Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 28 de agosto de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Posets (Conjuntos parcialmente ordenados)
   - Diagrama de Hasse
   - Ordenes totales
   - máximo, mínimo, maximal y minimal
   - supremo e ínfimo
   - Posets reticulados

Relaciones de Orden

Recordemos la definición de relación de orden parcial.

Definición

Un relación R sobre A es una *relación de orden parcial sobre A* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Relaciones de Orden

Recordemos la definición de relación de orden parcial.

Definición

Un relación R sobre A es una *relación de orden parcial sobre A* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición

Un *conjunto parcialmente ordenado (poset)* es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es una relación de orden parcial sobre A.

Relaciones de Orden

Recordemos la definición de relación de orden parcial.

Definición

Un relación R sobre A es una *relación de orden parcial sobre A* sii es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición

Un *conjunto parcialmente ordenado (poset)* es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es una relación de orden parcial sobre A.

Nota: Diremos que $(A, \leq)$ es un *poset finito* si A es finito.

Ejemplo (de posets)

$(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$. $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{Z}, |)$. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ para cada conjunto A.

Diagrama de Hasse

Definición

Dados un poset $(A, \leq)$ y $a, b \in A$ decimos que b *cubre* a ($a \prec b$) sii

$\underbrace{a \neq b, a \leq b}_{\text{“}a < b\text{”}}$ y, para cualquier $c \in A$, si $a \leq c \leq b$ entonces $c = a$ o $c = b$.

Diagrama de Hasse

Dado un poset **finito** $(A, \leq)$, un *diagrama de Hasse* del mismo es un gráfico en el que se representa la relación de “cubre” asociada, de forma que si b cubre a a hay una línea ascendente de a a b.

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.
Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Definición

Dado un orden parcial $(A, \leq)$ y $B \subseteq A$ decimos que el poset $(B, \leq|_B)$ es un *subposet* de $(A, \leq)$. (Muchas veces escribiremos $(B, \leq)$ directamente).

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Definición

Dado un orden parcial $(A, \leq)$ y $B \subseteq A$ decimos que el poset $(B, \leq|_B)$ es un *subposet* de $(A, \leq)$. (Muchas veces escribiremos $(B, \leq)$ directamente).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

Para cualquier n, llamamos

$$D_n = \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}.$$

Subposets

Dada una relación R sobre A y $B \subseteq A$, Definimos la restricción de R a B como $R|_B = R \cap B \times B$.

Observación: Si R es una relación de orden sobre A entonces $R|_B$ es una relación de orden sobre B.

Definición

Dado un orden parcial $(A, \leq)$ y $B \subseteq A$ decimos que el poset $(B, \leq|_B)$ es un *subposet* de $(A, \leq)$. (Muchas veces escribiremos $(B, \leq)$ directamente).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

Para cualquier n, llamamos

$$D_n = \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}.$$

$\mathbf{D_6} = (D_6, |)$, $\mathbf{D_{15}} = (D_{15}, |)$, $\mathbf{D_{28}} = (D_{28}, |)$ son subposets de $(\mathbb{N}, |)$.

V o F

Sean $(A, \leq)$ un poset y $a, b \in A$. Si $a \not\leq b$ entonces $b \leq a$.

Ordenes totales

V o F

Sean $(A, \leq)$ un poset y $a, b \in A$. Si $a \not\leq b$ entonces $b \leq a$. $\}$ Falso

Ordenes totales

V o F

Sean $(A, \leq)$ un poset y $a, b \in A$. Si $a \not\leq b$ entonces $b \leq a$. $\}$ Falso

Definición

Dada un relación R sobre A decimos que R es un *orden total* sobre A sii R es un orden parcial sobre A y además satisface que, para todo $a, b \in A$

$$a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Una *cadena* es un poset $(A, \leq)$ en el que $\leq$ es un orden total sobre A.

Ejemplo

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ son cadenas.
- el orden lexicográfico es un orden total.

V o F

- $(\mathbb{N}, |)$ es una cadena.
- $(D_8, |)$ es una cadena.
- Si $\leq$ es un orden total entonces no es un orden parcial.
- Si $\leq$ es un orden parcial entonces no es un orden total.

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset y $m \in P$. Decimos que

- m es máximo de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, $a \leq m$.
- m es mínimo de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, $m \leq a$.
- m es maximal de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, si $m \leq a$ entonces $a = m$.
- m es minimal de $\mathbf{P}$ sii para todo $a \in P$, si $a \leq m$ entonces $a = m$.

Ejercicio

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo, mínimo, maximales y/o minimales?

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $([0, 1), \leq)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$

Teorema

Todo poset finito tiene al menos un elemento maximal (minimal).

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $c \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- c es cota superior de S sii para todo $a \in S$, $a \leq c$.
- c es cota inferior de S sii para todo $a \in S$, $c \leq a$.

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $c \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- c es cota superior de S sii para todo $a \in S$, $a \leq c$.
- c es cota inferior de S sii para todo $a \in S$, $c \leq a$.

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset, $s, i \in P$ y $S \subseteq P$. Decimos que

- s es el supremo de S sii s es la menor de las cotas superiores de S. Escribimos $s = \sup(S)$.
- i es el ínfimo de S sii s es la mayor de las cotas inferiores de S. Escribimos $i = \inf(S)$.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b \doteq \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b \doteq \inf\{a, b\}$.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b \doteq \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b \doteq \inf\{a, b\}$.

Ejemplo

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ son posets reticulados.

Posets reticulados

Definición

Dado un poset $\mathbf{P} = (P, \leq)$, decimos que $\mathbf{P}$ es un *poset reticulado* sii para todos a y b en A existen el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Notación: En los posets reticulados escribimos $a \vee b \doteq \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b \doteq \inf\{a, b\}$.

Ejemplo

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ son posets reticulados.
- $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$ no es un poset reticulado.

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?

- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de partes, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$)

Posets reticulados

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de partes, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?

Ejemplo (Conjunto de divisores de n, $(D_n, |)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?

Ejemplo (Conjunto de partes, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$)

- ¿Quién es el supremo y el infimo entre a y b?
- ¿El mínimo elemento? ¿El máximo?