Equivalencia entre Lenguajes Regulares y Autómatas Finitos (Teorema de Kleene)

Introducción a la Lógica y la Computación (3era Parte)

Docentes: Badano, Bustos, Costamagna, Tellechea, Zigaran

Año 2024

Un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.

Un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.

"Una interpretación posible de este resultado es que los AF son las máquinas secuenciales que caracterizan a los lenguajes regulares."

Un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.

"Una interpretación posible de este resultado es que los AF son las máquinas secuenciales que caracterizan a los lenguajes regulares."

► Ya probamos que $LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma}$ y $AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$.

Un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.

"Una interpretación posible de este resultado es que los AF son las máquinas secuenciales que caracterizan a los lenguajes regulares."

- ► Ya probamos que $LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma}$ y $AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$.
- Uniremos esta dos cadenas de equivalencia probando que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$.

Un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.

"Una interpretación posible de este resultado es que los AF son las máquinas secuenciales que caracterizan a los lenguajes regulares."

- Ya probamos que $LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma}$ y $AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$.
- Uniremos esta dos cadenas de equivalencia probando que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$.

Teorema de Kleene ($ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$)

- 1. (ida) Si $e \in ER^{\Sigma}$, entonces $\exists M \in AFN\epsilon^{\Sigma}$ tq L(M) = L(e).
- 2. (vuelta) Si $M \in AFN^{\Sigma}$, entonces $\exists e \in ER^{\Sigma}$ tq L(M) = L(e).

Para probar el inciso 1, notar que:

Para probar el inciso 1, notar que:

▶ Un AF puede ser visto como una estructura recursiva: es un estado conectado con *n* sub-autómatas.

Para probar el inciso 1, notar que:

- ▶ Un AF puede ser visto como una estructura recursiva: es un estado conectado con *n* sub-autómatas.
- ► Por lo tanto, podemos construir un AF recursivamente acompañando la recursividad de la expresiones regulares.

Hacemos inducción en la forma de la expresión regular e.

Hacemos inducción en la forma de la expresión regular e.

Casos Bases:

Si $e = \emptyset$, entonces tomamos M:

$$> q_0$$

y luego, $L(M) = \emptyset = L(\emptyset)$.

Hacemos inducción en la forma de la expresión regular e.

Casos Bases:

Si $e = \emptyset$, entonces tomamos M:



y luego,
$$L(M) = \emptyset = L(\emptyset)$$
.

Si $e = \epsilon$, entonces tomamos M:



y luego,
$$L(M) = \{\epsilon\} = L(\epsilon)$$
.

Hacemos inducción en la forma de la expresión regular e.

Casos Bases:

Si $e = \emptyset$, entonces tomamos M:

$$> q_0$$

y luego,
$$L(M) = \emptyset = L(\emptyset)$$
.

Si $e = \epsilon$, entonces tomamos M:

$$> q_0$$

y luego,
$$L(M) = \{\epsilon\} = L(\epsilon)$$
.

Si e = a, entonces tomamos M:

$$>q_0$$
 \xrightarrow{a} q_1

Casos Recursivos:

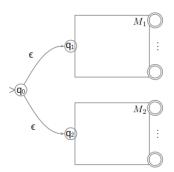
Si $e=e_1+e_2$, por HI, existen $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ y $M_2=(\Sigma,Q_2,q_2,F_2,\Delta_2)$ AFN ϵ tq $L(M_1)=L(e_1)$ y $L(M_2)=L(e_2)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ AFN ϵ donde:

Casos Recursivos:

Si
$$e=e_1+e_2$$
, por HI, existen $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ y $M_2=(\Sigma,Q_2,q_2,F_2,\Delta_2)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ y $L(M_2)=L(e_2)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde:

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\} \text{ con } q_0 \notin Q_1, Q_2$$

 $F = F_1 \cup F_2$
 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{((q_0, \epsilon), \{q_1, q_2\})\}$

