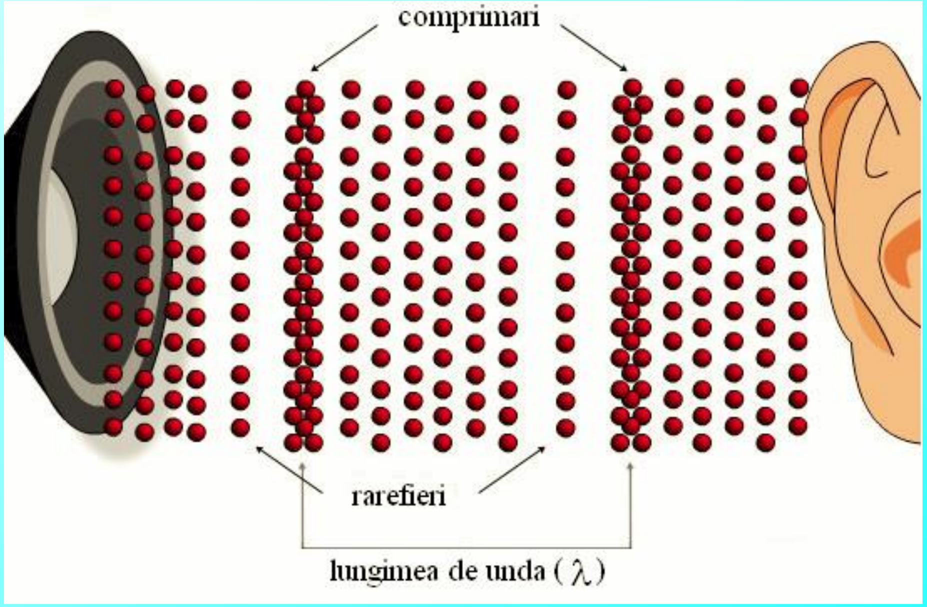
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif Delia



Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 8&9
2024-2025

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

4.2. Unde armonice unidimensionale

4.3. Ecuaţia de propagare a undelor

4.4. Vitezele de propagare ale undelor elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

4.6. Absorbţia undelor

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

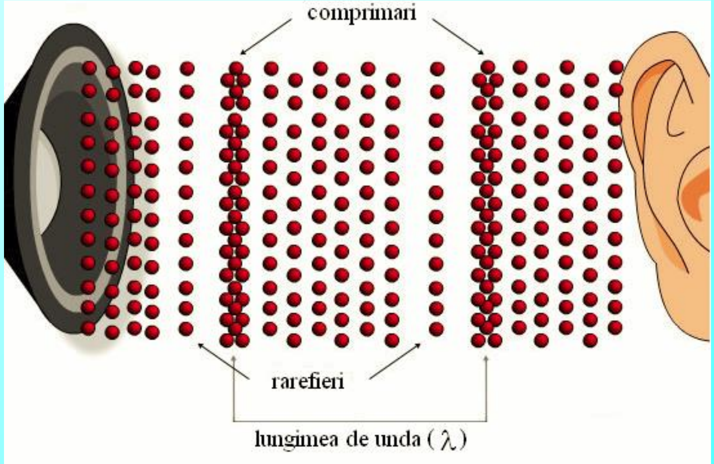
4. Unde elastice

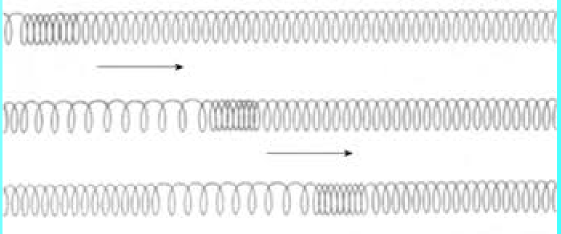
4.1. Noţiuni generale

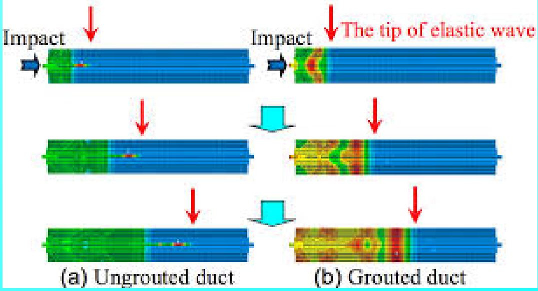
- *Unda* reprezintă fenomenul de extindere şi propagare din aproape în aproape a unei perturbaţii periodice produse într-un anumit punct din mediul de propagare.

- Propagarea undei se face cu o viteză finită, numită *viteza undei*.

- Unda nu reprezintă transport de materie, ci numai transport de energie.







