Notas de Álgebra Lineal

Ticiano Ian Morvan

Noviembre 2024

Índice

1. Anillos y cuerpos

Un **anillo** es un conjunto R junto con dos operaciones: $(+) : R \times R \longrightarrow R$ y $(\cdot) : R \times R \longrightarrow R$. R verifica las siguientes propiedades:

I. La suma es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in R$

II. Existe un neutro para la suma: $\exists 0 \in R : x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in R$

III. Existe el opuesto para la suma: $\forall x \in R, \exists(-x) \in R : (-x) + x = x + (-x) = 0$

IV. La suma es conmutativa: $x + y = y + x \quad \forall x, y \in R$

V. El producto es asociativo: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in R$

VI. Existe el neutro para el producto: $\exists 1 \in R : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in R$

VII. Vale la distributividad: $x \cdot (y + z) = xy + xz; \quad (y + z) \cdot x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in R$

Diremos que un anillo es **conmutativo** si vale que su producto lo es: $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R$.
Un **cuerpo** es un anillo conmutativo R tal que $\forall x \in R, x \neq 0, \exists x^{-1} \in R : x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.
Un **subcuerpo** de un cuerpo R es un subconjunto $S \subseteq R$ tal que es un cuerpo con las operaciones inducidas:

$\longrightarrow$ $0, 1 \in S$

$\longrightarrow$ S sea cerrado para la suma y el producto, es decir, $s, s' \in S \Longrightarrow s + s', s \cdot s' \in S$ y $s^{-1} \in S$

1.1. Propiedades de cuerpos

Sea F un cuerpo, se cumple que

I. El 0 es único, si $\exists 0' \in F$ tal que $0' + x = x + 0' = x \quad \forall x \in F \Longrightarrow 0' = 0$

II. El 1 es único, con la misma prueba que para I.

III. El inverso de cada $x \in F - \{0\}$ es único.

IV. El opuesto de cada $x \in F$ es único.

V. Dados $x, y \in F \quad xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$

2. Espacios vectoriales

Definición 2.1. *Sea F un cuerpo. Un F-espacio vectorial es un conjunto V junto con dos operaciones: $(+) : V \times V \longrightarrow V$ y $(\cdot) : F \times V \longrightarrow V$ que satisfacen las propiedades vistas en 1. En general, si F es un cuerpo, F es un F-espacio vectorial.*

2.1. Propiedades de espacios vectoriales

Definición 2.2. *Sea V un F-espacio vectorial, $v \in V$, $c \in F$, se cumple que*

I. $0 \cdot v = \bar{0}, \quad c \cdot \bar{0} = \bar{0}$

II. $c \cdot v = \bar{0} \iff c = 0 \vee v = \bar{0}$

III. $-(c \cdot v) = (-c) \cdot v = c \cdot (-v)$. *En particular,* $-v = (-1) \cdot v$

Donde $\bar{0}$ denota el cero vectorial.

2.2. Subespacios vectoriales

Definición 2.3. *Sea V un F-espacio vectorial. Un subconjunto $W \subseteq V$ no vacío es un* ***subespacio*** *si $\forall w_1, w_2 \in W, c \in F$ se tiene que $w_1 + w_2 \in W, c \cdot w_1 \in W$ y $\bar{0} \in W$.*

Teorema 2.4. *Un subconjunto no vacío $W \subseteq V$ es un subespacio $\iff \forall v, w \in W$ y $\forall \lambda \in F$ se tiene que $v + \lambda w \in W$.*

Proposición 2.5. *Sea V un F-espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de $V \Longrightarrow W_1 \cap W_2$ subespacio de V.*

Observación. La unión de subespacios **no** es, en general, un subespacio.

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, con coeficientes a de un cuerpo F es un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $a_{ij} \in F$, $b_i \in F$. Cada n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ que satisface las ecuaciones se denomina una **solución del sistema**. En particular, si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, el sistema se dice **homogéneo**.

Lema 3.1. *El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de n variables es un subespacio de F^n.*

Demostración. Presentando solo la idea, teniendo $Z_j = \{(x_1, \ldots, x_n) \in F^n : a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = 0\}$, el conjunto de soluciones del sistema es $Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_m$. Luego, la intersección de subespacios es un subespacio y queda ver que cada Z_j sea un subespacio. □

4. Matrices

Definición 4.1. *Una matriz* $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ *sobre* F *es una función:*

$$A = \{(i, j) : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m\} \longrightarrow F$$

Donde el elemento a_{ij} *es la* ***entrada*** (i, j) *de* A.

Definición 4.2. *Definimos la matriz identidad* Id_n *como una matriz* $n \times n$ *tal que*

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4.1. Operaciones elementales por fila

Tenemos tres operaciones elementales por filas: **intercambiar** dos filas, **multiplicar** una fila por una constante no nula y **reemplazar** una fila r por ella más una c veces la fila s, con $c \in F$.

Teorema 4.3. *Para cada operación elemental por fila* $e : F^{m\times n} \longrightarrow F^{m\times n}$*, existe* $e' : F^{m\times n} \longrightarrow F^{m\times n}$ *tal que* $e(e'(A)) = e'(e(A)) \quad \forall A \in F^{m\times n}$

Diremos que A es equivalente por filas a B si A se obtiene a partir de B aplicando operaciones elementales por filas. Formalmente:

$$B \rightsquigarrow e_1(B) \rightsquigarrow e_2(e_1(B)) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow e_n(e_{n-1}(\dots(e_1(B)))) = A, \text{ donde } A \sim B$$

Teorema 4.4. *Sean* $A, B \in F^{m\times n}$*tal que* $A \sim B$*. Entonces los sistemas homogéneos* $AX = 0$ *y* $BX = 0$ *tienen las mismas soluciones.*

Definición 4.5. *Una matriz* $A \in F^{m\times n}$ *se dice* ***reducida por filas*** *si verifica*

1. *Para cada fila no nula de* A*, el primer elemento no nulo es* 1.
2. *Cada columna que contiene un* 1 *que es el primer elemento no nulo de una fila, tiene todos los demás en* 0.

Definición 4.6. *Una matriz* $A \in F^{m\times n}$ *se dice* ***escalonada reducida por filas*** *(MERF) si*

1. *Es reducida por filas.*
2. *Las filas nulas se ubican al final, es decir, las filas no nulas son* f_1 *hasta* f_r *y en el primer lugar no nulo de la fila* f_i *es* $k_i \to k_1, k_2, \dots, k_r$.

Teorema 4.7. *Toda matriz* $A \in F^{m\times n}$ *es equivalente por filas a una MERF.*

Demostración. Tendremos que verificar que toda matriz A es equivalente a una reducida por filas. Luego, reubicando las filas, podremos verificar que A es equivalente a una MERF. □

Teorema 4.8. *Si* $A \in F^{m\times n}$ *y* $m \leq n \Rightarrow$ *el sistema homogéneo* $AX = 0$ *tiene soluciones no triviales.*

Teorema 4.9. *Sea* $A \in F^{m\times n}$*. Entonces el sistema homogéneo* $AX = 0$ *tiene una única solución si y solo si* $A \sim Id_n$.

Teorema 4.10. *Sea* $A \in F^{m\times n}$*. Entonces, son equivalentes:*

1. $A \sim Id_n$
2. *El sistema homogéneo* $AX = 0$ *tiene una única solución.*
3. $\forall b \in F^{m\times 1}$*, el sistema* $AX = b$ *tiene una única solución.*

Proposición 4.11. *Tomemos* $A \in F^{m\times n}, b \in F^{m\times 1}$ *tales que el sistema* $AX = b$ *tiene una solución* $p = (p_1, \dots, p_n) \in F^n$*. Sea* $S \subset F^n$ *el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado* $AX = 0 \Rightarrow$ *el conjunto de soluciones de* $AX = b$ *es* $p + S := \{p + s : s \in S\}$

Definición 4.12. *Definimos la suma y el producto por escalar de matrices.*

$$F^{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F \right\}$$

$$(+) : F^{m\times n} \times F^{m\times n} \longrightarrow F^{m\times n} \quad A = (A_{ij}),\ B = (B_{ij}) \to (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(\cdot) : F \times F^{m\times n} \longrightarrow F^{m\times n} \quad (C \cdot A)_{ij} = C \cdot A_{ij} \quad \forall i, j$$

Definición 4.13. *La matriz canónica E_{ij} es aquella cuya entrada ij es 1 y las demás son 0.*

Definición 4.14. *Definimos el producto de matrices como una función que va de $F^{m\times n} \times F^{n\times p} \longrightarrow F^{m\times p}$ y, tomando matrices $A, B \in F^{m\times n}, F^{n\times p}$ respectivamente, denotamos $A\dot{B}$ o simplemente AB a la matriz con entradas:*

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Para este producto verificamos las siguientes propiedades:

I. Asociatividad $\quad \forall A \in F^{m\times n},\ B \in F^{n\times p},\ C \in F^{p\times q} \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

II. Identidad $\quad \forall A \in F^{m\times n} \quad Id_m \cdot A = A \cdot Id_n = A$

III. Distributividad $\quad \forall A, A' \in F^{m\times n},\ \forall B, B' \in F^{n\times r}$
$(A + A') \cdot B = AB + A'B,\ A \cdot (B + B') = AB + AB'$

IV. Conmutación con los productos escalares $\quad \forall A \in F^{m\times n},\ B \in F^{n\times r},\ \lambda \in F$
$\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

Definición 4.15. *Una matriz $n \times n$ se dice una* ***matriz elemental*** *si se obtiene de la matriz Id_n aplicando una operación elemental por fila.*

Teorema 4.16. *Sea $E \in F^{m\times m}$ la matriz elemental asociada a la operación elemental $e : F^{m\times n} \longrightarrow F^{m\times n}$. Entonces, $e(A) = EA,\ \forall A \in F^{m\times n}$*

Corolario 4.17. *Sean $A, B \in F^{m\times n}$, entonces $A \sim B$ si y solo si existe una matriz $P \in F^{m\times m}$ que es producto de matrices elementales tal que $A = P \cdot B$*

4.2. Matrices invertibles

Definición 4.18. *Una matriz $A \in F^{n\times n}$ se dice* ***invertible*** *si $\exists B \in F^{n\times n}$ tal que $AB = BA = Id_n$. Además, si existe inverso entonces es único y lo denotamos A^{-1}.*

Teorema 4.19. *Toda matriz elemental es invertible.*

Proposición 4.20. *Sean $A, B \in F^{n\times n}$, vale que*

1. *Si A y B son invertibles $\Longrightarrow AB$ también es invertible.*
   Más aún, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. *Id_n es invertible $(Id_n)^{-1} = Id_n$*
3. *Si A es invertible $\Longrightarrow A^{-1}$ también lo es, más aún $(A^{-1})^{-1} = A$*

Teorema 4.21. *Sea $A \in F^{n\times n}$. Son equivalentes*

1. *A es invertible*
2. *$A \sim Id_n$*
3. *A es producto de matrices elementales.*

5. Independencia lineal

Definición 5.1. *Sea V un F-espacio vectorial, $G \subseteq V$. Una* ***combinación lineal*** *de G es un elemento $v \in V$ tal que*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad a_i \in F, \; v_i \in G$$

Definición 5.2. *Dados V, $G \subseteq V$. El subespacio generado por G, denotado $\langle G \rangle$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de G. Además, $\langle G \rangle$ es un subespacio vectorial de V.*

Definición 5.3. *G es un* ***conjunto de generadores*** *de V si $\langle G \rangle = V$*

Definición 5.4. *Sea V un F-espacio vectorial, $S = \{v_i\}_{i \in I}$ un conjunto de vectores. Se dice que S es* ***linealmente independiente*** *si*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \quad a_i \in F, \; v_i \in S \Longrightarrow a_i = 0, \; \forall\, i = 1, \ldots, n$$

Definición 5.5. *S se dice* ***linealmente dependiente*** *si $\exists\, a_i \in F$ no todos nulos, $v_i \in S : \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Por ejemplo, $\{0\}$ es linealmente dependiente. Si tenemos elementos repetidos, el conjunto también será linealmente dependiente, puesto que podemos escribir $v_i + (-v_j)$, donde $v_i = v_j$.*

Proposición 5.6. *Sea V un F-espacio vectorial, $S \subseteq V$ un subespacio, $G \subseteq V$ un subconjunto, entonces*

$$\langle G \rangle \subseteq S \iff G \subseteq S$$

Demostración. Si $\langle G \rangle \subseteq S$ entonces expresiones cada $v \in G$ como $v = 1 \cdot v \in \langle G \rangle \subseteq S$, por lo tanto $v \in S$, luego $G \subseteq S$.

Por otro lado, supongamos $G \subseteq S$. Cada combinación lineal en $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $a_i \in F$, $v_i \in G$. Como $v_i \in G$, entonces $v_i \in S$. Además, como S es subespacio vectorial de V, $a_i v_i \in S$ y $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in S$.

Finalmente, $\langle G \rangle \subseteq S$. □

Corolario 5.7. *Sea V un F-espacio vectorial, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Entonces $\langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \iff v_i \in \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$. Donde $\{v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n\} = \{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$.*

Demostración. Verificamos primero que valga el resultado en ambas direcciones.

1. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$
2. Supongamos $v_i \in \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$, entonces $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$

Luego, queremos ver que $\langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

1. $\{v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, por la proposición anterior, $\langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$
2. Si $j \neq i$ entonces $v_j \in \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$ y además, por hipótesis, $v_i \in \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$. Luego $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \{v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n\}$. Entonces, por la proposición anterior tenemos que $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle$

□

6. Bases y dimensión

Definición 6.1. *Sea V un F-espacio vectorial. Un subconjunto $S \subseteq V$ se dirá base de V si*

1. $\langle S \rangle = V$
2. *S es linealmente independiente.*

Proposición 6.2. *Sea V un F-espacio vectorial y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ elementos de V tales que $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = V$. Si $\{w_1, \ldots, w_s\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $s \leq r$.*

Demostración. Como $w_i \in V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ existen $a_{ij} \in F$ tales que $w_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ji} v_j$. Por otro lado, tenemos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1s}x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rs}x_s = 0 \end{cases}$$

Si $(y_1, \ldots, y_s) \in F^S$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s} y_k w_k &= \sum_{k=1}^{s} y_k \ (\sum_{j=1}^{r} a_{jk} v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \ (\sum_{k=1}^{s} a_{jk} y_k) \ v_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} \ 0 \cdot v_j = 0 \end{aligned}$$

Como $\{w_1, \ldots, w_s\}$ es linealmente independiente, se tiene que $y_1 = y_2 = \cdots = y_s = 0$. Es decir, la única solución posible del sistema es la trivial.

Finalmente, $s \leq r$ (cantidad de ecuaciones $\leq$ cantidad de variables) □

Definición 6.3. *Sea V un F-espacio vectorial. Decimos que V es de* ***dimensión finita*** *si tiene una base finita. La dimensión de V es $\mid B \mid := \dim_F V$.*

Teorema 6.4. *Sea V im F-espacio vectorial de dimensión finita, β_1, β_2 dos bases de V. Entonces $\mid \beta_1 \mid = \mid \beta_2 \mid$*

Demostración. Por la proposición anterior, $\mid \beta_1 \mid \leq \mid \beta_2 \mid$ y $\mid \beta_2 \mid \leq \mid \beta_1 \mid$. □

Observación 6.5. *Si $\dim_F V = n$ y $\{w_1, \ldots, w_s\}$ es linealmente independiente entonces $s \leq n$.*

Proposición 6.6. *Sean V un F-espacio vectorial, $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un base finita de V. Entonces para cada $v \in V, \exists!\ a_1, \ldots, a_n \in F$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$.*

Lema 6.7. *Si $S \subseteq V$ es linealmente independiente y $w \in V - \langle S \rangle$ ($w \notin \langle S \rangle$), entonces $S \cup \{w\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ son elementos distintos de S y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n,\ \lambda \in F$ tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_w = 0$.

$\rightarrow \lambda \neq 0$, entonces

$$w = (\frac{-\lambda_1}{\lambda}) v_1 + \cdots + (\frac{-\lambda_n}{\lambda}) v_n \qquad \therefore\ w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \quad \underline{\text{Absurdo!}}$$

$\therefore\ \lambda = 0,$ luego $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$

Como S es linealmente independiente, se tiene que

$$\lambda_i = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, n \qquad \therefore\ S \cup \{w\} \text{ es linealmente independiente.}$$

□

Corolario 6.8. *Sea V un F-espacio vectorial de* $\dim n$ *y* $S \subseteq V$, $\mid S \mid = n$. *Si S es linealmente independiente, entonces S es base de V.*

Demostración. Supongamos $\langle S \rangle \subsetneq V \Longrightarrow \exists\ v \in V : v \in V - \langle S \rangle$
$\therefore\ S \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $\mid S \cup \{v\} \mid = n+1$ Absurdo! □

Teorema 6.9. *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un conjunto linealmente independiente de V. Entonces S_0 es finito y existen $w_1, \ldots, w_n$ vectores en V tales que $S_0 \cup \{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de V.*

Proposición 6.10. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de generadores. Entonces $\exists\ \beta \subseteq S$ base de V.*

Corolario 6.11. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $S \subseteq V$ subconjunto con n elementos.*

a) Si S es linealmente independiente $\Longrightarrow S$ es base.

b) Si S genera $V \Longrightarrow S$ es base.

Demostración. Se pueden demostrar de manera fácil tomando en cuenta

a) Trivial por $\mid S \mid$

b) El conjunto generado es igual a V.

□

Demostración. De 6.10.
Sea $G_1 = \{v_1\},\ v_1 \neq 0$. Si $\langle G_1 \rangle = V \Longrightarrow G_1$ es base.
Si $\langle G_1 \rangle \subsetneq V,\ \exists v_{i_2} \in V - \langle G_1 \rangle \Longrightarrow G_2 = \{v_1, v_{i_2}\}$ es linealmente independiente.
Como la $\dim\langle G_1 \rangle = 1 < \dim\langle G_2 \rangle = 2$. Si $\langle G_2 \rangle = V$ tenemos $\beta = G_2$.
Si $\langle G_2 \rangle \neq V,\ \exists v_{i_3} \in V - \langle G_2 \rangle \Longrightarrow G_3 = G_2 \cup \{v_{i_3}\}$
Siguiendo, construimos conjuntos $G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_k$ que son linealmente independientes.
Luego, como $\dim V = n \Longrightarrow G_n = \beta$ pues G_k es linealmente independiente y tiene n elementos $\Longrightarrow \dim\langle G_k \rangle = n$
Supongamos que $\langle G_n \rangle \subsetneq V,\ \exists v_i \in S - \langle G_n \rangle \rightsquigarrow G_{n+1} = G_n \cup \{v_{n+1}\}$ es linealmente independiente. Pero $\langle G_{n+1} \rangle \subseteq V \Longrightarrow \dim V \geq n+1$ Absurdo!

$\therefore \langle G_n \rangle = V \Longrightarrow G_n = \beta$ es base. □

Teorema 6.12. *$W \subseteq V$ subespacios y $\dim V = n$. Sea S_0 un conjunto linealmente independiente $\Longrightarrow$ $S_0 = \{w_1, \ldots, w_r\}$ y $\exists\ w_{r+1}, \ldots, w_n : S_0 \cup \{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ es base de V.*

Demostración. Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Supongamos que $\mid S \mid = \infty \rightsquigarrow \exists\ w_1, \ldots, w_m \in S$, distintos donde $m = n+1$ tales que

$$w_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n$$
$$\vdots$$
$$w_m = a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n$$

Entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una solución no trivial. □

7. Suma de subespacios

Definición 7.1. *Sean S, T subespacios de un espacio vectorial V. La* ***suma*** *de S y T es el conjunto $S+T=\{v+w : v\in S,\ w\in T\}$.*

Proposición 7.2. *I. $S+T$ es un subespacio de V que contiene a S y a T.*

II. $S+T$ es el menor subespacio que contiene a S y a T. Si $W\subseteq V$ es un subespacio de V tal que $S\subseteq W$ y $T\subseteq W \Longrightarrow S+T\subseteq W$.

