Curs Nr. 12

Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^p$

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

Teorema 0.0.1 *(Derivarea funcţiilor compuse)*

Fie $F : A \subset \mathbb{R}^p \to B \subset \mathbb{R}^q$, $y = F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$ *derivabilă în* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, *unde* $y = (y_1, y_2, ..., y_q) \in B$, $y_i = f_i(x), i = \overline{1,q}$ *şi* $g : B \to \mathbb{R}$, $g(y) = g(y_1, y_2, ..., y_q) \in B$ *derivabilă în* $y_0 \in \overset{\circ}{B}$. *Atunci funcţia compusă* $h = g \circ F : A \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în* x_0 *şi are loc egalitatea*

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0), i = \overline{1,p}}$$

Cazuri particulare.

I. $p = q = 1$

Fie $u : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât u este derivabilă pe intervalul $\mathbb{I}$, iar f este derivabilă pe intervalul $\mathbb{J}$. Atunci funcţia compusă $g = f \circ u : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(u(x)), x \in \mathbb{I}$, este derivabilă pe intervalul $\mathbb{I}$ şi are loc formula de derivare a funcţiilor compuse de o variabilă (cunoscută din liceu),

$$g'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x), \ \forall x \in \mathbb{I}.$$

II. $p = 1, q = 2$

Dacă $F : \mathrm{A} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$, $F(x) = (u(x), v(x))$ este derivabilă pe mulţimea A, iar $g : \mathrm{B} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = g(u(x), v(x))$ este derivabilă pe mulţimea B, atunci funcţia compusă $h = g \circ F$, $h : \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = = g(u(x), v(x))$ este derivabilă pe mulţimea A şi derivata sa este dată de formula

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

III. $p = 2, q = 1$

Dacă $u : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{B} \subset \mathbb{R}$ are derivate parţiale continue pe A, iar dacă $g : \mathrm{B} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ are derivata continuă pe B, atunci funcţia compusă $h = g \circ u : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, $h(x, y) = g(u(x, y))$ are derivate parţiale continue pe mulţimea A şi acestea sunt date de relaţiile:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

IV. $p = q = 2$

Dacă funcţia $F : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2, F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ are derivate parţiale continue pe A, (adică u şi v au derivate parţiale continue pe A), iar $g : \mathrm{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ are derivata continuă pe B, atunci funcţia compusă $h = g \circ F$, $h : \mathrm{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x,y) = g(F(x,y)) = g\left(u(x,y), v(x,y)\right)$ are derivate parţiale continue pe mulţimea A şi acestea sunt date de relaţiile:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Teorema 0.0.2 *Dacă funcţia $F : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă în $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, iar funcţia $G : B \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^s$ este diferenţiabilă în $y_0 = F(x_0) \in \overset{\circ}{B}$, atunci funcţia compusă $H = G \circ F$, $H : A \longrightarrow C$ este diferenţiabilă în x_0 şi are loc egalitatea*

$$d_{x_0}H = d_{x_0}\left(G \circ F\right) = d_{y_0}G \circ d_{x_0}F.$$

Dacă se notează

$$F(x) = \left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), ..., f_q\left(x\right)\right),\ x \in A,$$

$$G(y) = \left(g_1(y), g_2(y), ..., g_s(y)\right),\ y \in B,$$

iar

$$H(x) = G(F(x)) = G\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), ..., f_q\left(x\right)\right),$$

unde $\left(h_i(x) = g_i\left(f_1, f_2, ..., f_q\right), i = \overline{1,s}\right)$ atunci prin trecere la matricile Jacobi corespunzătoare egalitatea precedentă se scrie

$$J_H\left(x_0\right) = J_G\left(y_0\right) \cdot J_F\left(x_0\right).$$

Dacă $p = q = s$, atunci în termenii determinanţilor funcţionali corespunzători, egalitatea matricială precedentă devine

$$\frac{D\left(h_1, h_2, ..., h_p\right)}{D\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)} = \frac{D\left(g_1, g_2, ..., g_p\right)}{D\left(y_1, y_2, ..., y_p\right)}\frac{D\left(f_1, f_2, ..., f_p\right)}{D\left(x_1, x_2, ..., x_p\right)}$$

în care $g_i\left(y_1, y_2, ..., y_p\right) = g_i\left(f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), ..., f_p\left(x\right)\right),\ x \in \mathrm{A},\ i = \overline{1,p}$,
$y_i\left(x_1, x_2, ..., x_p\right) = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_p\right),\ i = \overline{1,p}$.

Derivate parţiale de ordin superior

Fie A $\subset \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi f : A $\longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial pe mulţimea A, adică există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$.

Definiţia 0.0.3 *Spunem că funcţia f este derivabilă parţial de două ori în punctul $x_0 \in U \subset A$ în raport cu variabilele x_i şi x_j (în această ordine), dacă funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, este derivabilă în x_0 în raport cu variabila x_j.*

Derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}$ în raport cu variabilele x_i şi x_j (în această ordine), se notează prin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ sau $f''_{x_i x_j}(x_0)$. Dacă există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, pentru orice $x \in$ A şi pentru orice i, j, $1 \leq i, j \leq p$, atunci se spune că f este derivabilă parţial de două ori pe mulţimea A $\subset \mathbb{R}^p$.

Definiţia 0.0.4 *Dacă funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, este derivabilă parţial în raport cu variabila x_j pe mulţimea U, atunci funcţia $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \in \mathbb{R}$, se numeşte derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f pe mulţimea U în raport cu variabilele x_i şi x_j.*

În mod analog, se definesc iterativ derivatele parţiale de ordinul trei, patru,... şi de orice ordin $n \in \mathbb{N}$. Astfel,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta ... \partial x_\lambda \partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta ... \partial x_\lambda}\right),$$

unde $\alpha + \beta + ... + \lambda + \mu = n$.

Derivatele parţiale de ordinul $n+1$ se obţin prin derivarea parţială a derivatelor parţiale de ordinul $n \in \mathbb{N}$. Derivatele parţiale de ordin superior calculate cel puţin în raport cu două variabile diferite, se numesc **derivate parţiale mixte**. În cazul funcţiilor f : A $\subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, există un număr de 2^p derivate parţiale de ordinul doi.

Definiţia 0.0.5 *Se spune că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este de clasă $n \in \mathbb{N}$ pe mulţimea deschisă A şi scriem $f \in C^n(A)$, dacă f este derivabilă parţial de ordinul n în raport cu toate variabilele $x_i, (1 \leq i \leq n)$ şi toate derivatele parţiale de ordinul n sunt continue pe A.*

Dacă f are derivate parţiale de orice ordin în raport cu toate variabilele sale, atunci se spune că f este de clasă $C^{\infty}(\mathrm{A})$ (sau că f este indefinit derivabilă pe A) şi se scrie $f \in C^{\infty}(\mathrm{A})$ ($C^{\infty}(\mathrm{A})$ se mai numeşte clasa funcţiilor indefinit derivabile pe A). Din aceste consideraţii rezultă:

$$C^{\infty}(\mathrm{A}) \subset ... \subset C^{n}(\mathrm{A}) \subset C^{n-1}(\mathrm{A}) \subset ... \subset C^{1}(\mathrm{A}) \subset C^{0}(\mathrm{A}),$$

$C^{0}(\mathrm{A})$ fiind clasa funcţiilor continue pe A.

Propoziţia 0.0.6 *(Formula lui Leibniz). Dacă u şi v sunt două funcţii reale definite şi derivabile de n ori pe un interval $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, atunci*

$$\boxed{(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + ... + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + ... + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.}$$

Teorema 0.0.7 *(H. A. Schwarz). Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulţimea deschisă A, atunci are loc egalitatea*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \ \forall i, j, \ 1 \leq i, j \leq p, \ \forall a \in A.$$

Laplacianul câmpului scalar f de clasă cel puţin 2 pe D este câmpul scalar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Laplacianul unui câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^n$ este un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^{n-2}$.
$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este o funcţie **armonică** (sau **câmp armonic**) dacă şi numai dacă $\Delta f = 0$ pe întreg domeniul D.

