Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 9 de octubre de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Completitud de la lógica proposicional
   - Relación entre verdad y demostrabilidad
2. Consistencia
   - No derivación
3. Conjuntos consistentes maximales
4. Teorema de Completitud

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La clase pasada vimos la implicación $(\Leftarrow)$ **Corrección.**

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La clase pasada vimos la implicación $(\Leftarrow)$ **Corrección.**
Hoy vamos por la implicación $(\Rightarrow)$: **Completitud.**

(In)Consistencia

Definición

Dado un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ diremos que

$$\Gamma \text{ es } \textbf{inconsistente} \iff \Gamma \vdash \bot;$$

(In)Consistencia

Definición

Dado un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ diremos que

$$\Gamma \text{ es } \textbf{inconsistente} \iff \Gamma \vdash \bot;$$

$$\Gamma \text{ es } \textbf{consistente} \iff \textbf{no} \text{ es inconsistente}$$

(In)Consistencia

Definición

Dado un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ diremos que

Γ es **inconsistente** $\iff$ $\Gamma \vdash \bot$;

Γ es **consistente** $\iff$ **no** es inconsistente (o sea, $\Gamma \nvdash \bot$).

(In)Consistencia

Definición

Dado un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ diremos que

$$\Gamma \text{ es } \textbf{inconsistente} \iff \Gamma \vdash \bot;$$

$$\Gamma \text{ es } \textbf{consistente} \iff \textbf{no} \text{ es inconsistente (o sea, } \Gamma \nvdash \bot).$$

Lema

1. $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*

(In)Consistencia

Definición

Dado un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ diremos que

$$\Gamma \text{ es } \textbf{inconsistente} \iff \Gamma \vdash \bot;$$

$$\Gamma \text{ es } \textbf{consistente} \iff \textbf{no} \text{ es inconsistente (o sea, } \Gamma \nvdash \bot).$$

Lema

1. $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente.*

Corrección y sus usos

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Lema (de No Derivación)

Si f es un modelo de Γ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $\Gamma \nvdash \varphi$.

Corrección y sus usos

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Lema (de No Derivación)

Si f es un modelo de Γ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $\Gamma \nvdash \varphi$.

Ejemplo $\{p_1 \vee p_4\} \nvdash p_1$.

Corrección y sus usos

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Lema (de No Derivación)

Si f es un modelo de Γ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $\Gamma \nvdash \varphi$.

Ejemplo $\{p_1 \vee p_4\} \nvdash p_1$.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si Γ tiene un modelo, entonces Γ es consistente.

Corrección y sus usos

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Lema (de No Derivación)

Si f es un modelo de Γ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $\Gamma \nvdash \varphi$.

Ejemplo $\{p_1 \vee p_4\} \nvdash p_1$.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si Γ tiene un modelo, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

1. $\{(\neg p_4 \vee p_0), p_4\}$ es consistente.

Corrección y sus usos

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Lema (de No Derivación)

Si f es un modelo de Γ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $\Gamma \nvdash \varphi$.

Ejemplo $\{p_1 \vee p_4\} \nvdash p_1$.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si Γ tiene un modelo, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

1. $\{(\neg p_4 \vee p_0), p_4\}$ es consistente.
2. Dada f una asignación, $\mathrm{Th}(f) := \{\varphi \in \mathit{PROP} : [\![\varphi]\!]_f = 1\}$ es consistente.

Conjuntos consistentes maximales

Definición

Γ es **consistente maximal** si es consistente y, para todo $\Delta \subseteq PROP$, si $\Gamma \subsetneq \Delta$ entonces Δ es inconsistente.

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset

$$(\text{Conjuntos consistentes}, \subseteq).$$

Lema

Para toda asignación f, $\mathrm{Th}(f) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_f = 1\}$ *es un conjunto consistente maximal.*

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Sea Γ *consistente maximal.*

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Sea Γ *consistente maximal.*
$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Sea Γ *consistente maximal.*
$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.

Universidad Nacional de Córdoba

1613 - 2013 400 AÑOS

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Sea Γ *consistente maximal.*
$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.
3. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *o* $\psi \in \Gamma]$.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Sea Γ *consistente maximal.*

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.
3. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *o* $\psi \in \Gamma]$.
4. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma]$.

Lema

Si Γ *es consistente maximal existe una asignación* f *tal que* $\Gamma = \mathrm{Th}(f)$.

Teorema

Si Γ *es consistente existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

Teorema

Si Γ es consistente existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Teorema

Si Γ es consistente existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. (esquema de numeración ”por pisos”)

Teorema

Si Γ *es consistente existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. (esquema de numeración ”por pisos”)
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de a una cuidando que no se vuelva inconsistente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

Teorema

Si Γ es consistente existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. (esquema de numeración ”por pisos”)
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de a una cuidando que no se vuelva inconsistente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\Gamma_0 := \Gamma$$

Teorema

Si Γ *es consistente existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. (esquema de numeración "por pisos")
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de a una cuidando que no se vuelva inconsistente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\Gamma_0 := \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es consistente;} \\ \Gamma_n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Teorema

Si Γ es consistente existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. (esquema de numeración ”por pisos”)
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de a una cuidando que no se vuelva inconsistente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\Gamma_0 := \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es consistente;} \\ \Gamma_n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y definimos $\Gamma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$.

Teorema

Si Γ *es consistente existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. (esquema de numeración ”por pisos”)
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de a una cuidando que no se vuelva inconsistente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\Gamma_0 := \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es consistente;} \\ \Gamma_n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y definimos $\Gamma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$. Probamos que Γ^* es consistente maximal.

Corolario

Si Γ *es consistente tiene un modelo.*

Corolario

$\Gamma \models \bot$ *implica* $\Gamma \vdash \bot$.

Corolario

$\Gamma \models \bot$ *implica* $\Gamma \vdash \bot$.

Ejercicio: $\Gamma \models \varphi$ implica $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.

Prueba de Completitud

Corolario

$\Gamma \models \bot$ *implica* $\Gamma \vdash \bot$.

Ejercicio: $\Gamma \models \varphi$ implica $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.

Prueba de Completitud

$$\begin{aligned} \Gamma \models \varphi &\implies \\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot &\implies \\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot &\implies \\ \Gamma \vdash \varphi. & \end{aligned}$$