Introducción a la Probabilidad y la Estadística

Martes y Jueves Aula B17

Docentes

Docentes

Teóricos

- Dra Ana Georgina Flesia

Prácticos

- Lic. Laura Montes
- Lic. Giuliana Castigliony
- Lic. Mikhail Rios

¿Como es la estructura de evaluación de la materia?

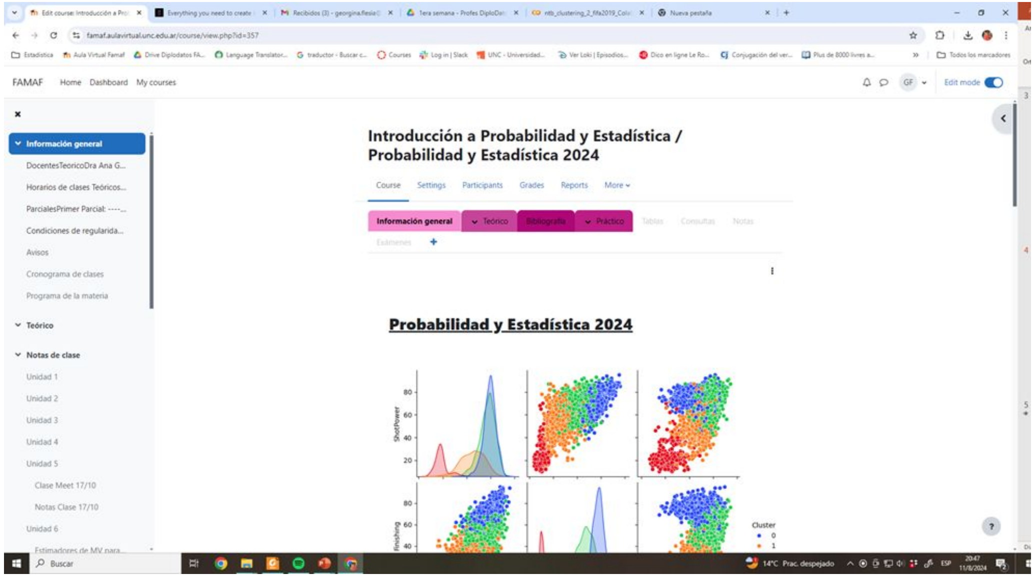
Evaluación

- Dos parciales y un trabajo computacional entregable
- Promoción
  - Se debe asistir a un 80% de las clases prácticas
  - Se debe aprobar los dos parciales con nota mayor a seis y nota promedio mayor a siete
  - Se debe aprobar el trabajo computacional
- Regularización
  - Se debe asistir a un 80% de las clases prácticas
  - Se debe aprobar los dos parciales con nota mayor a cuatro
  - Se debe aprobar el 60% del trabajo computacional
- Alumnos libres
  - Tienen que entregar el trabajo computacional antes de rendir el examen.

Aula Virtual

Aula virtual

- Guías de trabajos prácticos
- Notas de clase (libro en pdf)
- Enlace a la presentación de Google de cada una de las clases
- Trabajo computacional
- Foro de consultas



¿que vamos a ver?

Resumen muy simple

- ¿Qué es la estadística?
- Los sucesos aleatorios y la teoría de la Probabilidad
  - variables aleatorias y su distribución de probabilidad
- ¡A estudiar un suceso!
  - Muestreo
- ¿Qué acabo de recoger?
  - Estadística descriptiva
- Sacando conclusiones: inferencia estadística
  - estimación puntual y por intervalo
  - test de hipótesis

¿Qué es la estadística?

Definición

La Estadística es la ciencia de la

- Sistematización, recogida, ordenación y presentación de los datos
- referentes a un fenómeno
- que presenta variabilidad o incertidumbre
- para su estudio metódico,

Descriptiva

Probabilidad

- con objeto de deducir las leyes que rigen esos fenómenos, y poder de esa forma

- hacer previsiones sobre los mismos, tomar decisiones u obtener conclusiones.

