Introducción a la Probabilidad y la Estadística

Martes y Jueves Aula B17

Dra Ana Georgina Flesia

Distribución Conjunta: Definición

Densidad

Recordemos que una variable aleatoria se dice continua con densidad o absolutamente continua cuando existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa que nos permite calcular la probabilidad de que X este en A de la siguiente forma

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$$

Distribución Conjunta: Definición

Densidad conjunta

Sea $(X_1, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio continuo, es decir, una n-upla donde cada coordenada es una variable aleatoria continua con densidad sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se dice que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no negativa es una función densidad conjunta del vector $(X_1, \cdots, X_n)$ si ocurre que

$$P[(X_1, \cdots, X_n) \in A] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n) I_A(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

Distribución Conjunta: Definición

Distribución acumulada conjunta

Se define la función de distribución acumulada conjunta del vector $(X_1, \cdots, X_n)$ como

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= P[(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n)] \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

Distribución Conjunta: Propiedades

Propiedades

La función densidad de probabilidad (densidad de masa) conjunta del vector $(X_1, \cdots, X_n)$ cumple

1. f no es única, pues cualquier función que no coincida con f en un número finito o numerable de puntos también es una densidad conjunta para el vector aleatorio
2. $f \geq 0$, es decir, es no negativa
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$
4. Si F es derivable entonces $f = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$

Marginales

Definición

Sean $(X_1, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función densidad conjunta f , entonces las densidades marginales de las variables componentes del vector son

$$f_{X_j}(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots, dx_{j-1}, dx_{j+1} \cdots dx_n$$

esto es, integro sobre todas las coordenadas salvo la coordenada x_j.

Independencia

Definición

Sean $(X_1, \cdots, X_n)$ un vector aleatorio continuo con función densidad conjunta f , decimos que las componentes del vector son independientes si

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

Ejemplo

Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y^3) & \forall x,y \in [0,1] \\ 0 & cc \end{cases}$$

1. Determine el valor de la constante k para que f sea la función de densidad conjunta de un vector (X,Y)
2. Encuentre las densidades marginales f_X y f_Y
3. Diga si las variables son independientes o no.
4. Encuentre la esperanza y varianza de X e Y

Resolución

Para calcular la integral doble $\int_0^1 \int_0^1 (x + y^3) dx\, dy$, vamos a dividir la integral en dos partes:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y^3) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 x\, dx\, dy + \int_0^1 \int_0^1 y^3\, dx\, dy$$

Calculando la primera parte

$$\int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy$$

Primero, calculamos la integral con respecto a x:

$$\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Ahora, la integral con respecto a y:

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \, dy = \frac{1}{2} \cdot [y]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Calculando la segunda parte

$$\int_0^1 \int_0^1 y^3 \, dx \, dy$$

La integral con respecto a x es:

$$\int_0^1 y^3 \, dx = y^3 \cdot [x]_0^1 = y^3 \cdot (1 - 0) = y^3$$

Ahora integremos con respecto a y:

$$\int_0^1 y^3 \, dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

Sumando las partes

Ahora sumamos los resultados de ambas partes

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y^3) dx\, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, el valor de la integral es $\frac{3}{4}$: y la densidad conjunta resulta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x + y^2) & \forall x, y \in [0, 1] \\ 0 & cc \end{cases}$$

Marginales f_X y f_Y

Integrando la densidad $f(x,y)$ en la variable y

$$f_X(x) = \frac{4}{3}\int_0^1 (x+y^3)\,dy = \frac{4}{3}[\int_0^1 x\,dy + \int_0^1 y^3\,dy] = \frac{4}{3}[x+\frac{1}{4}] = \frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

Integrando la densidad $f(x,y)$ en la variable x

$$f_Y(y) = \frac{4}{3}\int_0^1 (x+y^3)\,dx = \frac{4}{3}[\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 y^3\,dx] = \frac{4}{3}[\frac{1}{2}+y^3] = \frac{4}{3}y^3+\frac{2}{3}$$

