Espacio dual. Espacios con producto interno.

Jueves 14 de noviembre

Ejercicio 1. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$, $v_3 = (-1, -1, 0)$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) Probar que B es una base y dar la base dual de B.

(b) Sea $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$, $f(v_3) = 1$. Hallar $f(x, y, z)$ y dar sus coordenadas en la base dual de B.

(c) Sea $g \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $g(v_1) = -1$, $g(v_2) = 2$, $g(v_3) = -4$. Hallar $g(x, y, z)$ y dar sus coordenadas en la base dual de B.

Ejercicio 2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

(a) Sea $v \in V$. Probar que si $f(v) = 0$ para toda $f \in V^*$, entonces $v = 0$.

(b) Sean $v_1, v_2 \in V$. Probar que $v_1 = v_2$ si y sólo si $f(v_1) = f(v_2)$ para toda $f \in V^*$.

(c) Sea W un subespacio de V. Probar que para toda $g \in W^*$ existe una $f \in V^*$ tal que $f|_W = g$.

Ejercicio 3. Repetir el **Ejercicio 1** para los vectores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 2, 0)$.

Ejercicio 4. Sea $V = \mathbb{R}_2[t]$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $f_a : V \to \mathbb{R}$ la función $f_a(p) = \int_0^a p(x)dx$.

(a) Probar que $f_a \in V^*$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (es decir, cada f_a es lineal).

(b) Probar que $\{f_1, f_2, f_{-1}\}$ es una base de V^*.

Ejercicio 5. Sean V y W dos espacios vectoriales, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Definimos una función $T^* : W^* \to V^*$ por la fórmula

$$T^*(f)(v) = f(T(v)) \qquad \text{para todo } v \in V.$$

(a) Probar que T^* es una transformación lineal.

(b) Probar que T es un monomorfismo si y sólo si T^* es un epimorfismo.

(c) Probar que T es un epimorfismo si y sólo si T^* es un monomorfismo.

(d) Probar que T es un isomorfismo si y sólo si T^* es un isomorfismo.

Ejercicio 6. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, y sea $W \subset V$ un subespacio. Definimos una función $\langle , \rangle_W : W \times W \to \mathbb{R}$ restringiendo el producto interno de V, o sea:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_W = \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Probar que $(W, \langle , \rangle_W)$ es un espacio con producto interno.

Ejercicio 7. Hallar los posibles valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha x_2y_2$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Martes 19 de noviembre

Ejercicio 8. En este ejercicio los productos internos son los canónicos.

(a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base ordenada $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(b) Usando el procedimiento de Gram-Schmidt, construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ a partir de la base

$$\{(1,1,1,1),(0,1,0,1),(-1,-1,1,2),(1,0,0,0)\}.$$

(c) Obtener las coordenadas de los vectores $(2,-1,3)$ y $(-1,2,-3,4)$ respecto de la bases obtenidas en los incisos anteriores.

(d) Hallar una base ortonormal del subespacio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$.

(e) Hallar una base ortonormal del subespacio $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y - 3z + 4w\}$.

Ejercicio 9. Nuevamente consideramos los productos internos canónicos de $\mathbb{R}^n$. Caracterizar $W^\perp$, dar una base y su dimensión en cada uno de los siguientes casos:

(a) W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$.

(b) W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,1,2),(1,2,3)\}$.

(c) W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,-1,2,1)\}$.

(d) W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,1,1,1),(1,1,3,1)\}$.

(e) W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,0,-2,1),(1,1,3,1),(1,-1,1,1)\}$.

(f) W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $\{(1,1,1,1,1),(0,0,1,2,3)\}$.

Ejercicio 10. Sea $V = \mathbb{R}_n[t]$.

(a) Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, define un producto interno en V.

(b) Describir el complemento ortogonal de los subespacios generados por los siguientes subconjuntos:

$$\{1\}, \qquad \{1, x+2\}, \qquad \{1, x+1, x^2-1\}.$$

(c) Aplicar Gram-Schmidt a la base $B = \{1, x, \dots, x^n\}$ para hallar una base ortogonal de V.

