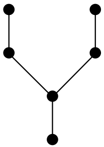
Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Facundo Bustos
Mauricio Tellechea Gonzalo Zigarán

FaMAF, 25 de septiembre de 2024

Ejes de Contenidos

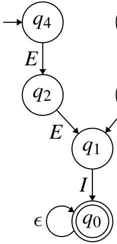
1. Estructuras Ordenadas



2. Lógica Proposicional

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

3. Lenguajes y Autómatas



Parte 2: Lógica Proposicional

Contenidos estimados para hoy

1. Componentes de la lógica proposicional
2. Sintaxis
   - El lenguaje de la lógica
   - Inducción y recursión
   - Recursión en $PROP$

Tres componentes de la lógica

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Cálculo

Cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Cálculo

Cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**

Estudiaremos especialmente la interrelación entre los dos últimos conceptos.

Sintaxis: El lenguaje

Los símbolos que usaremos:

$$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}.$$

Sintaxis: El lenguaje

Los símbolos que usaremos:

$$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}.$$

Con Σ^* denotamos el conjunto de todas las cadenas de símbolos en Σ.

Sintaxis: El lenguaje

Los símbolos que usaremos:

$$\Sigma := \{\ ),\ (,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \bot,\ p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\ \}.$$

Con Σ^* denotamos el conjunto de todas las cadenas de símbolos en Σ.

Ejemplo

$\boxed{p_{18}((((\vee}$, $\boxed{p_7 p_0 p_0 \rightarrow}$ y $\boxed{\wedge\wedge)\bot}$ pertenecen a Σ^*.

Sintaxis: El lenguaje

Los símbolos que usaremos:

$$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \to, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \,\}.$$

Con Σ^* denotamos el conjunto de todas las cadenas de símbolos en Σ.

Ejemplo

$\boxed{p_{18}((((\vee}$, $\boxed{p_7 p_0 p_0 \to}$ y $\boxed{\wedge\wedge)\bot}$ pertenecen a Σ^*.

Llamaremos **variables proposicionales** a los elementos del conjunto

$$\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\} \subseteq \Sigma$$

Los símbolos que usaremos:

$$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}.$$

Con Σ^* denotamos el conjunto de todas las cadenas de símbolos en Σ.

Ejemplo

$\boxed{p_{18}((((\vee}$, $\boxed{p_7 p_0 p_0 \rightarrow}$ y $\boxed{\wedge\wedge)\bot}$ pertenecen a Σ^*.

Llamaremos **variables proposicionales** a los elementos del conjunto

$$\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\} \subseteq \Sigma$$

y llamaremos **átomos** a los elementos del conjunto

$$At := \{\bot\} \cup \mathcal{V} = \{\bot, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\} \subseteq \Sigma$$

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \land p_2)}$, $\boxed{(p_0 \lor (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\bot \to \bot)}$ son proposiciones.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \wedge p_2)}$, $\boxed{(p_0 \vee (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\bot \to \bot)}$ son proposiciones.

Nos interesa definir un subconjunto de Σ^* que

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \wedge p_2)}$, $\boxed{(p_0 \vee (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\bot \to \bot)}$ son proposiciones.

Nos interesa definir un subconjunto de Σ^* que

(*) contenga a todas las variables proposicionales, a $\bot$, y que cada vez que dos palabras α y β estén en ese conjunto, las palabras $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \to \beta)$ también estén en ese conjunto.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \wedge p_2)}$, $\boxed{(p_0 \vee (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\perp \to \perp)}$ son proposiciones.

Nos interesa definir un subconjunto de Σ^* que

(*) contenga a todas las variables proposicionales, a $\perp$, y que cada vez que dos palabras α y β estén en ese conjunto, las palabras $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \to \beta)$ también estén en ese conjunto. Nos gustaría que además no tuviera

otras cosas, que sólo tuviera palabras construídas de esta forma.

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \wedge p_2)}$, $\boxed{(p_0 \vee (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\bot \to \bot)}$ son proposiciones.

Nos interesa definir un subconjunto de Σ^* que

(*) contenga a todas las variables proposicionales, a $\bot$, y que cada vez que dos palabras α y β estén en ese conjunto, las palabras $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \to \beta)$ también estén en ese conjunto. Nos gustaría que además no tuviera

otras cosas, que sólo tuviera palabras construídas de esta forma.
En algún sentido buscamos "el menor" conjunto que satisfaga (*).

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \wedge p_2)}$, $\boxed{(p_0 \vee (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\bot \to \bot)}$ son proposiciones.

Nos interesa definir un subconjunto de Σ^* que

(*) contenga a todas las variables proposicionales, a $\bot$, y que cada vez que dos palabras α y β estén en ese conjunto, las palabras $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \to \beta)$ también estén en ese conjunto. Nos gustaría que además no tuviera

otras cosas, que sólo tuviera palabras construídas de esta forma.
En algún sentido buscamos "el menor" conjunto que satisfaga (*). ¿Qué significa el menor conjunto que satisface algo entre una familia de conjuntos?

Inducción en $PROP$

Lema

La familia de conjuntos que satisfacen (*) es no vacía y cerrada por intersecciones arbitrarias.

Definición

$PROP$ es **el menor** subconjunto de Σ^* (según $\subseteq$) que cumple con:

Inducción en $PROP$

Lema

La familia de conjuntos que satisfacen (*) es no vacía y cerrada por intersecciones arbitrarias.