4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

Clasificarea undelor:

a) **După tipul de energie** pe care-l transportă unda:

- *Unde elastice* - transportă energie mecanică;
- *Unde electromagnetice* - transportă energie electromagnetică;
- *Unde magneto-hidrodinamice* - sunt generate prin perturbaţii electromagnetice şi elastice ale mediului de propagare.

b) **După natura perturbaţiei şi modul de propagare**

- *Unde longitudinale* - direcţia de propagare a undei coincide cu direcţia de oscilaţie
- *Unde transversale* - direcţia de propagare a undei este perpendiculară pe direcţia de oscilaţie

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

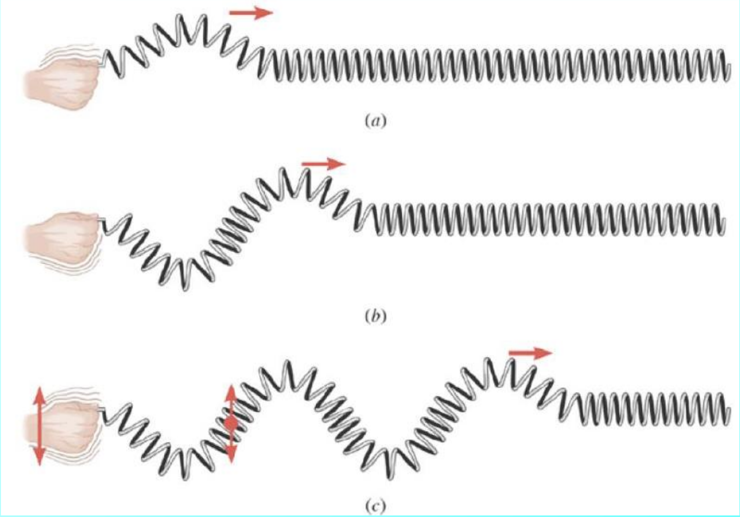
c) După forma suprafeţelor de undă:
- *unde plane*
- *unde sferice*
- *unde cilindrice*, etc.

Unda este caracterizartă de:

- *Funcţia de undă* $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ = *descrie matematic mărimea perturbată*
- *Suprafaţa de undă = mulţimea punctelor din spaţiu ce oscilează având la un moment dat aceeaşi valoare a funcţiei de undă*
- *Frontul de undă* = suprafaţa de undă cea mai avansată la un moment dat

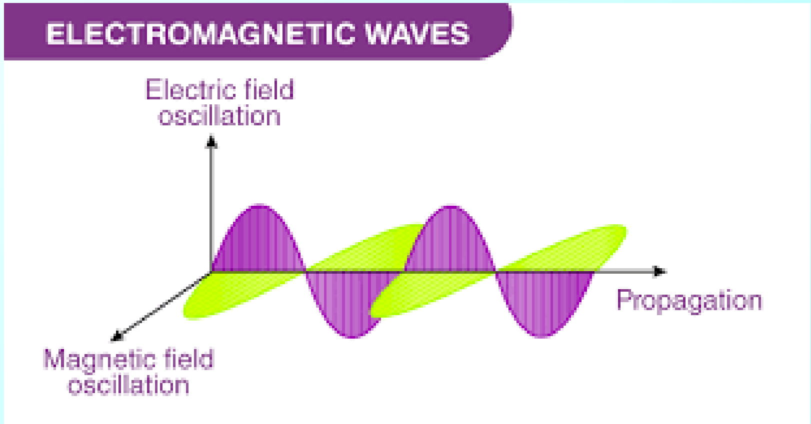
4. Unde elastice

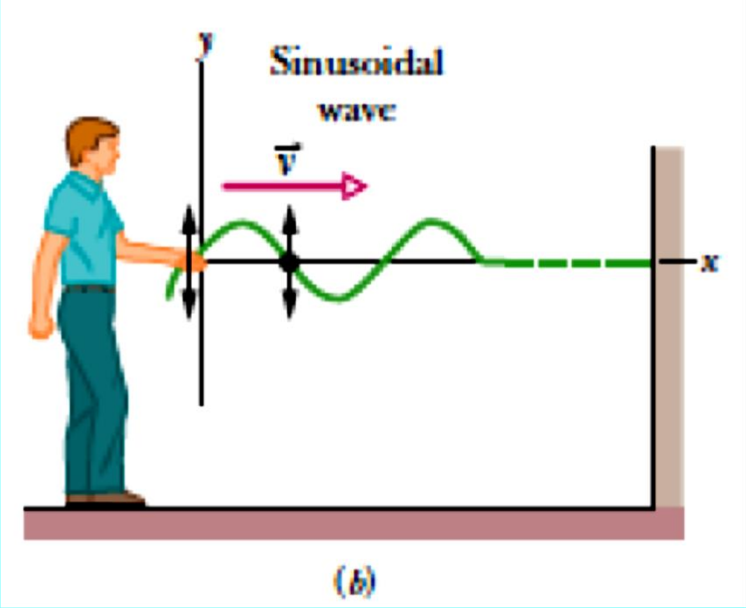
4.1. Noţiuni generale



Unde transversale

Dacă oscilaţii au o direcţie perpendiculară pe direcţia de propagare a undei, atunci este vorba despre o unda transversala.