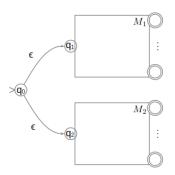


Casos Recursivos:

Si $e=e_1+e_2$, por HI, existen $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ y $M_2=(\Sigma,Q_2,q_2,F_2,\Delta_2)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ y $L(M_2)=L(e_2)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde:

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\} \text{ con } q_0 \notin Q_1, Q_2$$

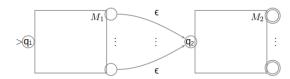
 $F = F_1 \cup F_2$
 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{((q_0, \epsilon), \{q_1, q_2\})\}$



Si $e=e_1e_2$, por HI, existen $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ y $M_2=(\Sigma,Q_2,q_2,F_2,\Delta_2)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ y $L(M_2)=L(e_2)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde:

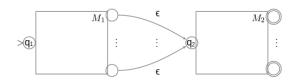
Si $e=e_1e_2$, por HI, existen $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ y $M_2=(\Sigma,Q_2,q_2,F_2,\Delta_2)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ y $L(M_2)=L(e_2)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde:

$$egin{aligned} Q &= Q_1 \cup Q_2 \ q_0 &= q_1 \ F &= F_2 \ \Delta &= (\Delta_1 \cup \Delta_2) - \{((q,\epsilon), \Delta_1(q,\epsilon)) : q \in F_1\} \ \cup \{((q,\epsilon), \Delta_1(q,\epsilon) \cup \{q_2\}) : q \in F_1\} \end{aligned}$$



Si $e=e_1e_2$, por HI, existen $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ y $M_2=(\Sigma,Q_2,q_2,F_2,\Delta_2)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ y $L(M_2)=L(e_2)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde:

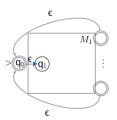
$$egin{aligned} Q &= Q_1 \cup Q_2 \ q_0 &= q_1 \ F &= F_2 \ \Delta &= (\Delta_1 \cup \Delta_2) - \{((q,\epsilon), \Delta_1(q,\epsilon)) : q \in F_1\} \ \cup \{((q,\epsilon), \Delta_1(q,\epsilon) \cup \{q_2\}) : q \in F_1\} \end{aligned}$$



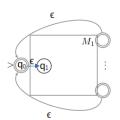
Luego,
$$L(M) = L(M_1)L(M_2) = L(e_1)L(e_2) = L(e_1e_2)$$
.

Si $e=e_1^*$, por HI, existe $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$... podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde:

Si
$$e=e_1^*$$
, por HI, existe $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde: $Q=Q_1\cup\{q_0\}$, con $q_0\notin Q_1$ $F=F_1\cup\{q_0\}$ $\Delta=\Delta_1-\{((q,\epsilon),\Delta_1(q,\epsilon)):q\in F_1\}$ $\cup\{((q,\epsilon),\Delta_1(q,\epsilon)\cup\{q_0\}):q\in F_1\}$ $\cup\{((q_0,\epsilon),\{q_1\})\}$



Si $e=e_1^*$, por HI, existe $M_1=(\Sigma,Q_1,q_1,F_1,\Delta_1)$ $AFN\epsilon$ tq $L(M_1)=L(e_1)$ \therefore podemos tomar $M=(\Sigma,Q,q_0,F,\Delta)$ $AFN\epsilon$ donde: $Q=Q_1\cup\{q_0\}$, con $q_0\notin Q_1$ $F=F_1\cup\{q_0\}$ $\Delta=\Delta_1-\{((q,\epsilon),\Delta_1(q,\epsilon)):q\in F_1\}$ $\cup\{((q,\epsilon),\Delta_1(q,\epsilon)\cup\{q_0\}):q\in F_1\}$ $\cup\{((q_0,\epsilon),\{q_1\})\}$



Luego,
$$L(M) = (L(M_1))^* = (L(e_1))^* = L(e_1^*).$$

La demo anterior nos brinda un algoritmo recursivo que dada una expresión regular, devuelve un AF equivalente.