III. Si $\{v_i\}$ es un conjunto de generadores de S y $\{v_j\}$ un conjunto de generadores de $T \Longrightarrow \{v_i\}\cup\{v_j\}$ es un conjunto de generadores de $S+T$.

Demostración. Probaremos punto por punto de la proposición.

I. $0_S\in S,\ 0_T\in T \longrightarrow 0=0_S+0_T\in S+T$. Tomamos $x,y\in S+T,\ \lambda\in F$. Quiero ver que $x+\lambda y\in S+T$. Si lo hacemos, entonces $S+T$ es un subespacio.

Por definición, $\exists\ v_1,v_2\in S,\ w_1,w_2\in T : x=v_1+w_1,\ y=v_2+w_2$.

$$\begin{aligned} x+\lambda y = v_1+w_1+\lambda(v_2+w_2) &= v_1+w_1+\lambda v_2+\lambda w_2 \\ &= v_1+\lambda v_2+w_1+\lambda w_2\in S+T \end{aligned}$$

Pues $v_1+\lambda v_2\in S$ y $w_1+\lambda w_2\in T$.

Dado $v\in S,\ w=v+0\in S+T \Longrightarrow S\subseteq S+T$. Análogamente, $T\subseteq S+T$.

II. Sea W un subespacio que contiene a S y T puedo ver que $S+T\subseteq W$.

Dado que $x\in S+T,\ \exists v\in S,\ w\in T : x=v+w$.

Notar que $v\in S$ para $S\subseteq W$ y $w\in T$ para $T\subseteq W \Longrightarrow x=v+w\in W$.

III. Sean $x\in S+T$. Por definición existen $v\in S,\ w\in T$ tal que $x=v+w$.

Como $\{v_i\}$ genera $S\longrightarrow v=a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n}$

Como $\{w_j\}$ genera $T\longrightarrow w=b_nw_{j_1}+\cdots+b_nw_{j_n}$

Luego $x=a_1v_{i_1}+\cdots+a_nv_{i_n}+b_1w_{j_1}+\cdots+b_nw_{j_n}\rightsquigarrow x\in\langle\{v_i\}\cup\{w_j\}\rangle$

$\square$

Teorema 7.3. *Sea V un espacio vectorial, $S,T\subseteq V$ subespacio de dimensión finita $\Longrightarrow S+T$ también de dimensión finita y $\dim(S+T)=\dim S+\dim T-\dim(S\cap T)$*

Demostración. Sean β_1,β_2 bases de S y T respectivamente $\Longrightarrow\mid\beta_1\mid,\ \mid\beta_2\mid<\infty$ y por la parte III. de la proposición anterior, $S+T$ está generada por $\beta_1\cup\beta_2$.

Como $\mid\beta_1\cup\beta_2\mid<\infty\Longrightarrow\dim(S+T)<\infty$.

Sean $n=\dim S,\ m=\dim T,\ r=\dim(S\cap T)\quad S\cap T\subseteq S,T\longrightarrow r\le n,m$

Sea $\beta_0=\{v_1,\dots,v_r\}$ una base de $S\cap T$.

I. $\beta_0\subseteq S$ y es linealmente independiente $\Longrightarrow\exists\ w_{r+1},\dots,w_n\in S$ tal que $\{v_1,\dots,v_r,w_{r+1},\dots,w_n\}$ es base de S.

II. $\beta_0\subseteq T$ y es linealmente independiente $\Longrightarrow\exists\ u_{r+1},\dots,u_m\in T$ tal que $\{v_1,\dots,v_r,u_{r+1},\dots,u_m\}$ es base de T.

Vemos que, $\beta=\{v_1,\dots,v_r,w_{r+1},\dots,w_n,u_{r+1},\dots,u_m\}$ es base de $S+T$.

Luego, $\dim(S+T)=\mid\beta\mid=r+n-r+m-r=\dim S+\dim T-\dim(S\cap T)$.

Por un lado $\beta=\beta_S\cup\beta_T\Longrightarrow\beta$ genera a $S+T$. Vemos que es linealmente independiente. Tomamos $a_i,b_j,c_k\in F$ tal que

$$\begin{aligned} &a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_{r+1}w_{r+1}+\cdots+b_nw_n+c_{r+1}u_{r+1}+\cdots+c_mu_m=0 \\ &\qquad a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_{r+1}w_{r+1}+\cdots+b_nw_n=-c_{r+1}u_{r+1}-\cdots-c_mu_m\in S\cap T \end{aligned}$$

Es decir, $-c_{r+1}u_{r+1}-\cdots-c_mu_m\in S\cap T$, con lo cual $\exists\ d_1,\dots,d_r\in F$ tal que $-c_{r+1}u_{r+1}-\cdots-c_mu_m=d_1v_1+\cdots+d_rv_r$ (porque $\beta_0=\{v_1,\dots,v_r\}$ es base $S\cap T$).

$\rightsquigarrow 0=d_1v_1+\cdots+d_rv_r+c_{r+1}u_{r+1}+\cdots+c_mu_m\Longrightarrow d_i=\cdots=d_r=c_{r+1}=\cdots=c_m$

Así, $a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_{r+1}w_{r+1}+\cdots+b_nw_n=0\Longrightarrow a_i=\cdots=a_r=b_{r+1}=\cdots=b_n=0$ $\square$

7.1. Suma directa de subespacios

Definición 7.4. *Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V. Decimos que V es la* ***suma directa*** *de S y T si $S+T=V$. Denotamos $S \oplus T$.*

Proposición 7.5. *Si $V = S \oplus T$, entonces para cada $v \in V$, $\exists!\ x \in S,\ y \in T : v = x + y$.*

Demostración. Como $V = S \oplus T$, existen $x \in S,\ y \in T$ tales que $v = x + y$. Sean $x' \in S,\ y' \in T$ tales que $v = x' + y' : x + y = x' + y' \Longrightarrow x - x' = y' - y \in S \cap T = \{0\}$.

Luego, $x = x'$ y $y = y'$ de donde se deduce la unicidad. □

Proposición 7.6. *Sean $S,\ T$ subespacios de V, con bases $\beta_S,\ \beta_T$. Son equivalentes*

I. $V = S \oplus T$

II. $\beta_S \cup \beta_T$ *es una base de* V $\quad (\beta_S \cap \beta_T = \emptyset)$

Demostración.

- $I \Longrightarrow II$) Asumimos que $V = S \oplus T$. Entonces $S \cap T = 0$, con lo cual $\beta_S \cap \beta_T = \emptyset$ (pues 0 no forma parte de ninguna base). Por otro lado, β_S genera a S y β_T genera a $T \Longrightarrow \beta_S \cup \beta_T$ genera $S + T = V$.

  Supongamos que $\beta_S \cup \beta_T$ no es linealmente independiente. $\exists\ v_1, \ldots, v_n \in \beta_S,\ w_1, \ldots, w_m \in T$ (todos distintos) y $a_1, \ldots, a_n \in S,\ b_1, \ldots, b_m \in T$ tales que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots b_mw_m = 0$.

  $\Longrightarrow a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = -b_1w_1 - \cdots - b_mw_m \in S \cap T$

  $\Longrightarrow a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$

  $\therefore\ a_1 = \cdots a_n = 0$ porque $v_1, \ldots, v_n \in \beta_S$ y β_S es linealmente independiente, análogamente con $b_1 = \cdots = b_m = 0$ y así tenemos un <u>Absurdo!</u>

  De lo anterior, $\beta_S \cup \beta_T$ genera a V y es linealmente independiente $\Longrightarrow$ es una base de V.

- $II \Longrightarrow I$) Asumimos que $\beta_S \cup \beta_T$ es base de V, $\beta_S \cap \beta_T = \emptyset$.

  Si $x \in S \cap T$,

  $\longrightarrow \exists\ a_1, \ldots, a_n \in F,\ v_1, \ldots, v_n \in \beta_S : x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$

  $\longrightarrow \exists\ b_1, \ldots, b_m \in F,\ w_1, \ldots, w_m \in \beta_T : x = b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$

  $\Longrightarrow a_1v_1 + \cdots + a_nv_n - b_1w_1 - \cdots - b_mw_m = 0$

  Como $\beta_S \cup \beta_T$ es linealmente independiente $\Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0 = b_1 = \cdots = b_m \Longrightarrow x = 0$

  Por otro lado, $y \in V$ (como $\beta_S \cup \beta_T$ genera a V), $\exists\ v_1, \ldots, v_n \in \beta_S,\ w_1, \ldots, w_m \in \beta_T$ y evaluar $a_i,\ b_i \in F : x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$

  De lo anterior, $V = S \oplus T$.

□

Definición 7.7. *Sea S un subespacio de V. Un* ***complemento*** *de S en V y un subespacio T de V tal que $V = S \otimes T$.*

8. Transformaciones lineales

Definición 8.1. *Sean V, W dos F-espacios vectoriales. Una* ***transformación lineal*** *es una función $f : V \to W$ tal que*

- $f(v + v') = f(v) + f(v'), \quad \forall\ v, v' \in V$
- $f(cv) = c \cdot f(v) \quad \forall\ v \in V,\ c \in F$

Mencionamos además, diversas propiedades de las transformaciones lineales.

Observación 8.2. *Si $f : V \to W$ es una transformación lineal entonces $f(0) = 0,\ f(-v) = -f(v)$.*

Definición 8.3. *Sea $f : V \to W$ una transformación lineal*

- *El* ***núcleo*** *de f es $Nu(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$*
- *La* ***imágen*** *de f es $Im(f) = \{w \in W : \exists\ v \in V \diagup\ f(v) = w\}$*

Lema 8.4. *El* ***núcleo*** *de f es un subespacio de V. La* ***imágen*** *de f es un subespacio de W.*

Proposición 8.5. *Sea V un espacio vectorial, $\beta = v_1, \dots, v_n$ una base ordenada*

a) Para cada $v \in V$, $\exists! a_1, \dots, a_n \in F$ tales que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$
$\rightsquigarrow T_\beta : V \to F^n,\ T(v) = (a_1, \dots, a_n)$ coordenadas de v en la base β, usualmente denotamos $[v]_\beta$

b) $[-]_\beta$ es una transformación lineal.

