Introducción a la Probabilidad y la Estadística

Martes y Jueves Aula B17

Docentes

Docentes

Teóricos

- Dra Ana Georgina Flesia

Prácticos

- Lic. Laura Montes
- Lic. Giuliana Castigliony
- Lic. Mikhail Rios

Experimentos

Definiciones

- **Espacio muestral** Ω de un experimento aleatorio: conjunto de todos los posibles resultados distintos de dicho experimento
- **Suceso** A: cualquier subconjunto del espacio muestral
- **Sucesos elementales:** sucesos formados por un único resultado, $A = \{s\}$

Suceso = Evento = subconjunto del espacio muestral

Operaciones entre sucesos:

- **Unión**:

$$A \cup B = \{s \in \Omega : s \in A, \text{ o } s \in B\}$$

(sucesos elementales que pertenecen a A o bien a B, incluyendo los que están en ambos simultáneamente)

- **Intersección**:

$$A \cap B = \{s \in \Omega : s \in A, \text{ y } s \in B\}$$

(sucesos elementales que pertenecen a A y B a la vez)

  - **sucesos incompatibles**: tienen intersección vacía

- **Diferencia**:

$$A \setminus B \equiv A - B = \{s \in \Omega : s \in A \text{ y } s \notin B\}$$

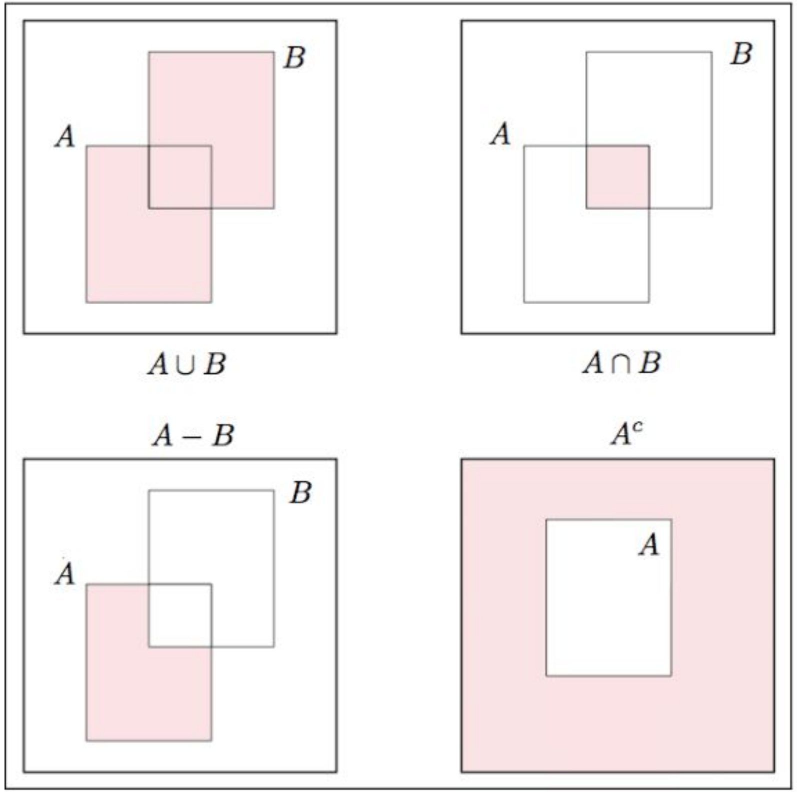
(sucesos elementales que pertenecen a A, pero no a B)

- **Complementario**:

$$\bar{A} \equiv A^c = \{s \in \Omega : s \notin A\}$$

(conjunto diferencia $\Omega - A$)

Recordemos las operaciones entre conjuntos



Probabilidad

Definición "axiomática" de la probabilidad

Definición rigurosa $\Rightarrow$ se establecen leyes o *axiomas* (menor conjunto posible de reglas tales que las demás se deducen como una consecuencia) que debe cumplir una función de probabilidad

Llamamos **función de probabilidad** a una función $\mathcal{P}$ que verifica los siguientes axiomas:

A1. Está definida en el conjunto de partes del espacio muestral Ω y toma valores en el intervalo [0,1]:

$$\mathcal{P} : \mathbb{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1],$$

$$\forall A \subset \Omega \quad 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$$

A2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

A3. Si $A_1, ..., A_n, ...$ son sucesos disjuntos o incompatibles ($\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \phi$) entonces $\mathcal{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathcal{P}(A_n)$

- Función de Probabilidad
- Medida de probabilidad
- Probabilidad

Caso simple: Espacio **Equiprobable**.

