

Práctico 0

NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos.

- Familiarizarse con los números complejos.
- Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

Ejercicios.

- (1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a) $(-1 + i)(3 - 2i)$

(b) $i^{131} - i^9 + 1$

(c) $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

- (2) Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

- (3) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

- (4) Probar que si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (5) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a) $(\cos \theta - i \sin \theta)^{-1}$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

(b) $3i(1 + i)^4$,

(c) $\frac{1+i}{1-i}$

- (6) Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

(a) $\frac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$.

(b) $z - 2 + \frac{1}{z-2}$.

(c) $\left| \frac{1}{z-i} \right|^2$.

- (7) Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{|z|^2}$.

- (8) (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean z_1, z_2, \dots, z_n números complejos. Probar que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

- (9) Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$