Práctico 4: Álgebra de matrices

1. Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC. Calcular ABC.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

(a) $-2A + 3B$.
(b) C^2 y C^3. ¿Se anima a conjeturar una fórmula para C^n, $n \in \mathbb{N}$ y demostrarla por inducción?
(c) AB.
(d) BA.

3. Demostrar que si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ entonces $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

4. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces con la suma y producto de matrices, el espacio $M_n(\mathbb{K})$ es un anillo. (Más generalmente se podría demostrar que si R es un anillo, entonces $M_n(R)$ es un anillo)

5. (a) Sean $A, B, C \in M_2(\mathbb{K})$ para mostrar que las siguientes afirmaciones son falsas:

i. $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.
ii. $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$.
iii. $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$.
iv. $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
v. $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = \mathrm{I}_2$.
vi. $(AB)^2 = A^2B^2$.

(b) Dar condiciones suficientes y necesarias sobre A y $B \in M_n(\mathbb{K})$ para que

i. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
ii. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

6. Sean

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$$

es decir, $C_1, ..., C_n$ denotan las columnas de A. Demostrar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$. [1]

7. Una matriz A se dice *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Probar que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.

8. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, la *traspuesta* de A es la matriz $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida por

$$[A^t]_{ij} := A_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, \, 1 \leq j \leq m.$$

(a) Dar las matrices traspuestas del ejercicio 1 y de la matriz A del ejercicio 2.
(b) Probar que si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces

[1] Esto quiere decir que multiplicar una matriz por un vector columna es hacer la respectiva combinación lineal de las columnas.

(i) $(A+cB)^t = A^t + cB^t$.
(ii) $(A^t)^t = A$.
(iii) $(BC)^t = C^t B^t$.

(c) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se dice *simétrica* si $A^t = A$ y se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.
  (i) Dar un ejemplo de una matriz no diagonal que sea simétrica y un ejemplo de una matriz que sea antisimétrica.
  (ii) Mostrar que si A es antisimétrica, entonces $a_{ii} = 0$ para todo i.

9. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, definimos la *traza* de A por

$$\operatorname{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Calcular la traza de las matrices del Ejercicio (2).
(b) Probar que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces
  (i) $\operatorname{Tr}(A+cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B)$
  (ii) $\operatorname{Tr}(A^t) = \operatorname{Tr}(A)$.
  (iii) $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

10. (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar por inducción en k que si A es una matriz $n \times n$ entonces

$$(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^k) = \mathrm{I}_n - A^{k+1}.$$

(b) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que si A es nilpotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ es invertible.

11. Para cada una de las siguientes matrices, decidir si son invertibles las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para aquellas que sean invertibles, hallar la matriz inversa y matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}$.

12. Probar las siguientes afirmaciones:
(a) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
(b) Sea A una matriz triangular superior tal que todos los elementos de su diagonal son no nulos[2]. Probar que A es invertible y que A^{-1} es triangular superior.

13. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique dando un contraejemplo o una demostración según corresponda.
(a) Si A y B son matrices invertibles, entonces $A+B$ es una matriz invertible.
(b) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz diagonal tal que $\operatorname{Tr}(A^2) = 0$ entonces $A = 0$.
(c) Existen matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

14. (a) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + \lambda w$ también es solución para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. [3]
(b) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema para todo $t \in \mathbb{K}$.

[2]Veremos en la sección que sigue que esta condición además de ser suficiente para que A sea invertible, es necesaria.
[3]Esto dice que el espacio de soluciones de un sistema homogéneo es cerrado para la suma y la multiplicación por escalar

(c) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(d) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

15. Sea A una matriz $n \times n$. Demostrar que:

   (a) Si A es invertible y $AB = 0$ para alguna matriz $n \times n$, B, entonces $B = 0$.

   (b) Si A no es invertible, entonces existe una matriz $n \times n$, B, tal que $AB = 0$, pero $B \neq 0$.

16. Sean A y B matrices $m \times n$ y $n \times r$ respectivamente. Probar que

   (a) Si $r > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no nulas. ¿Qué podemos decir respecto de la invertibilidad de AB en este caso si $m = r$?

   (b) Si $m > n$, entonces existe un Y, $m \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

   (c) Dar un ejemplo de matrices A y B (no cuadradas) tales que AB no sea invertible pero BA lo sea[4].

Ejercicios Adicionales

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

17. Una matriz D se dice *diagonal* si $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Sean A, B matrices diagonales. Probar que

   (a) AB es diagonal.

   (b) $AB = BA$.

18. Decimos que $A \in M_n(\mathbb{K})$ es *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

   (a) Probar que la traspuesta de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular superior (inferior).

   (b) Deducir de (a) y de los hechos probados para matrices triangulares superiores que:

      (i) el producto de dos matrices triangulares inferiores es triangular inferior.

      (ii) una matriz triangular inferior con todos sus elementos de la diagonal no nulos es invertible y su inversa es triangular inferior.

19. Decidir si la siguiente matriz es invertible. En caso afirmativo hallar la matriz inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

20. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, la *traspuesta conjugada* de A es la matriz $A^* \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ definida por

$$[A^*]_{ij} = \overline{A_{ji}}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

donde $\overline{A_{ji}}$ significa el conjugado del número complejo A_{ji}.