- Ω tiene n posibles resultados diferentes
- los n resultados tienen la misma probabilidad $\frac{1}{n}$ de aparecer

Regla de Laplace:

La probabilidad de un suceso formado por k sucesos elementales $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ es:

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}(a_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$\frac{\text{casos probables}}{\text{casos posibles}}$$

Este procedimiento para hallar la probabilidad de un suceso es correcta **sólo en espacios equiprobables**

Consecuencias:

Propiedades:

1. $\mathcal{P}(\phi) = 0$
2. $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$
3. Si $A \subset B$ entonces $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
4. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$
5. $\mathcal{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathcal{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathcal{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i)$

Al espacio $(\Omega, \mathcal{P})$ se le denomina **espacio de probabilidad**

Ejemplo

El experimento consiste en lanzar un dado honesto hasta obtener un 6.

1. Defina un modelo probabilístico adecuado para este experimento.
2. Calcule la probabilidad de que se necesite lanzar un dado entre dos y cuatro veces hasta obtener un 6.

Resolución ítem 1.

- Experimento auxiliar: Tirada del dado $\Omega_1 = \{1, .., 6\}$ Espacio equiprobable, $P_1(\omega) = 1/6$ (Probabilidad de Laplace)
- Cada tirada del dado incurre en un 6 o un No6, con probabilidad $P_1(6) = 1/6$ y $P_1(No6) = P_1(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 5/6.$
- Un resultado del experimento "lanzo un dado honesto hasta obtener un 6" es una sucesión finita de No6 finalizada por un 6. Si se necesitan k tiradas para obtener un 6, defino la probabilidad del punto ω_k por $P(\{\omega_k\}) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. ¿Es esta una distribución de probabilidad? Por lo que dijimos antes, solo basta ver que

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{\omega_k\}) = 1$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (5/6)^{k-1}(1/6) = 1/6 \sum_{j=0}^{\infty} (5/6)^j = 1/6 \frac{1}{1 - 5/6} = 1$$

Resolución ítem 2

- El evento $A = \{\text{Se necesitan entre dos y cuatro tiradas para obtener un 6}\}$ esta compuesto por los puntos $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$ y $\{\omega_4\}$, por lo cual

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = (5/6)^{2-1}(1/6) + (5/6)^{3-1}(1/6) + (5/6)^{4-1}(1/6)$$

$$= [(5/6)^1 + (5/6)^2 + (5/6)^3](1/6)$$

Ejemplo

Una empresa controla mensualmente el funcionamiento de sus múltiples servidores. Sea A el evento de que un servidor, elegido al azar, haya presentado una falla durante el mes de abril y sea B el evento de que ese mismo servidor haya presentado una falla durante el mes de octubre. Suponga que P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,7 y P(A $\cup$ B) = 0,9. Calcular:

1. $P(A^c); P(A \cap B)$ y $P(A \cap B^c)$.
2. La probabilidad que de falle en exactamente uno de estos meses.

Resolución

El evento A es que el servidor haya fallado en abril. La probabilidad de que no ocurra A es:

$$P(A^c) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Para calcular $P(A \cap B)$, podemos usar la fórmula de la unión de dos eventos y despejar

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,7 - 0,9 = 0,6$$

Para calcular$P(A \cap B^c)$, utilizamos la fórmula:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,6 = 0,2$$

Resoución

Para encontrar la probabilidad de que el servidor falle en exactamente uno de los meses (ya sea en abril o en octubre, pero no en ambos), sumamos las probabilidades de los eventos mutualmente excluyentes $(A \cap B^c)$ y $(A^c \cap B)$.

