Curs Nr. 4

Şiruri de funcţii

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.0.1 Aproximarea unei serii convergente

Are loc descompunerea:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n,$$

unde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ este suma parţială de ordinul n, iar $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ este restul de ordinul n al seriei. Aproximarea sumei prin suma parţială de ordinul n, $S \simeq S_n$ produce eroarea absolută $|S - S_n| = |R_n|$. Evaluarea erorii se realizează prin determinarea unei margini superioare a erorii absolute $|R_n|$ independentă de suma S după cum urmează:

- Dacă seria de numere pozitive $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă conform criteriului rădăcinii, $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, atunci eroarea absolută se majorează prin

$$R_n \leq \frac{l^{n+1}}{1-l}.$$

- Dacă seria de numere pozitive $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă conform criteriului raportului, $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, atunci eroarea absolută se majorează prin

$$R_n \leq \frac{a_{n+1}}{1-l}.$$

- Dacă seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz, atunci eroarea absolută se majorează prin

$$R_n \leq a_{n+1}.$$

  Mai mult, eroarea R_n are semnul primului termen neglijat.

0.1 Şiruri de funcţii

Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă şi fie f_i, $i = 0, 1, 2, ...$ funcţii reale definite pe mulţimea A. Şirul $f_0, f_1, f_2, ...$ se numeşte şir de funcţii şi se notează cu $(f_n)_{n\geq 0}$.

La fel ca şi în cazul şirurilor numerice, dorim să studiem proprietăţile de convergenţă ale şirurilor de funcţii, investigând posibilele moduri în care se poate defini noţiunea de convergentă, şi să cercetăm dacă tipurile de convergenţă astfel definite realizează sau nu transmiterea unor proprietăţi uzuale ale funcţiilor de la termenii unui şir de funcţii la funcţia limită.

Definiţia 0.1.1 *Se spune că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ este punctual (sau simplu convergent) pe mulţimea A la funcţia f, dacă şirul numeric $(f_n(x_0))$ converge în $\mathbb{R}$ la $f(x_0)$ pentru fiecare $x_0 \in A$ şi se scrie $f_n \rightarrow_{s.} f$.*

Definiţia 0.1.2 *Funcţia $f : A_c \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, se numeşte funcţia limită a şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemplul 1. Fie $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx + 1}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{nx}} = 1, \text{pentru } x \in (0, 1],$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pentru $x = 0$. Deci mulţimea de convergenţă a şirului este $[0, 1]$, iar funcţia limită este

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Folosind definitja convergenţei unui şir numeric, se obtjne:

Definiţia 0.1.3 *Şirul de funcţii $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplu la funcţia sa limită f, $f_n \rightarrow_s f$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ (n_0 depinde de ε şi x) astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$.*

Definiţia 0.1.4 *Şirul de funcţii (f_n), $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numeşte **uniform convergent** pe $A_u \subset A$ către funcţia $f : A_u \rightarrow \mathbb{R}$ şi se scrie $f_n \overset{(u.c)}{\underset{A_u}{\rightarrow}} f$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$*

există $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$ *şi oricare ar fi* $x \in A_u$, *are loc inegalitatea*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemplul 2 (şir simplu convergent, dar care nu este uniform convergent) $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$.

- (convergenţa simplă) Are loc inegalitatea $0 \leq x^n(1-x^n) \leq x^n$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pentru $x \in [0,1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pentru $x \in [0,1)$. Deoarece $f_n(1) = 0$, pentru $n \geq 0$, urmează $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, deci $f_n \to_s f$ unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
- (convergenţa uniformă) Presupunem că $f_n \to_u f$ pentru $n \to \mathbb{R}$. Fie $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{4}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in [0,1]$. Dar $f_n(\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}) = \dfrac{1}{4}$, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus, deci $f_n \nrightarrow_u f$.

0.1.1 Criterii de convergenţă uniformă

Teorema 0.1.5 *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}, f_n : A \to \mathbb{R}$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$. *Atunci* $f_n \to_{u.} f$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|) = 0$.

Exemplul 3 Arătaţi că şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ este uniform convergent.

Soluţie. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f_n \to_s f$, unde $f(x) = 0$. Cum f_n este impară, $f_n(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$, deci $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\geq 0} f_n(x)$. Avem $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$, deci pentru $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ rezultă

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) = f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0,$$

pentru $n \to \infty$ deci $f_n \to_{u.} f$.

Teorema 0.1.6 *Fie* $(f_n)_{n\geq 0}, f_n : A \to \mathbb{R}$ *şi* $f : A \to \mathbb{R}$. *Atunci* $f_n \overset{(u.)}{\to} f$ *dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *a.î.* $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in A$.

Teorema 0.1.7 *Fie $(f_n)_{n\geq 0}, f_n : A \to \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci $f_n \overset{(u.)}{\to} f$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A.$$

Observaţie Şirurile fundamentale sunt fundamentale în mod uniform în sensul că rangul indicat în condiţiile lui Cauchy depinde doar de ε şi nu de x.

Exemplul 4 Să se arate că şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent.

Soluţie. $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}$ $= \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+p+1} < \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Din Teorema 0.1.5 rezultă f_n este un şir uniform convergent.

Teorema 0.1.8 *(**Criteriul majorării**) Fie $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere reale pozitive astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ şi $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ atunci $f_n \overset{u.}{\to} f$.*

Exemplul 5 Arătaţi că următoarele şiruri de funcţii sunt uniform convergente:
i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$; **ii)** $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2+2}{nx}$.

