Intro a la Probabilidad y estadística

Martes y Jueves Aula B17

Dra Ana Georgina Flesia

Ejemplo Motivacional

Ejemplo

- Es usual modelar el número de autos que entra al estacionamiento de un aeropuerto con una distribución de Poisson. ¿Qué distribución tendría el tiempo hasta el primer arribo?
- Esta es una variable aleatoria, pero de diferente tipo. Puede valer 10 minutos, 3 minutos 8 segundos, 1 minuto 20s segundos, $\sqrt{2}$ minuto o π minutos.
- En realidad, cualquier número mayor que cero puede ser un valor posible de una variable relacionada con el TIEMPO.

Ejemplo

- Para ser concretos, si el número de autos es Poisson con media $\lambda = 0.8$ autos POR MINUTO, representemos el tiempo hasta el primer arribo con la variable T.
- Podemos calcular la probabilidad de que el primer auto llegue después de dos minutos reescribiendo esta probabilidad en términos del número de arribos

$$P(T > 2) = P(\text{ 0 autos entre 0 y 2 minutos})$$

Ejemplo

- Sabemos que Y el número de autos entre 0 y 2 minutos tiene distribución Poisson $(\mu = 0.8 \times 2)$ por lo cual podemos evaluar la función de masa de Y en $x = 0$

$$\begin{aligned} P(T > 2) &= P(\text{ 0 autos entre 0 y 2 minutos}) \\ &= e^{-0.8 \cdot 2} \frac{(0.8 \cdot 2)^0}{0!} \\ &= e^{-1.6} \approx .202. \end{aligned}$$

Ejemplo

- Tambien podemos calcular la probabilidad que el primer auto en llegar este entre 2 y 3 minutos, como

$$P(2 < T < 3) = P(T > 2) - P(T > 3)$$

- Calculamos $P(T > 3)$ en la misma forma que calculamos $P(T > 2)$ arriba

$$P(T > 3) = e^{-0.8 \cdot 3} \frac{(0.8 \cdot 3)^0}{0!} = e^{-2.4} \approx .091.$$

- Por lo cual

$$P(2 < T < 3) = e^{-1.6} - e^{-2.4} \approx .111.$$

Observación

- Si bien calculamos probabilidades especificas acerca de T , como podemos describir su distribución? En particular:
  1. Cual es su función de distribución acumulada?
  2. Cual es su función de densidad?

Función de distribución del primer arribo

- Recordemos que la función de distribución acumulada se define como

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t).$$

- Supongamos ahora que el número de arribos en $[0, t]$ tiene distribución Poisson con media $\mu = 0.8t$. Como vimos antes, la probabilidad de que no arribe ningún auto en ese intervalo es

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\text{Ningun auto llega hasta el tiempo } t) \\ &= e^{-0.8 \cdot t} \frac{(0.8 \cdot t)^0}{0!} \\ &= e^{-0.8t}. \end{aligned}$$

con $t \geq 0$

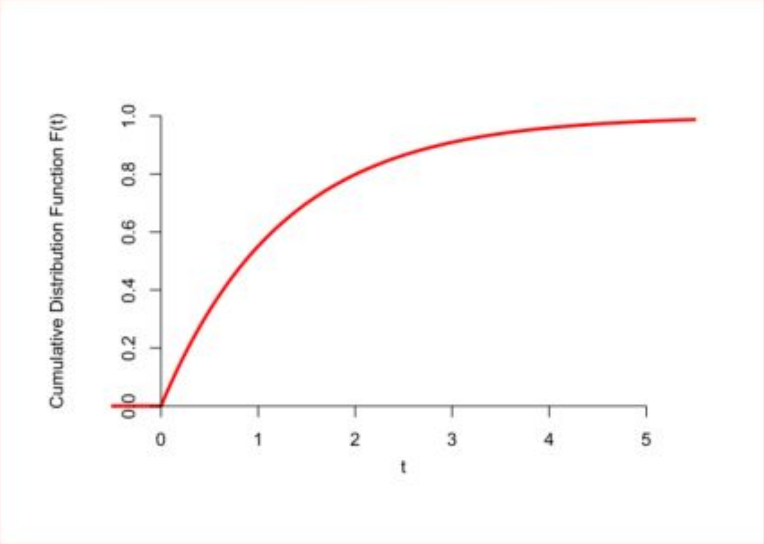
- Por otra parte, el tiempo es siempre positivo, por lo cual si $t < 0$,

$$P(T > t) = 1$$

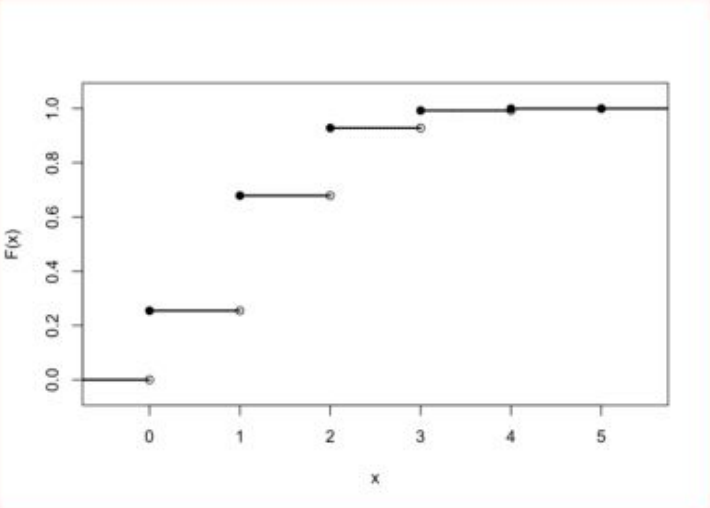
Función de distribución del primer arribo