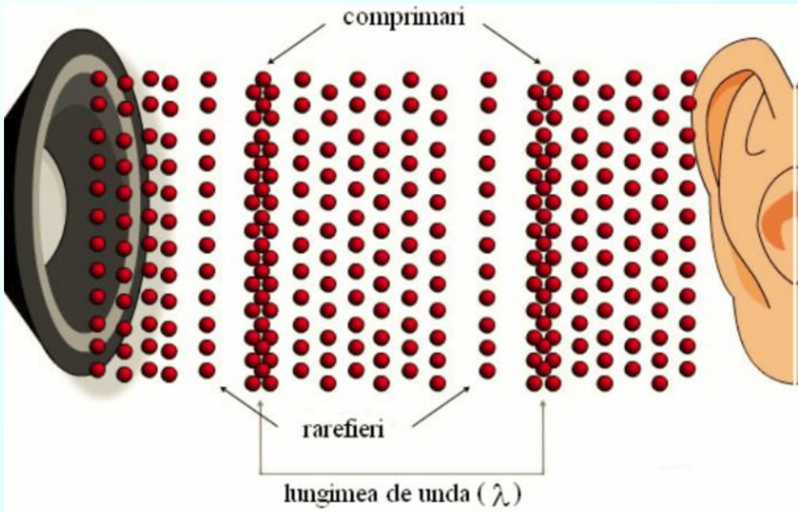


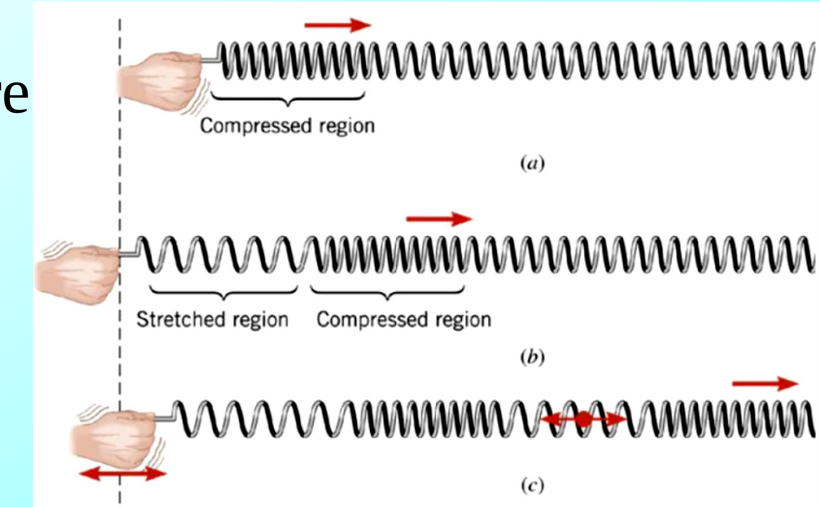
Exemple: undele dintr-o coardă, undele electromagnetice (lumina)

4. Unde elastice

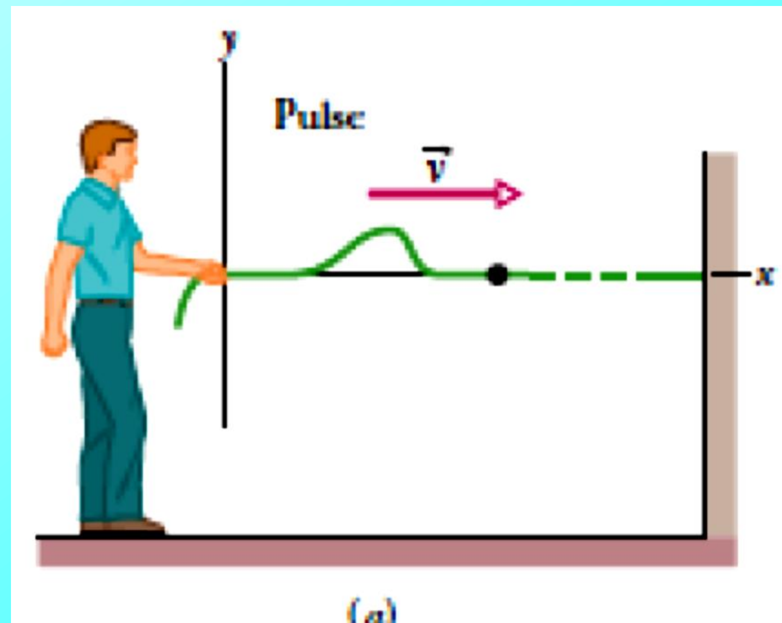
4.1. Noţiuni generale

Unde longitudinale - direcţia de propagare coincide (paralelă) cu direcţia de oscilaţie