La demo anterior nos brinda un algoritmo recursivo que dada una expresión regular, devuelve un AF equivalente.

Por ejemplo, para la expresión regular ab + ba, hacemos:

La demo anterior nos brinda un algoritmo recursivo que dada una expresión regular, devuelve un AF equivalente.

Por ejemplo, para la expresión regular ab + ba, hacemos:

1) AF que acepta ab:

La demo anterior nos brinda un algoritmo recursivo que dada una expresión regular, devuelve un AF equivalente.

Por ejemplo, para la expresión regular ab + ba, hacemos:

1) AF que acepta ab:



2) AF que acepta ba:

La demo anterior nos brinda un algoritmo recursivo que dada una expresión regular, devuelve un AF equivalente.

Por ejemplo, para la expresión regular ab + ba, hacemos:

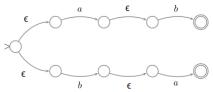
1) AF que acepta ab:



2) AF que acepta ba:



3) AF que acepta ab + ba:



Para probar la vuelta del Teorema de Kleene (2) necesitamos enunciar el siguiente lema:

Para probar la vuelta del Teorema de Kleene (2) necesitamos enunciar el siguiente lema:

Lema (de Arden)

Si A, B son lenguajes $y \in A$, entonces la ecuación $X = AX \cup B$ tiene solución única y es $X = A^*B$.

Para probar la vuelta del Teorema de Kleene (2) necesitamos enunciar el siguiente lema:

Lema (de Arden)

Si A, B son lenguajes $y \in A$, entonces la ecuación $X = AX \cup B$ tiene solución única y es $X = A^*B$.

Notar que si A y B son regulares, entonces:

- 1) X es regular
- 2) A, B y X pueden ser denotados por expresiones regulares

Para probar la vuelta del Teorema de Kleene (2) necesitamos enunciar el siguiente lema:

Lema (de Arden)

Si A, B son lenguajes $y \in A$, entonces la ecuación $X = AX \cup B$ tiene solución única y es $X = A^*B$.

Notar que si A y B son regulares, entonces:

- 1) X es regular
- 2) A, B y X pueden ser denotados por expresiones regulares

Entonces:

 $X = aX + b^*ab$ tiene solución única $X = a^*b^*ab$.

Para probar la vuelta del Teorema de Kleene (2) necesitamos enunciar el siguiente lema:

Lema (de Arden)

Si A, B son lenguajes $y \in A$, entonces la ecuación $X = AX \cup B$ tiene solución única y es $X = A^*B$.

Notar que si A y B son regulares, entonces:

- 1) X es regular
- 2) A, B y X pueden ser denotados por expresiones regulares

Entonces:

$$X = aX + b^*ab$$
 tiene solución única $X = a^*b^*ab$.

$$X = a^2X + b^+X + ab = (a^2 + b^+)X + ab$$
 tiene solución única $X = (a^2 + b^+)^*ab$.

Para probar la vuelta del Teorema de Kleene (2) necesitamos enunciar el siguiente lema:

Lema (de Arden)

Si A, B son lenguajes $y \in A$, entonces la ecuación $X = AX \cup B$ tiene solución única y es $X = A^*B$.

Notar que si A y B son regulares, entonces:

- 1) X es regular
- 2) A, B y X pueden ser denotados por expresiones regulares

Entonces:

$$X = aX + b^*ab$$
 tiene solución única $X = a^*b^*ab$.

$$X=a^2X+b^+X+ab=(a^2+b^+)X+ab$$
 tiene solución única $X=(a^2+b^+)^*ab$.

$$X = ab^2X + aX + a^*b + b^*a = (ab^2 + a)X + (a^*b + b^*a)$$
 tiene solución única $X = (ab^2 + a)^*(a^*b + b^*a)$.