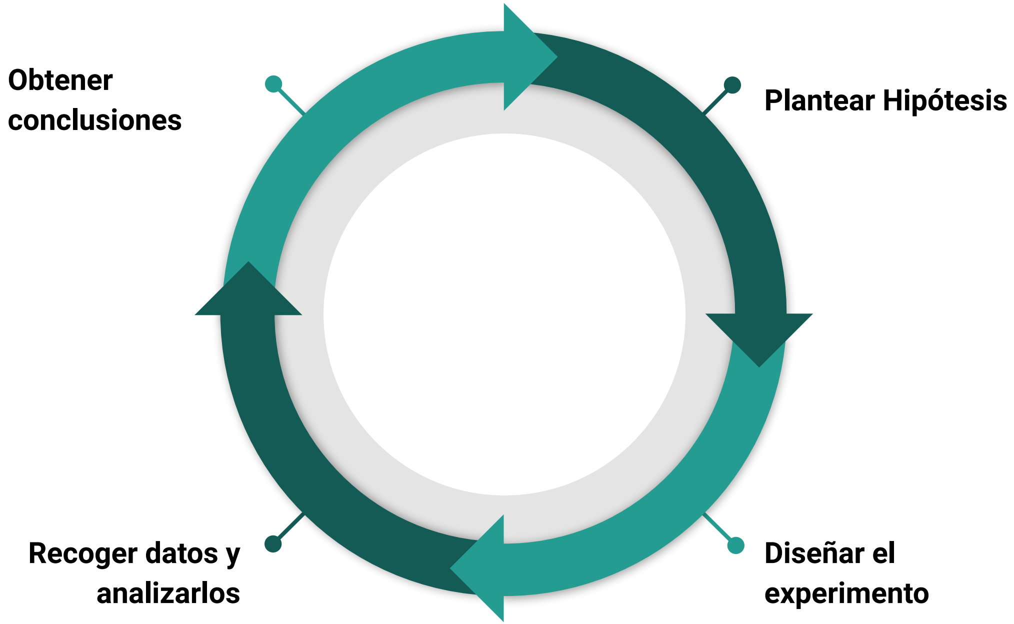
Inferencia

Noción

La palabra estadística tiene dos acepciones:

- La Estadística es la ciencia del estudio de los datos asociados a un suceso o experimento.
- Una estadística, por otro lado, es el hecho particular de estudiar un suceso concreto: recoger los datos y analizarlos.

Método científico y la estadística



Modelo

- Plantear hipótesis sobre una población

Los estudiantes usan los recursos de la biblioteca más que los docentes

- ¿En qué sentido?
    - **¿Mayor número de libros consultados?**
    - **¿Tiempo medio de consulta?**

Diseño del experimento

- **Qué individuos pertenecerán al estudio (muestras)**
  - Estudiantes regulares. Docentes.
  - Criterios de exclusión
  - ¿Cómo se eligen?
  - ¿Descartamos los préstamos entre bibliotecas?
- **Qué datos recoger de los mismos (variables)**
  - Número de consulta
  - Tiempo de duración de cada retiro
  - ¿Género?
  - ¿Biblioteca?
  - ¿Otros factores?

Realizar inferencias

Los estudiantes consultan al menos 3 libros más en media que los docentes al año.

- **Cuantificar la confianza en la inferencia**

- **Nivel** de confianza del 95%
- Significado del contraste: **p-valor**=0.3

Objetivos del curso

- Discutir cómo seleccionar una muestra representativa de una población.

- Caracterización de los datos muestrales en unos pocos números llamados "estadísticos muestrales".

- Uso de los "estadísticos muestrales“ para hacer inferencias acerca de la población.

