

Probabilidad y Estadística - Introducción a la Probabilidad y Estadística 2024

GUÍA DE EJERCICIOS N° 1. PROBABILIDAD, PROBABILIDAD CONDICIONAL, INDEPENDENCIA
--

Los ejercicios con * pueden dejarse como repaso para evaluaciones.

Probabilidad

- 1. La biblioteca de una universidad tiene cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio, deteniéndose sólo cuando selecciona una segunda impresión.
- Hacer una lista de todos los resultados posibles.
 - Sea el evento A : sólo un libro es examinado. ¿Cuáles resultados están en A ?
 - Sea el evento B : el libro 5 es seleccionado. ¿Cuáles resultados están en B ?
 - Sea el evento C : el libro 1 no se examina. ¿Cuáles resultados están en C ?
 - Expresar $A \cap B$, $A \cup B$ y $\overline{(B \cap C)}$.
- 2. Demostrar que si un evento A está contenido en otro B , entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$ y $P(A) \leq P(B)$. En general, dados dos eventos A y B , ¿qué relación existe entre $P(A)$, $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$?
- 3. Una empresa de consultoría de computadoras ha licitado en tres proyectos. Sea $A_i = \{\text{proyecto } i \text{ otorgado}\}$, para $i = 1, 2, 3$, y supongamos que $P(A_1) = 0,22$, $P(A_2) = 0,25$ y $P(A_3) = 0,28$, $P(A_1 \cap A_2) = 0,11$, $P(A_1 \cap A_3) = 0,05$, $P(A_2 \cap A_3) = 0,07$ y $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0,01$. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:
- $A_1 \cup A_2$
 - $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (Sugerencia: $\overline{(A_1 \cup A_2)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$)
 - $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
 - $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
 - *e) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$
 - *f) $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup A_3$
- 4. Cinco empresas F_1, F_2, \dots, F_5 hacen propuestas con respecto a tres contratos separados, C_1, C_2 y C_3 . Una empresa sólo puede obtener a lo sumo un contrato. Los contratos son diferentes, de tal forma que la asignación de C_1 a F_1 se debe diferenciar de la asignación de C_2 a F_1 .
- ¿Cuántos puntos muestrales hay en total en este experimento que trata de la asignación de los contratos a las empresas? (No hay necesidad de listar todos los puntos).
 - Encuentre la probabilidad de que se conceda un contrato a la empresa F_3 , bajo el supuesto de que los puntos muestrales son equiprobables.
- 5. Al poco tiempo de ser puestos en servicios, algunos colectivos fabricados por cierta compañía presentan grietas en su parte inferior. Una ciudad tiene 25 de estos colectivos y han aparecido grietas en 8 de ellos. Se seleccionan aleatoriamente 5 colectivos para hacer una inspección.
- ¿Cuál es la probabilidad de que 4 de los 5 colectivos tengan grietas?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 de los seleccionados tengan grietas?
- 6. Un departamento académico con cinco miembros de la facultad: Anderson, Box, Cox, Cramer y Fisher, debe seleccionar a dos de sus miembros para prestar servicio en una comisión de revisión de personal. Debido a que el trabajo será lento, nadie desea prestar ese servicio, así que deciden que el representante será seleccionado por el método de colocar cinco boletas de papel en una caja, mezclarlas y seleccionar dos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que Anderson y Box sean seleccionados?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione por lo menos a uno de los dos miembros cuyos apellidos comienzan con *C*?
- c) Si los cinco miembros de la facultad han dado clase en la universidad durante 3, 6, 7, 10 y 14 años respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que entre los dos representantes seleccionados tengan por lo menos 15 años de experiencia en la enseñanza?
- 7. Una caja contiene 6 cubos rojos y 4 verdes y una segunda caja contiene 7 cubos rojos y 3 verdes. Se elige al azar un cubo de la primera caja y se pone en la segunda caja. Luego se selecciona al azar un cubo de la segunda caja y se pone en la primera caja.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un cubo rojo de la primera caja y un cubo rojo de la segunda caja?
- b) Al finalizar el proceso de selección ¿cuál es la probabilidad de que los números de cubos rojos y verdes de la primera caja sean idénticos a los que habían al comienzo?
- * 8. Una profesora desea programar una reunión con cada uno de sus ocho ayudantes, cuatro hombres y cuatro mujeres, para analizar su curso. Se supone que todos los ordenamientos posibles de las reuniones tienen la misma probabilidad de ser elegidos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una asistente (mujer) esté entre los tres primeros con quien se reúne la profesora?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que después de las cinco primeras reuniones, la profesora se haya reunido con todas las asistentes?

Probabilidad condicional

- 9. Una gran tienda de departamentos vende camisas deportivas en tres talles (pequeño, mediano y grande), en tres modelos (a cuadros, estampados y de franjas) y con dos largos de mangas (corta y larga). Las siguientes tablas presentan las proporciones de camisas vendidas que caben en varias combinaciones de categorías.

