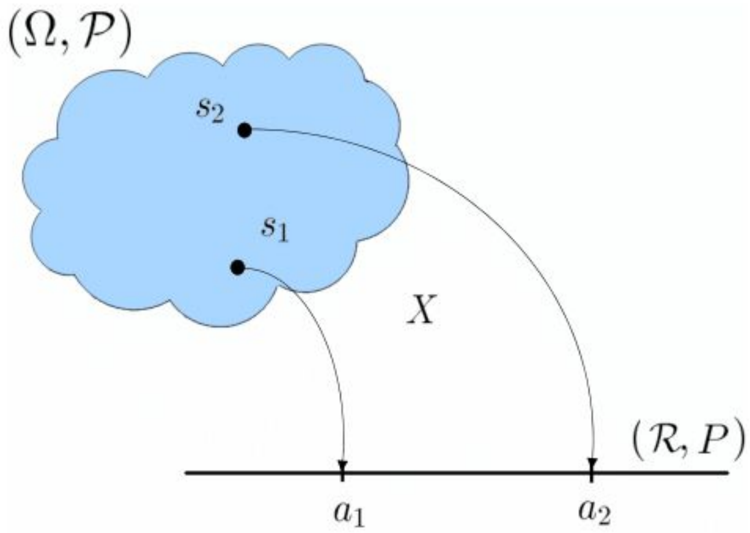
Introducción a la Probabilidad y la Estadística

Martes y Jueves Aula B17

Dra Ana Georgina Flesia

Si en un experimento aleatorio, a cada suceso elemental del espacio $(\Omega, \mathcal{P})$ le asignamos un valor numérico obtenemos una variable que "hereda" de Ω la probabilidad $\mathcal{P}$, y que denominamos **variable aleatoria**.



La probabilidad P de que X tome un valor concreto a, $P(X = a)$, es la probabilidad que corresponde a la unión de los sucesos aleatorios elementales a los que hemos asignado ese valor a.

Ejemplo 1:

Experimento aleatorio: "lanzar un dado".

- v.a. más natural X: asignar a cada cara del dado su valor numérico $\Rightarrow$ X toma seis valores, del 1 al 6, con probabilidad

$$P(X = a) = \frac{1}{6},\ a = 1, ..., 6$$

- v.a. (no tan natural) Y: asignar el valor 1 a las caras que son múltiplos de tres y el valor 0 a las que no lo son,

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p = \frac{1}{3} \\ 0, & \text{con probabilidad } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ejemplo 2:

Vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en "seleccionar una persona al azar". Para cada persona observamos el número de hermanos que tiene y su peso.

Podemos usar las v.a.'s:
- X para el número de hermanos, cuyos valores serán *números enteros* a partir de cero,
- Y para el peso; con rango de valores *todos los posibles entre los límites naturales*; entre dos valores posibles de Y se podrían obtener infinitos valores intermedios (si utilizáramos aparatos con suficiente precisión).

Estos infinitos valores en el **rango** de la variable es lo que diferencia a las variables **continuas** (Y) de las **discretas** (X).

