Práctico 7: Espacios vectoriales

1. Decidir si los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, con las operaciones abajo definidas.
   (a) $\mathbb{R}^n$, con $v \oplus w = v - w$, y el producto por escalares usual.
   (b) $\mathbb{R}^2$, con $(x, y) \oplus (x_1, y_2) = (x + x_1, 0)$, $c \odot (x, y) = (cx, 0)$.
2. Demostrar que el conjunto de números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones $x \oplus y = x \cdot y$ y $\lambda \odot x = x^\lambda$.
3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si $(V, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S un conjunto cualquiera, entonces
$$V^S = \{f : S \to V \ : \ f \text{ es una función}\},$$
   denota al conjunto de todas las funciones de S en V. Definimos en V^S la suma y el producto por escalares de la siguiente manera: Si $f, g \in V^S$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces $f + g : S \to V$ y $c \cdot f : S \to V$ están dadas por
$$(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad (c \cdot f)(x) = c \odot f(x), \qquad \forall\, x \in S.$$
   Probar que $(V^S, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. En el caso en que $V = \mathbb{K}$, este espacio vectorial se denotará $F(S)$.
4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $m, n \in \mathbb{N}$. Dar estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial al conjunto de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
5. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales.
   (a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 = x_n\}$.
   (b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.
   (c) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
   (d) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 \le x_2\}$.
   (e) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 1\}$.
   (f) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$.
6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ de grado menor que n es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$. Este espacio vectorial usualmente se denota por $\mathbb{K}_n[x]$.
7. Sea $C[0, 1]$ el conjunto de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.
   (a) Probar que $C[0, 1]$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos 'puntualmente': $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, $f, g \in C[0, 1]$, $c \in \mathbb{R}$.
   (b) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $C[0, 1]$.
      i. $C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es derivable}\}$.
      ii. $W = \{f \in C[0, 1] \ : \ f(1) = 1\}$.
      iii. $W = \{f \in C[0, 1] \ : \ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$.
      iv. $C^\infty[0, 1] = \{f \in C[0, 1] \ : f \text{ es infinitamente derivable}\}$
8. Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$.
9. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sea $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $0 \neq v \in V$. Demostrar que si $\lambda \cdot v = \mu \cdot v$ entonces $\lambda = \mu$.
10. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$.
   (a) El conjunto $W = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$?
   (b) Demostrar que el conjunto $U = \{A \in M_n(\mathbb{k}) : Tr(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{k})$.

Ejercicios Adicionales

11. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.

    (a) $\mathbb{R}^3$ con:

    $$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y' - 1, z + z');$$
    $$c \odot (x, y, z) = (cx, cy + 1 - c, cz).$$

    (b) El conjunto de polinomios, con el producto por escalares (reales) usual, pero con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).

12. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

    (a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, j > 1,\, x_1 = x_j\}$.

    (b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 x_n = 0\}$.

13. Sea $M_n(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de matrices $n \times n$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

    (a) El conjunto de matrices $n \times n$ inversibles.

    (b) El conjunto de matrices $n \times n$ NO inversibles.

    (c) El conjunto de matrices $n \times n$, A, tales que $AB = BA$, donde B es una matriz $n \times n$ fija.

14. Sea $\mathbb{R}[x]$, el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales. Decidir si el subconjunto de polinomios de grado par, junto con el polinomio nulo, es un subespacio vectorial.

15. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

    (a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

    (b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

    (c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.

    (d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.

    (e) $B \cup D$.

    (f) $B \cap D$.

16. Decidir en cada caso si el subconjunto W es un subespacio vectorial del espacio vectorial V:

    (a) $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, j > 1,\, x_1 = x_j\}$, $V = \mathbb{R}^n$.

    (b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p'(0) + p''(0) = 0\}$, $V = \mathbb{R}[x]$.

    (c) $W = \mathbb{Q}[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$, $V = \mathbb{R}[x]$.

    (d) El conjunto de matrices triangulares superiores estrictas (es decir, con ceros en la diagonal). $V = M_n(\mathbb{K})$

    (e) W es el conjunto de matrices A tales que $A^2 = 0$. $V = M_n(\mathbb{K})$.

    (f) $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\}$, $V = F(\mathbb{R})$.

    (g) $W = \{f \in F([0,1]) \ : \ f(x^2) = f(x)^2\}$, $V = F([0,1])$.

    (h)* Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial de dimensión $r < n$. Demostrar que

    $$W = \bigcap_{U \in \mathcal{S}} U,$$

    donde $\mathcal{S} = \{U \subseteq V : U \text{ es subespacio vectorial con} \dim U = n - 1\}$.