Analiză Matematică - SETUL 4 - Şiruri şi serii de funcţii

1. Fie şirurile de funcţii $f_n, g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, g_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$. Pentru fiecare şir se cere:

(i) Mulţimea de convergenţă şi limita sa;

(ii) Arătaţi că şirurile nu sunt uniform convergente pe $[-1,1]$;

(iii) Arătaţi că şirurile sunt uniform convergente pe mulţimea $A = [-a,a]$, $0 < a < 1$.

2. Studiaţi convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă a următoarelor şiruri de funcţii:

(i) $f_n(x) = \frac{nx}{n^3x^2+1}$ pe $\mathbb{R}$;

(ii) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2+4}$ pe $[0,\infty)$.

3. Fie şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx+n}{n+x+2}$.

(i) Să se determine mulţimea de convergenţă şi limita sa;

(ii) Arătaţi că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este uniform convergent pe $[0,\infty)$;

(iii) Arătaţi că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent pe orice interval $[a,b] \in [0,\infty)$.

4. Studiaţi uniform convergenţa următoarelor serii de funcţii:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2+x+n}, x \in (-1,\infty); \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(nx)}{n^2}, x \in \mathbb{R};$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right), x \in \mathbb{R}.$$

5. Să se dezvolte în serie funcţiile următoare, specificându-se intervalul pe care are loc dezvoltarea

(i) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-2,3\} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$ după puterile lui x;

(ii) $f_2 : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, f_2(x) = \ln(1+x)$ după puterile lui x şi apoi după puterile lui $x-3$;

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{1}{2x+3}$ după puterile lui x şi apoi după puterile lui $x-1$.

6. Determinaţi mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$;

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;

vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{2n}}{n \cdot 3^n}$;

viii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} x^{2n-2}$;

ix) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$;

x) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$;

xi) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} x^{2n+1}$;

7. Să se demonstreze că următoarea serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

este convergentă pentu orice $x \in [-1, 1]$ iar suma ei verifică ecuaţia:

$$(1-x)S'(1-x) - xS'(x) = \ln \frac{1-x}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

8. Să se scrie formula lui Mac-Laurin de ordinul n pentru următoarea funcţie:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x}.$$

9. Să se scrie formula lui Mac-Laurin de ordinul n pentru funcţiile:

i) $f_1(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$;

ii) $f_2(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$;

iii) $f_3(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$;

iv) $f_4(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$;

v) $f_5(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$;

vi) $f_6(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$;

vii) $f_7(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$;

viii) $f_8(x) = (1+x)^p, x \in (-1, \infty), p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

ix) $f_9(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x \in \mathbb{R}$;

x) $f_{10}(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$;

xi) $f_{11}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$;

xii) $f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}, x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$;

xiii) $f_{13}(x) = \arcsin x, |x| \le 1$;

10. Folosind formulele lui Taylor, respectiv Mac-Laurin, să se calculeze următoarele limite:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3};$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}\left[2x^3-3x^2+6x-6\ln(1+x)\right]; \quad (d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)\right];$$

$$(e)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^5}\left[12\ln x+3x^4-16x^3+36x^2-48x+25\right];$$

$$(f)\ \lim_{x\to\infty} x\left[3-4x+6x^2-12x^3+12x^4(\ln(1+x)-\ln x)\right];$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^7}\left[\mathrm{tg}(\sin x)-\sin(\mathrm{tg}\ x)\right];$$

$$(h)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right);$$

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}.$$

11. Sa se dezvolte polinomul $P(x)=x^3+x^2+x+3$ dupa puterile lui $x-1$ şi ale lui $x+2$.

12. Să se calculeze folosind formulele lui Taylor sau Mac-Laurin următoarele valori aproximative:

(i) $\ln(1,1)$ pentru $n=4$;

(ii) $\sqrt[4]{260}$ pentru $n=2$.

13. Să se arate că:

a) $$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{2}\right)=\begin{cases} x & , \ x\in(0,1] \\ 2-x & , \ x\in(1,2)\end{cases};$$

b) $$\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx=\begin{cases} \cos x & , \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x & , \ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases};$$

14. Fie $f:(0,\pi)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+1$ o funcţie periodică. Se cere:
a) să se dezvolte f în serie Fourier trigonometrică;
b) să se dezvolte f în serie de sinusuri;
c) să se dezvolte f în serie de cosinusuri;
d) să se calculeze suma seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

15. Dezvoltaţi în serie Fourier trigonometrică funcţia periodică, de perioadă 2π,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin(x)) & , \quad x \neq k\pi \\ 0 & , \quad x = k\pi \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbf{Z}$$

Calculaţi apoi $S(x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

16. Dezvoltaţi în serie Fourier trigonometrică de cosinusuri funcţia periodică, de perioadă π

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2\alpha} & , \quad x \in [0, 2\alpha] \\ 0 & , \quad x \in (2\alpha, \pi) \end{cases} \quad ; \quad \alpha > 0.$$

17. Dezvoltaţi în serii Fourier trigonometrice funcţiile periodice $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$

(i) $f(x) = \begin{cases} a & , \quad x \in (-\pi, 0] \\ b & , \quad x \in (0, \pi) \end{cases}$;

(ii) $f(x) = x^2$;

(iii) $f(x) = x$.