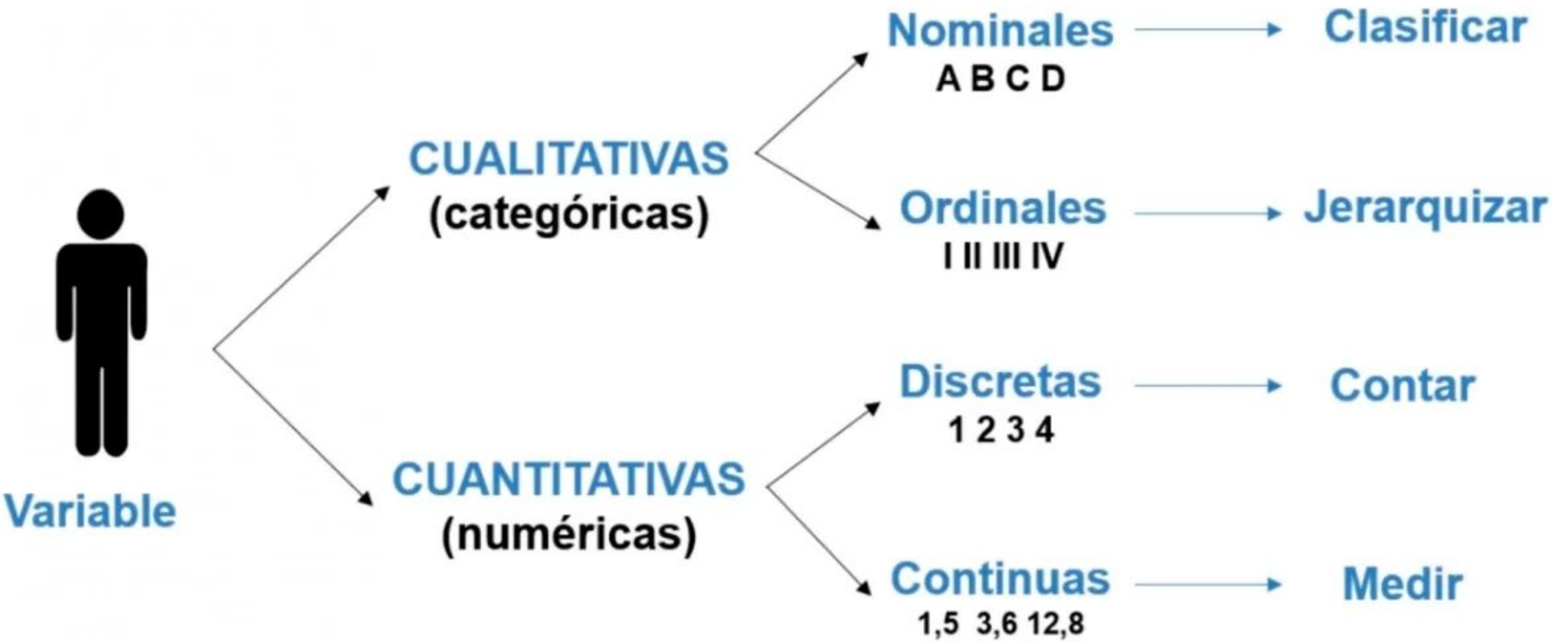
Definición:

Una **variable aleatoria** X es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$, que a cada elemento del espacio muestral le hace corresponder un número real.

- El conjunto de valores reales que tienen asociado algún elemento del espacio muestral se denomina **rango** de la v.a.:

$$\Omega_X = \{x \in \mathbb{R} : \exists s \in \Omega, X(s) = x\}$$

- Si Ω_X es un conjunto finito o numerable, entonces la variable aleatoria se denomina **discreta**.
- En caso de que Ω_X sea un intervalo, finito o infinito, entonces la variable aleatoria se denomina **continua**.


Variable
CUALITATIVAS
(categóricas)
CUANTITATIVAS
(numéricas)
Nominales
A B C D
Ordinales
I II III IV
Discretas
1 2 3 4
Continuas
1,5 3,6 12,8
Clasificar
Jerarquizar
Contar
Medir

¿Cómo asignamos una probabilidad P a los valores del rango de una v.a.?

(¿cómo hereda la variable X la función de probabilidad $\mathcal{P}$ del espacio Ω?)

Dado $A \subset \mathbb{R}$, la probabilidad de A viene dada por

$$P(A) = P(X \in A) = \mathcal{P}(s \in \Omega : X(s) \in A)$$

La función de $\left\{\begin{matrix} \text{masa (v.a. discreta)} \\ \text{densidad (v.a. continua)} \end{matrix}\right\}$ caracteriza P (inducida por $\mathcal{P}$)

- ¿qué significa? que conocida la función de masa/densidad de X podemos calcular la probabilidad de cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$
- ¿por qué usarlas? porque son más fáciles de calcular y de manipular

Función de masa (v.a.discreta)

Es una función que representa la probabilidad de que X tome cada uno de los posibles valores (discretos) x_i, $i = 1, ..., n, ...$:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ x_i &\rightarrow p(x_i) = P(X = x_i) = \\ &= \mathcal{P}(s \in \Omega : X(s) = x_i) \end{aligned}$$

Propiedades:

1. $0 \leq p(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_i p(x_i) = 1$
3. Dado $A \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$

Función de distribución

Otra función F que caracteriza la función de probabilidad P de una v.a. X:

$$F(x) = P(-\infty, x] = P(s \in \Omega : X(s) \leq x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ (monótona no decreciente)
4. $F(x^+) = \lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ (continua por la derecha)

