Carrera: LCC - LA - LM - LF - PM - PF - LMA **Condición:** Regular - Libre

Para la aprobación del examen se requiere aprobar por separado la Parte Práctica y la Parte Teórica. Justifique todas sus respuestas.

Parte práctica.

1. (10 pts.) Sea $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $\det(A) = -2$.

   a) Calcular el determinante de la matriz $A_t = \begin{bmatrix} A_{11}+A_{12}t & A_{11}t+A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21}+A_{22}t & A_{21}t+A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}+A_{n2}t & A_{n1}t+A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$.

   b) Hallar todos los valores de $t \in \mathbb{C}$ tales que A_t sea invertible.

2. (15 pts.) Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, escalares no todos nulos y sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^n$ definidos en la forma:

$$W_1 = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}, \qquad W_2 = \langle (a_1,\dots,a_n)\rangle.$$

   a) Mostrar bases de W_1 y de W_2 y determinar sus dimensiones.

   b) Probar que $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$.

   c) Probar que si U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $(1,0,\dots,0), (0,0,\dots,1) \in U$, entonces $W_1 \cap U \neq \{0\}$.

3. (15 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un operador lineal tal que $(1,0,-1,0)$ y $(0,1,-1,0)$ son autovectores de T con autovalor -1, $(2,0,0,-1)$ es autovector de T con autovalor 1 y $(0,0,1,0)$ es autovector de T con autovalor 2.

   a) Determinar el polinomio característico y los autoespacios de T.

   b) Dar una fórmula explícita para $T(x,y,z,t)$.

   c) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz de T en la base ordenada canónica. Mostrar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

4. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión 5 sobre $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ una base de V. Sea $T : V \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ la única transformación lineal que satisface

$$T(\alpha_1) = 1+x, \quad T(\alpha_2) = 1+x+x^3, \quad T(\alpha_3) = x-x^2, \quad T(\alpha_4) = x^3, \quad T(\alpha_5) = 1+x^2,$$

   donde $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones polinomiales de grado menor o igual a 3.

   a) Calcular la dimensión del núcleo de T.

   b) Decidir si T es un epimorfismo o un monomorfismo.

   c) Probar que existen bases ordenadas de V y de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tales que la matriz de T con respecto a dichas bases tiene exactamente dos columnas nulas.

Parte Teórica.

5. (15 pts.) Sean A una matriz $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo F. Probar que si $m < n$, entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene soluciones no triviales.

6. (15 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F.

   a) Dar la definición de *subespacio generado* por un subconjunto S de V.

   b) Probar que si V está generado por un conjunto finito de vectores $\beta_1, \ldots, \beta_m$, entonces todo conjunto linealmente independiente de vectores de V es finito y contiene a lo sumo m elementos.

7. (15 pts.) Completar el siguiente enunciado y demostrar:

   "Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que V es de dimensión finita. Entonces

$$\dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \text{.........................}"$$

Parte práctica	1	2	3	4	**Total**
Evaluación	0	15	15	15	45

Parte teórica	5	6	7	**Total**	**Total General**
Evaluación	15	15	15	45	9 (nueve)

(Con Ayuda)