Práctico 0

Números complejos
Soluciones

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

   a) $(-1+i)(3-2i)$ *b*) $i^{131}-i^9+1$ *c*) $\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}$

   Solución:

   a) $(-1+i)(3-2i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = \boxed{-1+5i}$

   $|(-1+i)(3-2i)| = |-1+5i| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$

   $\overline{(-1+i)(3-2i)} = \overline{-1+5i} = \boxed{-1-5i}$

   b) $i^{131}-i^9+1 = i^{4\cdot 32+3}-i^{4\cdot 2+1}+1 = (i^4)^{32}\cdot i^3-(i^4)^2\cdot i^1+1 = i^3-i+1 = -i-i+1 = \boxed{1-2i}$

   $|i^{131}-i^9+1| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$

   $\overline{i^{131}-i^9+1} = \overline{1-2i} = \boxed{1+2i}$

   c) $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i} = \dfrac{1+i}{1+2i}+\overline{\left(\dfrac{1+i}{1+2i}\right)} = 2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+i}{1+2i}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left((1+i)\cdot\dfrac{1-2i}{1^2+2^2}\right) =$
   $2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{1-2i+i-2i^2}{5}\right) = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

   $$\left|\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}\right| = \left|\frac{6}{5}\right| = \boxed{\frac{6}{5}}$$

   $$\overline{\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}} = \overline{\frac{6}{5}} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

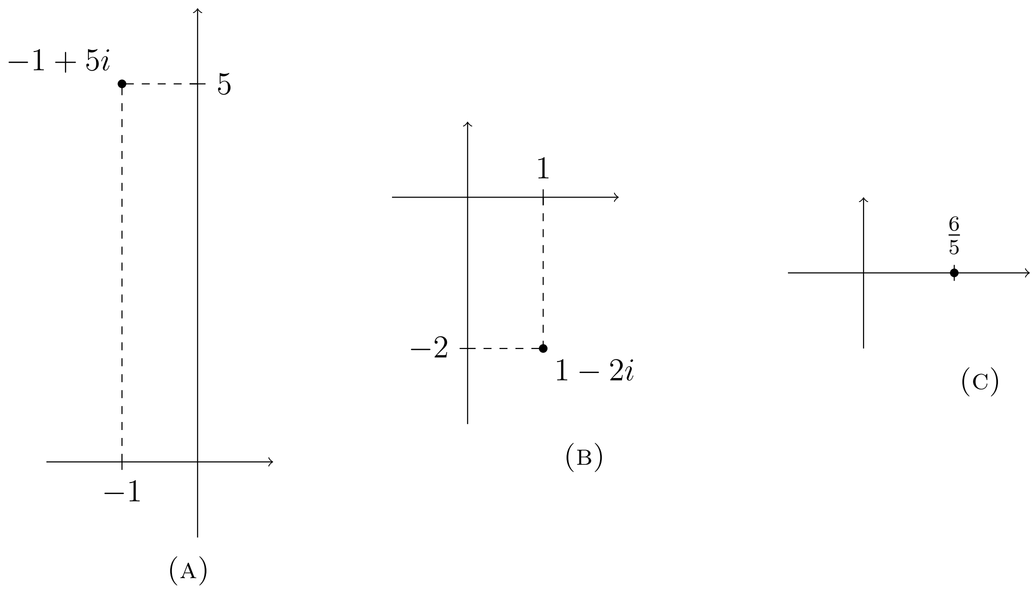

Figura 1. Ejercicio 1

2. Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$.

   Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, separo las partes real e imaginaria de la ecuación y planteo un sistema de ecuaciones:

$$3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i \implies \begin{cases} \mathrm{Re}(3x + 2yi - xi + 5y) &= \mathrm{Re}(7 + 5i) \\ \mathrm{Im}(3x + 2yi - xi + 5y) &= \mathrm{Im}(7 + 5i) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 3x + 5y &= 7 \\ 2y - x &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl|rl|l} 3(2y-5) + 5y & = 7 & 2 \cdot 2 - 5 & = x & \\ 6y - 15 + 5y & = 7 & -1 & = x & \boxed{\begin{array}{ll} y & = 2 \\ x & = -1 \end{array}} \\ 11y & = 22 & & & \\ y & = 2 & & & \end{array}$$

3. Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

   Solución: Sabemos que el inverso de z se puede escribir $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Como por hipótesis tenemos que $|z| = 1$, resulta $z^{-1} = \overline{z}$. Luego:
   $z + z^{-1} = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ □

4. Probar que si $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

   Solución: Se iguala a 0 el polinomio:

$$0 = x^2 + a^2 = x^2 - (ia)^2 = (x + ai)(x - ai) \implies \begin{cases} x_1 &= ai \\ x_2 &= -ai \end{cases}$$

   Como $a \neq 0$, se tiene que $x_1 \neq x_2$. □

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

5. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

$$\text{(a) } (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^{-1},\ 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad \text{(b) } 3i(1+i)^4, \qquad \text{(c) } \frac{1+i}{1-i}$$

Solución:

a) $(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^{-1} = \dfrac{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2} = \dfrac{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{1} = \boxed{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$

$|(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^{-1}| = |\cos + i\operatorname{sen}\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

$\overline{(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^{-1}} = \overline{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \boxed{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}$

b) $3i(1+i)^4 = 3i(1+i^2+2i)^2 = 3i(2i)^2 = 12i^3 = \boxed{-12i}$

$|3i(1+i)^4| = |-12i| = \sqrt{(-12)^2} = \boxed{12}$

$\overline{3i(1+i)^4} = \overline{-12i} = \boxed{12i}$

c) $\dfrac{1+i}{1-i} = (1+i)\cdot\dfrac{1+i}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{1+i^2+2i}{2} = \dfrac{2i}{2} = \boxed{i}$

$\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right| = |i| = \boxed{1}$

$\overline{\dfrac{1+i}{1-i}} = \overline{i} = \boxed{-i}$

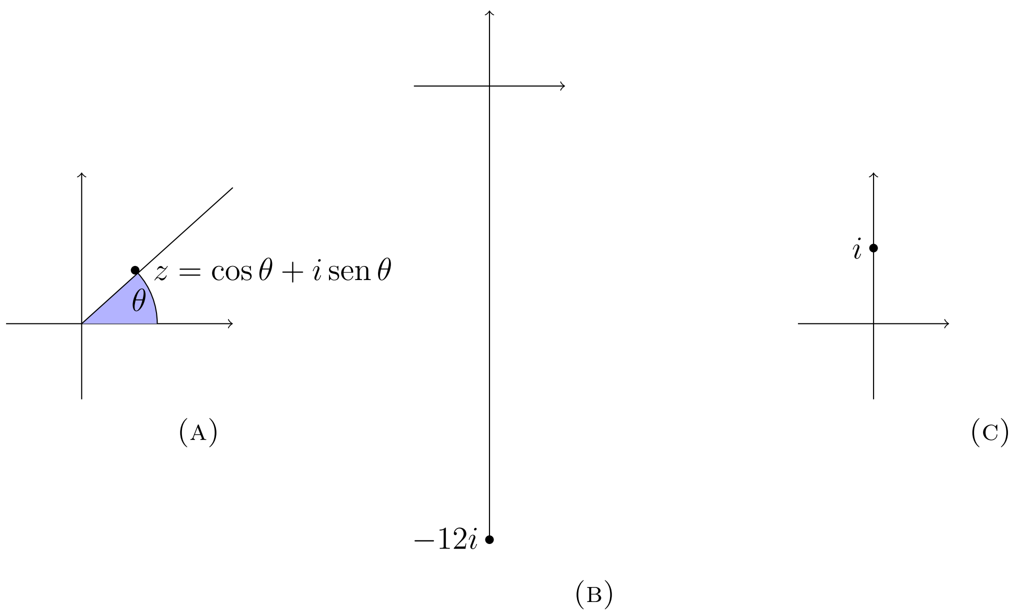

Figura 2. Ejercicio 5

6. Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

$a)$ $\dfrac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$. $\qquad$ $b)$ $z - 2 + \dfrac{1}{z-2}$. $\qquad$ $c)$ $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|^2$.

Solución:

$a)$ Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ vale $\dfrac{(z+i)(z-i)}{z^2+1} = \dfrac{z^2-i^2}{z^2+1} = \dfrac{z^2+1}{z^2+1} = \boxed{1}$

$b)$ Tenemos que $z - 2 = \frac{1}{2}i$. Luego $z - 2 + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}i + \frac{2}{i} = \frac{1}{2}i - 2i = \boxed{-\dfrac{3}{2}i}$

$c)$ Tenemos que $z - i = 2 + \frac{1}{2}i - i = 2 - \frac{1}{2}i$. Luego $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|^2 = \dfrac{1}{|2-\frac{1}{2}i|^2} = \dfrac{1}{4+\frac{1}{4}} = \boxed{\dfrac{4}{17}}$

7. Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{|z|^2}$.