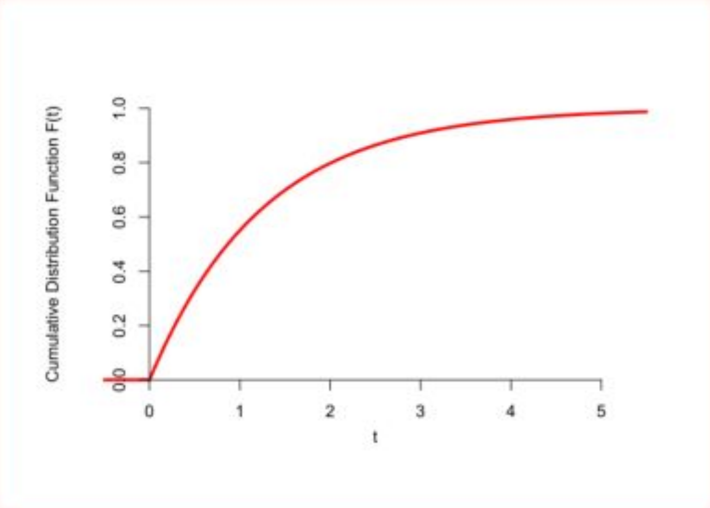
- Poniendo todo junto queda

$$F(t) = 1 - P(T > t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.8t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

- 

Distribuciones acumuladas





Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria se llama continua si su función de distribución acumulada es una función continua.

Ejemplo: $P(T = 2)$

- ¿Cual es la probabilidad de $P(T = 2)$?
- Consideremos la probabilidad de que el primer arribo sea en el intervalo $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$. Esta probabilidad va a ser siempre mayor que $P(T = 2)$ porque el intervalo contiene mas puntos.
- El el número de arribos en $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\mu = 0.8 \times 2\epsilon$ por lo cual

$$\begin{aligned} P(\text{al menos un arribo en el intervalo}) &= 1 - P(\text{ningún arribo en el intervalo}) \\ &= 1 - e^{-0.8 \cdot 2\epsilon} \frac{(0.8 \cdot 2\epsilon)^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-1.6\epsilon}. \end{aligned}$$

- Si hacemos a ϵ arbitrariamente chico, $e^{-1.6\epsilon}$ es cada vez mas cercana a uno y la probabilidad de que el primer arribo sea exactamente en 2 minutos es cero.

Definición

Se dice que f es una densidad de probabilidad de la variable X con distribución F si se cumple que $f \geq 0$ y

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx)$$

Propiedades

- La densidad f no es única.
- En los puntos donde F es derivable, $f(t) = F'(t)$ es una densidad.
- Si f es una función no negativa tal que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx)$$

entonces f es una densidad para la distribución F

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx)$$

Ejemplo: función de densidad y función de distribución

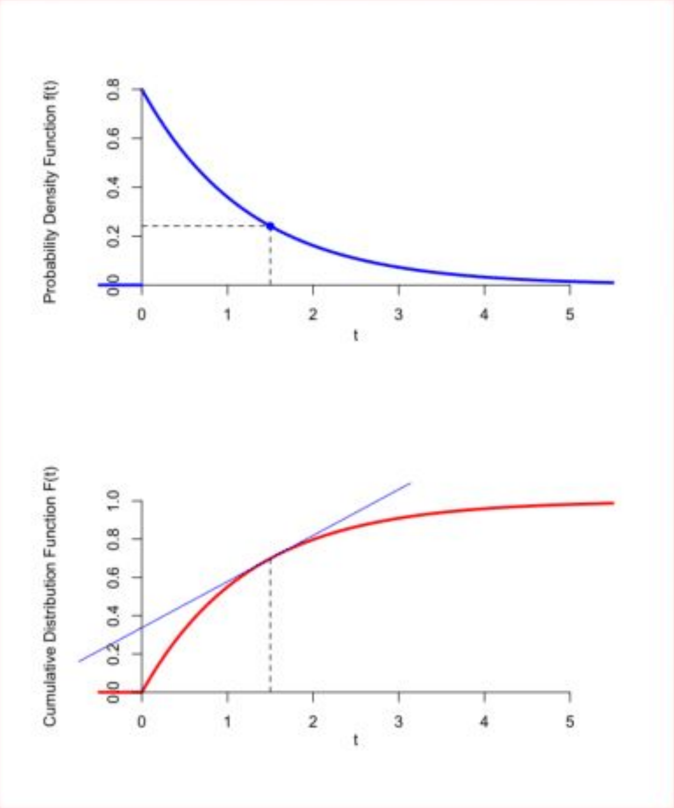
- En el ejemplo del tiempo de arribo del primer auto, vimos que