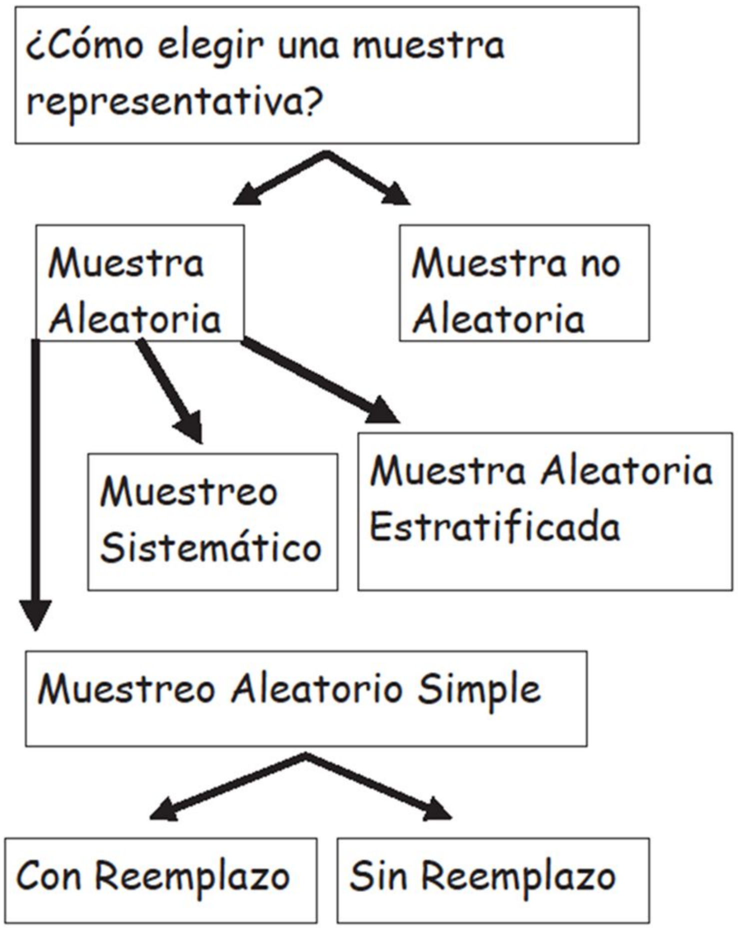
Población y Muestra

Población: es el conjunto sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones (hacer inferencia).

- Normalmente es demasiado grande para poder abarcarlo.

Muestra: es un subconjunto de la población al que tenemos acceso y sobre el que realmente hacemos las observaciones (mediciones)

- Debería ser "**representativo**"
- Está formado por miembros "seleccionados" de la población (individuos, unidades experimentales).


¿Cómo elegir una muestra representativa?
Muestra Aleatoria
Muestra no Aleatoria
Muestreo Sistemático
Muestra Aleatoria Estratificada
Muestreo Aleatorio Simple
Con Reemplazo
Sin Reemplazo

Selección de datos

Hay dos métodos básicos para seleccionar datos desde una población.

- **Muestra Aleatoria**: Cada elemento de la población tiene la misma chance de ser seleccionado.
- **Muestra No Aleatoria**: Algunos elementos de la población tienen mayor chance de ser seleccionados. Dentro de los muestreos no aleatorios se encuentran los **Estudios Observacionales**

Muestreo

- **Muestra Aleatoria Simple**: Selección de N elementos de una población de forma tal que cualquier posible combinación de N elementos de esa población tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

- **Muestra Aleatoria Simple sin reemplazo**: Cuando cada elemento seleccionado para la muestra no se devuelve a la población para su posible reelección.

Muestreo

- **Muestra Aleatoria Simple con reemplazo**: Cuando cada elemento seleccionado para la muestra se devuelve a la población para su posible reelección.

- **Muestreo Sistemático**: Los elementos de la población se ordenan en una secuencia aleatoria y se selecciona cada n-ésimo elemento de la secuencia.

- **Muestreo Aleatorio Estratificado**: Se divide a la población en subgrupos y en cada uno de estos subgrupos se realiza un muestreo aleatorio simple.

Estudios observacionales

- Los datos que provienen de encuestas donde no se tiene control experimental sobre los factores que pueden influir en la variable de interés se denominan **datos observacionales**

Ejemplo

- El cambio de política de presupuesto usualmente se compara con controles históricos.
- Determinar cambio y aislar causas es difícil si solo se trabaja con datos observacionales

Experimentos

Experimentos

Finalidad de todo experimento: obtener información de interés

- **Experimentos determinísticos**: su desarrollo y resultado es previsible, según ciertas reglas
- **Experimentos aleatorios**: se realizan en un contexto de incertidumbre, y su desarrollo y resultado no se puede predecir: dependen del azar

-$Y=X^3$, si $X=3$,$Y = 27$

$Y_1= 27{,}001$;
$Y_2= 26{,}99$;
$Y_3= 26{,}98$;
$Y_4= 27{,}09$

Los experimentos aleatorios se caracterizan por que:

- conocemos de antemano todos los posibles resultados que se pueden obtener
- no podemos predecir el resultado de cada experimento particular
- pueden repetirse indefinidamente en las mismas condiciones

