**Apellido:** **Nombre:** **Carrera:**

(1) Sea $\Bbbk$ un cuerpo

(a) (*5 pts.*) Dar la definición de espacio vectorial sobre $\Bbbk$.

(b) (*5 pts.*) Si $V$ es un espacio vectorial sobre $\Bbbk$, dar la definición de subespacio vectorial de $V$.

(c) (*5 pts.*) Consideremos la estructura canónica de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Decidir si el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y + 2z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Justifique apropiadamente.

(d) (*5 pts.*) Sea $V$ un $\Bbbk$-espacio vectorial. Sea $S \subseteq V$ un sistema de generadores de $V$ y $S \subseteq R \subseteq V$ un conjunto. Demostrar que $R$ es un sistema de generadores de $V$.

(2) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $L_1$ y $L_2$ las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$L_1 = \{t(0, a, 1) + (0, 1, 0) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$L_2 = \{s(1, b, 1) + (1, 1, 0) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $\Pi$ el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación implícita es $x - y + z = 4$.

(a) (*5 pts.*) Encontrar la ecuación paramétrica de $\Pi$.

(b) (*5 pts.*) Determinar **todos** los $a \in \mathbb{R}$ tales que la intersección $L_1 \cap \Pi$ es el conjunto vacio.

(c) (*5 pts.*) Determinar **todos** los pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que las rectas $L_1$ y $L_2$ sean perpendiculares.

(3) Sea $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B} = \{1, x, x^2 - x\}$ base de $\mathbb{R}_3[x]$. Sea $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal tal que

$$[U(u, v, w)]_{\mathcal{B}} = (u - v, 0, w - u).$$

(a) (*5 pts.*) Calcular $U(u, v, w)$.

(b) (*5 pts.*) Decidir si el polinomio $p(x) = x + 1$ pertenece a la imagen de $U$.

(c) (*5 pts.*) Decidir si $U$ es inyectiva.

(4) Sean $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{10} & -1 \\ 0 & 4 & 711 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) (*5 pts.*) Decidir si existe una matriz $C \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = A$.

(b) (*5 pts.*) Decidir si existe una matriz $D \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $D^2 = B$.

(5) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2z, 2y, -x + 4z).$$

(a) (*10 pts.*) Calcular los autovalores reales de $T$.

(b) (*10 pts.*) Calcular los autoespacios de los autovalores calculados en el punto anterior.

(c) (*5 pts.*) Decidir si $T$ es diagonalizable.

(d) (*5 pts.*) Decidir si $T$ es biyectiva.

(6) (*5 pts.*) Consideramos a $\mathbb{R}^5$ con la estructura canónica de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea $W \subseteq \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial dado por

$$W = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 : a+b+c-2e=0,\ d+e-a-2b=0,\ d+c=e+b\}.$$

Calcular la dimensión de $W$.

(7) (*5 pts.*) Sea $A$ la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Sea $L_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$L_A(B) = AB.$$

Calcular $\det(L_A)$.

| 1(a) | 1(b) | 1(c) | 1(d) | 2(a) | 2(b) | 2(c) | 3(a) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 |

| 3(b) | 3(c) | 4(a) | 4(b) | 5(a) | 5(b) | 5(c) | 5(d) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 0 | 0 | 10 | 10 | 5 | 5 |

| 6 | 7 | Total | Nota |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 65 | 6 |

**Recordar:** Si $\Bbbk$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$, se denota por $\Bbbk_n[x]$ al espacio vectorial de polinomios de grado menor que $n$ con coeficientes en $\Bbbk$, es decir

$$\Bbbk_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} : a_i \in \Bbbk\}.$$

Este espacio vectorial tiene dimensión $n$.