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.8t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

- Entonces, derivando para $t > 0$ y $t < 0$, podemos definir una densidad como

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0.8e^{-0.8t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Ejemplo


Probability Density Function f(t)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Cumulative Distribution Function F(t)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
t

Propiedades

Si X es una variable continua con distribución F y densidad f,

- Entonces

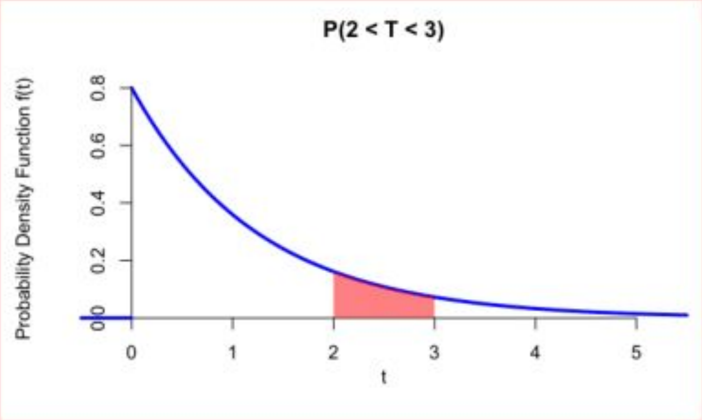
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

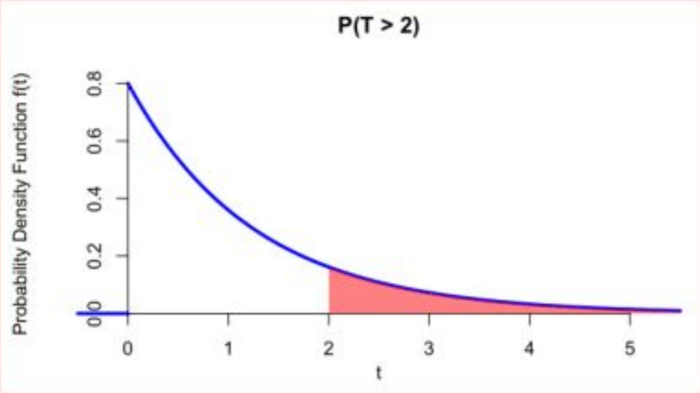
  pues

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$

Ejemplo





$$P(2 < T < 3) = \int_2^3 f(t)\,dt = \int_2^3 0.8e^{-0.8t}\,dt = .111,$$

$$P(T > 2) = \int_2^\infty f(t)\,dt = \int_2^\infty 0.8e^{-0.8t}\,dt = .202.$$

Ejemplo

Sea g la siguiente función.

$$g(x) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre una función densidad f_X que coincida con g salvo una constante.

Resolución

- La función densidad debe ser no negativa y tener integral igual a 1, por lo cual una candidata es

$$f(x) = \frac{1}{c} g(x) \qquad c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

- Entonces

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{0}^{1} x(1-x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

- y la densidad f_X resulta

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición

Si A y B son subconjuntos de $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ entonces

$$P(X \in A/X \in B) = \frac{P(X \in A \cap B)}{P(X \in B)} = \frac{\int_{A \cap B} f(y)dy}{\int_B f(y)dy}$$

Observación

- Recordemos que si X era una variable aleatoria discreta, tal que $\sum_x |x| p_X(x) < \infty$ entonces X tenía esperanza y

$$E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

- En forma análoga, definimos esperanza de variables aleatorias continuas de la siguiente forma.

Definición

Sea X un variable aleatoria continua con densidad f. Decimos que X tiene esperanza finita si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

y en ese caso se define la esperanza como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx < \infty$$

y la varianza como

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

La desviación estándar es la raiz cuadrada positiva de la varianza, $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Ejemplo

- Sea X una variable aleatoria continua con densidad f y sean a y $b \neq 0$ números reales, entonces la variable $Y = a + bX$ tiene densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b})$$

y $f_Y(y) = 0$ en otro lado.

Resolución

- Supongamos que $b > 0$, entonces $g(y) = \frac{y-a}{b}$ es una función creciente y

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \frac{y-a}{b}) = F_X(\frac{y-a}{b})$$

por lo cual

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f(\frac{y-a}{b})$$

Resolución

- Supongamos que $b > 0$, entonces $g(y) = \frac{y-a}{b}$ es una función creciente y

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \frac{y-a}{b}) = F_X(\frac{y-a}{b})$$

por lo cual

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f(\frac{y-a}{b})$$

Resolución

- Si $b < 0$, entonces $g(y) = \frac{y-a}{b}$ es una función decreciente y

$$P(Y \leq y) = P(X \geq \frac{y-a}{b}) = 1 - F_X(\frac{y-a}{b})$$

- por lo cual

$$f_Y(y) = -\frac{1}{b} f(\frac{y-a}{b})$$

Resolución

- Resumiendo, si $b \neq 0$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b})$$