Undele sonore se propagă prin comprimări şi rarefieri succesive ale mediului elastic



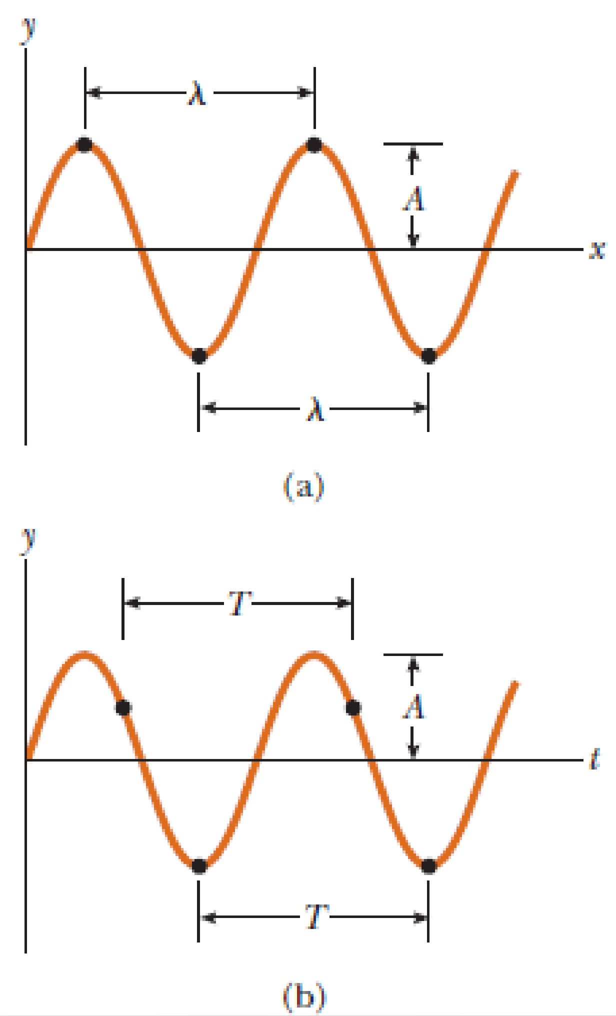
Exemple: undele sonore,
undele de compresiune dintr-un resort

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

Mărimi specifice undelor

- Viteza undei: ***u*** = *constant*
- Amplitudinea undei: **A**
- Lungimea de undă: $\lambda = u\,T$
- Perioada undei: **T**
- Frecvenţa undei: $\nu = 1/T$
- Vectorul de undă: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ $\vec{k} = k\vec{n}$



Într-o perioadă unda avansează cu o lungime de undă (λ).

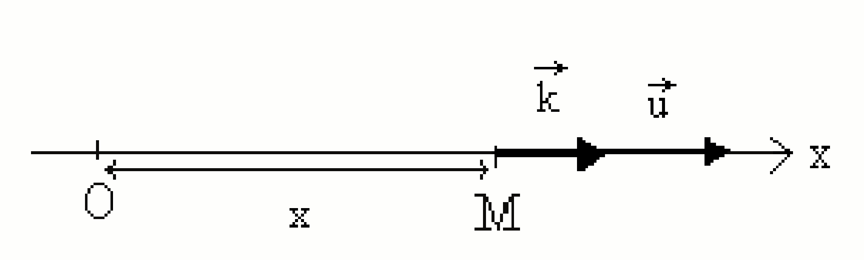
Lungimea de undă reprezintă distanța parcursă de undă într-un interval de timp egal cu o perioadă.

Vectorul de undă este mărimea fizică vectorială orientată în sensul propagării undei, materializează direcţia în care se propagă energia undei.

4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

- Sursa *oscilează* cu amplitudinea A şi pulsaţia ω: $y_o(t) = A\sin\omega t$



oscilaţia produsă în O se propagă numai pe o direcţie

- Viteza undei este finită şi constantă, *u*
- Oscilaţia din punctul M se produce la momentul: $t - \frac{x}{u}$
- Punctul M are, în orice moment de timp, elongaţia: $\psi(x,t) = A\sin\omega(t - \frac{x}{u})$
- Punctul M începe să oscileze mai tîrziu faţă de punctul O. $\psi(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{u})$

$$\psi(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Amplitudinea (m)

Faza (rad)

Elongaţia mişcării (m)

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Poziţia (m)

Pulsaţia (rad/s)

Timp (s)

Vector de undă (m^{-1})

