Final de Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal FaMAF, 29 de Febrero de 2024

Apellido: **Nombre:** **Carrera:**

(1) Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sea $A \in M_n(\Bbbk)$.

(a) (*5 pts.*) Dar la definición del determinante de A.

(b) (*5 pts.*) Dar la definición de autovalor y autovector de A.

(c) (*5 pts.*) Dar la definición de χ_A del polinomio característico de A.

(d) (*5 pts.*) Demostrar que $\lambda \in \Bbbk$ es raíz de χ_A si y sólo si λ es un autovalor de A.

(2) Sean $P = (1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$ y Π el plano en $\mathbb{R}^3$ con ecuación implícita $x + 2y - 4z = 3$.

(a) (*5 pts.*) Dar una descripción paramétrica del plano Π.

(b) (*5 pts.*) Sea L perpendicular a Π que pasa por P. Dar la descripción paramétrica de L.

(c) (*5 pts.*) Hallar una recta L' contenida en Π tal que $L \cap L' \neq \varnothing$ y $(1, 1, 0) \in L'$.

(3) Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices 2×2 con coeficientes reales. Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de V:

$$U_1 = \left\{ A \in V : \, A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A \right\} \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) (*5 pts.*) Dar una base y la dimension de U_1 y U_2 .

(b) (*5 pts.*) Calcular $\dim(U_1 \cap U_2)$.

(c) (*5 pts.*) Decidir si existe una transformación lineal $T : V \to V$ que sea isomorfismo tal que $T(U_1) = U_2$.

(4) Sean $A \in M_3(\mathbb{R})$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & -\sqrt{7} & 12 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

(a) (*5 pts.*) Decidir si existe una matriz $C \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = A$.

(b) (*5 pts.*) Decidir si existe una matriz $D \in M_3(\mathbb{C})$ con $\chi_D(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $D^2 = A$.

(5) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z, w) = (x - y, 2x + y, -x + 3z - 27w, 7x - w).$$

(a) (*10 pts.*) Calcular los autovalores reales de T.

(b) (*10 pts.*) Calcular los autoespacios de los autovalores calculados en el punto anterior.

(c) (*5 pts.*) Decidir si T es diagonalizable.

(6) Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformacion lineal. Supongamos que existe una base ordenada $\mathcal{B}$ de V tal que $([T]_{\mathcal{B}})^2 = 0$.

(a) (*5 pts.*) Demostrar que $([T]_{\mathcal{D}})^2 = 0$ para cualquier base ordenada $\mathcal{D}$ de V.

(b) (*5 pts.*) Demostrar que $Im(T) \neq V$.

(7) (*5 pts.*) Determinar si existe una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que satisfaga la igualdad $A^2 - 5A - 6I = 0$.

1(a)	1(b)	1(c)	1(d)	2(a)	2(b)	2(c)	3(a)

3(b)	3(c)	4(a)	4(b)	5(a)	5(b)	5(c)	6(a)

6(b)	7	Total	Nota