Identitatea lui Euler de ordinul doi

Dacă funcţia $g : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^2(\mathrm{A})$, verifică identitatea lui Euler, atunci g verifică şi relaţia

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = r(r-1)g \tag{E}$$

numită **identitatea lui Euler de ordinul doi.** Generalizare.

Din Teorema de caracterizare a funcţiilor omogene cu ajutorul identităţii lui Euler, rezultă că g verifică relaţia

$$x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=rg. \tag{*}$$

Derivând această relaţie în raport cu x şi apoi în raport cu y obţinem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=r\frac{\partial g}{\partial x};\qquad \frac{\partial g}{\partial y}+x\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=r\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Înmulţind penultima relaţie cu x şi ultima cu y, apoi adunându-le se obţine egalitatea

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=r\left(x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

care în baza identităţii $(*)$ este tocmai identitatea Euler de ordinul doi.

Operatorial, identitatea lui Euler de ordinul doi se scrie sub forma

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{[2]}g=r\left(r-1\right)g.$$

Repetând raţionamentul prezentat în obţinerea relaţiei (E) se obţine **identitatea lui Euler de ordinul n**

$$\boxed{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{[n]}g=r\left(r-1\right)...(r-n+1)g.}$$

Teorema 0.0.8 *(Derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiilor compuse)*

Fie $f:A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ f\in C^2\left(A\right),$ *iar* $G\in C^2\left(D\right),\ G(x,y)=\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right).$ *Dacă* $G(D)\subset A$, *atunci pentru funcţia compusă* $\varphi=f\circ G,\varphi:D\longrightarrow\mathbb{R}$ *avem:*

i) $\varphi\in C^2\left(D\right);$

ii) *Derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei compuse sunt date de formulele*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \qquad+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\end{cases}$$

Diferenţiale de ordin superior

Fie $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicaţie diferenţiabilă pe mulţimea deschisă A.

Definiţia 0.0.9 *Aplicaţia* $df : A \ni x \longmapsto d_x f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ *se numeşte funcţia diferenţială a lui* f *pe mulţimea* A.

Diferenţiala de ordinul doi se defineşte iterativ cu ajutorul diferenţialei de ordinul unu.

Definiţia 0.0.10 *Se spune că funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă de două ori în punctul* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, *dacă aplicaţia* $df : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ *este diferenţiabilă în* x_0.

Teorema 0.0.11 *Dacă* $f : A \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă de două ori în* $x_0 \in A$, *atunci diferenţiala sa are forma*

$$d^2_{x_0} f(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, dx_i dx_j$$

Observaţia 0.0.12 *Din relaţia precedentă se deduce că diferenţiala de ordinul doi se poate identifica cu o formă pătratică în* $dx_1, dx_2, ..., dx_p$. *Matricea acestei forme pătratice în baza canonică din* $\mathbb{R}^p$ *se numeşte* ***matricea Hesse*** *asociată funcţiei* f *în punctul* x_0 *şi se notează* $H_f(x_0)$. *Ea are expresia*

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Având în vedere teorema lui Schwarz, pentru $f \in C^2(A)$, *matricea Hesse (hessiana)* $H_f(x_0)$, $x_0 \in A$ *este o matrice simetrică, adică* $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$, *oricare ar fi* i, j *cu* $1 \leq i, j \leq p$.

Definiţia 0.0.13 *Se spune că funcţia* $f \in C^n(A)$ *este de* n *ori diferenţiabilă în punctul* $x_0 \in A$*, dacă şi numai dacă funcţiile* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$*,* $(1 \leq i \leq p)$ *sunt diferenţiabile de* $n-1$ *ori în punctul* x_0.

