Práctico 9: Transformaciones lineales. Núcleo e Imágen.

1. Sean V, W, U $\mathbb{k}$-espacios vectoriales y supongamos que $T : V \to W$, $S : W \to U$ son transformaciones lineales. Demostrar que $S \circ T$ y λT son transformaciones lineales, donde $\lambda \in \mathbb{k}$.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales?
   (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$.
   (b) $T(x, y) = (y, x, x - 2y)$.
   (c) $T(x, y) = xy$.
   (d) $T(x, y, z) = 3x - 2y + 7z$.

3. Consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x > 0\}$ con las operaciones $x \oplus y = x \cdot y$ y $\lambda \odot x = x^\lambda$ (ver Ejercicio 2 del práctico 7). Demostrar que la función
$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad exp(r) = e^r,$$
es una transformación lineal. Donde a $\mathbb{R}$ se lo considera con la estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

4. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal *idempotente*; es decir que cumple que $T \circ T = T$. Demostrar que $Im(T) \oplus Nu(T) = V$.

5. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, decidir si son $\mathbb{R}$-lineales o $\mathbb{C}$-lineales.
   (a) $T(z) = iz$.
   (b) $R(z) = \overline{z}$.
   (c) $S(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$.

6. En cada caso, si es posible, dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que satisfaga las condiciones exigidas. Si existe, estudiar la unicidad; si no existe, explicar porqué no es posible definirla.
   (a) $T(0, 1) = (1, 2, 0, 0)$, $T(1, 0) = (1, 1, 0, 0)$.
   (b) $T(1, 1, 1) = (0, 1, 3)$, $T(1, 2, 1) = (1, 1, 3)$, $T(2, 1, 1) = (3, 1, 0)$.
   (c) $T(1, 1, 1) = (3, 2)$, $T(1, 0, 1) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0)$.
   (d) $T(0, 1, 1) = (1, 2, 0, 0)$, $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal suryectiva y $W \subseteq \mathbb{R}^6$ un subespacio de dimensión 3. Demostrar que existe un $w \in W$ con $w \neq 0$ tal que $T(w) = 0$.

8. Dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea el subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$. Hallar $T(x, y, z)$.

9. Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1, 1) = (0, 1)$ y hallar $T(x, y, z, w)$.

10. Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \{(x, y, z) : z = 2x = y\}$ e $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | b = a - c, b - d = a + c \right\}$. Hallar $T(x, y, z)$.

11. Probar que no existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \{(x, y, z) : z = 2x = y\}$ e $\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | b - d = a + c \right\}$.

12. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ la función dada por
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - d)x^2 + cx + (a + b + c + d).$$
   (a) Demostrar que T es una transformación lineal.

(b) Calcular la dimensión del núcleo de T.

13. Consideremos $C^2([0,1])$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que son dos veces difenciables con $f^{(2)}$ continua y $C^1([0,1])$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ que son diferenciables tal que f' continua.

    (a) Demostrar que las funciones $D: C^2([0,1])\to C^1([0,1])$, $I: C^1([0,1])\to C^2([0,1])$ dadas por

    $$D(f)(x)=f'(x), \qquad I(f)(x)=\int_0^x f(t)dt$$

    son transformaciones lineales.

    (b) Demostrar que $D\circ I = Id$ pero que $I\circ D\neq Id$.

14. Sea $n\in\mathbb{N}$ y consideremos los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{R}_n[x]$.

    (a) Demostrar que para todo $q\in\mathbb{R}[x]$ la función $T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $T(p(x))=p(q(x))$ es una transformación lineal. Demostrar que si q no es el polinomio constante cero, entonces $Nu(T)=0$. Cúando T es suryectiva?

    (b) Decidir cuáles de las siguientes transformaciones lineales de V en V son isomorfismos.

    $$(a)\ T(p(x))=p(x-1). \qquad (b)\ S(p(x))=xp'(x). \qquad (c)\ Q(p(x))=p(x)+p'(x).$$

    (c) Demostrar que para todo $a\in\mathbb{R}$ el conjunto

    $$\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^{n-1}\}$$

    es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

15. Sean $n\in\mathbb{N}$ y $\mathbb{k}$ un cuerpo. Consideremos el $\mathbb{k}$-espacio vectorial de matrices $M_n(\mathbb{k})$.

    (a) Es la función determinante $det: M_n(\mathbb{k})\to\mathbb{k}$ una transformación lineal?

    (b) Es la función traza $\operatorname{Tr}: M_n(\mathbb{k})\to\mathbb{k}$ una transformación lineal?

    (c) Consideremos W el subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$ generado por matrices de la forma $AB-BA$ donde $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $\dim W = n^2-1$.

16. Sea $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$ dada por $T(X)=AX$.

    (a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1,2,3,4)$, $(1,-1,-1,2)$, $(1,0,2,1)$.

    (b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2,3,-1,0,1)$, $(1,1,0,3,1)$, $(1,0,2,1,0)$.

    (c) Dar una base del núcleo.

    (d) Dar una base de la imagen.

    (e) Describir la imagen implícitamente.

17. Sea $T:\mathbb{C}\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a+ib)=\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$.

    (a) Probar que T es $\mathbb{R}$-lineal.

    (b) Probar que T es inyectiva. Notar que eso implica que el espacio vectorial real de los números complejos es isomorfo al subespacio de matrices 2×2 de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & -b\\ b & a\end{smallmatrix}\right)$.

    (c) Probar que $T(zw)=T(z)T(w)$ para todo $z,w\in\mathbb{C}$.

