Práctico 10: Matriz de una transformación lineal. Coordenadas.

1. Los vectores $v_1 = (1, 0, -i)$, $v_2 = (1+i, 1-i, 1)$, $v_3 = (i, i, i)$ forman una base de $\mathbb{C}^3$. Dar las coordenadas de un vector (x, y, z) en esta base.

2. Sea $v = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ un vector. Hallar $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $[v]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 0)$.

3. Sea $\mathcal{B} = \{(1, -2, 1), (2, -3, 3), (-2, 2, -3)\}$ un subconjunto del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

   (a) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Hallar la matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

   (c) Hallar las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, de los vectores $(1, 0, 1)$ y $(-1, 2, 1)$.

   (d) Más aún, describir (x, y, z) en términos de la base $\mathcal{B}$.

Ej de MDT

4. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

   (a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Sea $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

   (c) Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. (a) Dar una base ordenada del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.

   (b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.

   (c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item (a).

6. Sea T la proyección de $\mathbb{C}^2$ dada por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Sean $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B}'$ la base ordenada $\{(1, i), (-i, 2)\}$.

   (a) Dar la matriz de T con respecto al par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.

   (b) Dar la matriz de T con respecto a $\mathcal{B}'$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Decidir si existen bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$ tales que
$$[T]_{\mathcal{B}_1} = A, \qquad [T]_{\mathcal{B}_2} = C.$$
No sé

   (b) Decidir si existen bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$ tales que
$$[T]_{\mathcal{B}_1} = A, \qquad [T]_{\mathcal{B}_2} = B.$$

8. Sean V y W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales, de dimensión n y m respectivamente. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V y W, respectivamente. Recordemos que el espacio de transformaciones lineales de V a W: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ es un espacio vectorial. Definimos
$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{k}), \qquad \Phi(T) = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{ para cada } T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W).$$
Demostrar que Φ es un isomorfismo lineal. Concluir que $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W) = mn$.

9. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_5[x]$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = p(x^2 + 1)$. Escribir la matriz de T en las bases canónicas. Decidir si T es inyectiva o suryectiva.

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.
   (b) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x, y, z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

11. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$, hallar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^3$ tal que $M = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

12. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{U} = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $\mathcal{U}'$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T]_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No sé

Determinar $\mathcal{U}'$.

13. Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v_1', ..., v_n'\}$ donde

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de V si y sólo si A es invertible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$, y viceversa.

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}$ una base de V. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

   (a) Definimos la *traza* de T como $tr(T) = tr([T]_{\mathcal{B}})$. Demostrar que la función $tr : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, V) \to \Bbbk$ no depende de la elección de la base $\mathcal{B}$.
   (b) Análogamente definimos el determinante de T como $det(T) = det([T]_{\mathcal{B}})$. Demostrar que el determinante de T no depende de la elección de la base $\mathcal{B}$.
   (c) El punto anterior nos permite definir el polinomio característico de T como: $\chi_T(x) = det([xI - T]_{\mathcal{B}})$. Demostrar que χ_T no depende de la elección de la base $\mathcal{B}$.

Ejercicios Adicionales

15. Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v_1', ..., v_n'\}$ donde

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de V si y sólo si A es invertible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$, y viceversa.

16. Sean VW espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Mostrar que:

(a) Si $T = 0$, entonces para cualesquiera bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ de V y W, respectivamente, la matriz de T con respecto a ellas es la matriz nula.

(b) Si $\mathrm{Nu}(T)$ no es el espacio nulo, entonces existe una base $\mathcal{B}_V$ de V tal que para cualquier base $\mathcal{B}_W$ de W, la matriz de T con respecto a ellas tiene al menos una columna nula. Más aún, se puede elegir $\mathcal{B}_V$ de tal manera que tenga $\dim \mathrm{Nu}\, T$ columnas nulas.

(c) Existen bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ de V y W, respectivamente, tales que la matriz de T con respecto a ellas es $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = \begin{bmatrix} Id_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde $m = \dim \mathrm{Im}(T)$.

17. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Probar que A es semejante a B sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si existe una transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ tales que $[T]_{\mathcal{B}} = A$ y $[T]_{\mathcal{B}'} = B$.