Soluţie. **i)** $|f_n(x) - 0| = \left|\dfrac{\cos nx}{n^2+1}\right| < \dfrac{1}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$, conform criteriului majorării rezultă $f_n \overset{u.}{\to} 0$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx^2+2}{nx} = x$, deci $f_n \overset{s.}{\to} f$, unde $f(x) = x, \in [1,2]$.
$|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx^2+2}{nx} - x\right| = \dfrac{2}{nx} < \dfrac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [1,2]$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, conform criteriului majorării rezultă $f_n \overset{(u.)}{\to} f$.

Observaţie. *Orice şir uniform convergent este în mod necesar şi simplu convergent. Funcţia limită f dată de criteriul majorării, este de fapt, limita simplă a şirului f_n.*

Teorema 0.1.9 *(Teorema lui Dini) Fie A o mulţime compactă (mărginită şi închisă) şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

- $f_n \stackrel{s.}{\to} f$
- $(f_n)_n$ *este un şir monoton de funcţii, adică* $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ *sau* $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$;
- *fiecare funcţie* f_n *este continuă pe* A

atunci $f_n \stackrel{u.}{\to} f$.

Propoziţia 0.1.10 *(Criteriu de convergenţă neuniformă) Dacă* $f_n \stackrel{s.}{\to} f$ *atunci* $f_n \stackrel{u.}{\nrightarrow} f$ *dacă şi numai dacă există un şir de numere* $(x_n)_n \subset A$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0.$$

Exemplul 6 Arătaţi că şirul de funcţii $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, nu este uniform convergent.

Soluţie. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{n+x} = x$, deci $f_n \stackrel{s.}{\to} f$, unde $f(x) = x, \in [0, \infty)$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{n+x} - x\right| = \frac{x^2}{n+x}.$$

Fie şirul $x_n = n$. Rezultă

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n}{2} \to \infty \neq 0,$$

deci conform Propoziţiei 0.1.8. rezultă că $f_n \stackrel{u.}{\nrightarrow} f$.

0.1.2 Transmiterea unor proprietăţi prin convergenţa uniformă

S-a observat anterior că prin convergenţa punctuală proprietăţile de continuitate şi derivabilitate nu se transmit neapărat de la termenii şirului către funcţia limită. Vom observa în cele ce urmează că vehiculul potrivit de transmitere a proprietăţilor uzuale este convergenţa uniformă.

Mărginire

Teorema 0.1.11 *Fie* $(f_n)_{n\ge 0}$ *un şir de funcţii definite pe mulţimea* A *şi mărginite pe* A*, astfel încât* $f_n \stackrel{u.}{\to} f$ *pentru* $n \to \infty$*, unde* $f : A \to \mathbb{R}$*. Atunci* f *este de asemenea mărginită pe* A*.*

Continuitate

Teorema 0.1.12 *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea A şi continue pe A, astfel încât $f_n \overset{u.}{\to} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea continuă pe A.*

Derivabilitate Prin analogie cu transmiterea proprietăţilor de mărginire şi continuitate de la termenii unui şir uniform convergent către funcţia limită, s-ar putea crede că şi proprietatea de derivabilitate se transmite prin convergenţa uniformă. Acest lucru nu este însă adevărat, aşa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplul 7 Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2n}, & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2}, & x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ x + \frac{1}{n}, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Să se arate că f_n e derivabilă pe $\mathbb{R}$, converge uniform la funcţia sa limită f, dar aceasta nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Avem $f_n'(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{n} \\ nx, & x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$. Se verifică uşor că f_n e derivabilă pe $\mathbb{R}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Fie acum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Rezută

- $|f_n(x) - f(x)| = \left|-\dfrac{1}{2n}\right| = \dfrac{1}{2n}$, pentru $x \leq -\dfrac{1}{n}$;
- $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx^2}{2} - |x|\right| \leq \dfrac{n}{2}|x|^2 + |x| < \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{3}{2n}$, pentru $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$;
- $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{1}{2n}\right| = \dfrac{1}{2n}$, pentru $x \geq \dfrac{1}{n}$.

Prin urmare, avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2n}, \forall x \in \mathbb{R},$$

iar conform criteriului majorării rezultă $f_n \overset{u.}{\to} f$. Totuşi, funcţia limită f nu este derivabilă în $x = 0$, deci proprietatea de derivabilitate nu se transmite neapărat prin convergenţa uniformă.

Observaţie. Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii este o proprietate globală, măsurând, într-un anumit sens, cât de "aproape" sunt termenii acestui şir de funcţia limită, în vreme ce derivabilitatea unei funcţii este o proprietate locală, măsurând viteza de variaţie a acelei funcţii. În acest sens, două funcţii pot avea valori "apropiate", dar valorile uneia dintre ele pot varia cu mult mai repede decât valorile celeilalte, fie şi doar local, caz în care derivatele celor două funcţii nu vor fi "apropiate" una de alta.

Se va observa însă că transferul de derivabilitate se produce în condiţiile în care sunt asigurate atât convergenţa uniformă a şirului funcţiilor, cât şi convergenţa uniformă a şirului derivatelor.

Teorema 0.1.13 *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii derivabile definite pe un interval I şi fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât*

i) f_n este uniform convergent $f_n \overset{u.}{\to} f$;

ii) f_n' este uniform convergent $f_n' \overset{u.}{\to} g$; pentru $n \to \infty$. Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune şi sub forma

$$\boxed{(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} (f_n'(x))}$$

spunându-se că, în condiţiile teoremei, limita derivatelor este derivata limitei.

Integrabilitate

Teorema 0.1.14 *Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ un şir de funcţii integrabile Riemann definite pe un interval $[a, b]$ astfel încât $f_n \overset{u.}{\to} f$ pentru $n \to \infty$, unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, iar*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.}$$