Definiciones

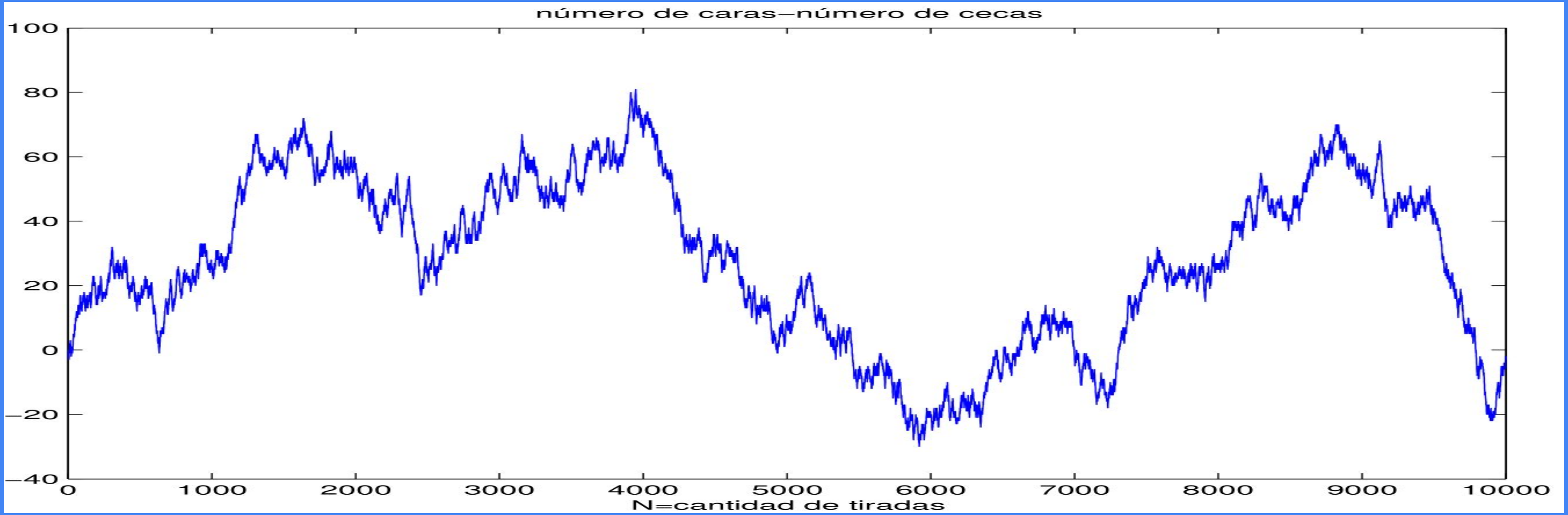
- **Espacio muestral** Ω de un experimento aleatorio: conjunto de todos los posibles resultados distintos de dicho experimento
- **Suceso** A: cualquier subconjunto del espacio muestral
- **Sucesos elementales:** sucesos formados por un único resultado, $A = \{s\}$

Suceso = Evento = subconjunto del espacio muestral

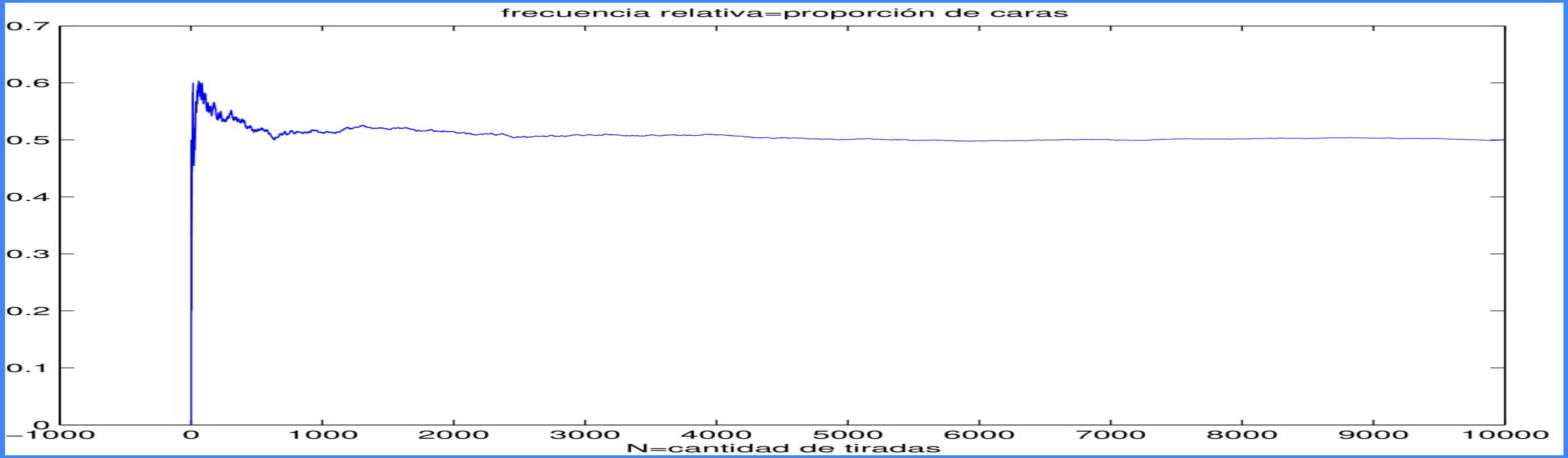
Definición “empírica” o “frecuentista” de la probabilidad:

Si un experimento aleatorio se repite en las mismas condiciones N veces y anotamos el número de veces n_i que se presenta un resultado particular, el cociente $\frac{n_i}{N}$ tiende a estabilizarse en un valor fijo (la probabilidad del resultado observado) cuando $N \to \infty$.

- no puede usarse en la práctica como *definición* de probabilidad:
  - se requiere realizar un número infinito de veces un experimento para calcular una probabilidad...
  - se podrían aproximar estas probabilidades realizando el experimento un número suficientemente elevado de veces, pero a veces los experimentos aleatorios no pueden (o no deben) ser realizados ni siquiera un número suficientemente alto de veces



número de caras−número de cecas
100
80
60
40
20
0
−20
−40
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
N=cantidad de tiradas



frecuencia relativa=proporción de caras
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−1000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
N=cantidad de tiradas

Operaciones entre sucesos:

- **Unión**:

$$A \cup B = \{s \in \Omega : s \in A, \text{ o } s \in B\}$$

(sucesos elementales que pertenecen a A o bien a B, incluyendo los que están en ambos simultáneamente)

- **Intersección**:

$$A \cap B = \{s \in \Omega : s \in A, \text{ y } s \in B\}$$

(sucesos elementales que pertenecen a A y B a la vez)

  - **sucesos incompatibles**: tienen intersección vacía

- **Diferencia**:

$$A \setminus B \equiv A - B = \{s \in \Omega : s \in A \text{ y } s \notin B\}$$

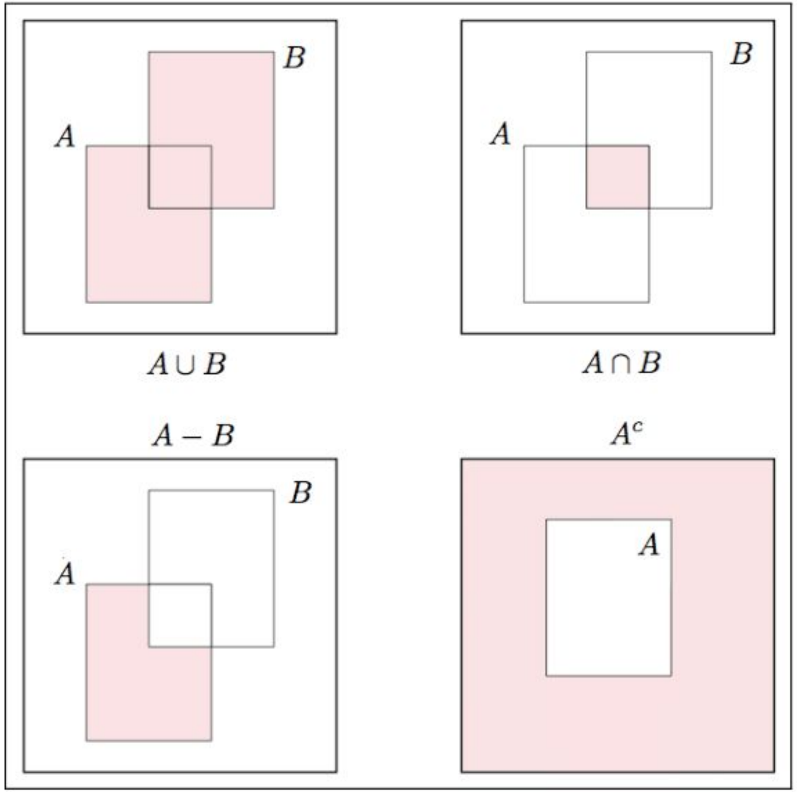
(sucesos elementales que pertenecen a A, pero no a B)

- **Complementario**:

$$\bar{A} \equiv A^c = \{s \in \Omega : s \notin A\}$$

(conjunto diferencia $\Omega - A$)

Recordemos las operaciones entre conjuntos



Ejemplo: (Sucesos y operaciones)

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos monedas al aire.