Demostración. a) Fijemos $v \in V$, como β genera V, $\exists\ a_1, \dots, a_n \in F$ tales que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$
Sean $b_1, \dots, b_n \in F$ tales que $b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \Longrightarrow 0 = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$.
Como $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, entonces $a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0 \Longrightarrow a_i = b_i \quad \forall\ i = 1, \dots, n$

b) Sean $v, w \in V$ y $\lambda \in F$: $T_\beta(v) = (a_1, \dots, a_n)$, $T_\beta(w) = (b_1, \dots, b_n)$ para $a_i, b_i \in F$ tales que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n,\ v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$
Queremos ver cuanto vale $T_\beta(v + w)$.

$$\begin{aligned} v + w &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + b_1 v_n + \cdots + b_n v_n \\ &= (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_n + b_n)v_n \end{aligned}$$

Por la unicidad de las coordenadas tenemos

$$\begin{aligned} T_\beta(v + w) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \\ &= T_\beta(v) + T_\beta(w) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\lambda v = \lambda(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = \lambda a_1 v_1 + \cdots + \lambda a_n v_n$$
$$\Longrightarrow T_\beta(\lambda v) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n) = \lambda T_\beta(v)$$

□

Teorema 8.6. *Sean V, W dos F-espacios vectoriales, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, $w_1, \dots, w_n \in W$ arbitrarios. $\exists!$ transformación lineal $f : V \to W : f(v_i) = w_i \quad \forall\ i = 1, \dots, n$*

Demostración. Se puede demostrar tomando $f(v) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$, con $v \in V \rightsquigarrow [v]_\beta = (a_1, \dots, a_n)$ y $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Comprobamos que f es la transformación lineal que buscamos y, tomando otra transformación g tal que cumple la misma condición, coincidimos que $f = g$. □

De manera general, tenemos

$$U \subset V \rightsquigarrow f(U) = \{f(u) : u \in U\} \quad \text{La } \textbf{imágen} \text{ de U}$$

$$Z \subset W \rightsquigarrow f^{-1}(Z) = \{v \in V : f(v) \in Z\} \quad \text{La } \textbf{pre-imágen} \text{ de Z}$$

Proposición 8.7.
- *$U \subseteq V$ subespacio $\Longrightarrow f(u)$ es subespacio de W*
- *$Z \subseteq W$ subespacio $\Longrightarrow f^{-1}(z)$ es subespacio de V*

Demostración. Fijamos $U \subseteq V$ subespacio, si $w_1, w_2 \in f(u),\ \lambda \in F$. Queremos ver que $w_1 + w_2,\ \lambda w \in f(u)$.

Por definición, $\exists\ u_1, u_2 \in U /\ w_i = f(u_i)$.

- $w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$. Como U es subespacio, $u_1 + u_2 \in U \Longrightarrow w_1 + w_2 = f(u_1 + u_2) \in f(u)$.
- $\lambda w = \lambda f(u) = f(\lambda u)$. Como U es subespacio, $\lambda u \in U \Longrightarrow \lambda w = f(\lambda u) \in f(u)$.

Así $f(u)$ es subespacio de V. La otra es análoga. □

Proposición 8.8. *$f : V \to W$ es una transformación lineal, $\{v_i\}$ un conjunto de generadores de V $\Longrightarrow \{f(v_i)\}$ es un conjunto de generadores de $Im(f)$.*

Corolario 8.9. *$f : V \to W$ una transformación lineal,* $\dim V < \infty \Longrightarrow \dim Im(f) < \infty$

Demostración. Tomemos $w \in Im(f)$. Por definición, $w = f(v)$ para algún $v \in V$. Como $\{v_i\}$ genera a V

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \text{para algunos } v \in V,\ a \in F$$
$$w = f(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) \in \langle f(v) \rangle$$

□

Definición 8.10. *Sea $f : V \to W$ una transformación lineal, decimos que*

- *f es **monomorfismo** si f es inyectiva.*
- *f es **epimorfismo** si f es suryectiva.*
- *f es **isomorfismo** si f es biyectiva.*

*Además, si $V = W$, f es un **endorfismo**. Si f es un endorfismo que además es isomorfismo, es un **automorfismo**.*

Proposición 8.11. *Sea $f : V \to W$ una transformación lineal, f es un monorfismo $\iff Nu(f) = \{0\}$.*

Demostración. Recordemos que $f(0) = 0_V \Rightarrow 0_V \in Nu(f)$

($\Rightarrow$) Si f es un monomorfismo $\Rightarrow$ es inyectiva, y como $f(0) = 0$, para cada $v \neq 0$ se tiene que $f(v) \neq f(0) = 0_W$. Así, todo $v \neq 0$ **no** pertenece al $Nu(f) \Rightarrow Nu(f) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Asumimos que $Nu(f) = \{0\}$. Sean $v, v' \in V$ tales que $f(v) = f(v')$ entonces $0 = f(v) - f(v') = f(v - v') \Rightarrow v - v' \in Nu(f) = \{0\}$

Así, $v - v' = 0$, de donde $v = v'$. Luego, f es inyectiva. □

Teorema 8.12 (Teorema de la dimensión)**.** *Sean V, W dos F-espacios vectoriales,* $\dim V < \infty$*. Sea $f : V \Rightarrow W$ una transformación lineal, entonces*

$$\dim V = \dim Nu(f) + \dim Im(f)$$

Demostración. Sean $n = \dim V,\ k = \dim Nu(f) \leq n$.

Sean $v_1, \ldots, v_k$ una base de $Nu(f)$. Como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente, lo podemos completar a una base de V, tal que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Queremos ver que $\dim Im(f) = n - k$.

Probaremos que $\beta = \{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n))\}$ es una base de $Im(f)$, la cual termina la prueba.

En primer lugar, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a $V \to \{f(v_1), \ldots, f(v_k), f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ genera a $Im(f)$, pues los primeros k resultados son 0 y $f(v_i) = w_i \quad \forall\ i = k+1, \ldots, n$.

$\therefore\ \beta$ genera a $Im(f)$.

Veamos ahora que β es linealmente independiente.

Sean $a_{k+1}, \ldots, a_n \in F$ tales que $0 = a_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + a_n f(v_n)$

$f(a_{k+1}v_{k+1}+\cdots+a_nv_n) \overset{\text{TL}}{=} a_{k+1}f(v_{k+1})+\cdots+a_nf(v_n)=0$
$\Rightarrow a_{k+1}v_{k+1}+\cdots+a_nv_n \in Nu(f)$
De donde $\exists\ a_1,\dots,a_k$ tales que $a_{k+1}v_{k+1}+\cdots+a_nv_n = a_1v_1+\cdots+a_kv_k$
$\rightsquigarrow (-a_1)v_1+\cdots+(-a_n)v_n+a_{k+1}v_{k+1}+\cdots+a_nv_n=0.$
Como $\{v_1,\dots,v_n\}$ es una base de V (en particular, es linealmente independiente)
$\rightsquigarrow a_1=\cdots=a_k=a_{k+1}=\cdots=a_n=0$
$\therefore\ \beta$ es linealmente independiente. □

Corolario 8.13. *Sean V, W dos F-espacios vectoriales, tal que* $\dim V = \dim W < \infty$, $f: V\to W$ *una transformación lineal, son equivalentes*

a) f es un isomorfismo

b) f es un monomorfismo

c) f es un epimorfismo

Demostración. Aclararemos que el corolario **no vale** para $\dim V=\dim W=\infty$

- $(a\Rightarrow b)$ Directo.
- $(b\Rightarrow c)$ Asumimos que f es monomorfismo. Luego, $Nu(f)=\{0\}$.

  Del teorema anterior, $\dim Im(f)=\dim V-\dim(Nu(f)) \overset{\text{híp.}}{=} \dim W,$ pues $\dim Nu(f)=0.$

  Es decir, $Im(f)$ es un subespacio de W con $\dim V=W\Rightarrow Im(f)=W$. O sea, f es epimorfismo.
- $(c\Rightarrow a)$ Asumimos que f es epimorfismo.

  Para probar que es isomorfismo, nos falta ver que sea monomorfismo (que por el resultado anterior, equivale a $Nu(f)=\{0\}$).

  $Im(f)=W$. Del teorema, $\dim Nu(f)=\dim V-\dim Im(f)=\dim V-\dim W=0$

  $\rightsquigarrow Nu(f)=0.$

□

Proposición 8.14. *$f: V\to W,\ g: W\to Z$ transformaciones lineales $\Rightarrow g\circ f: V\to Z$. Además, $g\circ f(v)=g(f(v))$ es transformación lineal.*

Definición 8.15. *Sean $v,v'\in V,\ \lambda\in F$.*

$$\begin{aligned} g\circ f(v+v') = g(f(v+v')) &= g(f(v)+f(v'))\\ &= g(f(v))+g(f(v'))\\ &= g\circ f(v)+g\circ f(v') \end{aligned}$$

De la misma forma se comprueba que $g\circ f(\lambda v)=\lambda g\circ f(v)$

Proposición 8.16. *Sea $f: V\to W$ un isomorfismo $\Rightarrow f^{-1}: W\to V$ es transformación lineal, tal que $f^{-1}(w)=v \iff f(v)=w$.*

Demostración. Sean $w,w'\in W,\ \lambda\in F$.
Como f es biyectiva, $\exists!\ v,v'\in V$ tales que $f(v)=w,\ f(v')=w' \rightsquigarrow f^{-1}(w)=v,\ f^{-1}(w')=v'$
$w+w'=f(v)+f(v')=f(v+v')\Rightarrow f^{-1}(w+w')=v+v'=f^{-1}(w)+f^{-1}(w')$

De la misma forma se comprueba que $f^{-1}(\lambda w)=\lambda f^{-1}(w)$. □

Proposición 8.17. *Sea V un F-espacio vectorial de* $\dim n\Rightarrow\exists\ f: V\to F^n$ *donde f es un isomorfismo.*

Demostración. $\dim V=n\rightsquigarrow\exists\ \beta=\{v_1,\dots,v_n\}$ donde β es base. Tomemos $f: V\to F^n,\ f(v)=[v]_\beta$
Vimos que f es transformación lineal y sabemos que $\dim V=n=\dim F^n$. Por el corolario, basta probar que f es monomorfismo para concluir que f es isomorfismo.
Para ver que f es monomorfismo, tenemos que ver $Nu(f)=\{0\}$.
Tomemos $v\in Nu(f): [v]_\beta=(0,\dots,0)\rightsquigarrow v=0v_1+\cdots+0v_n=0$

$\therefore\ Nu(f)=0$ □

Proposición 8.18. *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión n, $\exists\ T : V \to F^n$ tal que T es un isomorfismo.*

Demostración. Fijamos $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

Sea $T : V \to F^n,\ T(v) = [v]_\beta$ que ya vimos que es lineal. Como $\dim F^n = \dim V$, basta ver que T es monomorfismo (por el corolario anterior). Y para ver que T es monomorfismo basta ver que $Nu(T) = \{0\}$.

