Algoritmos y Estructuras de Datos I
Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos

Cuantificadores

Axiomas

A1 (Rango vacío): $\langle \bigoplus i \ : False : \ T \rangle = e$

- e es el elemento neutro de $\oplus$: $a \oplus e = a$

A2 (Rango unitario): $\langle \bigoplus i \ : i = C : \ T.i \rangle = T.C$

- i no aparece en C

A3 (Partición de rango): $\langle \bigoplus i \ : R.i \vee S.i : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : S.i : \ T.i \rangle$

- $\oplus$ es idempotente ($a \oplus a = a$) ó R y S son disjuntos (no hay i tal que $R.i \wedge S.i$)

A4 (Regla del término): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \oplus U.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : R.i : \ U.i \rangle$

A5 (Término constante): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ C \rangle = C$

- i no aparece en C
- $C \oplus C = C$ ($\oplus$ es idempotente para C)
- R es no vacío

A6 (Distributividad): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \otimes C \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \otimes C$

- i no aparece en C
- $\otimes$ distributivo con $\oplus$: $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes c$
- R es no vacío, o el neutro de $\oplus$ es absorbente para $\otimes$

A7 (Anidado): $\langle \bigoplus i,j \ : R.i \wedge S.i.j : \ T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ \langle \bigoplus j \ : S.i.j : \ T.i.j \rangle \rangle$

Teoremas

T1 (Cambio de variable): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus j \ : R.(f.j) : \ T.(f.j) \rangle$

- f tiene inversa en R
- j no aparece en R y T.

T2 (Eliminación de variable): $\langle \bigoplus i,j \ : i = C \wedge R.i.j : \ T.i.j \rangle = \langle \bigoplus j \ : R.C.j : \ T.C.j \rangle$

- i, j no aparecen en C.

T3 (Rango unitario y condición): $\langle \bigoplus i \ : i = C \wedge P.i : \ T.i \rangle = \begin{array}{ll} (& P.C \ \to T.C \\ \square & \neg P.C \to e \\ ) & \end{array}$

- si i no aparece en C
- e es el elemento neutro de $\oplus$

Axiomas y Teoremas de Cuantificadores concretos

A8 (Definición de conteo): $\langle N\, i \ : R.i : \ T.i \rangle = \langle \sum i \ : R.i \wedge T.i : \ 1 \rangle$

A9 (Intercambio): $\langle \forall i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ : : \ R.i \Rightarrow T.i \rangle$
$\langle \exists i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : : \ R.i \wedge T.i \rangle$

A10 (De Morgan): $\neg \langle \forall i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ \neg T.i \rangle$
$\neg \langle \exists i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ : R.i : \ \neg T.i \rangle$

T4 (Propiedad de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$z = \langle \text{Max } i \ : R.i : \ F.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i \ : R.i : \ F.i \leq z \rangle$$
$$z = \langle \text{Min } i \ : R.i : \ F.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i \ : R.i : \ z \leq F.i \rangle$$

($\bigoplus$) Cuantificador	($\oplus$) Operador	(e) Neutro	Absorbente	¿Idempotente?	($\otimes$) distribuye con ($\oplus$)
$\forall$	$\wedge$	$True$	$False$	sí	$\vee$
$\exists$	$\vee$	$False$	$True$	sí	$\wedge$
$\sum$	$+$	0	(no tiene)	no	$\times$
$\prod$	$\times$	1	0	no	
Max	max	$-\infty$	$+\infty$	sí	$+$
Min	min	$+\infty$	$-\infty$	sí	$+$

Cálculo Proposicional

Axiomas

A11: Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A12: Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A13: Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv True \equiv P$$

A14: Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A15: Definición de $False$:

$$False \equiv \neg True$$

A16: Definición de la Discrepancia:

$$P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A17: Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A18: Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A19: Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A20: Distributividad de la Disyunción respecto a la Equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A21: Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A22: Regla Dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A23: Leibniz:

$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

A24: Definición de la Implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A25: Definición de la Consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas

T5: Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T6: Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv False$$

T7: Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee True \equiv True$$

T8: Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee False \equiv P$$

T9: Conmutatividad de la Conjunción:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T10: Asociatividad de la Conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T11: Leibniz 2 (reemplazo de iguales por iguales):

$$e = f \wedge E(z := e) \equiv e = f \wedge E(z := f)$$

Precedencia de Operadores

4. $\neg$
3. $\vee$, $\wedge$
2. $\Rightarrow$, $\Leftarrow$
1. $\equiv$, $\not\equiv$