Solución: Recordar que $\frac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. Por otro lado, como $\overline{\overline{z}} = z$ y $|\overline{z}| = |z|$, vale que $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{z}^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2}$. Entonces $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} - \dfrac{1}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} + \dfrac{z}{|z|^2} - \dfrac{1}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}+z-1}{|z|^2} = \boxed{\dfrac{2\operatorname{Re} z - 1}{|z|^2}}$

8. (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w+z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Solución:

Como $|w+z| \geq 0$ y $|w|+|z| \geq 0$, vale que $|w+z| \leq |w|+|z| \iff |w+z|^2 \leq (|w|+|z|)^2$. Veamos que vale $|w+z|^2 \leq (|w|+|z|)^2$, desarrollando cada lado:

$|w+z|^2 = (w+z)(\overline{w+z}) = (w+z)(\overline{w}+\overline{z}) = w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} + z\overline{z} = |w|^2 + \overline{z}w + \overline{\overline{z}w} + |z|^2 = |w|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{z}w) + |z|^2$.

$(|w|+|z|)^2 = |w|^2 + 2|w||z| + |z|^2 = |w|^2 + 2|zw| + |z|^2$.

Comparando ambos lados, deducimos que

$$|w+z|^2 \leq (|w|+|z|)^2 \iff 2\operatorname{Re}(\overline{z}w) \leq 2|zw|.$$

Esto último es cierto pues $\operatorname{Re}(\overline{z}w) \leq |\overline{z}w| = |\overline{z}||w| = |z||w| = |zw|$, y multiplicar por 2 no altera el resultado. Esto prueba $|w+z| \leq |w| + |z|$. $\square$

Veamos ahora cuándo se da la igualdad:

Si $w = rz$, $r \geq 0$, entonces $|w+z| = |rz+z| = |(r+1)z| = |r+1||z| = (r+1)|z|$ (pues $r \geq 0 \Rightarrow r+1 \geq 0$).

Por otro lado $|w| + |z| = |rz| + |z| = r|z| + |z| = (r+1)|z|$.

Por lo tanto, si $w = rz$, $r \geq 0$, entonces $|w+z| = |w| + |z|$.

Ahora, asumamos que vale la igualdad y veamos que $w = rz$ con $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$.

Por lo visto antes, cambiando $\leq$ por $=$, tenemos que

$$|w+z| = |w| + |z| \Rightarrow |w+z|^2 = (|w|+|z|)^2 \Rightarrow \operatorname{Re}(\overline{z}w) = |zw|.$$

Como $|zw| = |\overline{z}w|$, la conclusión es que $\mathrm{Re}(\overline{z}w) = |\overline{z}w|$. Esto implica que $\overline{z}w \in \mathbb{R}$ y más aún, que $\overline{z}w \geq 0$.

Para finalizar, notemos que, si $z \neq 0$, $w = 1 \cdot w = \frac{|z|^2}{|z|^2} w = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} w = \dfrac{\overline{z}w}{|z|^2} z$. Llamando $r = \frac{\overline{z}w}{|z|^2}$, tenemos que $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ y $w = rz$ como queríamos ver. □

En general, dados $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, probemos por inducción que $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.
Si $n = 1$ es claro pues $|z_1| \leq |z_1|$.

Asumimos ahora como hipótesis inductiva que vale $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ y queremos probar que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$.

Tenemos que

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \overset{(*)}{\leq} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \overset{(**)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|,$$

que era lo que queríamos probar. Esto concluye el paso inductivo. □

(*) Usamos desigualdad triangular para $n = 2$ (Ejercicio 8)

(**) Hip. Inductiva

9. Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$

Solución: La idea es muy similar al ejercicio de análisis I donde se prueba la misma desigualdad para números reales.

Por definición de valor absoluto real, si $a \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$, entonces tenemos que $|a| \leq r \iff -r \leq a \leq r$. En nuestro caso $a = |w| - |z|$ y $r = |w - z|$, por lo que

$$||w| - |z|| \leq |w - z| \iff -|w - z| \leq |w| - |z| \leq |w - z|.$$

Probemos que $|w| - |z| \leq |w - z|$: Tenemos que $|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z|$ (usamos la desigualdad triangular para $w - z$ y z). Restando en ambos lados $|z|$ obtenemos $|w| - |z| \leq |w - z|$.

Probemos que $-|w - z| \leq |w| - |z|$: Tenemos que $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$, luego $-|z - w| \leq |w| - |z|$, o equivalentemente $-|w - z| \leq |w| - |z|$. □