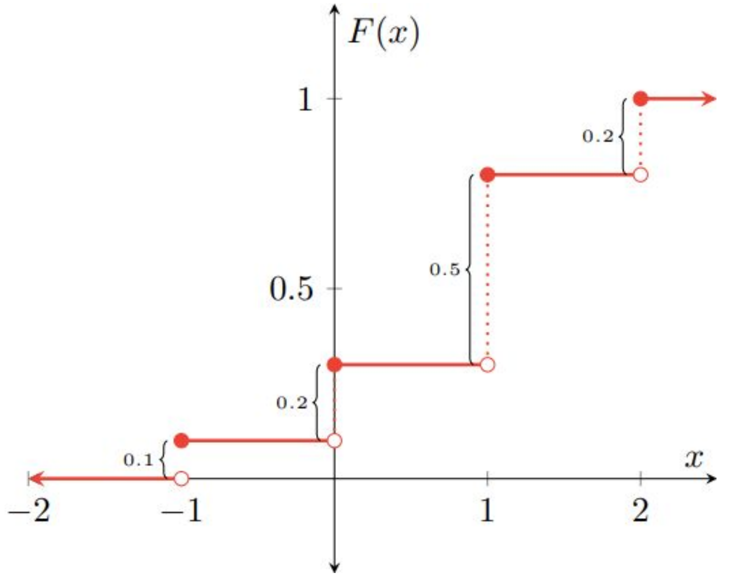
Como consecuencia:

- $P(a, b] = P(-\infty, b] - P(-\infty, a] = F(b) - F(a)$

Función de distribución de una v.a.discreta

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

- es una función continua a trozos (función en escalera)



Ejemplo

En un ítem de una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide que hagan corresponder cada uno de los tres dibujos de animales con la palabra que identifica a ese animal.
Si un niño asigna aleatoriamente las tres palabras a los tres dibujos,

1. encuentre la función densidad discreta
2. la función de distribución acumulada de Y, el número de aciertos.
3. Encuentre $P(1 < X \leq 6)$.

Resolución

Si la posición en el vector (x, y, z) denota el dibujo y d_1, d_2, d_3 denotan los nombres de los animales, el espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{(d_1, d_2, d_3), (d_2, d_1, d_3), (d_3, d_2, d_1), (d_1, d_3, d_1), (d_3, d_1, d_2), (d_2, d_3, d_1)\}$$

y es equiprobable, con $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$.
La variable Y toma 3 valores con probabilidad diferente de cero por lo cual $\mathbf{R_Y} = \{0, 1, 3\}$. La función p_Y toma los valores

La variable Y toma 3 valores con probabilidad diferente de cero por lo cual $\mathbf{R_Y} = \{0, 1, 3\}$. La función p_Y toma los valores

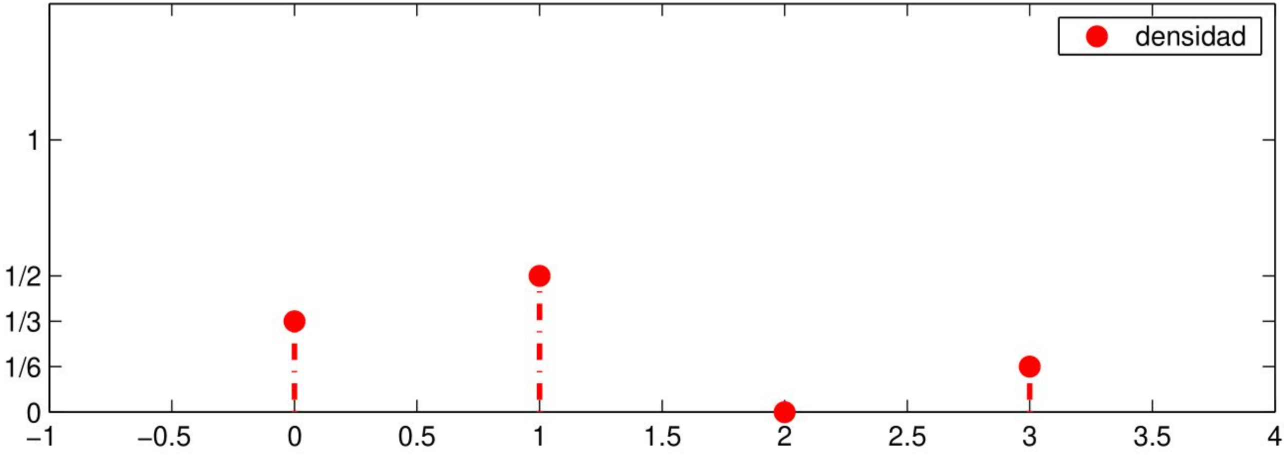
$$\begin{aligned}
p_Y(0) &= P(Y = 0) = P(\{\text{ningún acierto}\}) \\
&= = P(\{(d_2, d_3, d_1), (d_3, d_1, d_2)\}) = \frac{2}{6} \\
p_Y(1) &= P(Y = 1) = P(\{\text{exactamente un acierto}\}) \\
&= P(\{((d_1, d_3, d_2), (d_3, d_2, d_1), (d_2, d_1, d_3)\}) = \frac{3}{6} \\
p_Y(2) &= P(Y = 2) = P(\{\text{exactamente dos aciertos}\}) = 0 \\
p_Y(3) &= P(Y = 3) = P(\{\text{exactamente tres aciertos}\}) \\
&= P(\{((d_1, d_2, d_3)\}) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Resolución

