1	2	3	4	5	6	7

Calif.

Apellido y Nombre: Carrera:

Condición: Libre Regular (tachar lo que NO corresponde) año:

Algebra II - Final

9 de Febrero de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos.
Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Demostrar que si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, entonces existe un isomorfismo $f : V \to K^n$.

2. (12 pts) Probar que en un espacio vectorial con producto interno un conjunto de vectores ortogonales son linealmente independientes.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Toda transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión uno en si mismo es un múltiplo de la identidad.

   (b) (3 pts) Si V un espacio vectorial de dimensión n entonces $\dim \operatorname{Hom}(V, V^*) = n$.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ la transformación lineal tal que $T(p(x)) = p'(x)$. Probar que $\det ST = 0$ para toda transformación $S : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$.

5. Sea
$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \,:\, p(6) = 0\}.$$

   (a) (7 pts) Mostrar que es un subespacio y hallar una base de U. (Ayuda: si $p \in U$ entonces $p(x) = (x-6)q(x)$, con el grado de q menor o igual a 3).

   (b) (6 pts)Extender la base obtenida en (a) a una base de $\mathbb{R}[x]_4$.

   (c) (7 pts) Encontrar un subespacio W tal que $\mathbb{R}[x]_4 = U \oplus W$.

6. Fijemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, definida por
$$T(B) = AB - BA$$
para toda matriz B.

   (a) (10 pts) Calcular la matriz $[T]_E$ con E la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) (10 pts) Calcular los autovalores y autovectores asociados para $[T]_E$ y decidir si es diagonalizable.

7. (15 pts)Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ espacio vectorial con producto interno y $v_1, \cdots, v_m$ un conjunto de vectores ortonormales en V. Mostrar que si $v \in V$, entonces
$$||v||^2 = |\langle v, v_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, v_m\rangle|^2 \quad \Leftrightarrow \quad v \in \langle\{v_1, \cdots, v_m\}\rangle.$$

$\boxed{\text{JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS}}$