<u>Demo 2</u>. Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ AFN con $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$, definimos $M_i = (\Sigma, Q, q_i, F, \Delta)$ el AFN que se obtiene a partir de M cambiando únicamente el estado inicial de M por q_i .

<u>Demo 2</u>. Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ AFN con $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$, definimos $M_i = (\Sigma, Q, q_i, F, \Delta)$ el AFN que se obtiene a partir de M cambiando únicamente el estado inicial de M por q_i .

Y definimos $L(M_i) = X_i$, por lo tanto, $L(M) = X_0$.

<u>Demo 2</u>. Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ AFN con $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$, definimos $M_i = (\Sigma, Q, q_i, F, \Delta)$ el AFN que se obtiene a partir de M cambiando únicamente el estado inicial de M por q_i .

Y definimos $L(M_i) = X_i$, por lo tanto, $L(M) = X_0$.

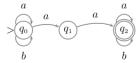
Cada X_i se puede expresar con la siguiente ecuación:

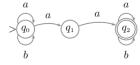
$$X_i = egin{cases} \sum_{q_j \in \Delta(q_i, a)} a X_j & ext{si } q_i
otin F \ \sum_{q_j \in \Delta(q_i, a)} a X_j + \epsilon & ext{si } q_i \in F \end{cases}$$

Aplicamos Arden a la ecuación de X_n para obtener su valor y reemplazarlo en el resto de las ecuaciones reduciéndolo a un sistema n × n.

- Aplicamos Arden a la ecuación de X_n para obtener su valor y reemplazarlo en el resto de las ecuaciones reduciéndolo a un sistema n × n.
- ▶ Repetimos lo anterior para la ecuación de X_{n-1} , y asi sucesivamente, hasta obtener un sistema de 1×1 con la ecuación correspondiente a X_0 .

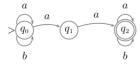
- ▶ Aplicamos Arden a la ecuación de X_n para obtener su valor y reemplazarlo en el resto de las ecuaciones reduciéndolo a un sistema $n \times n$.
- ▶ Repetimos lo anterior para la ecuación de X_{n-1} , y asi sucesivamente, hasta obtener un sistema de 1×1 con la ecuación correspondiente a X_0 .
- Aplicamos por última vez Arden, obteniendo la solución final que buscabamos, pues $X_0 = L(M)$.





El sistema de ecuaciones que determina el automata M es:

$$\begin{cases} X_0 = aX_0 + bX_0 + aX_1 & (1) \\ X_1 = aX_2 & (2) \\ X_2 = aX_2 + bX_2 + \epsilon & (3) \end{cases}$$

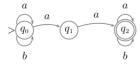


El sistema de ecuaciones que determina el automata M es:

$$\begin{cases} X_0 = aX_0 + bX_0 + aX_1 & (1) \\ X_1 = aX_2 & (2) \\ X_2 = aX_2 + bX_2 + \epsilon & (3) \end{cases}$$

Aplicamos Arden en la ecuacion (3):

$$X_2 = aX_2 + bX_2 + \epsilon = (a + b)X_2 + \epsilon$$
:
 $X_2 = (a + b)^*$



El sistema de ecuaciones que determina el automata M es:

$$\begin{cases} X_0 = aX_0 + bX_0 + aX_1 & (1) \\ X_1 = aX_2 & (2) \\ X_2 = aX_2 + bX_2 + \epsilon & (3) \end{cases}$$

Aplicamos Arden en la ecuacion (3):

$$X_2 = aX_2 + bX_2 + \epsilon = (a+b)X_2 + \epsilon :$$

$$X_2 = (a+b)^*$$

Reemplazamos el valor obtenido en todo el sistema:

$$\begin{cases} X_0 = aX_0 + bX_0 + aX_1 & (1) \\ X_1 = a(a+b)^* & (2) \end{cases}$$

$$X_1 = a(a+b)^*$$

$$X_1 = a(a+b)^*$$

Reemplazamos el valor de X_1 obtenido en el resto del sistema:

$$X_0 = aX_0 + bX_0 + a^2(a+b)^*$$
 (1)

$$X_1 = a(a+b)^*$$

Reemplazamos el valor de X_1 obtenido en el resto del sistema:

$$X_0 = aX_0 + bX_0 + a^2(a+b)^*$$
 (1)