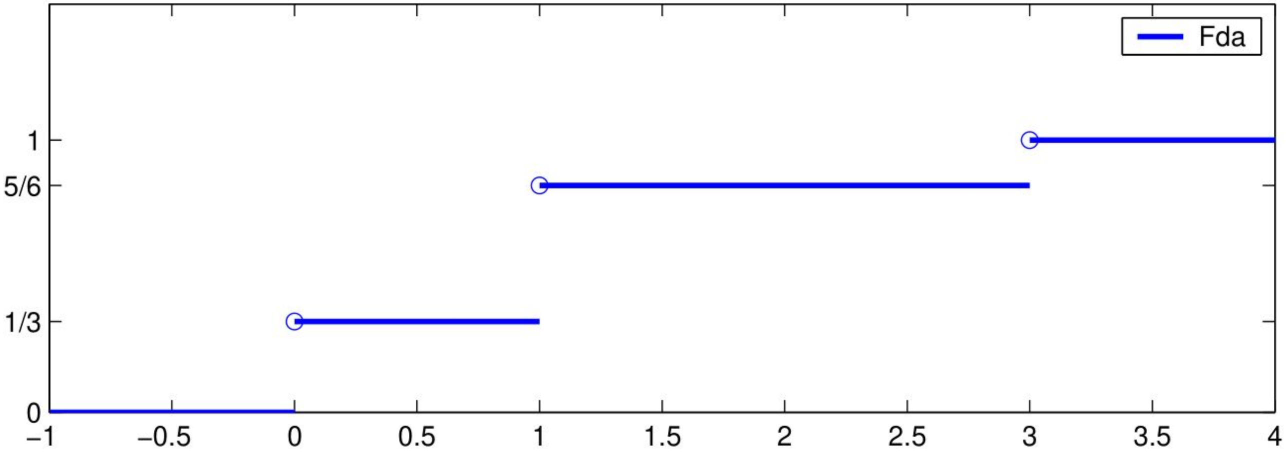
y F_Y resulta

$$
\begin{aligned}
F_Y(t) &= P(Y \leq t) = 0 \qquad t < 0 \\
F_Y(t) &= P(Y \leq t) = p_Y(0) = \frac{2}{6} \qquad 0 \leq t < 1 \\
F_Y(t) &= P(Y \leq t) = p_Y(0) + p_Y(1) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \qquad 1 \leq t < 2 \\
F_Y(t) &= P(Y \leq t) = p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 0 \qquad 2 \leq t < 3 \\
F_Y(t) &= P(Y \leq t) = p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3) = P(Y = 3) \\
&= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 0 + \frac{1}{6} = 1 \qquad 3 \leq t
\end{aligned}
$$

$$P(1 < X \leq 6) = F_X(6) - F_X(1) = 1 - 5/6 = 1/6$$



densidad
1
1/2
1/3
1/6
0
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4



Fda
1
5/6
1/3
0
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Experimento aleatorio: lanzar cuatro veces una moneda equilibrada.

