Práctico 4

Determinantes

Objetivos.

- Aprender a calcular el determinante de una matriz.
- Aprender a utilizar operaciones elementales por filas y/o columnas para calcular el determinante.
- Aplicar las propiedades del determinante para calcular el determinante de un producto de matrices, y para decidir si una matriz cuadrada es o no invertible.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco. En este práctico $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

(1) (a) Sean A, B y C matrices 4×4, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

(i) $\det(PQR)$, donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera:
- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

(ii) $\det(2A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(-B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

(b) Sabiendo que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, calcular $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$.

(2) Calcular el determinante de las siguientes matrices usando operaciones elementales por fila y/o columna u otras propiedades del determinante y determinar cuáles son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

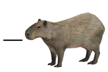
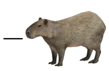
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Determinar todos los valores en $\mathbb{R}$ que deben tomar los carpinchos tales que las siguientes matrices sean invertibles.

$A =$

1		-1
	1	1
0	1	

, $B =$

$1+$ 	1	1	1
0	0		$-$ 
0	-1	2	-1
0		$-$ 	

(4) ⓐ Calcular el determinante de las siguientes matrices, reduciendo a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{bmatrix}.$$

(5) Calcular el determinante de las siguientes matrices utilizando desarrollo por fila o por columna y determinar cuáles son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(6) ⓐ Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ escalares, la matriz de *Vandermonde* asociada es

$$\mathtt{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

La idea de este ejercicio es probar que $\det(\mathtt{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Probar los casos $n = 2$ y $n = 3$, es decir probar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{y} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^3 \end{bmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).$$

(b) Probar que $\det(\mathtt{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Dar una condición necesaria y suficiente para que la matriz de Vandermonde sea invertible.

(7) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice[1] que A *semejante a* B sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertible tal que $B = PAP^{-1}$. Probar que:

(a) Si A es semejante a B entonces

$$\det A = \det B, \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B.$$

(b) ¿Existe una matriz $C \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ invertible tal que $C \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} C$?

(8) Sea A una matriz $n \times n$. Probar las siguientes afirmaciones[2]:

(a) Si A es una matriz antisimétrica y n es impar, entonces $\det A = 0$.

(b) Si A es una matriz ortogonal (es decir $A^t A = \operatorname{Id}$) entonces $\det A = \pm 1$.

(c) ⓐ Si A es una matriz unitaria entonces $|\det A| = 1$

(9) Sea $\mathsf{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$, es decir el conjunto de matrices de determinante 1. Probar[3] que

(a) Si $A, B \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $AB \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$.

---

[1] Se puede ver fácil que "ser semejante a" es una relación de equivalencia.

[2] Ver las definiciones necesarias en Práctico 3, Ejercicios 19 y 20.

[3] Este ejercicio prueba que $\mathsf{SL}(n, \mathrm{K})$ es un *grupo* (ver comentario al final del práctico anterior).

(b) $\mathrm{I}_n \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$.
(c) Si $A \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $A^{-1} \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$.

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

(a) Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
(b) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces A es invertible si y sólo si A^k es invertible para algún $k \in \mathbb{N}, k > 1$.
(c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz invertible con coeficientes enteros. Si A^{-1} tiene coeficientes enteros, entonces $\det A = 1$ o $\det A = -1$.

(11) Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci definida por recurrencia como sigue:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3.$$

(a) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Probar por inducción que $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.
(b) Utilizando (a) y propiedades del determinante probar que, para todo $n \geq 2$, vale la *Identidad de Cassini*:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(12) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcular:

(a) $\det(AB)$.
(b) $\det(BA)$.
(c) $\det(A^{-1})$.
(d) $\det(A^4)$.
(e) $\det(A + B)$.
(f) $\det(A+tB)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(13) Sea $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 5$, calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}.$$

(14) Se sabe que los números 3241, 2751, 4753, 8799 son divisibles por 7. Probar que

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

también es divisible por 7.

(15) ⓐ Probar que

$$(a)\qquad \det\begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{bmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

$$(b)\qquad \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

(16) Sea $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dada por

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculando $\det A_n$ por la primera columna, deduzca una relación entre $\det A_n$, $\det A_{n-1}$ y $\det A_{n-2}$.
(b) Pruebe por inducción fuerte que $\det A_n = n + 1$.

(17) *Matrices en bloque*: Sean A una matriz $r \times r$, B una matriz $r \times s$, C una matriz $s \times r$ y D una matriz $s \times s$. Decimos que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es una *matriz en bloque.*

Para este ejercicio usaremos el siguiente hecho[4], el cual probaremos más adelante

- Si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$, entonces $MN = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$.

(a) Probar usando inducción en el tamaño de la matriz identidad correspondiente que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix} = \det A, \quad \text{y} \quad \det\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix} = \det D.$$

(b) Calcular $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & B \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix}$ y deducir que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} = \det A \det D.$$

Notar que, como caso particular, se tiene que

$$\det\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2,$$

[4]Esto quiere decir que si tenemos matrices en bloque podemos multiplicar como si las matrices fueran entradas

(c) Probar que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_n \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_n.$$

(d) Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(18) ⓐ Reduciendo al determinante de una matriz de Vandermonde, calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{bmatrix}$$

(19) (*Para matar el tiempo*) ⓐ Calcular el determinante de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{bmatrix}$$

Ayudas.

4) Para C conviene, antes de reducir, hacer operaciones para lograr que la 5ta columna tenga todos sus elementos iguales.

6) Restarle a cada fila un múltiplo adecuado de la fila anterior. Luego desarrollar por la primera columna, sacando factor común $\lambda_j - \lambda_1$ en cada columna de la submatriz $A(1|1)$ y aplique inducción.

8c) Usar que $\det(A^*) = \overline{\det A}$. ¿Por qué vale esto?

15b) Desarrollar por primera fila y aplicar inducción.

18) Para la primera, agregar una columna y una fila (sin cambiar el determinante) para convertir en una matriz de Vandermonde.

Para la segunda, puede ser útil desarrollar por la primera fila e intentar usar adecuadamente el determinante de la primera matriz.

Para la tercera, usar que el determinante es lineal en las filas y en las columnas.

19) Recordar la fórmula de Pascal de Álgebra I/Matemática Discreta 1: dados $n \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$ se tiene que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.