Ejercicio 11. Consideramos $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ dada por $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(A^tB)$.

(a) Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es bilineal y simétrica.

(b) Sea $\{\mathsf{e}_1,\dots,\mathsf{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Probar que $(A^tA)_{ii} = \mathsf{e}_i^tA^tA\mathsf{e}_i = \langle A\mathsf{e}_i, A\mathsf{e}_i\rangle$,

(c) Deducir del punto anterior que $\langle A,A\rangle \geq 0$ para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(d) Deducir del punto (b) que $\langle A,A\rangle = 0$ si y sólo si $A = 0$.

Por lo tanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno.

(e) Encontrar el espacio ortogonal al subespacio de matrices diagonales.

Ejercicio 12. Sean V, W dos subespacios de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno. Probar que

$$(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp, \qquad (V\cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp.$$

Ejercicio 13. Sean V y W dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales tales que $\dim V = \dim W < \infty$, y sean

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \{\cdot,\cdot\} : W \times W \to \mathbb{R}$$

productos internos en V y W respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $\{Tx, Ty\} = \langle x, y\rangle$ para todo par de elementos $x, y \in V$. Probar que T es un isomorfismo.

★ **Ejercicio 14. Unicidad de la traza.**
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sabemos que la traza es una funcional lineal $\operatorname{tr} \in \operatorname{Hom}(V,V)^*$ que satisface $\operatorname{tr}(TS) = \operatorname{tr}(ST)$ para todas $T, S \in \operatorname{Hom}(V,V)$. Supongamos que $\tau \in \operatorname{Hom}(V,V)^*$ satisface $\tau(TS) = \tau(ST)$ para todas $T, S \in \operatorname{Hom}(V,V)$. Probar que τ es un múltiplo escalar de tr.
`Sugerencia: demostrarlo para matrices` 2×2 `usando matrices elementales.`

★ **Ejercicio 15. Tomar doble dual es como no hacer nada.**
• Sabemos que si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces V^* es isomorfo a V. Una forma de probar esto es fijar una base $\mathbb{B}$ de V y construir una base de V^* (la base dual) con la misma cantidad de elementos que $\mathbb{B}$.
• Como V^* es un espacio vectorial, podemos considerar su dual $(V^*)^*$. Este se llama el *doble dual* de V, y lo denotaremos por V^{**}. Ya sabemos que $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$, y por lo tanto V^{**} es isomorfo a V.

En este ejercicio vamos a construir un isomorfismo $V \simeq V^{**}$ que no requiere elegir bases (y por lo tanto es mucho mejor).

(a) Para cada $\alpha \in V$ definimos la función $\operatorname{ev}_V(\alpha) \colon V^* \to \Bbbk$ dada por $\operatorname{ev}_V(\alpha)\,(f) := f(\alpha)$.
Probar que $\operatorname{ev}_V(\alpha) \colon V^* \to \Bbbk$ es una transformación lineal (esto es, $\operatorname{ev}_V(\alpha) \in V^{**}$).

(b) Probar que la función $\operatorname{ev}_V \colon V \to V^{**}$ dada en el ítem anterior es una transformación lineal.

(c) Probar que $\operatorname{ev}_V \colon V \to V^{**}$ es un monomorfismo. Deducir que es un isomorfismo.

(d) Sea W otro espacio vectorial. Sea $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Gracias al **Ejercicio 5** tenemos una $T^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$. Aplicando de nuevo el **Ejercicio 5** tenemos $T^{**} \in \operatorname{Hom}(V^{**}, W^{**})$. Probar que

$$T^{**}(\phi)\,(g) = \phi(g \circ T) \qquad \text{para todas } \phi \in V^{**},\ g \in W^*.$$

(e) Probar que $T^{**} \circ \operatorname{ev}_V = \operatorname{ev}_W \circ T$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\operatorname{ev}_V} & V^{**} \\ \big\downarrow{\scriptstyle T} & & \big\downarrow{\scriptstyle T^{**}} \\ W & \xrightarrow{\operatorname{ev}_W} & W^{**} \end{array}$$