Espacio muestral:

$\Omega = \{CCCC, CCC+, CC+C, C+CC, +CCC, CC++, C+C+, C++C, +CC+, +C+C, ++CC, +++C, ++C+, +C++, C+++, ++++\}$

X v.a. que expresa el número de cruces obtenidas; toma el valor 0 cuando el resultado es $\{CCCC\}$, el valor 1 si ocurre el suceso $\{CCC+,\ CC+C,\ C+CC,\ +CCC\}$, el valor 2 si aparece $\{CC++,\ C+C+,\ C++C,\ +CC+,\ +C+C,\ ++CC\}$, el valor 3 para los resultados $\{+++C,\ ++C+,\ +C++,\ C+++\}$, y el valor 4 si sale $\{++++\}$.

$$P(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{16} & x_i = 0 \\ \frac{4}{16} & x_i = 1 \\ \frac{6}{16} & x_i = 2 \\ \frac{4}{16} & x_i = 3 \\ \frac{1}{16} & x_i = 4 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{16} = 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Se quiere hallar la probabilidad de que aparezcan más de dos cruces:

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

o también:

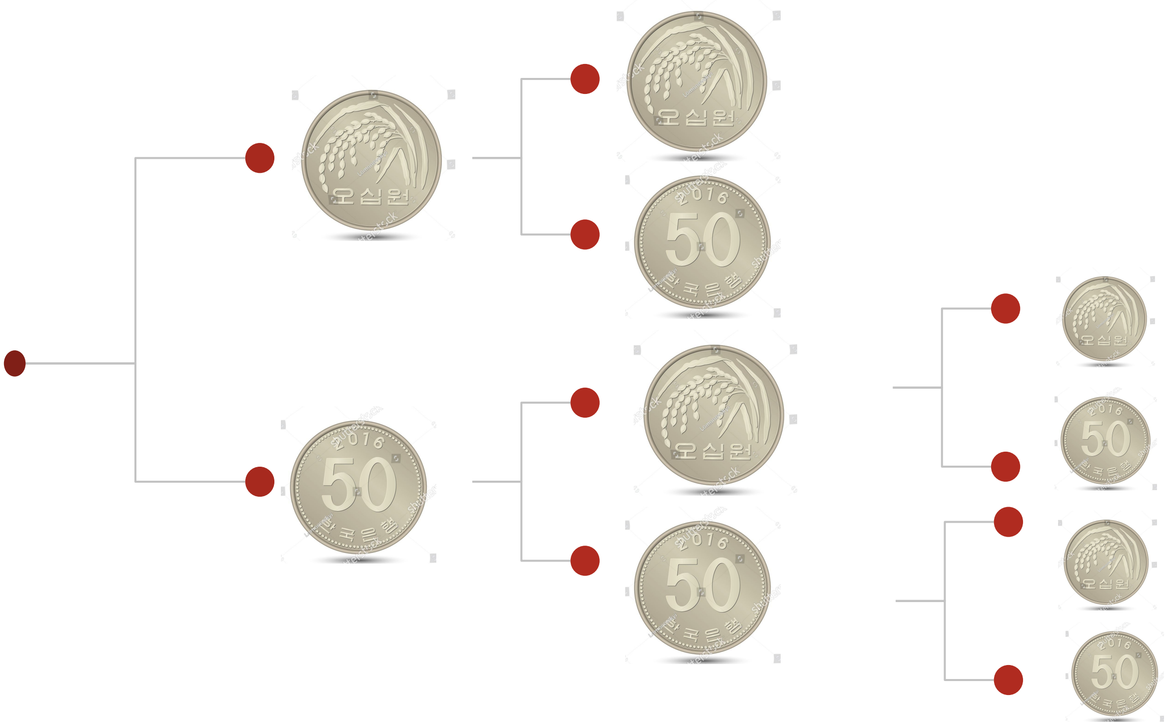
$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \frac{5}{16}$$

Se quiere calcular la probabilidad de que el número de cruces sea más de 1 y menos de 4:

$$P\{1 < X < 4\} = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$$

Ejemplo

Una moneda honesta se tira una vez. Si sale cara se tira una segunda vez y si sale cruz se tira 2 veces más.
Hallar la función densidad discreta de X el número total de caras obtenidas.