Independencia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x+y^3) & \forall x,y \in [0,1] \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} & \forall x \in [0,1] \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{3}y^3 + \frac{2}{3} & \forall y \in [0,1] \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$(\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}) \times (\frac{4}{3}y^3 + \frac{2}{3}) \neq \frac{4}{3}(x+y^3)$$

por lo cual X e Y no son independientes

$E(X)$ y $E(Y)$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x^2\,dx + \int_0^1 \frac{1}{3}x\,dx \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{11}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{4}{3}y^4\,dy + \int_0^1 \frac{2}{3}y\,dy \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{3}\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Ejemplo II

Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x^2 + xy & \forall x, y \in [0,1] \\ 0 & cc \end{cases}$$

1. Encuentre las densidades marginales f_X y f_Y
2. Calcule $P(X > Y)$

Marginales f_X y f_Y

Integrando la densidad $f(x,y)$ en la variable y

$$f_X(x) = \frac{12}{7}\int_0^1 (x^2 + xy)\,dy = \frac{12}{7}(x^2 + \frac{x}{2})$$

Integrando la densidad $f(x,y)$ en la variable x

$$f_Y(y) = \frac{12}{7}\int_0^1 (x^2 + xy)\,dx = \frac{12}{7}(\frac{1}{3} + \frac{y}{2})$$

$P(X > Y)$

Integrando la densidad $f(x,y)$ sobre el conjunto $\{(x,y)|0 \leq y \leq x \leq 1\}$

$$P(X > Y) = \frac{12}{7} \int_0^1 \int_0^x (x^2 + xy)\, dy\, dx = \frac{9}{14}$$

- $$\int_0^x (x^2 + xy)\, dy = x^2 [y]_0^x + x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = x^3 + \frac{x^3}{2} = \frac{3x^3}{2}$$
- $$\int_0^1 \frac{3x^3}{2}\, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$
- $$\frac{12}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

Esperanza de funciones de vectores continuos

Proposición

Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta f_{XY}, entonces

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Esperanza de funciones de vectores continuos

Ejemplo

Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = e^{-y} \qquad 0 \leq x \leq y$$

Hallar la esperanza de $Z = XY$.

Resolución

Aplicando el teorema anterior

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy \\
&= \int_{0}^{\infty} y\, e^{-y}\left[\int_{0}^{y} x\, dx\right] dy = \int_{0}^{\infty} y\, e^{-y}\left[\frac{y^2}{2}\right] dy \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{y^3}{2}\, e^{-y} dy = \frac{\Gamma(4)}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{1^4}{\Gamma(4)} y^{4-1}\, e^{-y} dy \\
&= \frac{\Gamma(4)}{2} = \frac{(4-1)!}{2} \\
&= 6/2 = 3
\end{aligned}
$$

usando el hecho de que

$$
1 = \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy
$$

para todo α y λ positivos.

Esperanza de funciones de vectores continuos

Propiedades

Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta f_{XY}, entonces

1. $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$
2. Si X e Y son independientes entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$

Covarianza

Definición

Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta f_{XY} y esperanzas finitas entonces

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Covarianza

Propiedades

Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta f_{XY}, entonces

1. $Cov(X, X) = V(X)$
2. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. Si X e Y son independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$.
4. $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$
5. $Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$
6. Si X e Y son independientes entonces $Var(aX + bV) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$

Correlación

Definición

Sean X e Y variables aleatorias continuas con $0 < Var(X) < \infty$, $0 < Var(Y) < \infty$. Definimos el coeficiente de correlación lineal como

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{(Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

Correlación

Propiedades

1. El coeficiente de correlación lineal es independiente de posición y escala, pues

$$\rho(X+a, Y+a) = \rho(X,Y) \qquad \rho(aX, aY) = \rho(X,Y), a > 0$$

2. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
3. $\rho(X,Y) = 1$ si y solamente si $P(Y = aX + b) = 1$, con $a > 0$.
   $\rho(X,Y) = -1$ si y solamente si $P(Y = aX + b) = 1$, con $a < 0$.