Práctico 5

Autovalores y autovectores

Objetivos.

- Familiarizarse con las nociones de autovalor y autovector de una matriz cuadrada.
- Aprender a calcular el polinomio característico, los autovalores, y los autoespacios de una matriz cuadrada.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) (a) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(b) Calcular los autovalores complejos de las matrices D y E del item anterior y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

Observaciones. Es oportuno destacar algunos fenómenos que podemos observar en el Ejercicio 1.

○ Una matriz con coeficientes reales puede no tener autovalores reales pero sí complejos (D) o tener ambos (E).

△ Para describir paramétricamente los autoespacios podemos necesitar distintas cantidades de parámetros para los distintos autovalores (B). Esta cantidad mínima de parámetros es lo que llamaremos *dimensión*.

□ La cantidad de autovalores distintos es menor o igual al tamaño de la matriz. Incluso puede tener un sólo autovalor (C) o tener tantos como el tamaño (A y E).

(2) Probar que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible si y sólo si 0 no es autovalor de A.

(3) Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico. Deducir que tienen los mismos autovalores. Mostrar que no necesariamente tienen los mismos autovectores.

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Probar que si λ es autovalor de A con autovector v entonces λ^k es autovalor de A^k con autovector v. ¿Qué puede decir de los autovalores de una matriz nilpotente?

(b) Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomio, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$. Sea $p(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$p(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Probar que si λ es autovalor de A con autovector v entonces $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$ con autovector v.

(c) Sea A una matriz invertible. Si λ es autovalor de A de autovector v entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1} con autovector v.

(d) Mostrar que si A es una matriz real y $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A, entonces $\bar{\lambda}$ también es autovalor de A.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.
  (a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$.
  (b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\mathrm{Tr}(A)$.

(6) ⓐ Probar que dos matrices semejantes (ver definición en Práctico 4, Ejercicio 7) tienen el mismo polinomio característico. Deducir que tienen los mismos autovalores.

(7) ⓐ Dado un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{K}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, se define su *matriz compañera* por

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Probar que el polinomio característico de $C(p)$ es p.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(8) Repetir el Ejercicio 1 con las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

(9) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
  (a) Sea A una matriz que satisface $2A + \mathrm{Id} = -A^2$. Entonces A es invertible.
  (b) Existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.
  (c) Sean A y B matrices que tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico. Entonces A y B son semejantes.

(10) Usando autovalores, dar otra prueba de que si A es nilpotente entonces $\mathrm{Id}_n - A$ es invertible (Ejercicio 9b Práctico 3).

(11) ⓐ Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. El objetivo de este ejercicio es probar que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.
  (a) Probar que $\begin{bmatrix} \mathrm{Id}_n & -A \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_n & -A \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$.
  (b) Deducir que $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}$, es decir que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

(12) ⓐ Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

(a) $(-1)^n \det(A) = a_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$. En particular, $\det A = \prod_{i=1}^k \lambda_i$.
(b) $\operatorname{Tr}(A) = -a_{n-1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. En particular, $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

(13) ⓐ Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Tr} A = 0, \operatorname{Tr} A^2 = 0, \ldots, \operatorname{Tr} A^n = 0$. Probar que el único autovalor de A es el 0.

Ayudas.

(6) Usar que $x \operatorname{Id} = Px \operatorname{Id} P^{-1}$ (asegúrese de entender por qué vale esto)

(7) Desarrollar el determinante por la primera fila y hacer inducción.

(11) (a) Usar la multiplicación en bloques descripta en (Práctico 4-Ejercicio 17).
(b) Probar a mano que $\chi_{AB}(0) = \chi_{BA}(0)$. Para $x \neq 0$, Por (a) y Ejercicio 6, se cumple que $\det(x \operatorname{Id}_n - AB) \det(x \operatorname{Id}_n) = \det(x \operatorname{Id}_n) \det(x \operatorname{Id}_n - BA)$. Concluir.

(12) Como $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, por el Teorema Fundamental del Álgebra podemos escribir $\det(x \operatorname{Id} - A) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$.
(a) Evaluar el polinomio $\chi_A(x)$ (escrito de ambas maneras como arriba) en un valor apropiado para obtener el término independiente a_0.
(b) Para probar la primera igualdad, se procede por inducción en n (probar $n = 1$ a mano). Para el paso inductivo, desarrollar $\det(x \operatorname{Id} - A)$ por la primera fila. Queda

$$\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A) =$$
$$(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1)) + a_{21} \det((x \operatorname{Id} - A)(2|1)) + \cdots + (-1)^n a_{1n} \det((x \operatorname{Id} - A)(1|n)).$$

El único sumando donde hay x^{n-1} es $(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$, todos los demás tienen términos con x^{n-2} o menores. Además, $\det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$ es el polinomio característico de la submatriz $A(1|1)$. Podemos aplicar la hipótesis inductiva a esta matriz y deducir que el coeficiente de x^{n-1} en el producto de polinomios $(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$ es $-\operatorname{Tr}(A)$.

Para la segunda igualdad, notar que en el producto de $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$, para obtener $a_{n-1}x^{n-1}$ tenemos que elegir $n - 1$ de las x y un $-\lambda_i$, y sumar sobre i. Entonces $a_{n-1} = -\lambda_1 - \cdots - \lambda_n$.

(13) Usar que la traza de una matriz es la suma de sus autovalores.