Resolución

La variable X toma los valores 0,1,2. No puede tomar el valor 3 pues nunca se tira tres veces si salió cara la primera vez.
Definamos Y la variable que vale 1 si salió cara la primera vez, y 0 si no.
Entonces, si $Y = 0$ tenemos el experimento condicional con espacio muestral equiprobable

$$\Omega_0 = \{(s,s,s),(s,c,s),(s,s,c),(s,c,c)\}$$

y si $Y = 1$, tenemos el experimento condicional con espacio muestral equiprobable

$$\Omega_1 = \{(c,s),(c,c)\}$$

por lo tanto

Resolución

$$
\begin{aligned}
p_X(0) &= P(X=0/Y=0)P(Y=0)+P(X=0/Y=1)P(Y=1)\\
&= P(\{(s,s,s)\})P(\text{cruz en la primera})+P(\emptyset)P(\text{cara en la primera})\\
&= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}+0.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\\
p_X(1) &= P(X=1/Y=0)P(Y=0)+P(X=1/Y=1)P(Y=1)\\
&= P(\{(s,c,s),(s,s,c)\})P(\text{cruz en la primera})+\\
&+ P(\{(c,s)\})P(\text{cara en la primera})\\
&= \frac{2}{4}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\
p_X(2) &= P(X=2/Y=0)P(Y=0)+P(X=2/Y=1)P(Y=1)\\
&= P(\{(s,c,c)\})P(\text{cruz en la primera})+\\
&+ P(\{(c,c)\})P(\text{cara en la primera})\\
&= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Transformación de variables aleatorias

Dadas una variable aleatoria X y una función real de variable real $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos estudiar la distribución de la variable aleatoria transformada por g de X, $Y = g(X)$

- Basta con calcular la función de distribución de Y (P está caracterizada por F)

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_Y(g(X) \leq y) = P_X(X \in A_y),$$

donde $A_y = \{x : g(x) \leq y\}$ (en muchos casos es sencillo de calcular)

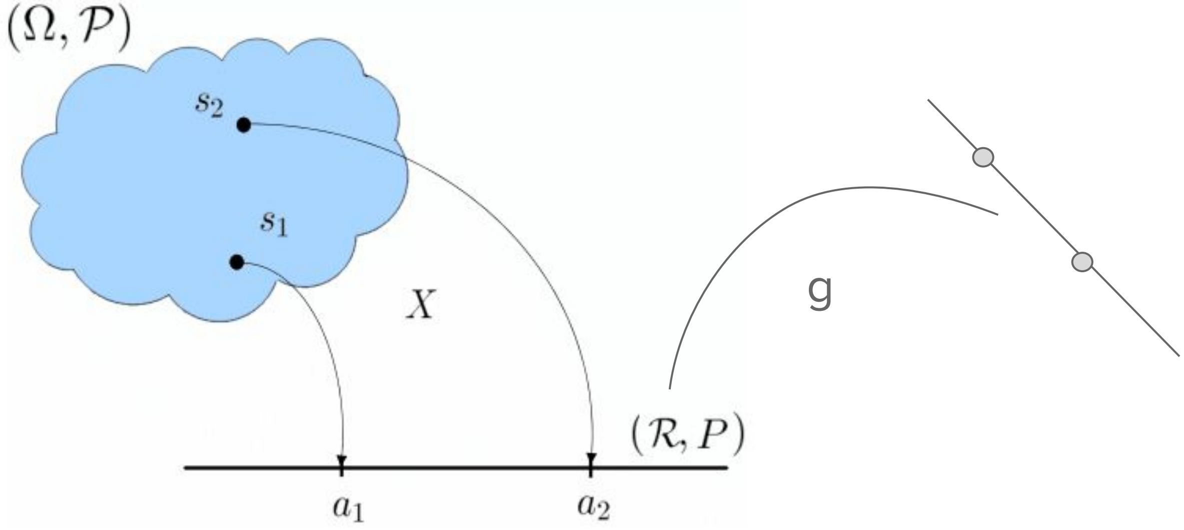
Transformación de una v.a.discreta

- Función de distribución:

$$F_Y(y) \;=\; P_X(X \in A_y) = \sum_{x_i \in A_y} p_X(x_i) = \sum_{g(x_i) \leq y} p_X(x_i)$$

- Función de masa:

$$p_Y(y) \;=\; P_Y(Y = y) = P_Y(g(X) = y) = \sum_{g(x_i) = y} p_X(x_i)$$



Ejemplo

En el ejemplo de Y el número de aciertos al corresponder el nombre de un animal con su dibujo al azar, suponga que defina otra variable Z que otorga un caramelo si acierta uno o mas veces y no da ningún caramelo si no le acierta a ninguno. Entonces Z toma valores 0 y 1, con probabilidades

$$P(Z = 0) = P(Y = 0) = 1/3$$

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) = 2/3$$