Ecuaţia undei plane

$$y(x,t) = \Psi(x,t)$$

4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

Vectorul de undă $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

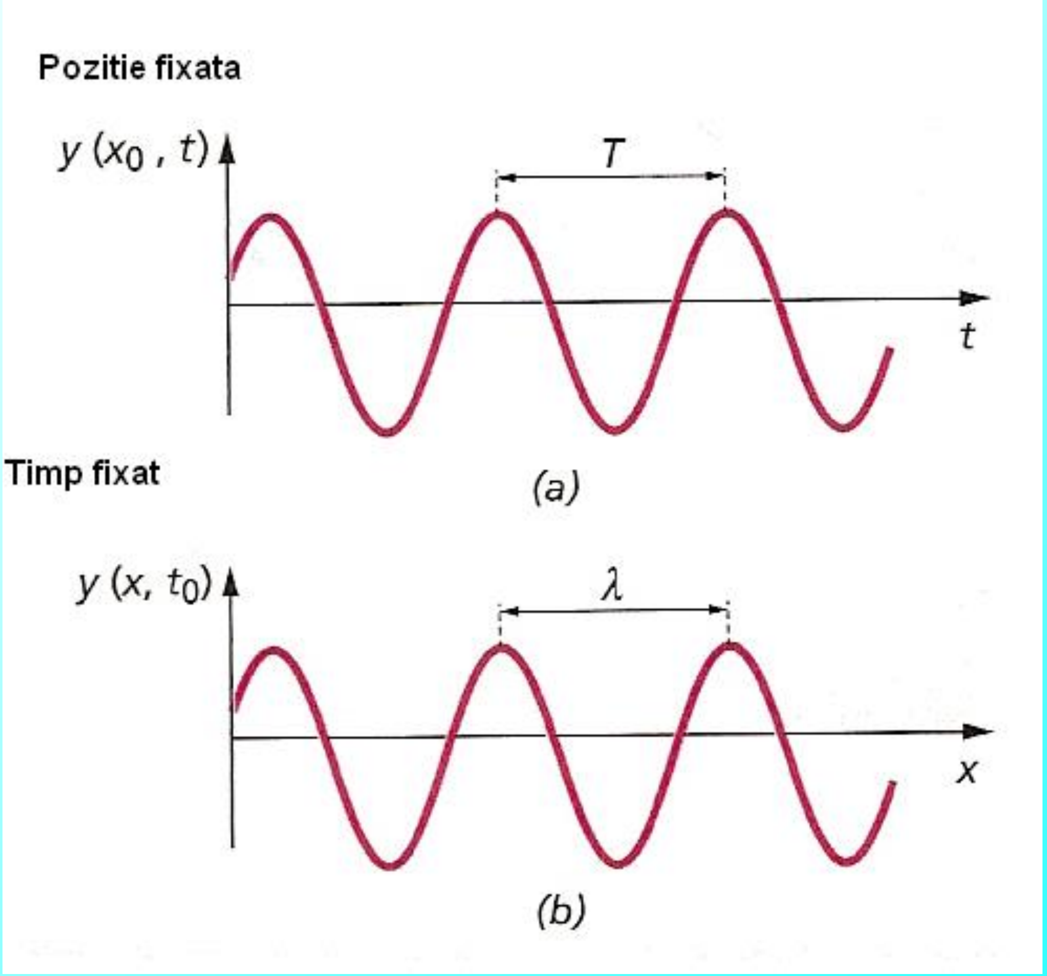
$$y_M(x, t) = A\sin(\omega t - kx)$$

a) $x = x_0$ *fixat* ⇒

$$y(x_0, t) = A\sin(\omega t - \varphi)$$

b) $t = t_0$ *fixat* ⇒

Periodicitate spaţială



4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

- v(x,t) = Viteza de oscilaţie a unui punct din mediul de propagare

$$v(x, t) = A\,\omega \cos(\omega t - kx)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

- u = viteza de propagare a undei

  u= constant şi depinde de caracteristicile mediului de propagare

Exemple: viteza undei sonore în aer, u = 340 m/s

viteza luminii în vid, $u = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

- *Undă progresivă* – dacă unda se propagă în direcţia Ox (se propagă de la sursă spre mediu)

- *Undă regresivă* – dacă unda se propaga dinspre mediu spre sursă

4. Unde elastice

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

4.3. Ecuaţia de propagare a undelor

Derivata de ordinul doi a funcţiei de undă în raport cu t este:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) = -Au^2k^2\sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

Derivata de ordinul doi a funcţiei de undă în raport cu x este:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -Ak^2\sin(\omega t - kx) \quad (2)$$

Combinând cele două ec. (1) si (2): $\Rightarrow \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

<u>Daca unda se deplaseaza dupa o directie oarecare</u>: $\Delta\Psi - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$

<u>Def.</u>: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ Operatorul Laplace

<u>Def.</u>: $\Box = \Delta - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ Operatorul d' Alembert

Ecuaţia de propagare a undei după o direcţie oarecare: $\Box\Psi = 0$

4. Unde elastice

4.4. Vitezele de propagare ale undelor elastice

Vitezele de propagare ale undelor în diferite medii continue:

1. Unde transversale în coarde elastice: $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
2. Unde longitudinale în fluide sau gaze: $u = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$
3. Unde longitudinale în solide: $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

unde:

