1 Serii de puteri

Definiția 0.1.1 Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$, se numește serie de puteri centrată în a ; termenii șirului (c_n) reprezintă coeficienții seriei. Multimea

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \text{ este convergentă}\}$$

se numește multime de convergență a seriei.

Definiția 0.1.2 Numărul (din $\overline{\mathbb{R}}$) definit prin

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

se numește raza de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$.

Remarcă. Dacă șirul coeficienților (c_n) are proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ există atunci raza de convergență a seriei se poate calcula cu formula $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.

Propoziția 0.1.3 Raza de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n \leq n_0} c_n (x - a)^{\alpha n + \beta}, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2, \beta = \overline{0, \alpha - 1}$$

este acel element $R \in [0, \infty]$ care verifică relația

$$R^\alpha = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

în ipoteza în care limitele de mai sus există.

Remarcă Coeficientul de rang n al unei serii de puteri se poate defini pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, chiar dacă nu toti coeficienții seriei apar în mod explicit. De exemplu, coeficientul de rang n al seriei $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ este $c_n = \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$. Pentru

seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n}$, $c_0 = -1$ (c_0 este coeficientul termenului liber fără x obținut considerând $n = 1$), $c_1 = \frac{1}{2}, \dots, c_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$. Pentru seria

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

suntem tentați să considerăm $c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ceea ce este fals, pentru că $c_0 = 0 \neq 1$, $c_1 = 1 \neq \frac{-1}{3!}$ (c_1 se obține considerând $n = 0$.)

Teorema 0.1.4 (Teorema I a lui Abel) Fie $R \in [0, \infty]$ raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Atunci au loc:

- i) Dacă $R = 0$, atunci $A_c = \{x_0\}$, adică seria este convergentă doar în x_0 .
- ii) Dacă $R = \infty$, atunci $A_c = \mathbb{R}$, adică seria este convergentă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.
- iii) Dacă $R \in (0, \infty)$, atunci
 - pe intervalul $(x_0 - R, x_0 + R)$ seria este absolut convergentă;
 - pe mulțimea $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$ seria este divergentă;
 - seria este uniform convergentă pe orice interval compact $[\alpha, \beta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

Dacă $R \in (0, \infty)$, atunci teorema precedentă nu oferă nici o informație privind convergența seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ în punctele $x = x_0 \pm R$. În acest caz, convergența seriilor numerice obținute se va studia separat.

Exemplul 1. Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + n + 1} \cdot \left(\frac{4x - 1}{x + 3} \right)^n.$$

Soluție. Se notează cu $y = \frac{4x - 1}{x + 3}$ și se studiază convergența seriei de puteri $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + n + 1} \cdot y^n$, cu $a_n = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + n + 1}$. Raza de convergență a

acestei serii este $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, deci din teorema I a lui Abel rezultă că seria de puteri în y este absolut convergentă pe $(-1, 1)$. Pentru $y = -1$ se obține seria numerică $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + n + 1}$ care este divergentă (fiind comparabilă cu seria armonică),

iar pentru $y = 1$ se obține $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + n + 1}$ care conform criteriului lui Leibniz este convergentă. Prin urmare, mulțimea de convergență a seriei în y este $A_c = (-1, 1]$. Pentru seria inițială se rezolvă sistemul de inecuații

$$-1 < \frac{4x - 1}{x + 3} \leq 1$$

și se obține $x \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3} \right]$, de unde rezultă că mulțimea de convergență a seriei în x este $A_c = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3} \right]$.

Teorema 0.1.5 (*Teorema a II-a a lui Abel*) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ o serie de puteri având raza de convergență $R \in (0, \infty)$. Dacă seria este convergentă în $x_0 - R$, respectiv $x_0 + R$, atunci suma seriei

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in A_c$$

este continuă în $x_0 - R$, respectiv $x_0 + R$.

Teorema 0.1.6 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ o serie de puteri având raza de convergență $R \in (0, \infty]$.

- Seria derivatelor $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ are aceeași rază de convergență cu seria inițială și are loc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)', \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

- Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$ obținută integrând termen cu termen seria de puteri inițială are aceeași rază de convergență R și în plus

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1},$$

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Observația 0.1.7 • O serie de puteri poate fi derivată/ integrată termen cu termen doar pe intervalul deschis $(x_0 - R, x_0 + R)$.

- Raza de convergență a unei serii de puteri se păstrează prin derivare, respectiv prin integrare termen cu termen.

