Práctico 8: Independencia lineal y generadores. Bases y dimensión

1. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Demostrar las siguientes afirmaciones.
   (a) Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in \Bbbk$. Demostrar que $\langle v_1,\ v_2\rangle = \langle v_1,\ v_2 + \lambda v_1\rangle$.
   (b) Si $\lambda, \mu \in \Bbbk$ y $0 \neq v \in V$ son tales que $\lambda v = \mu v$. Demostrar que $\lambda = \mu$.
   (c) Sean $w, v_1, \dots, v_n \in V$. Demostrar que
   $$\langle w, v_1, \dots, v_n\rangle = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$$
   si y sólo si $w \in \langle v_1, \dots, v_n\rangle$.

2. En cada caso, determine si el vector w es combinación lineal de los vectores del conjunto S en el espacio vectorial V.
   (a) $V = \mathbb{R}^4$, $w = (1, -1, 0, 0)$ y $S = \{(1, 0, 0, 2), (1, 1, 2, 2), (0, 1, 0, 1)\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}[x]$, $w = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ y $S = \{2, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + x^4, x^4 + x^5\}$.

3. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes. Cuando un conjunto no lo sea, mostrar una relación lineal no trivial entre sus elementos.
   (a) $\big\{(1, 0, -1),\ (1, 2, 1),\ (0, -3, 2)\big\}$,
   (b) $\big\{(1, 0, -1),\ (1, -2, 1),\ (2, -2, 0)\big\}$,
   (c) $\big\{(1, 3, -3),\ (2, 3, -4),\ (1, -3, 1)\big\}$,
   (d) $\big\{(1, 1, 1, 1),\ (1, 2, 1, 2),\ (1, 3, 1, 3),\ (0, 1, 2, 3)\big\}$,
   (e) $\big\{(1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (1, 0, 0, 4),\ (0, 0, 0, 2)\big\}$,
   (f) $\big\{(1, 1, 2, 4),\ (2, -1, -5, 2),\ (1, -1, -4, 0),\ (2, 1, 1, 6)\big\}$.

4. Sea $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ la matriz dada por
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Calcular la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por las filas de A.
   (b) Calcular la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A.

5. Sea $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ la matriz dada por
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   Sea $W \subseteq \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial que consta de aquellos $X \in \mathbb{R}^4$ tales que $AX = 0$. Encontrar un conjunto de vectores que generen a W.

6. Demostrar las siguientes afirmaciones:
   (a) Todo subconjunto de un conjunto LI es LI.
   (b) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
   (c) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
   (d) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.
   (e) Probar que un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LD si y sólo si alguno de los vectores está en el generado por los otros, esto es: existe $i,\ 1 \leq i \leq n$ tal que $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$.

7. En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.
   (a) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
   (c) $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\} \subset F(\mathbb{R})$ (Donde $F(\mathbb{R})$ es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial del Ejercicio 3 del práctico 7).
   (d) $\{1, 2\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\} \subset F(\mathbb{R})$.
   (e) $\{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1\} \subset \mathbb{R}_4[x]$
8. Dar 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.
9. Sea V el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de sucesiones con valores racionales, es decir funciones $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ encontrar un subconjunto de V de cardinal n que sea LI.
10. Sea $V = \mathbb{R}^6$, y sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(u,v,w,x,y,z) \ : \ u+v+w=0,\ x+y+z=0\},$$
$$W_2 = \langle (1,-1,1,-1,1,-1),(1,2,3,4,5,6),(1,0,-1,-1,0,1),(2,1,0,0,0,0)\rangle .$$

   (a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
   (b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
   (c) ¿Es la suma $W_1 + W_2$, una suma directa?
   (d) Dar un complemento directo de W_1.
   (e) Dar un complemento directo de W_2.
   (f) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1,1,-2,-2,1,1),\ (0,0,0,1,0,-1),\ (1,1,1,0,0,0),\ (3,0,0,1,1,3),\ (-1,2,5,6,5,4).$$

   (g) Para los vectores v del punto anterior en W_1+W_2, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.
11. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.
   (b) Sean S, T y U subespacios de un espacio vectorial V tales que

$$S \cap T = S \cap U,\ S + T = S + U, \text{ y } T \subset U.$$

   Entonces $T = U$.
   (c) Si W es un subespacio de $M_2(\mathbb{K})$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertenece a W.
   (d) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.
12. Consideremos a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Para todo $n \in \mathbb{N}$ encontrar un conjunto de n elementos de $\mathbb{R}$ que sea LI. Calcular $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.
13. Dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales:
   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x + y\}$,
   (b) $\{(x,y,z,w,u) \in \mathbb{R}^5 \colon w = x+z,\ y = x-z,\ u = 2x-3z\}$,
   (c) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \colon a_0 + a_3 = a_1 + a_2\}$,
   (d) $\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \colon p'(0) = 0\}$.
   (e) $W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \right\}$.
   (f) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p'(1) = 0 \text{ y } p(2) = p(3)\}$
14. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio. Probar que si $\dim W = \dim V$, entonces $W = V$

15. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Dado $m \in \mathbb{N}_0$ denotamos por $\Bbbk_m[x]$ al subespacio de $\Bbbk[x]$ formado por los polinomios de grado $< m$.

