Práctico 9

Diagonalización

Objetivos.

- Aprender a decidir si una matriz (o una transformación) es diagonalizable o no.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) (a) Decidir si las matrices del ejercicio 1 del Práctico 5 son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$. En caso de serlo dar una matriz invertible P real tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.
(b) Decidir si las matrices del ejercicio 1 del Práctico 5 son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. En caso de serlo dar una matriz invertible P compleja tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

(2) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir si la transformación considerada es o no diagonalizable. En caso afirmativo, Hallar una base $\mathcal{B}$ del espacio vectorial tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z)$.
(b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por $T(A) = 2A - A^t$.

(3) Sea V un espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $v \in V$ es un autovector de autovalor λ. Probar las siguientes afirmaciones.
(a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \mathrm{Nu}(T)$.
(b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \mathrm{Im}(T)$.
(c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \mathrm{Id}$ es un isomorfismo.

(4) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^n(v) = 0$ pero $T^{n-1}(v) \neq 0$.
(a) ⓐ Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ es una base de V.
(b) Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.
(c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.

(5) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (1, 2, 3), (2, 1, -1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle (3, 1, 1), (1, 1, 3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.
(b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (1, 2, 3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle (3, 1, 1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.
(c) Si A es una matriz diagonalizable y nilpotente, entonces $A = 0$.
(d) Si A posee autovalores repetidos, entonces A no es diagonalizable.

(6) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
(a) Hallar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
(b) Probar que dadas $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible se cumple que $(QBQ^{-1})^k = QB^kQ^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizar esto para calcular A^n.
(c) Probar por inducción que $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_1 = 1, F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ para $n \geq 3$).
(d) Hallar la fórmula general para el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci, F_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios de repaso. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(7) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir si la transformación considerada es o no diagonalizable.
 (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.
 (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, -x - y + z, x + 2y + z)$.
 (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (4x + y + 5z, 4x - y + 3z, -12x + y - 11z)$.
 (d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.

(8) Probar que toda[1] matriz simétrica real 2×2 es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

(9) (a) Probar que si A es diagonalizable, entonces $p(A)$ también es diagonalizable para cualquier polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (donde $p(A)$ se define como en ejercicio 4 Práctico 5).
 (b) Probar que si A es diagonalizable entonces A^t es diagonalizable.
 (c) Probar que si A es diagonalizable e invertible entonces A^{-1} es diagonalizable.

(10) a Utilizando diagonalización, hallar el término general de la sucesión definida por recurrencia como sigue:

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Ayudas. (4a) Basta ver que son LI (¿por qué?). Plantear $c_0 v + c_1 T(v) + \cdots + c_{n-1} T^{n-1}(v) = 0$ y aplicar T algunas (¿cuántas?) veces para lograr que $c_0 = 0$. Repetir el proceso para obtener $c_1 = 0$ y así siguiendo. Para fijar ideas pueden intentar primero el caso $n = 3$.

(10) Encontrar una matriz A conveniente para plantear una recurrencia similar a la del Ejercicio (6c), pruebe esta recurrencia por inducción y luego calcular A^n diagonalizandola. Combinar todo para dar el término general u_n.

[1]Este hecho vale para $n \times n$ pero hacen falta más herramientas para poder probarlo