Seminar Nr. 7

Serii Fourier

$\boxed{\textbf{1)}}$ Să se determine seria Fourier a funcţiei $f(x) = x$, $0 \le x \le 2\pi$, periodică de perioadă 2π.

Indicaţie. $a_0 = 2\pi$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = 0, n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\dfrac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Seria Fourier ataşată este

$$f(x) \to \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 2\pi) \\ \pi, & x \in \{0, \pi\} \end{cases}.$$

Rezultă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi)$, care dă suma seriei trigonometrice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ pentru orice valoare a lui x din $(0, 2\pi)$. De exemplu pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$ se obţine

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{pi}{4},$$

echivalent cu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{n-1}, & n = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\textbf{2)}}$ Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia periodică $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

Indicaţie. Prelungim funcţia prin imparitate pe intervalul $[-2,0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa reală. $a_n = 0$, $n = 0,1,2,...$, iar $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$ $n = 1,2,...$ Din ultima expresie rezultă $b_{2n} = 0$, $b_{2n-1} = \frac{8(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Rezultă

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcţia periodică $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, de perioadă $T = 2l = 2$.

Indicaţie. Se prelungeşte funcţia prin paritate pe intervalul $[-1,0]$ şi apoi prin periodicitate pe toată axa reală obţinându-se o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. Avem $b_n = 0$, $n = 0,1,2,...$, $a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$,

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}, n \in \mathbb{N}$$

Din teorema lui Dirichlet rezultă

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi x}{n^2}, x \in [-1,1],$$

echivalent cu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi x}{n^2} = \frac{\pi^2(3x^2-1)}{12}, x \in [-1,1].$$

Luând pe $x = 1$ obţinem suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4) *Să se dezvolte in serie Fourier funcţia* $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos x|$.

5) *Fie* $f : (-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1+2x, x \in (-2,2) \\ -3, x = 2 \end{cases}$.

i) *Să se traseze graficul funcţiei* f;

ii) *Determinaţi coeficienţii Fourier şi suma seriei ataşate.*

6) i) Să se dezvolte în serie Fourier de sinusuri funcţia periodică $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, de perioadă $T = 2$.

ii) Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcţia periodică $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, de perioadă $T = 2\pi$.