   (a) Dar A^* para las matrices $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) Probar que si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces

      (i) $(A + cB)^* = A^* + \overline{c}B^*$.

      (ii) $(A^*)^* = A$.

      (iii) $(BC)^* = C^*B^*$.

      (iv) Si A es cuadrada, entonces $\mathrm{Tr}(A^*) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.

[4]Si las matrices son cuadradas esto no puede suceder.

(c) Probar que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es invertible, entonces A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(d) Una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ se dice *hermitiana* si $A^* = A$ y *antihermitiana* si $A^* = -A$.

i. Dar un ejemplo de una matriz (anti)simétrica no (anti)hermitiana y un ejemplo de una matriz (anti)hermitiana no (anti)simétrica.

ii. Probar que si $A = [a_{ij}]$ es hermitiana entonces $a_{jj} \in \mathbb{R}$ para todo j y que si A es antihermitiana entonces a_{jj} es imaginario puro para todo j.

21. (a) Decimos que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es *ortogonal* si $A^t A = \mathrm{I}_n$. Probar que si A y B son ortogonales, entonces AB es ortogonal, A es invertible, y A^{-1} es ortogonal.

(b) Decimos que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ es *unitaria* si $A^* A = \mathrm{I}_n$. Probar que si A y B son unitarias, entonces AB es unitaria, A es invertible, y A^{-1} es unitaria.

(c) Dar un ejemplo de una matriz ortogonal que no sea unitaria y un ejemplo de una unitaria que no sea ortogonal.

Comentario (para el futuro):

Un subconjunto G del conjunto de matrices invertibles que cumple las propiedades i) $A, B \in G \Rightarrow G$ ii) $\mathrm{I} \in G$ y iii) $A^{-1} \in G$ es un ejemplo de lo que en matemática se conoce como *grupo*. Los grupos son estructuras algebraicas que aparecen por todos lados. Realizando este práctico, usted probó que los siguientes subconjuntos son grupos: todas las matrices invertibles (denotado $\mathsf{GL}(n, \mathbb{K})$), las matrices triangulares superiores (e inferiores), las matrices ortogonales (denotado $\mathsf{O}(n)$) y las matrices unitarias (denotado $\mathsf{U}(n)$).

22. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique dando un contraejemplo o una demostración según corresponda.

(a) Sean A y B matrices cuadradas tales que $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra. Entonces A ó B es diagonal.

(b) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^t A = 0$. Entonces $A = 0$.

(c) Dadas A, B, C matrices se tiene que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$.

(d) Sean A nilpotente y B invertible. Entonces $B - A$ es una matriz invertible.

23. Sean[5] $E^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $E^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Probar que si $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ conmuta con E^{11} y E^{12} entonces debe ser $A = c\,\mathrm{I}_2$, para algún $c \in \mathbb{K}$.

(b) Probar que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ conmuta con toda matriz 2×2 si y sólo si $A = c\,\mathrm{I}_2$ con $c \in \mathbb{K}$.

24. (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar por inducción en k que si A y B son matrices n tales que $AB = BA$ entonces

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j\, B^{k-j}.$$

(b) Probar que si A y B son matrices nilpotentes tales que que $AB = BA$, entonces $A + B$ es nilpotente. ¿Es cierta la afirmación si quitamos la hipótesis $AB = BA$?

25. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que la matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida por

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si}\, j = i + 1 \\ 0 & \text{si}\, j \neq i + 1 \end{cases}$$

satisface $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$ (una matriz con estas propiedades se llama *nilpotente de grado n*).

[5] Se pueden usar estas matrices E^{ij} en general para probar que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ conmuta con toda matriz de $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ si y sólo si $A = c\,\mathrm{I}_n$, para algún $c \in \mathbb{K}$.

Ayudas

(5) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(11a) Recurrir a la definición de que A sea invertible.

(b) Mostrar que si $a_{ii} \neq 0$ para todo i entonces una MERF de A es I_n. Para ver que A^{-1} es triangular superior, usar Corolario 2.6.3 y pensar ¿qué tipo de matrices son las matrices elementales que corresponden a las operaciones por fila realizadas a una triangular superior?

(14b) ¿Qué podemos decir del sistema $AX = 0$?

(15a) Deducir del Ejercicio 11 Pr 2 (o Corolario 2.4.6) que $BX = 0$ tiene soluciones no nulas. ¿Cómo concluimos el ejercicio?

(b) Deducir del Ejercicio 11 Pr 2 (o de la dem. de un Corolario visto en Clase sist. de ec. lineales 3) que si R_A es una MERF de A entonces R_A debe tener filas nulas. Ver que existe Z tal que $R_A BX = Z$ no tiene solución. ¿Cómo concluimos el ejercicio?

(20c) Para dar un ejemplo de matriz ortogonal que no sea unitaria, pruebe poniendo $\begin{bmatrix} a & -i \\ i & a \end{bmatrix}$ y encuentre un valor de a que sirva.

24) Pruebe por inducción en k que $A^k = \begin{cases} 1 & i = j + k \\ 0 & i \neq j + k \end{cases}$.