Teorema 0.1.8 Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ o serie de puteri având raza de convergență $R \in (0, \infty]$ și suma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Atunci funcția f este indefinit derivabilă pe $(x_0 - R, x_0 + R)$ și are loc

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Operații cu serii de puteri

Propoziția 0.1.9 Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ are mulțimea de convergență A_c , atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n (x-x_0)^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ are aceeași mulțime de convergență și

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n (x-x_0)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x \in A_c.$$

Propoziția 0.1.10 Dacă seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ au razele de convergență R_1 , respectiv R_2 , atunci

- Seria suma $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$ are $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, iar dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ sunt convergente simultan în x atunci
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n.$$
- Seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ are $R \geq \min\{R_1, R_2\}$, iar dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ sunt convergente simultan în x atunci
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \right).$$

Exemplu: Seria binomială

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Să se arate că seria

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

este convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$ și suma sa este:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (*)$$

Soluție. Raza de convergență a seriei binomiale este

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)|}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{|\alpha-n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1. \end{aligned}$$

Din Teorema I a lui Abel rezultă că seria binomială este convergentă pentru $x \in (-1, 1)$. Fie $S(x)$ suma seriei, adică

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad (1)$$

sau echivalent

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n. \quad (2)$$

Înmulțim relația (1) cu x și adunând cu relația (2) rezultă

$$\begin{aligned} (1+x)S'(x) &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \left(\frac{\alpha-n}{n} + 1 \right) x^n \\ &= \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \alpha S(x). \end{aligned}$$

Rezultă $(1+x)S'(x) = \alpha S(x)$. Înmulțind această relație în ambii membri cu $(1+x)^{\alpha-1}$ rezultă

$$(1+x)^\alpha S'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} S(x) = 0,$$

deci

$$\frac{(1+x)^\alpha S'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0,$$

echivalent cu $\frac{d}{dx} \left[\frac{S(x)}{(1+x)^\alpha} \right] = 0$, deci $\frac{S(x)}{(1+x)^\alpha} = k$, $k \in \mathbb{R}$. Deoarece $S(0) = 1$ rezultă $k = 1$, deci $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Observație. Plecând de la suma seriei binomiale pentru diferite valori ale lui α se obține

- pentru $\alpha = -1$ rezultă

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

- Dacă în relația anterioară înlocuim x cu $-x$ rezultă

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Serii de puteri "clasice"

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1);$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1;$
- $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1;$
- $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad |x| < 1.$

Exemplul 2. Determinați mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot x^{2n+1}.$$

Soluție. **i)** Raza de convergență a seriei de puteri se determină cu formula

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad \text{În cazul de față } a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}, \text{ deci}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)3^{n+1}}{n \cdot 3^n} \right| = 3.$$

Intervalul de convergență este $I = (-3, 3)$. Pentru a determina multimea de convergență a seriei, studiem ce se întâmplă la capetele intervalului I . Astfel, pentru $x = -3$ obținem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ care este o serie convergentă (conform criteriului lui lui Leibniz). Pentru $x = 3$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă (seria armonică cu $\alpha = 1$). Prin urmare multimea de convergență este $A_c = [-3, 3]$.

$$\text{Fie } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}. \text{ Atunci } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^m.$$

Dar, se știe că $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Înlocuind x cu $\frac{x}{3}$ în seria de mai sus rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x},$$

adică

$$S'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3-x} = \frac{1}{3-x}, x \in A_c.$$

Prin integrare termen cu termen în relația anterioară, se obține

$$S(x) = -\ln(3-x) + C.$$

Cum $S(0) = 0$ și $S(0) = -\ln 3 + C$ rezultă $C = \ln 3$, deci suma seriei este

$$S(x) = \ln \frac{3}{3-x}.$$

ii) Raza de convergență este $R = 1$, deci intervalul de convergență este $I = (-1, 1)$. La capetele intervalui se obțin seriile numerice $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$, respectiv $\sum_{n=1}^{\infty} n$ care, eviventer, sunt divergente (termenul general nu tinde la zero).

Se știe că $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ și aplicând teoreme de derivare rezultă $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, care înmulțită cu x conduce la $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

iii) Raza de convergență se calculează din $R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{n+2} \right| = 2$, deci $R = \sqrt{2}$, iar intervalul de convergență este $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pentru $x = -\sqrt{2}$, respectiv $x = \sqrt{2}$ se obțin două serii numerice divergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\sqrt{2}$, respectiv $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)\sqrt{2}$. Mulțimea de convergență în acest caz, coincide cu intervalul de convergență.

Fie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot x^{2n+1}$, care prin integrare termen cu termen conduce la

$$\begin{aligned} \int S(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot \int x^{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right)^{n+1} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Înlocuind pe x cu $\frac{x^2}{2}$ în dezvoltarea $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = \frac{2}{2+x^2},$$

deci

$$\int S(x) dx = \frac{x^2}{2+x^2},$$

adică

$$S(x) = \frac{4x}{(2+x^2)^2}.$$