Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Facundo Bustos
Mauricio Tellechea Gonzalo Zigarán

FaMAF, 4 de septiembre de 2024

Contenidos estimados para hoy

1. Reticulados
   - Reticulados acotados y complementados
   - Reticulados distributivos
2. Álgebras de Boole
   - Leyes de De Morgan
   - Isomorfismos
3. Átomos e irreducibles

Reticulados acotados

Definición

Un *reticulado acotado* es una estructura $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge)$ es un reticulado, $0, 1 \in L$ y satisfacen que, para todo $x \in L$

$$x \wedge 0 = 0 \quad \text{y} \quad x \vee 1 = 1.$$

Definición

Un *reticulado acotado* es una estructura $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge)$ es un reticulado, $0, 1 \in L$ y satisfacen que, para todo $x \in L$

$$x \wedge 0 = 0 \quad \text{y} \quad x \vee 1 = 1.$$

Notemos que $(P, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado acotado sii si $(P, \leq)$ es un reticulado con máximo 1 y mínimo 0, por lo que a veces nos referiremos indistintamente a uno u otra estructura.

Definición

Un *reticulado acotado* es una estructura $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge)$ es un reticulado, $0, 1 \in L$ y satisfacen que, para todo $x \in L$

$$x \wedge 0 = 0 \quad \text{y} \quad x \vee 1 = 1.$$

Notemos que $(P, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado acotado sii si $(P, \leq)$ es un reticulado con máximo 1 y mínimo 0, por lo que a veces nos referiremos indistintamente a uno u otra estructura.

Ejercicio

Probar que si $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado acotado entonces, para todo $x \in L$,

$$x \vee 0 = x \quad \text{y} \quad x \wedge 1 = x.$$

Reticulados complementados

Definición

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dados $a, b \in L$ diremos que b es *complemento* de a si

$$a \vee b = 1 \quad \text{y} \quad a \wedge b = 0.$$

Nota: Un elemento puede no tener complemento o tener varios.

Reticulados complementados

Definición

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dados $a, b \in L$ diremos que b es *complemento* de a si

$$a \vee b = 1 \quad \text{y} \quad a \wedge b = 0.$$

Nota: Un elemento puede no tener complemento o tener varios.

Definición

Un *reticulado complementado* es una estructura $(L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado acotado y $\neg$ es una función unaria tal que, para todo $x \in L$, $\neg x$ es un complemento de x.

Reticulados complementados

Definición

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dados $a, b \in L$ diremos que b es *complemento* de a si

$$a \vee b = 1 \quad \text{y} \quad a \wedge b = 0.$$

Nota: Un elemento puede no tener complemento o tener varios.

Definición

Un *reticulado complementado* es una estructura $(L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado acotado y $\neg$ es una función unaria tal que, para todo $x \in L$, $\neg x$ es un complemento de x.

Nota: Esto no significa que un reticulado complementado todo elemento tiene un único complemento, sino que tiene al menos uno.
La función $\neg$ "elige" algún complemento para cada elemento de L.

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado. Son equivalentes:*

1. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

Reticulados distributivos

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado. Son equivalentes:*

1. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Reticulados distributivos

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado. Son equivalentes:*

1. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$*;*
2. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*.*

Definición

Dado un reticulado $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ decimos que es un *reticulado distributivo* si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del Lema anterior.

Reticulados distributivos

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado. Son equivalentes:*

1. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. *para todo* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definición

Dado un reticulado $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ decimos que es un *reticulado distributivo* si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del Lema anterior.

Ejemplo

- Todos los $\mathbf{D_n}$ y todos los $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ son distributivos.
- M_3 y N_5 no son distributivos.