Manga corta			
	Modelo		
Talle	Cuadros	Estampada	Franjas
Pequeño	0,04	0,02	0,05
Mediano	0,08	0,07	0,12
Grande	0,03	0,07	0,08
Manga larga			
	Modelo		
Talle	Cuadros	Estampada	Franjas
Pequeño	0,03	0,02	0,03
Mediano	0,10	0,05	0,07
Grande	0,04	0,02	0,08

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea mediana, de manga larga y estampada?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea mediana y estampada?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea de manga corta? ¿Y de manga larga?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que el talle de la camisa que se venda sea mediano? ¿Y que el modelo sea estampado?
- e) Dado que la camisa que se vendió era a cuadros y de manga corta, ¿cuál es la probabilidad de que su talle sea mediano?
- f) Dado que la camisa que se vendió era a cuadros y mediana, ¿cuál es la probabilidad de que sea de manga corta? ¿Y de manga larga?

- 10. a) Dados los eventos A y B con $P(B) > 0$, demuestre que $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$.
 b) Si $P(B|A) > P(B)$ demuestre que $P(\bar{B}|A) < P(\bar{B})$.
 c) Dados los eventos A , B y C con $P(C) > 0$, demuestre que $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.
- 11. Uno de cada 25 adultos está afectado de cierta enfermedad para la que se ha desarrollado una prueba de diagnóstico. La prueba es tal que, cuando un individuo padece la enfermedad, el resultado de la prueba es positivo en un 99 % de las veces, mientras que un individuo sin la enfermedad mostrará un resultado positivo sólo el 2 % de las veces.
 a) ¿Cuál es la probabilidad de que un resultado de la prueba sea positivo?.
 b) Dado que el resultado de la prueba es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo tenga la enfermedad?.
 c) Dado que el resultado de la prueba es negativo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo no tenga la enfermedad?.

Independencia

- 12. Sean A y B eventos independientes, demostrar que \bar{A} y B , A y \bar{B} y \bar{A} y \bar{B} son independientes.
- 13. En un lote de 10 tablas de madera, dos están demasiado verdes para ser usadas en construcción de primera calidad. Se seleccionan 2 tablas al azar, una después de otra.
 Sea $A = \{\text{la primera tabla está verde}\}$ y $B = \{\text{la segunda tabla está verde}\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
 ¿Son A y B independientes?.
- 14. Un mazo de 52 cartas es mezclado y se reparten 13 cartas a cada uno de los 4 jugadores A , B , C y D . Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:
 a) A tiene todos los corazones, B todos los diamantes, C todos los tréboles y D todas las picas.
 b) Cada jugador tiene cartas de un solo palo.
 c) El jugador A no tiene ases.
 d) Cada jugador recibe un as.
- 15. Se realizó una investigación en personas que sufren leucoplasia oral. El 85 % de ellas fuma o consume alcohol, el 45 % consume alcohol y el 60 % fuma.
 a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población consuma alcohol y no fume?.
 b) Si se elige al azar un individuo fumador, ¿cuál es la probabilidad de que consuma alcohol?.
 c) ¿Son independientes los eventos fumar y consumir alcohol?.
- 16. Una compañía realiza el 50 % de sus envíos a través de la empresa de correos 1, el 40 % a través de la empresa 2 y el resto por la empresa 3. De los paquetes enviados por la empresa 1, el 2 % llega tarde a su destino. El 1 % de los paquetes enviados por la empresa de correos 2 llega tarde y, de aquellos enviados por la empresa 3, el 5 % llega tarde.
 a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete elegido al azar llegue tarde a su destino?.
 b) Si un paquete elegido al azar llega a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido enviado por la empresa 1?.
 c) Si se sabe que el paquete no fue enviado por la empresa 3, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo a su destino?.
 d) Si se eligen 10 paquetes al azar de los enviados por esta compañía, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno llegue tarde?.
- * 17. Una costura hecha en un avión necesita 25 remaches. La costura tendrá que volver a realizarse si al menos uno de los remaches está defectuoso. Suponga que los remaches están defectuosos independientemente, unos de otros, cada uno con la misma probabilidad.
 a) Si el 14 % de todas las costuras necesitan volver a efectuarse, ¿cuál es la probabilidad de que un remache

esté defectuoso?.

b) Si se quiere que sólo el 10 % de las costuras necesiten volver a ejecutarse, ¿cuál es la probabilidad de que un remache sea defectuoso?.

- * 18. En una carrera de caballos participan 6 caballos numerados del 1 al 6. Todos los resultados posibles de la carrera son igualmente probables. Hacen podio los tres primeros caballos en terminar la carrera.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el caballo con el número 2 salga en primer lugar?.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que el caballo con el número 1 haga podio?.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos ítems anteriores?.
 - d) Una persona hace apuestas sobre el resultado de la carrera. Apuesta que los caballos numerados con 1, 2 y 3 hacen podio. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona gane su apuesta?.