Práctico 11: Autovalores y autovectores de una transformación lineal. Diagonalización.

1. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, hallar sus autovalores, y para cada autovalor, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir en cada caso si la transformación lineal es o no diagonalizable.
   (a) $T(x, y) = (y, 0)$.
   (b) $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z)$.
   (c) $T(x, y, z, u) = (-5x - 5y - 9z + 7u, 8x + 9y + 18z - 9u, -2x - 3y - 7z + 4u, 2u)$
   (d) $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.
   (e) $T(x, y, z, u, v) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z, 3u + v, 2u + 2v)$.
2. Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(1, 1, 1)$ y $(-1, 1, 0)$ son autovectores de autovalor 2 y $(0, -2, 1)$ es autovector de autovalor 1. Para tal T, calcular $\det T$ y dar la matriz de T en la base canónica.
3. Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $T \in \operatorname{Hom}(V, V)$.
   (a) Supongamos que T es un isomorfismo, y sea $\lambda \in \mathbb{k}$ no nulo. Probar que λ es un autovalor de T si y sólo si λ^{-1} es un autovalor de T^{-1}
   (b) Probar que si T es un múltiplo de Id_V, entonces todos los elementos de V son autovectores de T.
   (c) Supongamos que $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y que $\dim V = 2$. Probar que toda $T \in \operatorname{Hom}(V, V)$ es *triangularizable*. Es decir, existe una base de V tal que la matríz de T en esa base es triangular superior.
   (d) Decidir si el enunciado anterior es verdadero o falso cuando $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.
4. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios de las siguientes matrices A, y decidir si son diagonalizables. En caso que lo sean, dar una matriz C tal que $D = C^{-1}AC$ es diagonal. Considerarlas primero como matrices en $\mathbb{R}$ y luego en $\mathbb{C}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$
5. Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $A^3 - A^2 + A - Id_3 = 0$. Decidir si A es diagonalizable.
6. Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{k})$
   (a) Demostrar que las matrices $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ en $M_{(m+n)\times(m+n)}(\mathbb{k})$ son semejantes.
   (b) Asumir ahora que $m = n$. Utilizar el resultado anterior para concluir que los polinomios característicos de AB y de BA coinciden. Deducir que AB y BA tienen los mismos autovalores.
7. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, donde $\dim V$ es finita, con autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Demostrar que T es diagonalizable si y sólo si
$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Ejercicios Adicionales

8. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ todos positivos. Sea
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
   (a) Demostrar que A posee dos autovalores reales.

(b) Demostrar que A posee al menos un autovector con sus coordenadas mayores o iguales a cero.

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demostrar que si $c_1, \dots, c_n$ son los autovalores de A en $\mathbb{C}$, (posiblemente repetidos), entonces $\det(A) = c_1 \cdots c_n$ y $\mathrm{Tr}(A) = c_1 + \cdots + c_n$.

10. Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal.

    (a) Supongamos que T conmuta con toda $S \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Probar que T es un múltiplo de Id_V.

    (b) Supongamos que $\dim \mathrm{Im}\, T = k$. Probar que T tiene a lo sumo $k + 1$ autovalores distintos.

    (c) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ los autovalores (distintos) no nulos de T. Sea $d_j = \dim \mathrm{Nu}(T - \lambda_j Id_V)$. Probar que $d_1 + \cdots + d_h \leq \dim \mathrm{Im}\, T$.

Ayuda para el (6): Conjugar por $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$