Sea $v \in Nu(T) : T(v) = (0, \dots, 0)$. Recordar que $[w]_\beta = (a_1, \dots, a_n) \iff w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$
$\Rightarrow v = 0v_1 + \cdots + 0v_n = 0$ □

Observación 8.19. *Sea $f : V \Rightarrow W$ un isomorfismo.*

- *$U \subseteq V$ subespacio está generado por $v_1, \dots, v_n \iff f(u)$ está generado por $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$*
- *$\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de $V \iff \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es base de W*

8.1. Aplicación de una transformación lineal

Lema 8.20. *U, V, W tres F-espacios vectoriales $f : U \to W,\ g : V \to W$ transformaciones lineales, se cumple que $Im(f) \cap Nu(g) = f(Nu(g \circ f))$.*

Demostración. Probaremos la inclusión mutua.

($\subseteq$) $v \in Im(f) \cap Nu(g)$.
Como $v \in Im(f), \exists\ u \in U$ tal que $v = f(u)$.
Como $v \in Nu(g),\ 0 = g(v) = g(f(u)) = g \circ f(u)$
$\Rightarrow u \in Nu(g \circ f)$
$\therefore\ v \in f(Nu(g \circ f))$

($\supseteq$) $v \in f(Nu(g \circ f))$.
Por definición, $\exists\ u \in Nu(g \circ f)$ tal que $v = f(u) \rightsquigarrow v \in Im(f)$
$g(v) = g(f(u)) = g \circ f(u) = 0$
$\Rightarrow v \in Nu(g)$
$\therefore\ v \in Nu(g) \cap Im(f)$

□

8.2. Representación matricial

Definición 8.21. *Sea $f : V \to W$ una transformación lineal, $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, $\beta_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W.*

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad a_{ij} \in F \rightsquigarrow [f]_{\beta_1\beta_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

8.3. Matriz de f en la bases $\beta_1,\ \beta_2$

Proposición 8.22. *Sean V, W dos F-espacios vectoriales de dimensión finita, $f : V \to W$ una transformación lineal y $\beta_1,\ \beta_2$ bases de V y W.*

$$[f(v)]_{\beta_2} = [f]_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_1} \quad donde\ [f]_{\beta_1\beta_2} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [f(v_1)]_{\beta_2} & \cdots & [f(v_n)]_{\beta_2} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Demostración. Sean $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\},\ \delta = \{w_1, \ldots, w_m\},\ v \in V : v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \rightarrow f(v) &= f(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_j) w_i \end{aligned}$$

$$[f(v)]_\delta = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\beta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\beta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [f]_{\beta\delta}[v]_\beta$$

□

Proposición 8.23. *Sea $f : V \to W,\ g : W \to U$ transformaciones lineales. β_1 base de V, β_2 base de W y β_3 base de U.*

$$[g]_{\beta_2\beta_3}[f]_{\beta_1\beta_2} = [g \circ f]_{\beta_1\beta_3}$$

Demostración. Sean $\beta_1 = \{v_1, \ldots, v_n\},\ \beta_2 = \{w_1, \ldots, w_m\},\ \beta_3 = \{u_1, \ldots, u_p\}$. Tenemos que:

$$[f]_{\beta_1\beta_2} = (a_{ij}) \in F^{m\times n} \rightsquigarrow f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$[g]_{\beta_2\beta_3} = (b_{ki}) \in F^{p\times m} \rightsquigarrow g(w_i) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} u_k$$

$$[g \circ f]_{\beta_1\beta_3} = (c_{kj}) \in F^{p\times n} \rightsquigarrow g \circ f(v_j) = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} v_j$$

Vemos que la última ecuación es igual a:

$$\begin{aligned} g(f(v_j)) &= g(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{ki} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij})\ u_k \\ &\Rightarrow c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \end{aligned}$$

Matricialmente, tenemos $[g \circ f]_{\beta_1\beta_3} = [g]_{\beta_2\beta_3}[f]_{\beta_1\beta_2}$, que era lo que buscábamos. □

Corolario 8.24. *Sea $f : V \to W$ isomorfismo, de $\dim V = \dim W < \infty$, β_1, β_2 bases de V y W. $\exists\ f^{-1} : W \to V$ transformaciones lineal $\Rightarrow [f]_{\beta_1\beta_2}$ es invertible y $[f]^{-1}_{\beta_1\beta_2} = [f^{-1}]_{\beta_2\beta_1}$*

Demostración. $f^{-1} \circ f = Id_V, \ f \circ f^{-1} = Id_W, \ n = \dim V = \dim W$.

$[f^{-1}]_{\beta_2\beta_1}[f]_{\beta_1\beta_2} = [f^{-1} \circ f]_{\beta_1} = [Id_v]_{\beta_1} = Id_n$

Y análogamente, $[f]_{\beta_1\beta_2}[f^{-1}]_{\beta_2\beta_1} = [f \circ f^{-1}]_{\beta_2} = [Id_w]_{\beta_2} = Id_n$ □

8.4. Cambio de base

Definición 8.25. *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita n, $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, \ \beta_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de V tal que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Luego, $v_j = \sum_{i=1}^n C_{ij} w_i \quad j = 1, \dots, n$. Decimos que $C(\beta_1, \beta_2)$ es la matriz de cambio de base de β_1 en β_2 tal que:*

$$C(\beta_1, \beta_2) := C_{ij} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [v_1]_{\beta_2} & \cdots & [v_n]_{\beta_2} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Proposición 8.26. *Sean $\beta_1, \ \beta_2$ dos bases de $V : \forall \ v \in V, \ [v]_{\beta_2} = C(\beta_1, \beta_2)[v]_{\beta_1}$*

Proposición 8.27. *Sean $\beta_1, \ \beta_2$, dos bases de V, $C(\beta_1, \beta_2) = C(\beta_2, \beta_1)^{-1}$*

Proposición 8.28. *Sean $\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3$ tres bases de V, $C(\beta_1, \beta_3) = C(\beta_2, \beta_3)C(\beta_1, \beta_2)$*

Se presenta la siguiente ayuda para sus demostraciones $[Id_V]_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_1} = [Id(v)]_{\beta_2} = [v]_{\beta_2}$

Proposición 8.29. *Sea $f : V \to W$ una transformación lineal, donde V y W son subespacios vectoriales de dimensión finita, $\beta_1, \ \hat{\beta_1}$ bases de V y $\beta_2, \ \hat{\beta_2}$ bases de W*

$$\Rightarrow [f]_{\beta_1\beta_2} = C(\hat{\beta_2}, \beta_2)[f]_{\hat{\beta_1}\hat{\beta_2}} C(\beta_1, \hat{\beta_1})$$

Demostración. Vemos que

$$\begin{aligned} C(\hat{\beta_2}, \beta_2)[f]_{\hat{\beta_1},\hat{\beta_2}} C(\beta_1, \hat{\beta_1}) &= [Id_W]_{\hat{\beta_2},\beta_2}([f]_{\hat{\beta_1},\hat{\beta_2}}[Id_V]_{\beta_1,\hat{\beta_1}}) \\ &= [Id_W]_{\hat{\beta_2},\beta_2}[f \circ Id_V]_{\beta_1,\hat{\beta_2}} \\ &= [Id_V \circ f]_{\beta_1,\beta_2} \end{aligned}$$

□

Proposición 8.30. *Sea $A \in F^{n\times n}$ una matriz invertible. V un F-espacio vectorial de dimensión finita n. β una base de $V \Rightarrow \exists \ \beta_1, \ \beta_2$ bases de V tales que $A = C(\beta, \beta_1), \ A = C(\beta_2, \beta)$*

Demostración. Como $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}, \ \beta_1 = \{w_1, \dots, w_n\}, \ A = (a_{ij})$

Sea $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \quad j = 1, \dots, n$. Vemos que β_2 es una base de V. Para ello, basta probar que sus elementos son linealmente independientes. Sean $x_1, \dots, x_n \in F$. Vemos que

$$0 = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n = x_1 \ (\sum_{i=1}^n a_{i1} v_i) + \cdots + x_n \ (\sum_{i=1}^n a_{in} v_i) = \sum_{i=1}^n \ (a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n) \ v_i$$

Así β_2 es base y

$$C(\beta_2, \beta) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [w_1]_\beta & \cdots & [w_n]_\beta \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como A^{-1} también es invertible, $\exists \ \beta_1$ base tal que $C(\beta_1, \beta) = A^{-1}$

$\Rightarrow C(\beta_1, \beta) = C(\beta_1, \beta)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ □

Proposición 8.31. *Sean V, W dos espacios de dimensión finita n, $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces*

$$\begin{aligned} f \text{ es isomorfismo} &\iff \exists \ \beta_1, \beta_2 \text{ bases de } V, W : [f]_{\beta_1,\beta_2} \text{ es invertible} \\ &\iff \forall \ \beta_1, \beta_2 \text{ bases de } V, W : [f]_{\beta_1,\beta_2} \text{ es invertible} \end{aligned}$$