T - tensiunea din coardă, μ - masa unităţii de lungime

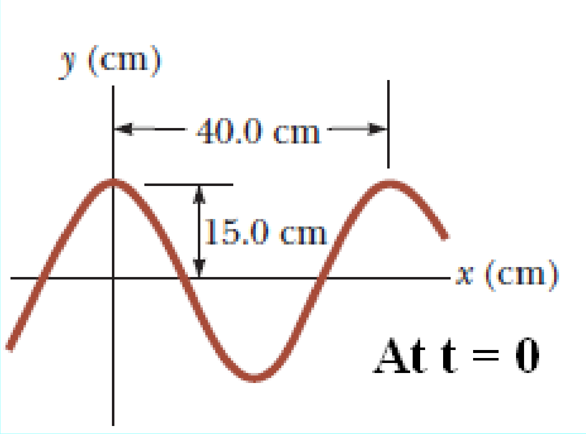
β - modulul de compresibilitate al mediului, ρ - densitatea mediului

E - modulul de elasticitate al mediului

4. Unde elastice

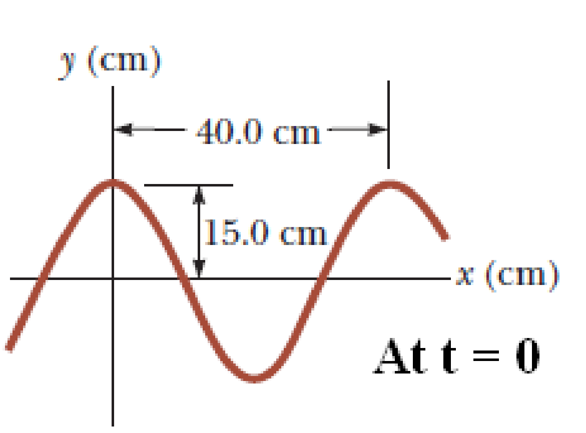
Aplicaţie:

O undă sinusoidală se propagă în direcţia Ox cu: amplitudinea de 15 cm, lungimea de undă de 40 cm şi frecvenţă de 8 Hz. Poziţia verticală a unui punct la momentul t = 0 şi x= 0 este tot de 15 cm. Să se determine vectorul de undă *k*, perioada *T*, pulsaţia *ω* şi viteza undei *u*. De asemenea, să se găsească ecuaţia undei.



4. Unde elastice

Aplicaţie:



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\, rad}{40\ cm} = 15.7\ \mathrm{rad/m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8\ Hz} = 0.125\ \mathrm{s} \qquad \omega = 2\pi f = 50.3\ \mathrm{rad/s}$$

$$u = \lambda f = 3.2\ \mathrm{m/s}$$

Faza iniţială a undei : $15 = 15\, sin\varphi \;\Rightarrow\; sin\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$

Ecuaţia undei: $y = Asin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) = Acos(\omega t - kx)$

$y = 0.15\cos(50.3t - 15.7x)$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

În timpul propagării, punctele materiale ale mediului oscilează în jurul poziţiei de echilibru.

Energia mecanică a particulelor din volumul ΔV: $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_c = \dfrac{1}{2} m\, v^2 \\ v(x,t) = \dfrac{dy}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t - kx) \\ m = \rho\, \Delta V \end{array}\right\} \quad \Delta E_c = \frac{1}{2}\rho \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Energia mecanică a particulelor din volumul ΔV : $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} k_e x^2$$

$$F_e = E\,S\,\frac{x}{l_0}$$

$$F_e = -\,k_e\,x$$

$$k_e = \frac{E\,S}{l_0}$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\frac{E\,S}{l_0} x^2 = \frac{1}{2} E\,\Delta V \frac{x^2}{l_0^2} = \frac{1}{2} E\,\Delta V \varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \frac{x}{l_0} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\cos(\omega t - kx)$$

$$u^2 = \frac{E}{\rho}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2 \Delta V \cos^2(\omega t - kx)$$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Energia mecanică a particulelor din volumul ΔV : $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\Delta E = \rho\, \omega^2 A^2 \Delta V \cos^2(\omega t - kx)$$

Constatăm că energiile cinetică şi potenţială sunt:

i) egale;

ii) funcţii periodice de timp;

iii) oscilează în fază.

Energia undei nu se stochează în unitatea de volum!!!