Representamos "cara" por C y "cruz" por $+ \Rightarrow$ el conjunto de los posibles resultados (espacio muestral) sería $\Omega = \{CC, C+, +C, ++\}$.

Ejemplos de sucesos:

$$A = \text{ "sacar una cara" } = \{C+, +C\}$$

$$B = \text{ "sacar al menos una cruz" } = \{C+, +C, ++\}$$

Operaciones con sucesos:

$$A \cup B = \{C+, +C, ++\} = B$$

$$A \cap B = \{C+, +C\} = A$$

$$B - A = \{++\}$$

$$A - B = \phi$$

$$A^c = \{CC, ++\}$$

Probabilidad

Definición “axiomática” de la probabilidad

Definición rigurosa $\Rightarrow$ se establecen leyes o *axiomas* (menor conjunto posible de reglas tales que las demás se deducen como una consecuencia) que debe cumplir una función de probabilidad

Llamamos **función de probabilidad** a una función $\mathcal{P}$ que verifica los siguientes axiomas:

A1. Está definida en el conjunto de partes del espacio muestral Ω y toma valores en el intervalo [0,1]:

$$\mathcal{P} : \mathbb{P}(\Omega) \rightarrow [0,1],$$

$$\forall A \subset \Omega \quad 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$$

A2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

A3. Si $A_1, ..., A_n, ...$ son sucesos disjuntos o incompatibles ($\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \phi$) entonces $\mathcal{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathcal{P}(A_n)$

- Función de Probabilidad
- Medida de probabilidad
- Probabilidad

Caso simple: Espacio **Equiprobable**.

- Ω tiene n posibles resultados diferentes
- los n resultados tienen la misma probabilidad $\dfrac{1}{n}$ de aparecer

Regla de Laplace:

La probabilidad de un suceso formado por k sucesos elementales $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ es:

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}(a_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Este procedimiento para hallar la probabilidad de un suceso es correcta **sólo en espacios equiprobables**

$$\frac{\text{casos probables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejemplo: (Sucesos y operaciones)

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos monedas al aire.

Representamos "cara" por C y "cruz" por $+$ $\Rightarrow$ el conjunto de los posibles resultados (espacio muestral) sería $\Omega = \{CC, C+, +C, ++\}$.

Ejemplos de sucesos:

$$A = \text{ "sacar una cara" } = \{C+, +C\}$$

$$B = \text{ "sacar al menos una cruz" } = \{C+, +C, ++\}$$

Operaciones con sucesos:

$$A \cup B = \{C+, +C, ++\} = B$$

$$A \cap B = \{C+, +C\} = A$$

$$B - A = \{++\}$$

$$A - B = \phi$$

$$A^c = \{CC, ++\}$$

P(E)=#E/#Ω

P(A∪B)=

P(A∩B)=

P(B-A)=

P(A-B)=

P(A^c)=

Consecuencias:

Propiedades:

1. $\mathcal{P}(\phi) = 0$
2. $\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A)$
3. Si $A \subset B$ entonces $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
4. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$
5. $\mathcal{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathcal{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathcal{P}(\cap_{i=1}^n A_i)$

Al espacio $(\Omega, \mathcal{P})$ se le denomina **espacio de probabilidad**

Ejemplo

Una clase consta de diez hombres y veinte mujeres. La mitad de cada grupo tiene ojos oscuros y la otra mitad claros. Hallar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre o tenga ojos oscuros.

Ejemplo

Una clase consta de diez hombres y veinte mujeres. La mitad de cada grupo tiene ojos oscuros y la otra mitad claros. Hallar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre o tenga ojos oscuros.

