# Curs Nr. 1

# Şiruri numerice (recapitulare şi completări)

**Lector Dr. ADINA JURATONI**
**Departamentul de Matematică**
**UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA**

## 0.1 Şiruri numerice

**Definiţia 0.1.1** *Se numeşte şir de numere reale o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural $n$ numărul real $a_n$, numit termenul general al şirului sau termenul de rang $n$ al şirului.*

În anumite situaţii, un şir de numere reale este considerat ca fiind o funcţie cu valori reale definită pe mulţimea

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\},$$

unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este un număr natural fixat, de exemplu, $x_n = \frac{1}{n(n-1)}$ , pentru $n \geq 2$, caz în care, şirul va fi notat $(x_n)_{n \geq n_0}$.

Orice şir de numere reale $(x_n)_{n \geq n_0}$ poate fi prelungit la un şir $(x_n)_{n \geq 0}$., de aceea, în prezentarea teoretică a rezultatelor din acest subcapitol, vom considera şiruri de forma $(x_n)_{n \geq 0}$. Pentru a nu complica notaţiile, un şir va fi notat simplu $(x_n)$. Prin abuz de notaţie, de multe ori, este convenabil ca în loc de "şirul cu termenul general $x_n$" să scriem "şirul $x_n$".

**Definiţia 0.1.2** *Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton dacă şi numai dacă $sgn(a_{n+1} - a_n)$ este constant oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.*

- *Dacă $a_{n+1} - a_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton crescător;*
- *Dacă $a_{n+1} - a_n < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton descrescător*

**Remarca 1** Pentru ca un şir $(x_n)$ să fie crescător/descrescător este necesar ca toţi termenii săi să fie în ordine crescătoare/descrescătoare. De exemplu, dacă un şir este strict crescător pentru un număr finit de termeni şi apoi strict descrescător, nu rezultă că şirul dat este descrescător.

**Definiţia 0.1.3** *Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$. Un şir care nu este mărginit se numeşte şir nemărginit.*

*Şirul $(x_n)$ este nemărginit dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n| > M$.*

**Remarca 2** Pentru ca un şir $(x_n)$ să fie mărginit este suficient ca relaţia $|a_n| \leq M$ să fie verificată începând de la un anumit rang $n_0$, adică şirul $(x_n)$ este mărginit dacă şi numai dacă există$M > 0$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n| \leq M$, pentru orice $n \geq n_0$.

**Remarca 3** Şirul $(x_n)$ este mărginit dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \leq b$ astfel încât $a \leq x_n \leq b$, pentru orice$n \in \mathbb{N}$, ceea ce este echivalent cu faptul că şirul $(x_n)$ este atât mărginit inferior (există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \geq a$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$), cât şi mărginit superior (există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

**Exemplul 1.** Şirul cu termenul general $x_n = \{\sqrt{n}\}, n \in \mathbb{N}$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a unui număr real $x$, este mărginit, căci $0 \leq x_n < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, şirul definit prin $x_n = [\sqrt{n}], n \in \mathbb{N}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x$, este mărginit inferior, căci $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar nu este mărginit superior. Într-adevăr, pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există n $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n} \geq b + 1$, de unde $x_n = [\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1 \geq b$.

**Definiţia 0.1.4** *Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cu limita $l \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este verificată condiţia*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, |x_n - l| < \varepsilon.$$

*În acest caz, notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.*

*Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.*

**Definiţia 0.1.5** *Spunem că un şir $(x_n)$ are limita $+\infty$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ sau $x_n \to \infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$. În mod analog, un şir $(x_n)$ are limita $-\infty$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ sau $x_n \to -\infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$.*

*Spunem că un şir $(x_n)$ are limită dacă $(x_n)$ are limită finită (este convergent) sau $(x_n)$ are limită infinită, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{\pm\infty\}$.*

*Un şir de numere reale $(x_n)$ este divergent dacă fie are limită infinită, fie nu are limită.*

**Propoziţia 0.1.6** *Dacă şirul $(x_n)$ are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită.*

**Remarca 4** Dacă un şir admite două subşiruri care au limite diferite, atunci şirul dat nu are limită, deci este divergent. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$ nu are limită, căci $x_{2n} = 1 \to 1$ şi $x_{2n+1} = -1 \to -1$.

**Remarca 5** Atât limita unui şir, cât şi convergenţa sa nu sunt influenţate de un număr finit de termeni ai şirului respectiv. Cu alte cuvinte, dacă înlocuim sau eliminăm un număr finit de termeni ai unui şir, respectiv dacă adăugăm un număr finit de termeni şirului, atunci şirul astfel obţinut are aceeaşi natură din punct de vedere al convergenţei ca şirul iniţial şi aceeaşi limită, în cazul în care aceasta există.

**Propoziţia 0.1.7** *(Operaţii cu şiruri convergente)*

- *Dacă $(x_n)$ este un şir convergent şi $\alpha$ este un număr real, atunci şirul $(\alpha x_n)$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*
- *Dacă şirurile $(x_n), (y_n)$ sunt convergente, atunci şirurile $(x_n+y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ sunt convergente şi au loc relaţiile: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$.*

  *În plus, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

**Propoziţia 0.1.8** *(Trecerea la limită în inegalităţi)*
*Fie $(x_n)$ şi $(y_n)$ două şiruri de numere reale care au limită.*

- *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n \leq y_n$ *pentru orice* $n \geq n_0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

- *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n < y_n$ *pentru orice* $n \geq n_0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

  *Reciproc, dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *atunci există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n < y_n$ *pentru orice* $n \geq n_0$.