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Densitatea volumică de energie mecanică: $w = \dfrac{dE}{dV}$ $\qquad [w] = \dfrac{J}{m^3}$

$$\Rightarrow \quad w = \rho\,\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Densitatea volumică medie de energie mecanică = media pe o perioadă a densităţii de energie w:

$$w_m = \frac{1}{T}\int_0^T w\,dt \quad \Rightarrow \quad w_m = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2$$

Fluxul de energie = cantitatea de energie transmisă, printr-o suprafaţă, în unitatea de timp $\Phi = \dfrac{dE}{dt}$ $\qquad [\Phi]_{SI} = 1\ W = 1J/\ 1s$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Densitatea fluxului de energie = fluxul de energie transportat prin unitatea de suprafaţă, în direcţie perpendiculară pe suprafaţă

$$\vec{j} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} = \frac{d}{d\vec{S}}\left(\frac{dE}{dt}\right) = w\,\vec{u} \qquad [\,j\,]_{SI} = 1\,\frac{W}{m^2}$$

Intensitatea undei = valoarea medie pe o perioadă a densităţii fluxului de energie

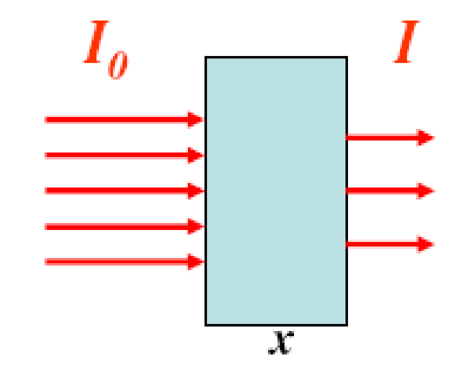
$$I = <\vec{j}> = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2\,u \quad \Rightarrow \quad I \approx A^2 \qquad [\,I\,]_{SI} = 1\,\frac{W}{m^2}$$

4. Unde elastice

4.6. Absorbţia undelor

- fenomenul de atenuare a densității fluxului de energie.

Legea lui Beer: $\boxed{I = I_0 e^{-\alpha \cdot x}}$



$$A = A_0\, e^{-\frac{1}{2}\alpha x}$$

$$y(x,t) = A_0\, e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin(\omega t - kx)$$

Ecuaţia undei intr-un mediu disipativ

https://phet.colorado.edu/sims/html/beers-law-lab/latest/beers-law-lab_en.html

4. Unde elastice

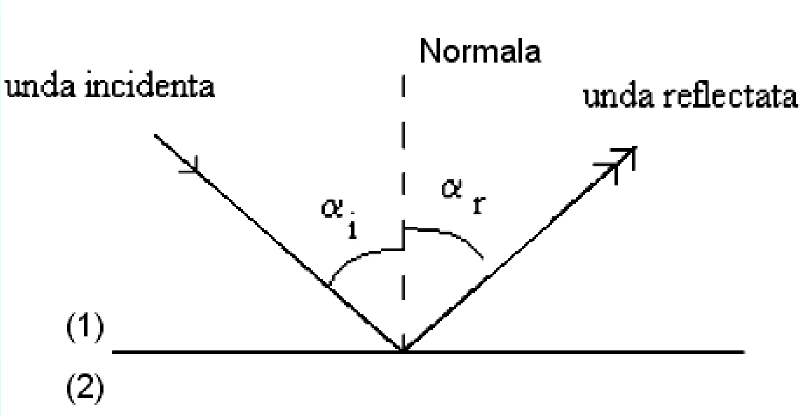
4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Reflexia undelor = fenomenul de întoarcere a undei în mediul din care a venit, atunci când întâlneste suprafata de separatie a doua medii diferite

<u>Legile reflexiei</u>:

1) $\alpha_i = \alpha_r$

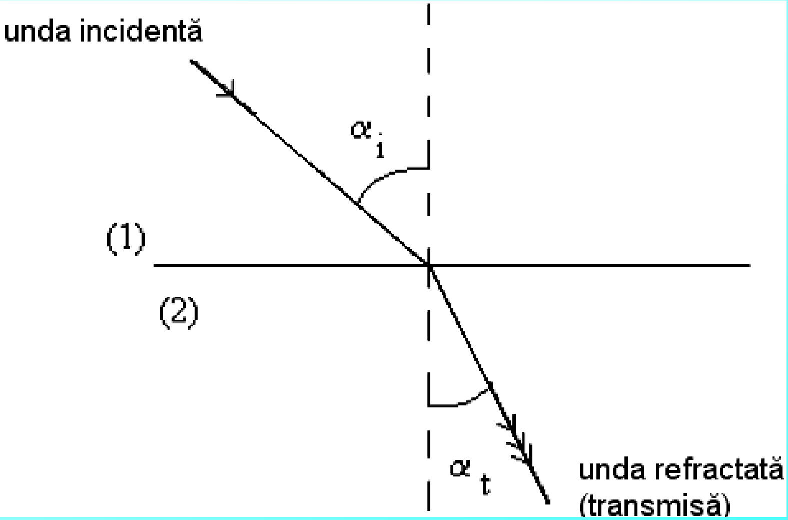
2) raza incidentă, normala la suprafață și raza reflectată sunt în același plan



4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Refracţia undelor = fenomenul de schimbare a direcţiei de propagare a undei la trecerea dintr-un mediu în alt mediu diferit



Legile refracţiei:

1. $$\frac{\sin \alpha_i}{u_1} = \frac{\sin \alpha_t}{u_2}$$ Legea lui Snellius

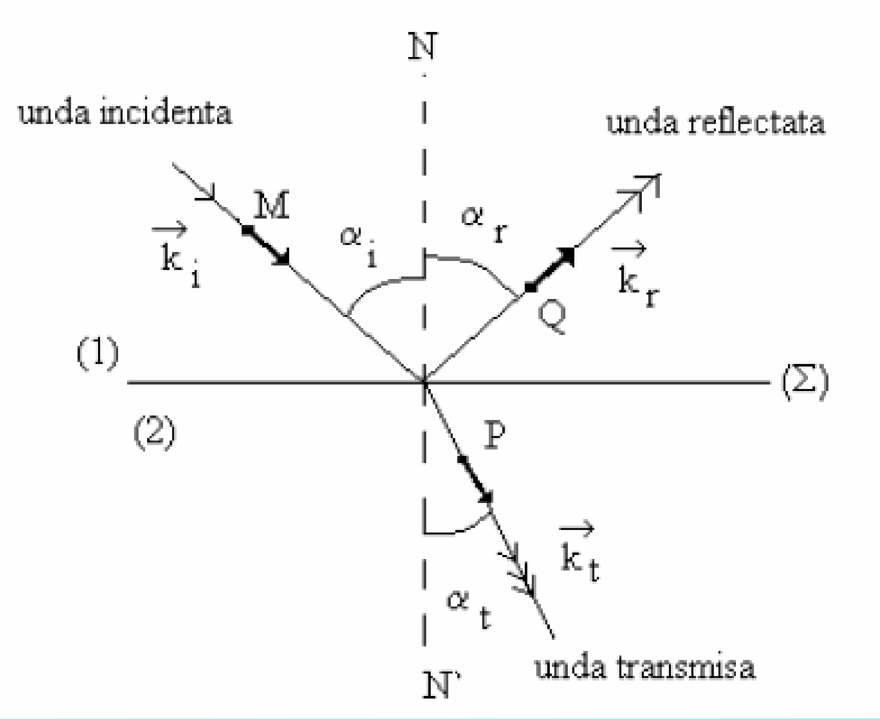
2. raza incidenta, normala la suprafaţă şi raza transmisă sunt în acelaşi plan

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Vitezele de propagare:

$$u_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \qquad u_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$$



Funcţia de undă:

$$y(\vec{r},t) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

<u>Def.</u>

Impedanţa mediului de propagare: $\boldsymbol{Z = \rho u}$

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Condiţia de continuitate a funcţiilor de undă pe suprafaţa de separare:

$$y_i + y_r = y_t$$

Condiţia de conservare a energiei undei:

$$I_i = I_r + I_t$$

intensităţile undelor: incidentă, reflectată şi transmisă

$$I = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2\,u$$

$$A_i + A_r = A_t$$

$$A_r = A_i\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)$$

$$A_t = A_i\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)$$

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

În ceea ce priveşte amplitudinea undei reflectate se pot întâlni două cazuri:

a). Mediul (1) mai dens decât mediul (2), $Z_1>Z_2$.

Amplitudinea undei reflectate, A_r, are acelaşi semn cu amplitudinea undei incidente, A_i. Cele două unde sunt în fază.

b). Mediul (1) mai puţin dens decât mediul (2), $Z_1<Z_2$.

Amplitudinea undei reflectate, A_r, are semn opus faţă de amplitudinea undei incidente, A_i. Cele două unde sunt în opoziţie de fază.

Unda reflectată este defazată cu π radiani în urma undei incidente.

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Coeficientul de reflexie = cu raportul dintre intensitatea undei reflectate si intensitatea undei incidente

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

Coeficientul de transmisie = raportul dintre intensitatea undei transmise si intensitatea undei incidente

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{A_t}{A_i}\right)^2 = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Suma coeficienţilor de reflexie şi transmisie este unitară: $R + T = 1$

(consecinţa a legii conservării energiei elastice)

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

$$R + T = 1$$

Mediul 1	*Mediul 2*	*R*	*T*
aer	apă	0,99991	0,0001
apă	oţel	0,875	0,125
cauciuc	apă	0,001	0,999
aer	margine de pădure	0,15	0,85
aer	draperie de stofă în falduri	0,2	0,8
aer	perete din lemn	0,9	0,1

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definească unda elastică şi să facă clasificarea acestora;
- Cunoască diferenţa dintre unda transversală şi cea longitudinală;
- Definească unda armonică unidimensinală;
- Definească vectorul de undă;
- Definească vitezele de propagare ale undelor elastice;
- Cunoască consideraţiile energetice asupra propagării undelor;
- Definească reflexia şi refracţia undelor elastice;
- Cunoască legile reflexiei şi refracţiei .
- Determine coeficientul de reflexie şi pe cel de transmisiei;

BIBLIOGRAFIE

- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012