    (a) Sean $p_1, \ldots, p_n$ polinomios no nulos en $\Bbbk[x]$ tales que sus grados son distintos dos a dos. Probar que $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es LI en $\Bbbk[x]$.

    (b) Probar que $\mathcal{B} = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ es una base de $\Bbbk_3[x]$. Encontrar las coordenadas de $p(x) = x^2$ en la base $\mathcal{B}$.

    (c) Para todo $a \in \Bbbk$ y para todo $m \in \mathbb{N}_0$, demostrar que el conjunto

    $$\{1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{m-1}\}$$

    es una base de $\Bbbk_m[x]$.

    (d) Probar que $\Bbbk_3[x]$ es generado por $\{1, 2+2x, 1-x+x^2, 2-x^2\}$. ¿Es ese conjunto una base?

16. Probar que los vectores $v_1 = (1, 0, -i)$, $v_2 = (1+i, 1-i, 1)$, $v_3 = (i, i, i)$ forman una base de $\mathbb{C}^3$. Dar las coordenadas de un vector (x, y, z) en esta base.

17. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ todos distintos y recordemos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $F(\mathbb{R})$. Demostrar que el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, ..., e^{\lambda_n x}\} \subset F(\mathbb{R})$ es LI. Concluir que $\dim_{\mathbb{R}} F(\mathbb{R})$ es infinita.

18. Consideremos el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$. Sean

    $$Sym = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\},$$

    $$Asym = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}.$$

    Es decir, las matrices simétricas y antisimétricas. Demostrar que ambos $Sym, Asym$ son subespacios vectoriales y que $M_n(\mathbb{R}) = Sym \oplus Asym$.

19. Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$, es decir S es el conjunto de funciones *pares* y T el conjunto de funciones *impares*. Probar que S y T son subespacios de $F(\mathbb{R})$ y que $F(\mathbb{R}) = S \oplus T$.

20. Decidir si es posible extender los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales. En caso afirmativo, extender a una base.

    (a) $\{(1,2,1,1), (1,0,1,1), (3,2,3,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

    (b) $\{(1,2,0,0), (1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

    (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

    (d) $\{1 + x + x^2,\ x^2 - x,\ 2x + 3,\ 1\} \subseteq \mathbb{R}_5[x]$.

Ejercicios Adicionales

21. Supongamos que tenemos un conjunto LI $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en un espacio vectorial V. Sea $w \in V$. Demostrar que si $\{v_1 + w, \ldots, v_n + w\}$ es LD, entonces $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

22. Supongamos que $\mathbb{F}$ y $\mathbb{K}$ son cuerpos tales que $\mathbb{F}$ es subcuerpo de $\mathbb{K}$. Entonces $\mathbb{K}$ puede ser mirado como un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Supongamos que $\mathbb{K}$ tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{F}$-espacio vectorial.
    Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (también se lo puede ver como un $\mathbb{F}$-espacio vectorial). Demostrar que V tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{K}$-espacio vectorial si y solo si V tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Mostrar que en tal caso vale

    $$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K}\ \dim_{\mathbb{K}} V.$$

23. Dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

    (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ z = x + y\}$.

    (b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ :\ y = x - z,\ w = x + z,\ u = 2x - 3z\}$.

    (c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ :\ a + d = b + c\}$.

    (d) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ :\ p'(0) = 0\}$.

24. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Dado $m \in \mathbb{N}_0$. Supongamos que tenemos $q_0, q_1, \ldots q_m \in \Bbbk_m[x]$ tales que $q_j(1) = 0$ para todo j. Probar que $\{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ es LD.

25. En los siguientes ejercicios $\Bbbk$ denota un cuerpo arbitrario. Calcular la dimensión de los siguientes espacios vectoriales exhibiendo una base.

    (a) $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

    (b) $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

    (c) $\{A \in M_n(\Bbbk) \colon A = A^t\}$.

    (d) $\{A \in M_n(\Bbbk) \colon A \text{ es triangular superior } \}$.

    (e) $\{A \in M_n(\Bbbk) \colon Tr(A) = 0\}$.

    (f) $\{A \in M_2(\mathbb{C}) \colon A = \overline{A^t}\}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

26. Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$v_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad v_2 = (3, 4, -2, 5), \quad v_3 = (0, 4, 1, 11), \quad v_4 = (1, 4, 0, 9).$$

    (a) Describir implícitamente al subespacio $W = \langle S \rangle$, es decir, hallar un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, para el cuál su espacio de soluciones sea exactamente W.

    (b) Si $W_1 = \langle v_1, v_2, v_3 + v_4 \rangle$ y $W_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$, describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente.