Práctico 8

Coordenadas y Matrices de transformaciones lineales

Objetivos.

- Aprender a calcular coordenadas y la matriz de cambio de base.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación lineal.
- Aprender a construir transformaciones lineales que satisfagan las propiedades solicitadas.

Ejercicios.

(1) Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:
   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 2)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

(2) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ otra base ordenada de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
   (b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
   (c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?
   (d) Encontrar $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ tal que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (1, 4)$ y $[(z, w)]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$.
   (e) Utilizando la matriz de cambio de base, dar las coordenadas de un vector (x, y), en la base $\mathcal{B}$.

(3) Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.
   (a) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que P es la matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^3$ a la base $\mathcal{B}$.
   (b) Encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (2, -1, -1).$$

(4) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.
   (b) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x, y, z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

(5) Sea $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$. Calcular $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ donde $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{1, x, x^2, x^3\}$ y utilizar esto para dar una base de $\operatorname{Nu} T$ y para caracterizar con ecuaciones a $\operatorname{Im} T$.

(6) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{U} = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $\mathcal{U}'$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T]_{\mathcal{UU}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar $\mathcal{U}'$.

(7) Decidir en cada caso si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las siguientes condiciones. En caso afirmativo decidir si es única:
(a) $T(3, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $T(1, -2, 0) = (2, 7, 3)$, y $T(-5, 4, 1) = (1, 0, 0)$.
(b) $T(1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$ y $T(0, 0, 2) = (2, 3, 1)$.
(c) $T(1, 0, 0) = (4, -1, -2)$, $T(0, 1, 0) = (-4, 0, 1)$ y $T(1, 1, 0) = (0, -1, 1)$.
(d) $T(1, 0, 0) = (4, -1, -2)$, $T(0, 1, 0) = (-4, 0, 1)$ y $T(1, 1, 0) = (0, -1, -1)$.

(8) En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal no nula $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:
(a) $\{(1, 0, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$ y $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ es una base de la $\mathrm{Im}(T)$.
(b) $\dim \mathrm{Nu}\, T \cap \mathrm{Im}\, T = 1$.
(c) $e_1 \in \mathrm{Im}(T)$, $(-5, 1, 1) \in \mathrm{Nu}(T)$ y $\mathrm{Nu}\, T \cap \mathrm{Im}\, T = \{0\}$.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(9) (a) Dar una base ordenada del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
(b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.
(c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item (a).

(10) Repetir el ejercicio (2) con la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Considerar las 3-uplas $(1, 2, 3)$ y $(0, 1, 2)$ para el ítem (d), y $(2, 3, 1)$ para el ítem (e).

(11) Calcular la matriz cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ en los siguientes casos:
(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$.
(b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B} = \{3, 1 + x, x^2\}$, $\mathcal{B}' = \{1, x + 3, x^2 + x\}$
(c) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathcal{B}' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$.

(12) Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$, hallar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^3$ tal que $M = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(13) Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ donde

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de V si y sólo si A es invertible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$, y viceversa.

(14) Sean $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $a \in \mathbb{R}$ fijo. Definimos $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x - a$, $g_2(x) = (x - a)^2$. Demostrar que $\mathcal{B} = \{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$ es una base de V. ¿Cuáles son las coordenadas de $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ en la base $\mathcal{B}$?

(15) Calcular $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ en los siguientes casos:
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - 2y + z, 5x + y - z, x + 3y + 4z)$, $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$
   (b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(x, y) = (2x - iy, x + y)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$, considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
   (c) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$.

(16) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Sea $T : V \to V$ la transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Hallar $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$.
   (b) Probar que T es invertible y hallar $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$

(17) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $T(1, -1, 1) = (2, a, -1), T(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $T(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicios adicionales de interés teórico. Estos son ejercicios sólo para el lector interesado.

(18) Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n'\}$ respectivamente. Probar que $f : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathbb{K}^{n\times m}$ dada por $f(T) = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es un isomorfismo[1].

(19) Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que A es semejante a B sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si existe una transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ tales que $[T]_{\mathcal{B}} = A$ y $[T]_{\mathcal{B}'} = B$.

(20) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Por Teorema 4.1.1, existe (para cada i) un único funcional lineal $f^i : V \to \mathbb{K}$ (muchas veces se lo suele denotar v^i) tal que

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

es decir $f_i(v_i) = 1$ y $f_i(v_j) = 0$ para todo $i \neq j$.
   (a) Probar que $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V^*$ es LI y concluir que es una base, llamada la *base dual* de $\mathcal{B}$.
   (b) Si $f \in V^*$, probar que $f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i$.

(21) Dados V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y una transformación lineal $T : V \to W$, se define la *traspuesta de* T, $T^t : W^* \to V^*$ por: dado $f \in W^*$,

$$(T^t f)(v) = f(T(v)) \quad \forall v \in V.$$

   (a) Probar que T^t es lineal.
   (b) Sean $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz fija, T el operador lineal sobre $\mathbb{K}^{n\times n}$ definido por $T(A) = AB - BA$ y f es la función traza. Calcular $T^t f$.
   (c) Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión n. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V con base dual $\mathcal{B}^* = \{v^1, \ldots, v^n\}$ y sea $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ordenada de W con base dual $\mathcal{B}'^* = \{w^1, \ldots, w^n\}$. Probar que

$$[T^t]_{\mathcal{B}'^*\mathcal{B}^*} = [T]^t_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

[1] En particular, $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn$. Luego $\dim V^* = \dim \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) = \dim V \cdot 1 = \dim V$, por lo que V es isomorfo a V^*.