Aplicamos Arden por última vez a la ecuación (1):

$$X_0 = aX_0 + bX_0 + a^2(a+b)^* = (a+b)X_0 + a^2(a+b)^*$$
 :: $X_0 = (a+b)^*a^2(a+b)^*$

$$X_1 = a(a+b)^*$$

Reemplazamos el valor de X_1 obtenido en el resto del sistema:

$$X_0 = aX_0 + bX_0 + a^2(a+b)^*$$
 (1)

Aplicamos Arden por última vez a la ecuación (1):

$$X_0 = aX_0 + bX_0 + a^2(a+b)^* = (a+b)X_0 + a^2(a+b)^*$$
 :: $X_0 = (a+b)^*a^2(a+b)^*$

Y esta última solución de X_0 es la expresión regular que denota al lenguaje aceptado por el autómata M, por lo tanto:

$$L(M) = (a + b)^* a^2 (a + b)^*$$

▶ Probamos que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$ (Teo. de Kleene)

- ▶ Probamos que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$ (Teo. de Kleene)
- Por transitividad, tenemos toda la cadena de equivalencias probada:

$$\mathit{LR}^\Sigma \equiv \mathit{ER}^\Sigma \equiv \mathit{AFD}^\Sigma \equiv \mathit{AFN}^\Sigma \equiv \mathit{AFN}^\varepsilon$$

- ▶ Probamos que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$ (Teo. de Kleene)
- Por transitividad, tenemos toda la cadena de equivalencias probada:

$$LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma} \equiv AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.

- ▶ Probamos que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$ (Teo. de Kleene)
- Por transitividad, tenemos toda la cadena de equivalencias probada:

$$LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma} \equiv AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$$

- ▶ Por lo tanto, podemos asegurar que un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.
- ► En consecuencia, tenemos una nueva herramienta para probar regularidad de un lenguaje simplemente dando el autómata finito que lo acepta.

- ▶ Probamos que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$ (Teo. de Kleene)
- Por transitividad, tenemos toda la cadena de equivalencias probada:

$$LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma} \equiv AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$$

- ▶ Por lo tanto, podemos asegurar que un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.
- En consecuencia, tenemos una nueva herramienta para probar regularidad de un lenguaje simplemente dando el autómata finito que lo acepta.
- ▶ Podemos pensar este resultado como que los AF's son las máquinas secuenciales que caracterizan a los lenguajes regulares.

- ▶ Probamos que $ER^{\Sigma} \equiv AF^{\Sigma}$ (Teo. de Kleene)
- Por transitividad, tenemos toda la cadena de equivalencias probada:

$$LR^{\Sigma} \equiv ER^{\Sigma} \equiv AFD^{\Sigma} \equiv AFN^{\Sigma} \equiv AFN\epsilon^{\Sigma}$$

- Por lo tanto, podemos asegurar que un lenguaje es regular si y solo si es aceptado por un AF.
- En consecuencia, tenemos una nueva herramienta para probar regularidad de un lenguaje simplemente dando el autómata finito que lo acepta.
- Podemos pensar este resultado como que los AF's son las máquinas secuenciales que caracterizan a los lenguajes regulares.
- ► En la próxima clase, presentaremos un nuevo modelo computacional que también caracteriza a los lenguajes regulares, las "gramáticas regulares".

Bibliografía



Rodrigo De Castro Korgi.

"Teoria de la Computación". Lenguajes, Autómatas, Gramáticas.

Capítulo 2: Autómatas Finitos. Sección 2.8 hasta 2.12.