8.5. Rango de una matriz

Definición 8.32. *Sea $A \in F^{m\times n}$ tal que*

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \Rightarrow rg_F(A) = \dim\langle F_1, \ldots, F_m\rangle \subseteq F^m \text{ el } \textbf{\textit{rango fila}} \text{ de } A$$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow rg_C(A) = \dim\langle C_1, \ldots, C_n\rangle \subseteq F^n \text{ el } \textbf{\textit{rango columna}} \text{ de } A$$

Observación 8.33. $A \rightsquigarrow B \Rightarrow rg_F(A) = rg_F(B)$

Teorema 8.34. $rg_F(A) = rg_C(A), \quad \forall\ A \in F^{m\times n}$

Definición 8.35. *Definimos el **rango** de la matriz A como $rg(A) = rg_F(A) = rg_C(A)$*

Teorema 8.36. *$A \rightsquigarrow B \Rightarrow$ sus espacios filas coinciden $\quad\therefore\ rg_F(A) = rg_F(B)$*

Lema 8.37. $A \in F^{m\times n},\ S = \{x \in F^n : Ax = 0\} \Rightarrow \dim S = n - rg_C(A)$

Demostración. $f_A : R^n \to R^m,\ f_A(x) = Ax \Rightarrow S = Nu(f_A) \quad C_i = A \cdot e_i \in Im(f)$

Más aún, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $F^n \overset{\text{Prop.}}{\Rightarrow} \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ genera a $Im(F_A)$

$$\Rightarrow rg_C(A) = \dim\langle C_1, \ldots, C_n\rangle = \dim Im(f_A) \overset{\text{Teo.}}{=} \dim F^n - \dim Nu(f_A) = n - \dim S$$ □

Demostración del teorema anterior. Sea R la $MERF$ tal que $A \rightsquigarrow R \Rightarrow e_F A = e_F R$

$$R = \begin{pmatrix} F_1' \\ \vdots \\ F_r' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = rg_F(R) = rg_F(A)$$

$$S = \{X \in F^n : AX = 0\} = \{x \in F^n : RX = 0\}$$
$$\Rightarrow \dim S = n - r = n - rg_F(A)$$

Vemos por el lema anterior $\dim S = n - rg_C(A)$, entonces

$$n - rg_C(A) = n - rg_F(A) \Rightarrow rg_C(A) = rg_F(A)$$

□

9. Formas multilineales y determinantes

Definición 9.1. *Sea $F : V \times \cdots \times V \to W$, una función que va de r veces V a W, donde V, W son F-espacios vectoriales, es una **forma r-lineal**.*

Si es lineal en cada entrada y se cumplen

$$\begin{aligned} F(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_r) &= F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + F(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_r) \\ F(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_r) &= \lambda F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) \end{aligned}$$

Definición 9.2. *Sea $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ una forma r-lineal, se dice **alternada** si φ se anula en toda r-upla que tenga dos entradas iguales.*

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0 \quad \textit{donde ambas } v_i \textit{ están en posiciones diferentes.}$$

Teorema 9.3. *Fijemos $\lambda \in F$. $\exists!\ \varphi : F^{n\times n} \to F$ n-lineal alternada tal que $\varphi(Id_n) = \lambda$*

Definición 9.4. *La función $\det : F^{n\times n}$ es la única F-lineal tal que $F(Id_n) = 1$*

A continuación, definimos las propiedades del determinante.

Observación 9.5. *Sea $\varphi : F^{n\times n} \to F$ una forma r-lineal alternada.*

I. $\varphi(C_1, \ldots, 0, \ldots, 0) = 0$

II. $\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$

III. $\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \alpha v_i, \ldots, v_n) = \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \quad i \neq j$

IV. *Si* $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i \Rightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = 0$

Demostración. Probaremos II) y IV), quedando las demás como ejercicio.

II. Por ser alternada y multilineal, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n) &= \cancel{\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n)} + \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \\ &\quad + \varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \cancel{\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n)} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

IV. $\varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_1 \ldots, v_{n-1}, v_i) \overset{\text{alt.}}{=} 0$

Pues v_i ya estaba en el vector, y como φ es alternada, obtenemos el resultado.

□

Definición 9.6. *Sea $A \in F^{n\times n}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Decimos que $A(i \mid j)$ es la matriz sin la fila i y la columna j.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to A(i \mid j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición 9.7. *Sea $A \in F^{n\times n}$, podemos desarrollar el determinante de las siguientes formas.*

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A(i \mid k) \quad \textit{(desarrollo por k-ésima columna)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A(k \mid j) \quad \textit{(desarrollo por k-ésima fila)} \end{aligned}$$

Proposición 9.8. *Sea* $A \in F^{n\times n}$: $\det(A) = \det(A^t)$

Demostración. Desarrollamos el determinante de A^t por la primera fila.

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}(A^t)_{1k} \det(A^t(1 \mid k))\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k1} \det(A(k \mid 1)^t)\end{aligned}$$

Si hacemos inducción en n, vemos que para $n = 1,\ A = A^t \Rightarrow \det(A) = \det(A^t)$.
Asumimos que vale para n y probaremos que valga para $n+1$. Luego, para cada $A \in F^{n\times n}$

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k} A_{k1} \det(A(k \mid 1)^t) \quad \text{(Tomando } n\times n\text{, aplico H.I)}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k} A_{k1} \det(A(k|1))\\ &= \det(A) \quad \text{(desarrollo por la primera columna)}\end{aligned}$$

□

Proposición 9.9. *Sea* $A \in F^{n\times n}$ *una matriz triangular superior, entonces* $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$.

Demostración. Recordemos que A es una matriz triangular superior si $(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si\ i \le j \\ 0 & si\ i > j \end{cases}$

Por inducción para $n = 1$ tenemos $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad$

Asumimos que vale para n. Luego, para $n = n+1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$

Hacemos desarrollo por la fila $n+1$ tal que

$$\begin{aligned}\det(A) = &(-1)^{n+1+1} a_{n+1,1} \det(A(n+1 \mid 1)) + \dots + (-1)^{n+1+n} a_{n+1,n} \det(A(n+1 \mid n))\\ &+ (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1,n+1} \det(A(n+1 \mid n+1))\\ &= (-1)^{2n+2} a_{n+1,n+1} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{H.I}}{=} a_{n+1,n+1} a_{11} \dots a_{nn}\end{aligned}$$

□

Teorema 9.10. *Sean* $A,\ B \in F^{n\times n}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Demostración. Fijemos $A \in F^{n\times n}$. Tomamos $\varphi : F^{n\times n} \to F : \varphi(X) = \det(AX)$
Veamos que es multilineal alternada por columnas, $AX = A(C_1, \dots, C_n) = (AC_1, \dots, AC_n)$

- Alternada: $X = (C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(X) = 0$
  $\varphi(X) = \det(AC_1, \dots, AC_i, \dots, AC_j, \dots, AC_n) = 0$
- Multilineal:

$$\begin{aligned}\varphi(C_1, \dots, C_i + C_i', \dots, C_n) &= \det(A(C_1, \dots, C_i + C_i', \dots, C_n))\\ &= \det(AC_1, \dots, A(C_i + C_i'), \dots, AC_n)\\ &= \det(AC_1, \dots, AC_i, \dots, AC_n) + \det(AC_1, \dots, AC_i', \dots, AC_n)\\ &= \varphi(C_1, \dots, C_i, \cdots, C_n) + \varphi(C_1, \dots, C_i', \cdots, C_n)\end{aligned}$$

De modo similar, $\varphi(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda\varphi(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$
Luego $\varphi(Id_n) = \det(AId_n) = \det(A) \rightsquigarrow \varphi(X) = \det(A)\det(X) \Rightarrow \det(AX) = \det(A)\det(X)$

$\square$

Teorema 9.11. *Sea $A \in F^{n\times n}$. Entonces A es invertible* $\iff \det(A) \neq 0$

Demostración. Probamos la doble implicación

($\Rightarrow$) Asumimos que A es invertible. $\exists\ A^{-1} : AA^{-1} = Id_n = A^{-1}A$

$1 = \det(Id_n) = \det(AA^{-1}) \overset{\text{teo.}}{=} \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A)^{-1} \neq 0$

Corolario 9.12. *Si A es invertible* $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

($\Leftarrow$) Asumimos que A **no** es invertible.

Sea R la MERF asociada a A. R tiene al menos una fila nula $\Rightarrow \det(R) = 0$

Además, $A = PR$, con P una matriz invertible.

$\therefore\ \det(A) = \det(PR) \overset{\text{teo.}}{=} \det(P)\underbrace{\det(R)}_{0} = 0$

$\square$

Definición 9.13. *Sea $A,\ B \in F^{n\times n}$. Definimos que B es la matriz adjunta de A si*

$$adj(A) = B = (b_{ij}) : b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A(j\mid i))$$

Proposición 9.14. $\forall\ A \in F^{n\times n},\ A\cdot adj(A) = \det(A)Id_n$

Demostración. $B = adj(A),\ b_{ij} = (-1)^{i+j}det(A(i\mid j))$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}\det(A(j\mid k))$$

Si $i = j$, vemos que $(AB)_{ii} = \det(A)$.
Si $i \neq j$, desarrollando por fila j tenemos dos filas iguales y por eso es cero. $\square$

Corolario 9.15. *Si A es invertible* $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ adj(A)$

10. Autovalores y autovectores

Definición 10.1. *Sea V un F-espacio vectorial, $f : V \to w$ una transformación lineal.*

I. $\lambda \in F$ *es un **autovalor** de f si* $\exists\ v \in V - \{0\} : f(v) = \lambda v$

II. Sea λ un autovalor de f. El autoespacio asociado a λ es $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.
*Cada $v \in V_\lambda$ es un **autovector** del autovalor λ.*

Observación 10.2. *Si λ es un autovalor de $f \Rightarrow V_\lambda$ es un subespacio.*

Teorema 10.3. *Sea $f : v \to W$ una transformación lineal, donde $\dim V = n < \infty$. Son equivalentesÑ*

I. λ es autovalor de f.

II. $\det(\lambda Id_n - [f]_\beta) = 0$*, para β base de V.*

Demostración. Probaremos la doble implicación para ver la equivalencia.

