Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 27 de septiembre de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Semántica de la lógica proposicional
   - Asignaciones y valuaciones
   - Teorema de Extensión
   - Abreviaciones: Conectivos nuevos
   - La relación de consecuencia y tautologías
   - Lema de Coincidencia
   - Tablas de verdad
3. Sustitución

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”), cómo se escriben.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,),(,\wedge,\vee,\to\}$; $\;PROP \subseteq \Sigma^*$.

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,),(,\wedge,\vee,\to\}$; $\;PROP \subseteq \Sigma^*$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,), (, \wedge, \vee, \to\}$; $PROP \subseteq \Sigma^*$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**. Después

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \to$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,), (, \wedge, \vee, \to\}$; $\boxed{PROP \subseteq \Sigma^*}$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.

Definición

Una **asignación** es una función $f : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.

Definición

Una **asignación** es una función $f : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Definición

Una **valuación** es una función $[\![\cdot]\!] : \mathit{PROP} \to \{0, 1\}$ que satisface:

1. $[\![\bot]\!] = 0$.
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \min\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \max\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

Universidad Nacional de Córdoba, 1613 - 2013, 400 AÑOS

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única valuación* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Definimos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 400 AÑOS

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Definimos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \min\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Definimos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \min\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Definimos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Definimos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$. H_{At}

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_\wedge$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario. $H_\to$

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_\vee$

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única valuación* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Demostración.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única valuación* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Por el *Teorema de definición por recursión en subfórmulas*, **existe** una función $[\![\cdot]\!]_f$ que satisce las condiciones anteriores **y es única**.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Por el *Teorema de definición por recursión en subfórmulas*, **existe** una función $[\![\cdot]\!]_f$ que satisce las condiciones anteriores **y es única**.
Sólo queda ver que $[\![\cdot]\!]_f$ es efectivamente una valuación y que restringida a $\mathcal{V}$ coincide con f.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 400 AÑOS

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Por el *Teorema de definición por recursión en subfórmulas*, **existe** una función $[\![\cdot]\!]_f$ que satisce las condiciones anteriores **y es única**.
Sólo queda ver que $[\![\cdot]\!]_f$ es efectivamente una valuación y que restringida a $\mathcal{V}$ coincide con f.
Pero ambas cosas son inmediatas de la definición de $[\![\cdot]\!]_f$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f*, existe una única valuación* $[\![\cdot]\!]_f$ *tal que* $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*.*

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Corolario

$[\![p]\!] = [\![p]\!]'$ *para toda* $p \in \mathcal{V} \implies [\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]'$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Corolario

$[\![p]\!] = [\![p]\!]'$ *para toda* $p \in \mathcal{V} \implies [\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]'$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Corolario

$[\![p]\!] = [\![p]\!]'$ *para toda* $p \in \mathcal{V} \implies [\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]'$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión: ambas valuaciones son extensiones de la misma asignación $[\![\cdot]\!] \upharpoonright \mathcal{V} = [\![\cdot]\!]' \upharpoonright \mathcal{V}$.

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))$.

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Ejercicio

Para toda valuación $[\![\cdot]\!]$:

1. $[\![(\neg\varphi)]\!] = 1 - [\![\varphi]\!]$.
2. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1 \iff [\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- φ es **consecuencia lógica** de Γ sii para toda asignación f que valida Γ, $[\![\varphi]\!]_f = 1$ (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- φ es **consecuencia lógica** de Γ sii para toda asignación f que valida Γ, $[\![\varphi]\!]_f = 1$ (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda asignación f.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- φ es **consecuencia lógica** de Γ sii para toda asignación f que valida Γ, $[\![\varphi]\!]_f = 1$ (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda asignación f. (**notación**: $\models \varphi$)

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- φ es **consecuencia lógica** de Γ sii para toda asignación f que valida Γ, $[\![\varphi]\!]_f = 1$ (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda asignación f. (**notación**: $\models \varphi$)

Ejercicio

$\models \varphi \iff \emptyset \models \varphi$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si f valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_f = 1$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si f valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_f = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_f = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 1 \implies [\![\psi]\!]_f = 1.$$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si f valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_f = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_f = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 1 \implies [\![\psi]\!]_f = 1.$$

4. $\not\models p_1$

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si f valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_f = 1$:

$$[\![\varphi]\!]_f = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 1 \implies [\![\psi]\!]_f = 1.$$

4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si f valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_f = 1$:
   $$[\![\varphi]\!]_f = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 1 \implies [\![\psi]\!]_f = 1.$$
4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición:
   p_1 no es una tautología $\iff$ existe alguna f tal que $[\![p_1]\!]_f = 0$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ, *entonces* $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi) = f'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi) = f'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{f'}$.
Además, $[\![\bot]\!]_f = [\![\bot]\!]_{f'} = 0$ siempre.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$*.*

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi) = f'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{f'}$.
Además, $[\![\bot]\!]_f = [\![\bot]\!]_{f'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que f y f' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ para todos los p_i que ocurran en φ, entonces $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi) = f'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{f'}$.
Además, $[\![\bot]\!]_f = [\![\bot]\!]_{f'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que f y f' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$
Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{f'}$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi) = f'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{f'}$.
Además, $[\![\bot]\!]_f = [\![\bot]\!]_{f'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que f y f' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$
Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{f'}$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ El resto de los casos queda como ejercicio.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ en $\{0, 1\}$.

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Demasiadas.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$?

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de
$\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$?
Por el Lema de Coincidencia, no.

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
f_1	1	0	1	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
f_1	1	0	1	1	$\dots$
f_2	1	1	0	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	...
f_1	1	0	1	1	...
f_2	1	1	0	1	...
f_3	1	0	1	0	...

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
f_1	1	0	1	1	$\dots$
f_2	1	1	0	1	$\dots$
f_3	1	0	1	0	$\dots$
f_4	0	0	1	1	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
f_1	1	0	1	1	$\dots$
f_2	1	1	0	1	$\dots$
f_3	1	0	1	0	$\dots$
f_4	0	0	1	1	$\dots$
f_5	0	1	0	0	$\dots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$
f_1	1	0	1	1	$\dots$
f_2	1	1	0	1	$\dots$
f_3	1	0	1	0	$\dots$
f_4	0	0	1	1	$\dots$
f_5	0	1	0	0	$\dots$
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$		
f_2	1	1	0	1	$\dots$		
f_3	1	0	1	0	$\dots$		
f_4	0	0	1	1	$\dots$		
f_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$		
f_3	1	0	1	0	$\dots$		
f_4	0	0	1	1	$\dots$		
f_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$		
f_4	0	0	1	1	$\dots$		
f_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
f_4	0	0	1	1	$\dots$		
f_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
f_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
f_5	0	1	0	0	$\dots$		
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
f_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
f_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
f_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
f_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
f_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
f_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_2	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	1	1	1
f_2	1	0	0	1
f_4	0	1	0	1
f_5	0	0	0	1

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Ejercicio

1. $(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p])$
2. $(\varphi \leftrightarrow \chi)[\psi/p] = (\varphi[\psi/p] \leftrightarrow \chi[\psi/p])$.