Práctico 6: Autovalores y Autovectores

1. (a) Para la siguiente matriz, hallar sus autovalores racionales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{Q}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Realizar la misma tarea del ejercicio anterior pero sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

   (c) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

   (d) Calcular los autovalores complejos de las matrices D y E del item anterior y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Demostrar que una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es invertible si y sólo si 0 no es autovalor de A.

3. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico. Deducir que tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo para mostrar que A y A^t no necesariamente tienen los mismos autovectores.

4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $k \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Demostrar que si λ es autovalor de A con autovector v entonces λ^k es autovalor de A^k con autovector v. ¿Qué puede decir de los autovalores de una matriz nilpotente?

   (b) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$. Sea $p(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$p(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1A + \cdots + a_nA^n.$$

   Probar que si λ es autovalor de A con autovector v entonces $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$ con autovector v.

   (c) Sea A una matriz invertible. Si λ es autovalor de A de autovector v entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1} con autovector v.

   (d) Mostrar que si A es una matriz real y $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A, entonces $\bar{\lambda}$ también es autovalor de A.

5. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in M_2(\mathbb{K})$.

   (a) Probar que el polinomio característico de A es $p_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A)$.

   (b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

6. Probar que dos matrices A y B semejantes (Es decir que $A = PBP^{-1}$) tienen el mismo polinomio característico. Deducir que tienen los mismos autovalores.

7. Dado un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{K}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, se define su *matriz compañera* por

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Probar que el polinomio característico de $C(p)$ es p.

8. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $AA^t = I$ y $\det(A) = 1$. (es decir $A \in SO_3(\mathbb{R})$). Demostrar que existe una recta L en $\mathbb{R}^3$ tal que para todo $v \in L$ se satisface que $Av = v$. Es decir la matriz A tiene un eje de simetría.

Ejercicios de repaso

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

9. Repetir el Ejercicio 1 con las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

10. (a) Mostrar que los autovalores de una matriz simétrica real son reales.
    (b) Mostrar que los autovalores de una matriz antisimétrica real son imaginarios puros.

11. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. El objetivo de este ejercicio es probar que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.
    (a) Probar que $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix}$.
    (b) Deducir que si p_{AB} y p_{BA} son los polinomios caracteristicos de AB y BA respectivamente, entonces $p_{AB}(x) = p_{BA}(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Es decir que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

12. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ y $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. (Este ejercicio es una generalización del ejercicio 5(a)).

Ayudas:
(6) Usar que $x\,\mathrm{I} = P x\,\mathrm{I}\,P^{-1}$ (asegúrese de entender por qué vale esto)

(7) Desarrollar el determinante por la primera fila y hacer inducción.

(10) (a) Usar la multiplicación en bloques.
(b) Probar a mano que $p_{AB}(0) = p_{BA}(0)$. Para $x \neq 0$, por item (a) y ejercicio 6, se cumple que $\det(x\,\mathrm{I}_n - AB)\det(x\,\mathrm{I}_n) = \det(x\,\mathrm{I}_n)\det(x\,\mathrm{I}_n - BA)$. Concluir.