($\Rightarrow$) Sea λ un autovalor, $\exists\ v \neq 0 : f(v) = \lambda v$. Sea β una base de V.

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad [\lambda v]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = [f(v)]_\beta = [f]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda Id_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - [f]_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\lambda Id_n - [f]_\beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ahora, $\lambda Id_n - [f]_\beta$ es una matriz cuyo autoespacio asociado tiene una columna distinta de 0
$\iff \lambda Id_n - [f]_\beta$ **no** es invertible
$\iff \det(\lambda Id_n - [f]_\beta) = 0$

($\Leftarrow$) Asumimos que $\det(\lambda Id_n - [f]_\beta) = 0 \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ tal que $(\lambda Id_n - [f]_\beta) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Si $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \quad v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \neq 0 \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$[\lambda v]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda Id_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [f]_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [f]_\beta [v]_\beta = [f(v)]_\beta$$

$\Rightarrow f(v) = \lambda v \quad \therefore\ \lambda$ es autovalor.

□

Definición 10.4. *Sea $A \in F^{n\times n} \rightsquigarrow$ **autovalores** y **autovectores** $\in F^n$ de autovalor λ*
$\lambda \in F$, $\exists\ v \in F^n - \{0\} : Av = \lambda v$

Definición 10.5. *Una transformación lineal $f : V \to V$ se dice **diagonalizable** si $\exists\ \beta : [f]_\beta$ es diagonalizable, donde β es una base.*

Proposición 10.6. *f es diagonalizable $\iff \exists$ base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que cada v es autovector de f.*

Definición 10.7. *Sea $A \in F^{n\times n}$ es diagonalizable si $A \sim D$ diagonal $\iff \exists$ base de autovectores.*

Observación 10.8. *No toda matriz es diagonalizable.*

Definición 10.9. *Sea $A \in F^{n\times n}$, el* ***polinomio característico*** *de A*

$$P_A(t) = \det(tId_n - A) \in F[t] \quad A = (a_{ij}) \rightsquigarrow \det\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t-a_{22}\end{pmatrix}$$

Definición 10.10. *Sean $S_1,\dots,S_j$ subespacios de V. Decimos que W es la* ***suma directa*** *de V si*

I. $V = S_1 + \cdots + S_j$

II. $S_k \cap (S_1 + \cdots + S_{k-1} + S_{k+1} + \cdots + S_j) = 0 \quad \forall\ k = 1,\dots,j$

Y denotamos $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_j$

Proposición 10.11. *$V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_j$*
$\iff$ *$\forall\ v \in V,\ \exists!\ w_i \in S_i$ tales que $v = w_1 + \cdots + w_j \quad i = 1,\dots,j$*
$\iff$ *Si $\beta_1,\dots,\beta_j$ son bases de $S_1,\dots,S_j$ espacios entonces $B_1 \cup \cdots \cup B_j$ es base de V.*

Lema 10.12. *Sea $f: v \to V$ una transformación lineal. $\lambda_1.\dots,\lambda_r$ autovalores distintos de f $V_1,\dots,V_r$ son subespacios, $W = V_1 + \cdots + V_r$. Entonces $W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$*

Demostración. Tenemos que probar que $V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_r) = 0 \quad \forall\ j = 1,\dots,r$
Por inducción en $r \geq 2$:
Si $r = 2 \rightsquigarrow V_1 \cap V_2 \stackrel{?}{=} 0$. Si $v \in V_1 \cap V_2$ entonces

$$\lambda_1 v \underset{v\in V_1}{=} f(v) \underset{v\in V_2}{=} \lambda_2 v \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$$

Hipótesis inductiva: Si tenemos r autoespacios de valores distintos de f tal que están en suma directa. Cada elemento de la suma de los autoespacios se escribe de forma única como suma de un término en cada autoespacio.

Tomando $v \in V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_{r+1})$.

$$\begin{aligned} v &= v_1 + \cdots + v_{j-1} + v_{j+1} + \cdots + v_{r+1} \quad v_i \in V_i \\ f(v) &= f(v_1 + \cdots + v_{j-1} + v_{j+1} + \cdots + v_{r+1}) \\ \lambda_j v &= f(v_1) + \cdots + f(v_{j-1}) + f(v_{j+1}) + \cdots + f(v_{r+1}) \end{aligned}$$

Luego $\sum_{k\in\{1,\dots,r+1\},k\neq j} \lambda_j v_k = \sum_{k\in\{1,\dots,r+1\},k\neq j} \lambda_k v_k \Rightarrow \sum_{k\in\{1,\dots,r+1\},k\neq j} (\lambda_j - \lambda_k) v_k = 0$

Por hipótesis inductiva, $V_1,\dots,V_{j-1},V_{j+1},\dots,V_{r+1}$ están en suma directa
$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_j - \lambda_k)}_{\neq 0} v_k = 0 \quad \forall\ k \neq j \Rightarrow v_k = 0,\ \forall\ k \neq j \quad \therefore\ v = 0$ □

Teorema 10.13. *Sea $f: V \to W$ una transformación lineal, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ los autovalores de f y denotando $V_i = V_{\lambda_i}$ $d_i = \dim v_i$. Son equivalentes*

I. *f es diagonalizable*

II. $P_f = (x-\lambda_i)^{d_i} \dots (x-\lambda_r)^{d_r}$

III. $\dim V = \dim V_i + \cdots + \dim V_r$

IV. $V = V_i \oplus \cdots \oplus V_r$

Demostración. Demostraremos la equivalencia transitivamente.

- $(I \Rightarrow II)$ Sea $\beta = \{\underbrace{V_1,\dots,V_{d_i}}_{V_1}, \underbrace{V_{d_i+1},\dots,V_{d_1+d_2}}_{V_2},\dots,V_n\}$

$$\begin{aligned} P_f &= \det(Id_n - [f]_\beta) \\ &= \det\begin{pmatrix} t-\lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & t-\lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & t-\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & t-\lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (t-\lambda_1)^{d_1}(t-\lambda_2)^{d_2}\dots(t-\lambda_n)^{d_n} \end{aligned}$$

- $(II \Rightarrow III)$ Asumimos que $P_f = (x-\lambda_i)^{d_i}\dots(x-\lambda_r)^{d_r},\ d_i = \dim V_i$

$$\dim V \overset{!}{=} g(P_f) = d_i + \dots + d_r = \dim V_i + \dots + \dim V_r$$

- $(III \Rightarrow IV)$ Asumimos $\dim V = \dim V_1 + \dots + \dim V_r$
  Como en el lema anterior, $W = V_1 + \dots + V_r \subseteq V$
  Por el lema, $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Así,

$$\dim W = \dim V_1 + \dots + \dim V_r \overset{hip.}{=} \dim(v) \Rightarrow w = v$$

  $\therefore\ V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

- Asumimos que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Sea β_i una base de V_i. Como V es suma directa, $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_r$

□

Lema 10.14. *Sea $f : V \to V$ una transformación lineal, λ un autovalor*

$$\rightsquigarrow P_f = (x-\lambda)^d g(\lambda) \Rightarrow \dim V_\lambda \leq d \quad g(\lambda) \neq 0$$

10.1. Espacio dual

Definición 10.15. *Sea V un F-espacio vectorial $\rightsquigarrow \hom_f(V,F) =: V^*$ espacio dual. Cada elemento de V^* se dice un funcional dual.*

Definición 10.16. *Sea V un F-espacio vectorial, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.*

Para cada $i = 1, \dots, n$, $\exists!\ f_i : V \to F$ funcional dual $f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

*$\{f_1, \dots, f_n\} = \beta^*$ se denomina la **base dual** de β.*

Proposición 10.17. *β^* es base de V^**

Demostración. Como $\dim V^* = n$, basta probar que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente independiente.
Son $a_i \in F \diagup\ a_i f_i + \dots + a_n f_n = 0 \quad \forall\ i = 1, \dots, n$

$$0 = (a_1 f_1 + \dots + a_n f_n)(v_i) = \cancel{a_1 f_1(v_i)} + \dots + a_i f_i(v_i) + \dots + \cancel{a_n f_n(v_i)} = a_i$$

□

Lema 10.18. *Sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ una base dual.*

$$\forall\ v \in V, \quad v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i \rightsquigarrow [v]_\beta = (f_1(v), \dots, f_n(v))$$
$$\forall\ f \in V, \quad f = \sum_{i=1}^{n} f(v) f_i \rightsquigarrow [f]_\beta = (f(v_i), \dots, f(v_n))$$

Proposición 10.19. *Sea $\hat{\beta} = \{f_1, \dots, f_n\}$ base de $V^* \Rightarrow \exists!\ \beta^* = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $\beta^* = \hat{\beta}$*

Demostración. Sea $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base de $V \rightsquigarrow a_{ij} = f_i(w_j) \quad 1 \leq i, j \leq n$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ invertible}$$

□

Proposición 10.20. *Sea β base de V, $\hat{\beta}$ base de $W \rightsquigarrow \beta^*, \hat{\beta}^*$ son bases duales.*
$\varphi : V \rightsquigarrow W$ una transformación lineal $\rightsquigarrow \varphi^* : W^* \to V^*$ una transformación lineal.

$$[\varphi^*]_{\hat{\beta}^*, \beta^*} = [\varphi]_{\beta, \hat{\beta}}$$

11. Espacios vectoriales con producto interno

Definición 11.1. *Con $F = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sea V un F-espacio vectorial. Un* ***producto interno*** *sobre V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$ tal que:*

I. $\langle v + w, u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle w, u \rangle$

II. $\langle cv, u \rangle = c\langle v, u \rangle$

III. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ *En particular,* $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$