18. Sean $T:V\longrightarrow W$ y $S:W\longrightarrow U$ transformaciones lineales. Demostrar que:

    (a) Si T y S son sobreyectivas, entonces $S\circ T$ es sobreyectiva.

    (b) Si T y S son inyectivas, entonces $S\circ T$ es inyectiva.

    (c) Si S no es sobreyectiva, entonces $S\circ T$ no es sobreyectiva.

    (d) Si T no es inyectiva, entonces ST no es inyectiva.

(e) ¿Puede ser S sobreyectiva y $S \circ T$ no?
(f) ¿Puede ser T inyectiva y $S \circ T$ no?

19. Dar una base del núcleo y caracterizar por ecuaciones la imagen de las siguientes transformaciones lineales:

(a) $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, 0)$.
(b) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
(c) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $T(p(x)) = (p(1), p(2))$
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 & x_1 - 2x_3 \\ -x_1 & x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

Ejercicios Adicionales

20. En cada uno de los siguientes casos, definir, cuando sea posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible, justificar por qué.

(a) $\dim \operatorname{Im} T = 1$.
(b) $\dim \operatorname{Im} T = 2$ y $\dim \operatorname{Nu} T = 2$.
(c) $(1, 1, 0) \in \operatorname{Im} T$ y $(0, 1, 1) \in \operatorname{Nu} T$.
(d) $(1, 1, 0) \in \operatorname{Im} T$, $(0, 1, 1), (1, 2, 1) \in \operatorname{Nu} T$.
(e) $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nu} T$.
(f) $\operatorname{Nu} T \subseteq \operatorname{Im} T$.

21. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$ una matriz y sean $L_A, T_A : M_n(\Bbbk) \to M_n(\Bbbk)$ las transformaciones lineales definidas por:

$$L_A(B) = AB, \qquad T_A(B) = AB - BA.$$

(a) Demostrar que en efecto L_A y T_A son transformaciones lineales.
(b) Demostrar que $L_A = 0$ si y sólo si $A = 0$.
(c) ¿Es cierto que $T_A = 0$ si y sólo si $A = 0$?
(d) Determinar $\{A : I_n \in \operatorname{Im} L_A\}$ y $\{A : I_n \in \operatorname{Im} T_A\}$.

22. ¿Cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales?

(a) $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, -x_1, x_2, -x_2, \ldots, x_n, -x_n)$.
(b) $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n)$.
(c) $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.
(d) $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 \cdot x_2, \ldots, x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)$.

23. Para cada una de las siguientes matrices A_i, sea T la transformación lineal dada por $T(X) = A_i X$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Dar una base del núcleo.
(b) Dar una base de la imagen.
(c) Describir la imagen implícitamente.

24. Sea V un $\Bbbk$ espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Asumamos que existe un $m \in \mathbb{N}$ y un vector $v \in V$ tales que $T^m(v) = 0$ pero que $T^{m-1}(v) \neq 0$. Demostrar que el conjunto

$$\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{m-1}(v)\}$$

es linealmente independiente.

25. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ un conjunto de funciones continuas, $i = 1, \ldots, n$. Definamos A la matriz cuadrada $n \times n$ dada por

$$A_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt.$$

(a) Sea $X \in \mathbb{R}^n$ un vector de coordenadas $X_i = x_i$. Demostrar que

$$X^t A X = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t)\Big)^2 dt$$

(b) Demostrar que $det(A) = 0$ (en particular existe X tal que $AX = 0$) si y sólo si el conjunto $\{f_i\}_{i=1..n}$ es linealmente dependiente en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $C([a,b])$.

26. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal.

(a) Demostrar que existe un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 tal que $T(W) \subseteq W$. Es decir un subespacio invariante por T de dimensión 1.

(b) Demostrar que existe un subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $T(U) \subseteq W$. Es decir un subespacio invariante por T de dimensión 2.

27. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sean V, U $\Bbbk$-espacios vectoriales. Vamos a denotar por $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,U)$ al espacio de transformaciones lineales de V a U.

(a) Demostrar que $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,U)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

(b) Como caso particular, para todo espacio vectorial V se puede formar el espacio vectorial dual

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk).$$

Si $T : U \to V$ es una transformación lineal, definimos la dual o transpuesta por $T^* : V^* \to U^*$ dada por $T^*(f) = f \circ T$. Demostrar que T^* es una transformación lineal.

(c) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Demostrar que para todo $j = 1, \dots, n$ existe una transformación lineal $f_j : V \to \mathbb{K}$ tal que

$$f_j(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Demostrar que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una base de V^*. Dicha base se llama la base dual $\mathcal{B}$.

(d) Si $f \in V^*$, probar que $f = \sum_{i=1}^n f(v_i) f_i$.

(e) Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita. Para cada $u \in U$, $f : V \to \mathbb{K}$ transformación lineal, la función

$$T_{u,f} : V \to U, \qquad T_{u,f}(v) = f(v) \cdot u,$$

es una tranformación lineal.

(f) Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $\{u_i\}$ una base de U, $\{v_j\}$ una base de V con su base dual $\{f_j\}$. Demostrar que el conjunto $\{T_{u_i, f_j}\}$ es una base de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U)$. Concluir que $\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,U) = \dim V . \dim U$.

(g) Si V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces podemos considerar el doble dual V^{**}. Demostrar que $L : V \to V^{**}$ dada por $L(v)(f) = f(v)$, para todo $v \in V$, $f \in V^*$ define un isomorfismo lineal.

28. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Bbbk$, y sea $U : V \to W$ un isomorfismo. Probar que $L : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W,W)$, definida por $L(T) = UTU^{-1}$, es un isomorfismo lineal.