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,6 = 0,1$$

Finalmente, sumamos las probabilidades:

$$P(\text{falle en exactamente uno de los meses}) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

$$= 0,2 + 0,1 = 0,3$$

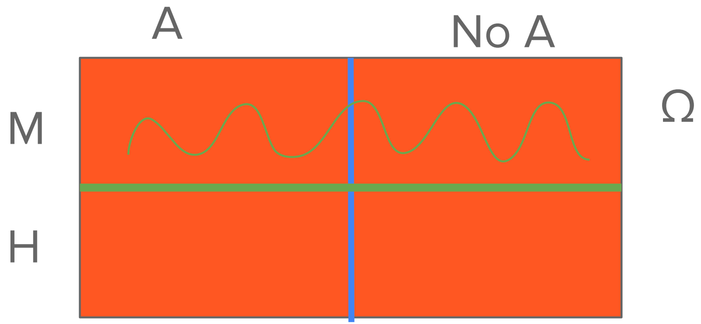
Probabilidad Condicional

Ejemplo: (Probabilidad condicionada)

Se quiere estudiar qué personas en un grupo de N mujeres y hombres tienen conocimientos de alemán. Se sabe que N_A personas (entre ellas, N_{AM} mujeres) saben alemán.

Representamos por A el suceso "saber alemán", y por M el suceso "ser mujer". Si se elige al azar una persona entre todas las del grupo, la probabilidad de que sepa alemán, al ser un experimento equiprobable, es:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{N_A}{N}$$



Si se sabe, que la persona seleccionada es mujer, la probabilidad de que sepa alemán, condicionada a que es mujer, es:

$$\mathcal{P}(A|M) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles (incorporando que es mujer)}} = \frac{N_{AM}}{N_M} = \frac{\frac{N_{AM}}{N}}{\frac{N_M}{N}} =$$

$$= \frac{\mathcal{P}(A \cap M)}{\mathcal{P}(M)}$$

- Una vez que se sabe que ha ocurrido M se puede considerar que M es el nuevo espacio muestral
- la probabilidad condicionada es la proporción de M que representa la parte de A que está en M

Probabilidad de un suceso A condicionada por un suceso B (o conocido que ha ocurrido el suceso B):

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

- **Regla de la multiplicación**:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A|B) \cdot \mathcal{P}(B)$$

Ejemplo

1. Una urna contiene tres bolas rojas y una bola azul. Dos bolas son seleccionadas **sin reposición** y su color anotado.
2. ¿Cual es el espacio muestral del experimento?
3. ¿Es equiprobable?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas seleccionadas sean rojas?.

Resolución

Sean R_1 y R_2 eventos tales que la bola roja se selecciona en la primera extracción y en la segunda extracción, respectivamente. De la regla de multiplicación

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2/R_1)$$

La probabilidad de R_1 es claramente $3/4$, pues tengo cuatro bolas, tres de ellas rojas. Ahora, si una de las bolas rojas fue removida en la primera extracción, quedan dos bolas rojas y una azul en la urna, por lo cual cambio mi experimento y la probabilidad de R_2/R_1, es decir sacar una bola roja dado que cambio mi experimento es ahora 2/3. Por lo cual

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad de un suceso A condicionada por un suceso B (o conocido que ha ocurrido el suceso B):

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Sucesos independientes:

La ocurrencia de B no dice nada nuevo acerca de la ocurrencia A:

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$$

- A, B independientes $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$

Ejemplo: (Independencia)

Consideremos el lanzamiento de dos monedas; estamos interesados en estudiar la independencia de los sucesos A=“obtener cara en el primer lanzamiento” $= \{C+, CC\}$, y B=“obtener un resultado diferente en los dos lanzamientos” $= \{C+, +C\}$.

Se tiene que:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \mathcal{P}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$A \cap B = \{C+\}, \qquad \mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

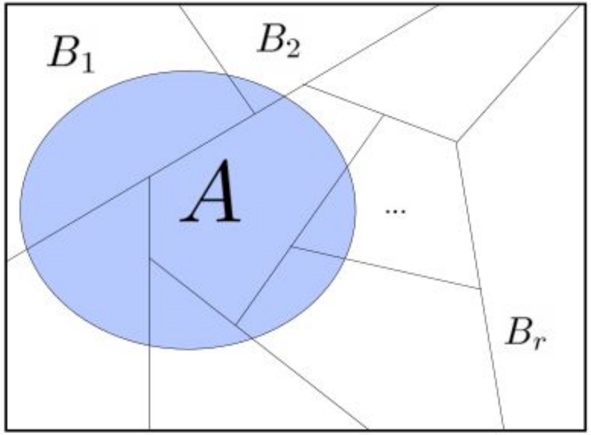
por lo que se cumple que:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

y los sucesos son independientes.

En ocasiones, Ω se puede partir en varios sucesos de probabilidad positiva B_1, B_2,..., B_r, incompatibles entre sí, es decir, en:

1. Sucesos exhaustivos: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$
2. Sucesos excluyentes:
   $B_i \cap B_j = \phi$, para todo $i \neq j$



La probabilidad de un suceso A puede calcularse a partir de las probabilidades de A condicionadas por los diferentes sucesos B_1, B_2,..., B_r.

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B_1) + \mathcal{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathcal{P}(A \cap B_r) =$$

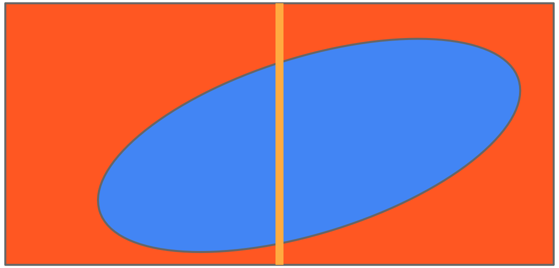
$$= \mathcal{P}(A|B_1)\mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(A|B_2)\mathcal{P}(B_2) + \cdots + \mathcal{P}(A|B_r)\mathcal{P}(B_r) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i)\mathcal{P}(B_i)$$ **(Regla de la Probabilidad Total)**

Ejemplo: (Regla de la Probabilidad total)

En una población, el 40 % son hombres, de los cuales el 80 % son aficionados al fútbol, mientras que sólo el 20 % de las mujeres, son aficionadas al fútbol. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol?

El espacio muestral puede dividirse en los sucesos exhaustivos y excluyentes B_1= "hombres" y B_2= "mujeres", cuyas probabilidades respectivas son $\mathcal{P}(B_1) = 0{,}40$ y $\mathcal{P}(B_2) = 0{,}60$.



Además, A= "ser aficionado al fútbol" cumple que $\mathcal{P}(A|B_1) = 0{,}80$ y $\mathcal{P}(A|B_2) = 0{,}20$. Por tanto, utilizando la regla de la probabilidad total:

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A|B_1)\mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(A|B_2)\mathcal{P}(B_2) = 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}44$$

En el mismo caso de un espacio muestral particionado en sucesos exhaustivos y excluyentes $B_1, ..., B_r$, reescribimos la probabilidad de B_j condicionada por el suceso A, utilizando la regla de la probabilidad total:

$$\mathcal{P}(B_j|A) = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i)\mathcal{P}(B_i)}$$

(Regla de Bayes)

- muy útil para obtener una probabilidad condicionada $\mathcal{P}(B_i|A)$ a partir de las probabilidades condicionadas en el sentido contrario $\mathcal{P}(A|B_j)$, $j = 1, ..., r$

Ejemplo: (Regla de Bayes)

En el ejemplo anterior, en el que el 40 % son hombres, de los cuales el 80 % son aficionados al fútbol, mientras que sólo el 20 % de las mujeres, son aficionadas al fútbol, si sabemos que una persona elegida al azar resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que fuese una mujer?

Ejemplo: (Regla de Bayes)

En el ejemplo anterior, en el que el 40 % son hombres, de los cuales el 80 % son aficionados al fútbol, mientras que sólo el 20 % de las mujeres, son aficionadas al fútbol, si sabemos que una persona elegida al azar resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que fuese una mujer?

Aplicando la regla de Bayes, tenemos que:

$$\mathcal{P}(B_2|A) = \mathcal{P}(\text{mujer}|\text{aficionada al fútbol}) = \frac{\mathcal{P}(\text{mujer y aficionada al fútbol})}{\mathcal{P}(\text{aficionada al fútbol})} =$$

$$= \frac{\mathcal{P}(\text{aficionada al fútbol }|\text{mujer}) \cdot \mathcal{P}(\text{mujer})}{\mathcal{P}(\text{aficionada al fútbol})} = \frac{0{,}2 \times 0{,}6}{0{,}44} = 0{,}27$$