Altfel exprimat, această definiţie arată că f este de n ori diferenţiabilă în punctul $x_0 \in$ A, dacă f este de $n-1$ ori diferenţiabilă în acel punct, iar aplicaţia

$$d^{n-1}f : \mathrm{A} \ni x \longmapsto d_x^{n-1}f \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$$

este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in$ A. Prin urmare, $d_x^n f \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ şi

$$d_{x_0}^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_p}dx_p\right)^{[n]} f(x_0)$$

care este o expresie simbolică a diferenţialei de ordinul $n \in \mathbb{N}$. Forma condensată pentru orice $x \in$ A se poate scrie

$$\boxed{\mathrm{d}^n f = \left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right]^{[n]}}$$

Aşadar, diferenţialele de ordin superior $d^j f(x), j \geq 3$ sunt forme diferenţiale de ordinul j în $dx_1, dx_2, ..., dx_p$, deci se reprezintă sub forma

$$d^j f(x) = \sum_{k_1,...,k_j=1}^{p} \frac{\partial^j f(x)}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}...\partial x_{k_j}} dx_{k_1}dx_{k_2}...dx_{k_j},$$

expresie în care $k_1, k_2, ..., k_j$ sunt indici de însumare între 1 şi p.

Formula lui Taylor

Cele mai importante aplicaţii ale formulei lui Taylor se referă la calculul aproximativ ale valorilor unei funcţii şi la determinarea unor condiţii suficiente de extrem. De aceea, în prima parte a acestui paragraf, vom prezenta "problema aproximării locale" a oricărei funcţii $f \in C^n$.

Cazul particular al funcţiilor reale de variabilă reală

Teorema 0.0.14 *(Formula Taylor-Lagrange) Dacă* $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(\mathbb{I})$, $\mathbb{I} = [a, b]$ *şi* $x_0 \in (a, b)$, *atunci pentru orice* $x \in \mathbb{I}$ *cu* $x \neq x_0$, *există un punct* c *situat între* x *şi* x_0 *astfel ca*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \\ &\quad + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Definiţia 0.0.15 *Funcţia polinomială* $T_n : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definită prin*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

se numeşte ***polinomul Taylor de gradul*** n, *asociat funcţiei* $f \in C^n(\mathbb{I})$, *în punctul* $x_0 \in \mathbb{I}$.

Se verifică uşor că T_n realizează o aproximare de ordinul n într-o anumită vecinătate V a punctului $x_0 \in \mathbb{I}$. Funcţia $R_n : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ se numeşte **restul de ordinul** n al formulei Taylor, iar expresia

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), c \in (x_0, x)$$

restul formulei Taylor sub forma Lagrange.

Eroarea comisă prin aproximarea lui f prin T_n are expresia

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{(b - a)^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(c) \right|, c \in (a, b) = \mathbb{I}$$

Din această relaţie rezultă că

$$f(x) = T_{(n,x_0)}(x) + R_{(n,x_0,c)}(x).$$

În aplicaţii se obişnuieşte să se utilizeze aproximarea,

$$f(x) \simeq T_{(n,x_0)}(x),$$

cu scopul obţinerii valorilor lui f şi ale derivatelor sale în punctul vecin x_0.

- Pentru $n = 1$, aproximarea este **liniară** , cu polinomul Taylor

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0),$$

care geometric, este o dreaptă, tangentă în $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f.

- Pentru $n = 2$, aproximarea este **pătratică**, cu polinomul Taylor

$$T_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0),$$

care are ca grafic o parabolă.

Dacă $0 \in \mathbb{I}$, în condiţiile Teoremei 6.4.1, pentru $c \in (0, x)$ relaţia

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

se numeşte **formula Mac Laurin** asociată funcţiei f.

Cazul general al funcţiilor reale cu p variabile

Teorema 0.0.16 *(Formula Taylor-Young). Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi convexă, $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_p) \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^{n+1}(A)$, atunci oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ există $\xi \in [x_0, x]$ astfel încât să avem*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!}\left[\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{[1]} f(x_0) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{[2]} f(x_0) + \\ &+ ... + \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{[n]} f(x_0) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{[n+1]} f(\xi). \end{aligned} \tag{1}$$

Observaţia 0.0.17 *Funcţia polinomială $T_n : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{[1]} f(x_0) + ... \tag{2}$$
$$... + \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{[n]} f(x_0)$$

se numeşte ***polinomul Taylor de gradul n*** *asociat lui f în punctul x_0, iar expresia*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

în care

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{[n+1]} \cdot f(\xi), \xi = x_0 + \theta(x - x_0),$$

se numeşte ***formula lui Taylor de ordinul n****, asociată lui f în $x_0 \in A$.*