IV. $\langle v, v \rangle > 0$ *si* $v \neq 0$

Observación 11.2. *Decimos que el producto será* ***sesquilineal*** *(o lineal para $F = \mathbb{R}$) si:*

$$\begin{aligned}\langle v, u + cu' \rangle &\overset{c)}{=} \overline{\langle u + cu', v \rangle} \overset{a),b)}{=} \overline{\langle u, v \rangle + c\langle u', v \rangle} \\ &= \overline{\langle u, v \rangle} + \overline{c}\overline{\langle u', v \rangle} \\ &= \langle v, u \rangle + \overline{c}\langle v, u' \rangle\end{aligned}$$

Definición 11.3. *Sea $(V, \ \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Definimos la* ***norma*** *de un vector de V como la función $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad v = 0 \rightsquigarrow \|v\| = 0$$

Proposición 11.4. *Sea $(V, \ \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, valen las siguientes propiedades*

I. $\|v\| = 0 \iff v = 0$

II. $\|c \cdot v\| = |c|\|v\| \quad c \in F, \ v \in V$

III. Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\| \to -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \\ = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}\right)\end{aligned}$$

IV. Desigualdad triangular

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall \ v, w \in V$$

Demostración. (De III y IV)

III. Con $w = 0$ termina la prueba.

Asumimos $w \neq 0$.

$$\begin{aligned}0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle w}{\|w\|^2}, v - \frac{\langle v, w \rangle w}{\|w\|^2} \right\rangle \\ &= \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle w}{\|w\|^2}, v \right\rangle - \left(\frac{\overline{\langle v, w \rangle} w}{\|w\|^2}\right) \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle w}{\|w\|^2}, w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle w}{\|w\|^2}\langle w, v \rangle - \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2}\left(\langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \cdot \langle w, w \rangle\right) \\ &= \|v\|^2 - \cancel{2}\frac{\langle v, w \rangle \cdot \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w \rangle \cdot \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \cdot \cancel{\|w\|^2} \\ &= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle \cdot \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \Rightarrow \|v\|^2 \geq \frac{\langle v, w \rangle \cdot \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \\ &\therefore \ (\|v\|\|w\|)^2 \geq |\langle v, w \rangle|^2 \Rightarrow \|v\|\|w\| \geq \|\langle v, w \rangle\|\end{aligned}$$

IV.

$$
\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\Re\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \quad (\text{con } \Re(\alpha) \leq |\Re(\alpha)| \leq |\alpha|) \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2 \Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|
\end{aligned}
$$

□

11.1. Ortogonalidad

Definición 11.5. *Sea $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno.*

I. v, w son ortogonales si $\langle v,w\rangle = 0$

II. Un subespacio $S \subseteq V$ es ortogonal si $\langle v,w\rangle = 0 \quad \forall\ v,w \in S \rightsquigarrow$ bases ortogonales.

*III. S es **ortonormal** si es ortogonal y $\|v\| = 1,\ \forall\ v \in S$*

Observación 11.6. *Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ ortogonal $\to S' = \{\frac{v_1}{\|v_1\|},\ldots,\frac{v_n}{\|v_n\|}\}$ es ortonormal.*

Proposición 11.7. *Sea $S = \{v_1,\ldots,v_n\}$ ortogonal $\overset{v_j\neq 0}{\Rightarrow}$ S es linealmente independiente.*

Demostración. $a_i \in R:\ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \quad \forall\ j = 1,\ldots,n$

$$
\begin{aligned}
0 = \langle 0, v_j\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i, v_j\rangle = a_j\|v_j\|^2 \\
&\overset{\|v\|\neq 0}{\Rightarrow} a_j = 0
\end{aligned}
$$

□

Proposición 11.8. *Sea $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, $\beta = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base ortogonal. Entonces, $\forall\ v \in V$*

$$
v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i
$$

Teorema 11.9 (Método de ortogonalización de Gram-Schmidt)**.** *Sea $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo y $\beta = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V.*

Entonces existe una base ortonormal $\hat{\beta} = \{w_1,\ldots,w_k\}$ tal que $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle = \langle w_1,\ldots,w_k\rangle \quad \forall\ k = 1,\ldots,n$

Recursivamente, $w_k = \frac{w'_k}{\|w'_k\|}$ donde $w'_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w'_j\rangle}{\|w'_j\|}\ w_j$

Demostración. Construiremos los vectores w'_k como en el enunciado de modo recursivo y probaremos que $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle = \langle w_1,\ldots,w_k\rangle$. Como el conjunto será ortonormal, en particular es linealmente independiente y por lo tanto $\hat{\beta} = \{w_1,\ldots,w_n\}$ será una base de V.

Paso 1: $w'_1 = v_1, w_1 = \frac{w'_1}{\|w'_1\|} \Rightarrow \langle w_1\rangle = \langle v_1\rangle$

Paso recursivo: Asumimos que $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle = \langle w_1,\ldots,w_k\rangle$
con $w'_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w'_j\rangle}{\|w'_j\|^2}\ w'_j = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle v_{k+1}, w_j\rangle w_j$

$$
\begin{aligned}
\langle w'_{k+1}, w_l\rangle &= \langle v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle v_{k+1}, w_j\rangle w_l\rangle \\
&= \langle v_{k+1}, w_l\rangle - \sum_{j=1}^{k}\langle v_{k+1}, w_j\rangle\langle w_j, w_l\rangle \\
&= \langle v_{k+1}, w_l\rangle - \langle v_{k+1}, w_l\rangle = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\{w_1, \ldots, w_k, w'_{k+1}\}$ es ortogonal $\Rightarrow \{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}\}$ también lo es. Más aún, es ortonormal.

Queemos ver que $\langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle = \langle w_1, \ldots, w_{k+1}\rangle$
y sabemos que $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle w_1, \ldots, w_k\rangle$ y $\langle w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}\rangle = \langle w_1, \ldots, w'_{k+1}\rangle$
Como $v_{k+1} = w'_{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\langle v_{k+1}, w_j\rangle w_j \in \langle w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}\rangle$
Y para $i = 1, \ldots, k \quad v_i \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle w_1, \ldots, w_k\rangle = \langle w_1, \ldots, w_{k+1}\rangle$
Luego $\langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_k, w'_{k+1}\rangle = \langle w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}\rangle$
Veamos que $w'_{k+1} \in \langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle$

$$\begin{aligned} w'_{k+1} &= v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle v_{k+1}, w_j\rangle\ w_j \\ &= \langle v_{k+1}\rangle + \langle w_1, \ldots, w_k\rangle \\ &= \langle v_{k+1}\rangle + \langle v_1, \ldots, v_k\rangle \\ &= \langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle \end{aligned}$$

□

11.2. Complemento ortogonal

Definición 11.10. *Sea $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo, $S \subseteq V$ un subespacio. El **complemento ortogonal** de S es el conjunto*

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, s\rangle = 0 : \forall\ s \in S\}$$

Observación 11.11. *$S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V. En efecto, si $v, w \in S^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces para $s \in S$*

$$\langle v + \lambda w.s\rangle = \langle v, s\rangle + \lambda\langle w, s\rangle \underset{v,w\in S^{\perp}}{=} 0 + \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow v + \lambda w \in S^{\perp}$$

Proposición 11.12. *Sea $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, $S \subseteq v$ un subespacio. Entonces $V = S \oplus S^{\perp}$*

Demostración. Sea $v \in S \cap S^{\perp}$. Como $v \in S^{\perp}$, entonces $\langle v, s\rangle = 0\ \forall\ s \in S$.

En particular, como $v \in S, \langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Luego, $S \cap S^{\perp} = \{0\}$

Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S, la completamos a una base de V tal que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$. Aplicando Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V tal que $\langle w_1, \ldots, w_k\rangle = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle \quad \forall\ k = 1, \ldots, n$.

En particular, para $k = r, \langle w_1, \ldots, w_r\rangle = \langle v_1, \ldots, v_r\rangle = S$. Con lo cual, $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base ortonormal de S.

Sea $j > r$. Si $s \in S$ entonces $s = a_1w_1 + \cdots + a_rw_r \quad a_i \in F$

$$\begin{aligned} \langle w_j, s\rangle &= \langle w_j, a_1w_1 + \cdots + a_rw_r\rangle \\ &= a_1\langle w_j, w_1\rangle + \cdots + a_r\langle w_j, w_r\rangle \end{aligned}$$

Es decir, $w_j \in S^{\perp},\ \forall\ j > r$

Luego, como $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ es linealmente independiente y está contenido en $S^{\perp}$ se tiene que $n - r \leq \dim S^{\perp}$, así

$$\begin{aligned} n = (n-r) + r \leq \dim S^{\perp} + \dim S &= \dim(S + S^{\perp}) + \dim(S \cap S^{\perp}) \\ &= \dim(S + S^{\perp}) \leq \dim V = n \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim(S + S^{\perp}) = n \Rightarrow S + S^{\perp} = V$ □

Proposición 11.13. *Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, $S \subseteq V$ un subespacio. Entonces $(S^{\perp})^{\perp} = S$*

Definición 11.14 (Proyección ortogonal)**.** *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, $S \subseteq V$ un subespacio. La **proyección ortogonal** sobre S es la transformación lineal $P_S : V \to V$ tal que*

I. $P_S(s) = s, \quad \forall\ s \in S$

II. $P_S(u) = 0, \quad \forall\ u \in S^{\perp}$

Observación 11.15. *Sea* $\gamma = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ *base ortogonal de* V *tal que* $\{v_1, \ldots, v_r\}$ *es base de* S *y* $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ *es base de* $S^{\perp}$*. Se tiene que*

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle\ v_i$$

En efecto, como γ *es base ortogonal,* $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle\ v_i$ *y* $P_S(v_i) = \begin{cases} v_i & si\ i \leq r \\ 0 & si\ i > r \end{cases}$

Observación 11.16. $P_S + P_S^{\perp} = Id$*, en efecto* $P_S^{\perp}(v_i) = \begin{cases} 0 & si\ i \leq r \\ v_i & si\ i > r \end{cases}$

Por lo tanto, $(P_S + P_S^{\perp})(v_i) = P_S(v_i) + P_S^{\perp}(v_i) = v_i \quad \forall\ v_i$