Práctico 5: Determinantes

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -\,sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ x^3 & x^2+x+1 & 0 \\ 0 & x^7 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Calcular el determinante de las siguientes matrices, reduciendo a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{bmatrix}.$$

Ayuda: Para C conviene, antes de reducir, hacer operaciones para lograr que la 5ta columna tenga todos sus elementos iguales.

4. Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular $\det(A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

5. Sabiendo que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, calcular $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$.

6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se dice[1] que A *semejante a* B sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertible tal que $B = PAP^{-1}$. Probar que:

   (a) Si A es semejante a B entonces
   $$\det A = \det B, \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B.$$

   (b) ¿Existe una matriz $C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ invertible tal que $C \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} C$?

7. (a) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.
   i. Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   ii. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces A es invertible si y sólo si A^k es invertible para algún $k \in \mathbb{N}, k > 1$.
   iii. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ una matriz invertible con coeficientes enteros. Si A^{-1} tiene coeficientes enteros, entonces $\det A = 1$ o $\det A = -1$.

   (b) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Dados escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, definimos la matriz de *Vandermonde* $\mathtt{V}$ en la forma:
   $$\mathtt{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
   Demostrar (por inducción) que $\det(\mathtt{V}) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$.

[1]Se puede ver fácil que "ser semejante a" es una relación de equivalencia.

(c) Dar una condición necesaria y suficiente para que la matriz de Vandermonde sea invertible.

8. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Demostrar por inducción que si $a_0, \dots, a_{n-1}$ son elementos de $\mathbb{K}$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

9. Determinar para qué valores de $c \in \mathbb{R}$, las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

10. En cada caso decidir si la matriz es invertible y si lo es, calcular su inversa usando la matriz de cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & \sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

11. Una matriz A compleja $n \times n$ se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.

(a) Probar que si n es impar y A es antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

(b) Para cada n par, encontrar una matriz A antisimétrica $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

12. Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci definida por recurrencia como sigue:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3.$$

(a) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Probar por inducción que $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

(b) Utilizando (a) y propiedades del determinante probar que, para todo $n \geq 2$, vale la *Identidad de Cassini*:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

13. *Matrices en bloque*: Sean A una matriz $r \times r$, B una matriz $r \times s$, C una matriz $s \times r$ y D una matriz $s \times s$. Decimos que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es una *matriz en bloque*.

Para este ejercicio usaremos el siguiente hecho[2]

- Si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$, entonces $MN = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$.

(a) Probar usando inducción en el tamaño de la matriz identidad correspondiente que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix} = \det A, \quad \text{y} \quad \det \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix} = \det D.$$

(b) Calcular $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & B \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix}$ y deducir que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} = \det A \det D.$$

Notar que, como caso particular, se tiene que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2,$$

[2]Esto quiere decir que si tenemos matrices en bloque podemos multiplicar como si las matrices fueran entradas

(c) Demostrar que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_n \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_n.$$

(d) Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios Adicionales

1. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Demostrar que si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de $\mathbb{K}$, entonces

$$\det \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{bmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

3. Sea $\mathsf{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$, es decir el conjunto de matrices de determinante 1. Demostrar [3] que

   (a) Si $A, B \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $AB \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$.

   (b) $\mathrm{I}_n \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$.

   (c) Si $A \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $A^{-1} \in \mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$.

[3] Este ejercicio prueba que $\mathsf{SL}(n, \mathbb{K})$ es un *grupo*.