**Propoziţia 0.1.9** *Orice şir monoton are limită.*

**Propoziţia 0.1.10** *(Lema lui Newman) Orice şir de numere reale conţine un subşir monoton.*

**Teorema 0.1.11** *(Teorema Bolzano-Weierstrass) Orice şir măarginit conţine un subşir convergent.*

**Propoziţia 0.1.12** *(criteriul cleştelui) Fie* $(a_n), (b_n), (x_n)$ *trei şiruri de numere reale care îndeplinesc proprietăţile:*

*i) şirurile* $(a_n), (b_n)$ *sunt convergente cu aceeaşi limită* $x$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$$

*ii) începând de la un rang* $n_0$ *toţi termenii şirului* $x_n$ *verifică dubla inegalitate*

$$a_n \leq x_n \leq b_n,$$

*atunci şirul* $(x_n)$ *este convergent şi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

**Corolarul 0.1.13** *(criteriul majorării)*

1. *Fie* $(x_n)$ *şi* $(y_n)$ *două şiruri de numere reale cu proprietăţile:*

   *i)* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

   *ii) există* $x \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $|x_n - x| \leq |y_n|$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

2. *Dacă există un şir* $(y_n)_{n\geq n_0}$ *cu* $y_n \to -\infty$ *astfel încât* $x_n \leq y_n$, *pentru* $n \geq n_0$, *atunci* $x_n \to -\infty$.

3. *Dacă există un şir* $(y_n)_{n\geq n_0}$ *cu* $y_n \to \infty$ *astfel încât* $x_n \geq y_n$, *pentru* $n \geq n_0$, *atunci* $x_n \to \infty$.

**Corolarul 0.1.14** *Fie* $(x_n)$ *şi* $(y_n)$ *două şiruri de numere reale, primul mărginit, iar cel de-al doilea convergent cu limita* $0$. *Atunci şirul produs* $(x_n \cdot y_n)$ *este convergent şi are limita* $0$.

**Teorema 0.1.15** *(Weierstrass) Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Reciproca aceste teoreme este falsă, există şiruri care sunt convergente, dar nu sunt monotone. Un astfel de exemplu este şirul cu termenul general $(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

**Propoziţia 0.1.16** *(Criteriul raportului) Fie* $(x_n)$ *un şir de numere reale pozitive astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty].$$

*i) Dacă* $l < 1$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;
*ii) Dacă* $l > 1$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Dacă limita l din enunţul criteriului raportului este 1, atunci limita şirului $(x_n)$ nu poate fi calculată cu ajutorul acestui criteriu, caz în care vom încerca să determinăm limita şirului $(x_n)$ folosind criteriul raportului generalizat.

**Propoziţia 0.1.17** *(Criteriul raportului generalizat) Fie* $(x_n)$ *un şir de numere reale pozitive astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right] = l \in [0, \infty].$$

*i) Dacă* $l < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,
*ii) Dacă* $l > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

**Propoziţia 0.1.18** *(Criteriul rădăcinii) Fie $(x_n)$ un şir de numere reale pozitive astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty).$$

*Atunci* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$

**Teorema 0.1.19** *(Stolz-Cesàro) Fie $(x_n)$ şi $(y_n)$ două şiruri de numere reale care satifac condiţiile:*

*i) şirul $(y_n)$ este crescător şi nemărginit*

*ii) există* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l,$ *(finită sau infinită)*

*atunci şirul cu termenul general* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *are limită şi în plus,* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$

**Definiţia 0.1.20** *Şirul $(x_n)$ se numeşte şir fundamental, sau şir Cauchy, dacă şi numai dacă este verificată condiţia*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \text{a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

**Teorema 0.1.21** *(completitudinea dreptei reale) Orice şir fundamental de numere reale este convergent.*

## Limite remarcabile

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 0, p > 0 \\ 1, p = 0 \\ \infty, p < 0 \end{cases},$ 2. $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, |q| < 1 \\ 1, q = 1 \\ \infty, q > 1 \end{cases},$

3. $\lim_{n\to\infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p) = \begin{cases} -\infty, a_0 < 0 \\ \infty, a_0 > 0 \end{cases}$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + ... + b_q} = \begin{cases} 0, p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, p = q \\ \infty \cdot sgn\frac{a_0}{b_0}, p > q \end{cases},$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,(a\in\mathbb{R})$, 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^r}=0,(r>0)$,

8. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$, 9. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$,

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{bn}=e^{ab}$, 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+...+\dfrac{1}{n!}\right)=e$,

Mai mult, are loc dubla inegalitate:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\text{, pentru } n\in\mathbb{N}^*.$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a,(a>0)$,

13. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^r-1\right)=r,(r\in\mathbb{R})$,

14. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, integrabilă $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int\limits_0^1 f(x)dx$,

15. Dacă $(x_n)$ este un şir de numere reale nenule astfel încât $x_n\to 0$ atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arcsin x_n}{x_n}=1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan x_n}{x_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan x_n}{x_n}=1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a, a\in(0,1)\cup(1,\infty)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+x_n)^r-1}{x_n}=r,\ r\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n))^{\frac{1}{x_n}}=e$.

Următoarele identitătţi vor fi utile în studiul convergenţei unor serii:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\ \text{dacă } x\neq 2p\pi, p\in\mathbb{Z},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin \dfrac{nx}{2} \sin \dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2p\pi, p \in \mathbb{Z}.$$