Probabilidad de Laplace

	hombre (H)	mujer (M)
ojos oscuros (OO)	5/30	10/30
ojos claros (OC)	5/30	10/30

$$P(H \cup OO) = P(H) + P(OO) - P(H \cap OO)$$

$$= 1/3 + 1/2 - 5/30 = 20/30 = 2/3$$

Ejemplo

El experimento consiste en lanzar un dado honesto hasta obtener un 6.

1. Defina un modelo probabilístico adecuado para este experimento.
2. Calcule la probabilidad de que se necesite lanzar un dado entre dos y cuatro veces hasta obtener un 6.

Resolución

1. Cada tirada del dado incurre en un 6 o un No6, con probabilidad 1/6 y 5/6 respectivamente. Un resultado del experimento es una sucesión finita de No6 finalizada por un 6. Si se necesitan k tiradas para obtener un 6, la probabilidad del punto es $(5/6)^{k-1}(1/6)$.
2. Los eventos $A = \{$ dos tiradas para obtener un 6$\}$
$B = \{$ tres tiradas para obtener un 6$\}$ y
$C = \{$ cuatro tiradas para obtener un 6$\}$ son disjuntos, por lo cual la probabilidad de que se necesite lanzar un dado entre dos y cuatro veces hasta obtener un 6 es la suma de las probabilidades de los eventos A, B y C

Ejemplo

Una empresa controla mensualmente el funcionamiento de sus múltiples servidores. Sea A el evento de que un servidor, elegido al azar, haya presentado una falla durante el mes de abril y sea B el evento de que ese mismo servidor haya presentado una falla durante el mes de octubre. Suponga que P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,7 y $P(A \cup B) = 0{,}9$. Calcular:

1. $P(A^c); P(A \cap B)$ y $P(A \cap B^c)$.
2. La probabilidad que de falle en exactamente uno de estos meses.

Resolución

El evento A es que el servidor haya fallado en abril. La probabilidad de que no ocurra A es:

$$P(A^c) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Para calcular $P(A \cap B)$, podemos usar la fórmula de la unión de dos eventos y despejar

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,7 - 0,9 = 0,6$$

Para calcular $P(A \cap B^c)$, utilizamos la fórmula:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,6 = 0,2$$

Resoución

Para encontrar la probabilidad de que el servidor falle en exactamente uno de los meses (ya sea en abril o en octubre, pero no en ambos), sumamos las probabilidades de los eventos mutualmente excluyentes $(A \cap B^c)$ y $(A^c \cap B)$.

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,6 = 0,1$$

Finalmente, sumamos las probabilidades:

$$P(\text{falle en exactamente uno de los meses}) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

$$= 0,2 + 0,1 = 0,3$$

Probabilidad Condicional

Probabilidad de un suceso A condicionada por un suceso B (o conocido que ha ocurrido el suceso B):

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

- Una vez que se sabe que ha ocurrido B, se puede considerar que B es el nuevo espacio muestral
- la probabilidad condicionada es la proporción de B que representa la parte de A que está en B
- Obviamente, si el suceso B ha ocurrido, será $\mathcal{P}(B) > 0$
- **Regla de la multiplicación**:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A|B) \cdot \mathcal{P}(B)$$

Sucesos independientes:

La ocurrencia de B no dice nada nuevo acerca de la ocurrencia A:

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$$

- A, B independientes $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$

Ejemplo: (Probabilidad condicionada)

Se quiere estudiar qué personas en un grupo de N mujeres y hombres tienen conocimientos de alemán. Se sabe que N_A personas (entre ellas, N_{AM} mujeres) saben alemán.

Representamos por A el suceso "saber alemán", y por M el suceso "ser mujer". Si se elige al azar una persona entre todas las del grupo, la probabilidad de que sepa alemán, al ser un experimento equiprobable, es:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{N_A}{N}$$

Si se sabe, que la persona seleccionada es mujer, la probabilidad de que sepa alemán, condicionada a que es mujer, es:

$$\mathcal{P}(A|M) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles (incorporando que es mujer)}} = \frac{N_{AM}}{N_M} = \frac{\frac{N_{AM}}{N}}{\frac{N_M}{N}} =$$

$$= \frac{\mathcal{P}(A \cap M)}{\mathcal{P}(M)}$$

Ejemplo: (Independencia)

Consideremos el lanzamiento de dos monedas; estamos interesados en estudiar la independencia de los sucesos A=“obtener cara en el primer lanzamiento” $= \{C+, CC\}$, y B=“obtener un resultado diferente en los dos lanzamientos” $= \{C+, +C\}$.