Definición

$PROP$ es **el menor** subconjunto de Σ^* (según $\subseteq$) que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

Inducción en $PROP$

Lema

La familia de conjuntos que satisfacen (*) es no vacía y cerrada por intersecciones arbitrarias.

Definición

$PROP$ es **el menor** subconjunto de Σ^* (según $\subseteq$) que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \to \psi)$ está en $PROP$.

Inducción en $PROP$

Lema

La familia de conjuntos que satisfacen (*) es no vacía y cerrada por intersecciones arbitrarias.

Definición

$PROP$ es **el menor** subconjunto de Σ^* (según $\subseteq$) que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \to \psi)$ está en $PROP$.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \vee \psi)$ está en $PROP$.

Inducción en $PROP$

Lema

La familia de conjuntos que satisfacen (*) es no vacía y cerrada por intersecciones arbitrarias.

Definición

$PROP$ es **el menor** subconjunto de Σ^* (según $\subseteq$) que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \to \psi)$ está en $PROP$.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \vee \psi)$ está en $PROP$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \wedge \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale. $\}$ *Caso Base*

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale. $\}$ Caso Base

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ *entonces*

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale. $\}$ Caso Base

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ entonces $A((\varphi \to \psi))$, $A((\varphi \vee \psi))$ y $A((\varphi \wedge \psi))$

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A *un predicado sobre* $PROP$*. Luego* $A(\varphi)$ *es verdadero para toda* $\varphi \in PROP$ *si y sólo si:*

Si φ *es atómica,* $A(\varphi)$ *vale.* $\}$ Caso Base

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ *entonces* $A((\varphi \to \psi))$, $A((\varphi \vee \psi))$ *y* $A((\varphi \wedge \psi))$

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale. $\}$ Caso Base

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ entonces $A((\varphi \to \psi))$, $A((\varphi \vee \psi))$ y $A((\varphi \wedge \psi))$

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. Quiero ver que $X = PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A *un predicado sobre* $PROP$*. Luego* $A(\varphi)$ *es verdadero para toda* $\varphi \in PROP$ *si y sólo si:*

Si φ *es atómica,* $A(\varphi)$ *vale.* $\}$ *Caso Base*

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ *entonces* $A((\varphi \to \psi))$, $A((\varphi \vee \psi))$ *y* $A((\varphi \wedge \psi))$

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. Quiero ver que $X = PROP$. $X \subseteq PROP$ por definición.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale. $\}$ Caso Base

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ entonces $A((\varphi \to \psi))$, $A((\varphi \vee \psi))$ y $A((\varphi \wedge \psi))$

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. Quiero ver que $X = PROP$. $X \subseteq PROP$ por definición.

Y además $PROP \subseteq X$ por minimalidad.

Inducción en $PROP$: ¿Para qué la usamos?

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \to \varphi_k)$, $(\varphi_j \vee \varphi_k)$ o $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Inducción en $PROP$: ¿Para qué la usamos?

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \to \varphi_k)$, $(\varphi_j \vee \varphi_k)$ o $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Inducción en $PROP$: ¿Para qué la usamos?

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \to \varphi_k)$, $(\varphi_j \vee \varphi_k)$ o $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

Inducción en $PROP$: ¿Para qué la usamos?

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \to \varphi_k)$, $(\varphi_j \vee \varphi_k)$ o $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Por HI, φ y ψ tienen sdf $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$.

Inducción en $PROP$: ¿Para qué la usamos?

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \to \varphi_k)$, $(\varphi_j \vee \varphi_k)$ o $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Por HI, φ y ψ tienen sdf $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$. Luego $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, (\varphi \odot \psi)$ es sdf de $(\varphi \odot \psi)$.

Recursión en *PROP*

Recursión en *PROP*

Teorema (definición por recursión en subfórmulas)

Sea A un conjunto y supongamos dadas funciones
$H_{At} : At \to A$ *y* $H_\odot : A^2 \to A$ *para cada* $\odot$.
Entonces hay exactamente una función $F : PROP \to A$ *tal que*

$$\begin{cases} F(\varphi) & = & H_{At}(\varphi) \quad \textit{para } \varphi \textit{ en } At \\ F((\varphi \odot \psi)) & = & H_\odot\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \end{cases}$$

Recursión

Otras versiones equivalentes útiles

Recursión en $PROP$

Teorema (definición por recursión en subfórmulas)

Sea A un conjunto y supongamos dadas funciones $H_{At} : At \to A$ y $H_{\odot} : A^2 \to A$ para cada $\odot$.
Entonces hay exactamente una función $F : PROP \to A$ tal que

$$\begin{cases} F(\varphi) & = & H_{At}(\varphi) \quad \textit{para } \varphi \textit{ en } At \\ F((\varphi \odot \psi)) & = & H_{\odot}\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \end{cases}$$

Recursión

Otras versiones equivalentes útiles $\longrightarrow$ *Pizarrón*

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}$.

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) = \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\}$$ caso "$\odot$"

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$\begin{aligned} gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso "}\odot\text{"} \\ &= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso "}At\text{"} \end{aligned}$$

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”}
\end{aligned}
$$

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”}\\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”}\\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”}\\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”}
\end{aligned}
$$

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n$; $gr(\bot) := -1$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}$.

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\{3, 2\} && \text{def de máx}
\end{aligned}
$$

Nacional de Córdoba AÑOS

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n; gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \text{máx}\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”} \\
&= \text{máx}\big\{\text{máx}\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”} \\
&= \text{máx}\{3, 2\} && \text{def de máx} \\
&= 3 && \text{def de máx}
\end{aligned}
$$