Pentru $n = 1$, din (2) se obţine ***formula creşterilor finite Lagrange****,*

$$f(x_1, x_2, ..., x_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p) = \sum_{i=1}^{p}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi), \quad \xi \in [x_0, x].$$

Probleme rezolvate

1. Să se dezvolte după puterile lui x (în jurul punctului $x = 0$), funcţia $f(x) = 3x + (1+x)^3 - (1-x)^5$.

Soluţie. Se scrie formula Mac Laurin asociată funcţiei date. Avem

$f'(x) = 3(1+x)^2 + 5(1-x)^4 + 3$, deci $f'(0) = 11$

$f''(x) = 6(1+x) - 20(1-x)^3$, deci $f''(0) = -14$

$f'''(x) = 6 + 60(1-x)^2$, deci $f'''(0) = 66$

$f^{(4)}(x) = -120(1-x)$, deci $f^{(4)}(0) = -120$,

$f^{(5)}(x) = 120$, deci $f^{(5)}(0) = 120$.

Se obţine

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}f^{(5)}(0),$$

aşa că

$$f(x) = 11x - 7x^2 + 11x^3 - 5x^4 + x^5.$$

2. Să se dezvolte după puterile lui x funcţia $f(x) = a^x, a > 0$.

Soluţie. Din dezvoltarea funcţiei $f(x) = e^x$ rezultă

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + ... + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!} + ..., |x| < \infty.$$

3. Să se scrie dezvoltarea trinomului $f(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 - z^2 + 2xy - 5xz - 3yz$ după puterile lui $x + 2$, $y + 1$, şi z.

Soluţie. Problema revine la determinarea polinomului Taylor de gradul doi, asociat funcţiei f în punctul $x_0 = (-2, -1, 0)$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = (4x + 2y - 5z)|_{x_0} = -10,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = (-6y + 2x - 3z)|_{x_0} = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0) = (-2z - 5x - 3y)|_{x_0} = 13,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) = -6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0) = -2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x_0) = -3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x_0) = -5.$$

Prin urmare, dezvoltarea cerută este

$$\begin{gathered} f(x, y, z) = 1 - 10(x + 2) + 2(y + 1) + 13z + 2(x + 2)^2 - 3(y + 1)^2 - \\ -z^2 + 2(x + 2)(y + 1) - 3(y + 1)z - 5(x + 2)z. \end{gathered}$$

4. Să se scrie polinomul Taylor de gradul trei asociat funcţiei $f(x, y) = x^y$ în punctul A(1,1). Folosind apoi rezultatul obţinut, să se calculeze numărul $1,1^{1,02}$.

Soluţie. Forma polinomului căutat este dată de expresia

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad \simeq \quad & T_3(x,y) = f(1,1) + \frac{1}{1!}\left[(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right] + \\ & +\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) + (y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) + \right. \\ & \left. +2(x-1)(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\right] \\ & +\frac{1}{3!}\left[(x-1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) + 3(x-1)^2(y-1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,1)\right. \\ & \left. +3(x-1)(y-1)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,1) + (y-1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1)\right]. \end{aligned}$$

Derivatele parţiale de diferite ordine sunt:

$$f(x,y)=x^y,\ f(1,1)=1;$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=y\,(y-1)\,x^{y-2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^y\ln^2 x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=1;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=y\,(y-1)\,(y-2)\,x^{y-3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=(2y-1)\,x^{y-2}+y\,(y-1)\,x^{y-2}\ln x,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1,1)=1;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,1)=0;$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)=x^y\ln^3 x,\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1)=0.$$

Înlocuind aceste rezultate în expresia lui $T_3(x,y)$ se obţine

$$x^y\simeq T_3(x,y)=1+(x-1)+(x-1)\,(y-1)+\frac{1}{2}\,(x-1)^2\,(y-1)\,.$$

Luând aici $x=1,1$ şi $y=1,02$, iar $x_0=1,y_0=1$ rezultă

$$1,1^{1,02}\simeq 1+0,1+0,1\cdot 0,2+\frac{1}{2}0,01\cdot 0,2=1,1021.$$