Se tiene que:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \mathcal{P}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$A \cap B = \{C+\}, \qquad \mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

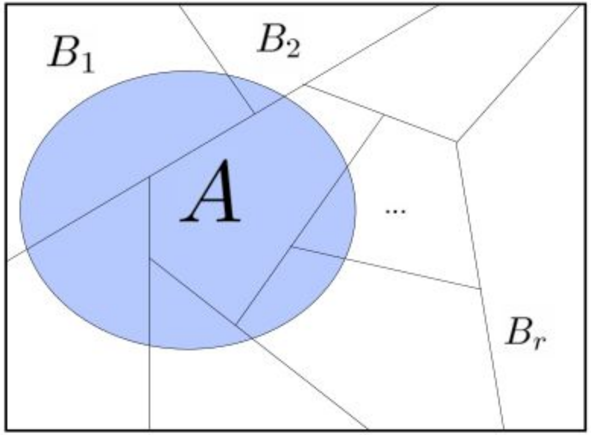
por lo que se cumple que:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

y los sucesos son independientes.

En ocasiones, Ω se puede partir en varios sucesos de probabilidad positiva B_1, B_2,..., B_r, incompatibles entre sí, es decir, en:

1. Sucesos exhaustivos: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$
2. Sucesos excluyentes: $B_i \cap B_j = \phi$, para todo $i \neq j$



La probabilidad de un suceso A puede calcularse a partir de las probabilidades de A condicionadas por los diferentes sucesos B_1, B_2,..., B_r.

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B_1) + \mathcal{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathcal{P}(A \cap B_r) =$$

$$= \mathcal{P}(A|B_1)\mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(A|B_2)\mathcal{P}(B_2) + \cdots + \mathcal{P}(A|B_r)\mathcal{P}(B_r) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i)\mathcal{P}(B_i) \qquad \textbf{(Regla de la Probabilidad Total)}$$

Ejemplo: (Regla de la Probabilidad total)

En una población, el 40 % son hombres, de los cuales el 80 % son aficionados al fútbol, mientras que sólo el 20 % de las mujeres, son aficionadas al fútbol. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol?

El espacio muestral puede dividirse en los sucesos exhaustivos y excluyentes $B_1=$"hombres" y $B_2=$"mujeres", cuyas probabilidades respectivas son $\mathcal{P}(B_1) = 0{,}40$ y $\mathcal{P}(B_2) = 0{,}60$.

Además, $A=$"ser aficionado al fútbol" cumple que $\mathcal{P}(A|B_1) = 0{,}80$ y $\mathcal{P}(A|B_2) = 0{,}20$. Por tanto, utilizando la regla de la probabilidad total:

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A|B_1)\mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(A|B_2)\mathcal{P}(B_2) = 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}44$$

En el mismo caso de un espacio muestral particionado en sucesos exhaustivos y excluyentes $B_1, ..., B_r$, reescribimos la probabilidad de B_j condicionada por el suceso A, utilizando la regla de la probabilidad total:

$$\mathcal{P}(B_j|A) = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(B_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}(A|B_i)\mathcal{P}(B_i)}$$

(Regla de Bayes)

- muy útil para obtener una probabilidad condicionada $\mathcal{P}(B_i|A)$ a partir de las probabilidades condicionadas en el sentido contrario $\mathcal{P}(A|B_j)$, $j = 1, ..., r$

Ejemplo: (Regla de Bayes)

En el ejemplo anterior, en el que el 40 % son hombres, de los cuales el 80 % son aficionados al fútbol, mientras que sólo el 20 % de las mujeres, son aficionadas al fútbol, si sabemos que una persona elegida al azar resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que fuese una mujer?

Aplicando la regla de Bayes, tenemos que:

$$\mathcal{P}(B_2|A) = \mathcal{P}(\text{mujer}|\text{aficionada al fútbol}) = \frac{\mathcal{P}(\text{mujer y aficionada al fútbol})}{\mathcal{P}(\text{aficionada al fútbol})} =$$

$$= \frac{\mathcal{P}(\text{aficionada al fútbol }|\text{mujer}) \cdot \mathcal{P}(\text{mujer})}{\mathcal{P}(\text{aficionada al fútbol})} = \frac{0{,}2 \times 0{,}6}{0{,}44} = 0{,}27$$