Preservación de la distributividad

Lema

Sea $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo y* $\mathbf{L}'$ *un reticulado. Entonces*

1. *Si* $\mathbf{L}'$ *es isomorfo a* $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ *es distributivo.*

Preservación de la distributividad

Lema

Sea $\mathbf{L}$ un reticulado distributivo y $\mathbf{L}'$ un reticulado. Entonces

1. *Si $\mathbf{L}'$ es isomorfo a $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ es distributivo.*
2. *Si $\mathbf{L}'$ es subreticulado de $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ es distributivo.*

Preservación de la distributividad

Lema

Sea $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo y* $\mathbf{L}'$ *un reticulado. Entonces*

1. *Si* $\mathbf{L}'$ *es isomorfo a* $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ *es distributivo.*
2. *Si* $\mathbf{L}'$ *es subreticulado de* $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ *es distributivo.*
3. *Si* $\mathbf{L}'$ *se incrusta* $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ *es distributivo.*

Propiedad cancelativa

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado distributivo. Se satisface que, para todo* $a, b, c \in L$*,*

$$\left.\begin{aligned} a \vee c = & \quad b \vee c \\ a \wedge c = & \quad b \wedge c \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b$$

Propiedad cancelativa

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado distributivo. Se satisface que, para todo* $a, b, c \in L$*,*

$$\left.\begin{array}{rl} a \vee c = & b \vee c \\ a \wedge c = & b \wedge c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Corolario

Si $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *es un reticulado distributivo, todo elemento de* L *tiene* ***a lo sumo*** *un complemento.*

Propiedad cancelativa

Lema

Sea $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado distributivo. Se satisface que, para todo* $a, b, c \in L$,

$$\left.\begin{aligned} a \vee c = & \quad b \vee c \\ a \wedge c = & \quad b \wedge c \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b$$

Corolario

Si $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *es un reticulado distributivo, todo elemento de* L *tiene* ***a lo sumo*** *un complemento.*

Observación

La recíproca no vale, es decir, que un reticulado no tenga elementos con dos complementos no implica que sea distributivo.

V o F

1. En un reticulado distributivo acotado, el único complemento del 0 es el 1.
2. En un reticulado acotado el único complemento del 0 es el 1.
3. En un reticulado distributivo acotado todo elemento tiene un complemento.
4. En un reticulado acotado todo elemento tiene a lo sumo un complemento.
5. En un reticulado distributivo acotado todo elemento tiene a lo sumo un complemento.
6. En un reticulado acotado NO distributivo hay algún elemento con dos complementos.

Teorema

Un reticulado $\mathbf{L}$ *es distributivo sii no se inscrustan en él ni* M_3 *ni* N_5*.*

Teorema

Un reticulado $\mathbf{L}$ *es distributivo sii no se inscrustan en él ni* M_3 *ni* N_5*.*

Estrategia (hasta el momento)

Teorema

Un reticulado $\mathbf{L}$ es distributivo sii no se inscrustan en él ni M_3 ni N_5.

Estrategia (hasta el momento)

ES distributivo	**NO ES distributivo**
Probar que se incrusta en algo que sabemos es distributivo, como un $\mathbf{D_n}$ o un $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.	Probar que en él se incrustan M_3 o N_5.

Álgebras de Boole

Definición

Un *álgebra de Boole* es un reticulado acotado complementado $(B, \vee, \wedge, 0, 1, {}^{c})$ distributivo.

Álgebras de Boole

Definición

Un *álgebra de Boole* es un reticulado acotado complementado $(B, \vee, \wedge, 0, 1, {}^c)$ distributivo.

Ejemplo

- toda álgebra de conjuntos $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, A)$ es un álgebra de Boole.
- $\mathbf{D_n}$ es un álgebra de Boole sii existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$, todos primos distintos dos a dos, tales que $n = p_1 \ldots p_k$.

Álgebras de Boole

Definición

Un *álgebra de Boole* es un reticulado acotado complementado $(B, \vee, \wedge, 0, 1, {}^c)$ distributivo.

Ejemplo

- toda álgebra de conjuntos $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, A)$ es un álgebra de Boole.
- $\mathbf{D_n}$ es un álgebra de Boole sii existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$, todos primos distintos dos a dos, tales que $n = p_1 \ldots p_k$.

Proposición (Leyes de De Morgan)

En toda álgebra de Boole $(B, \vee, \wedge, 0, 1, {}^c)$*, se dan*

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \quad \textit{y} \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y.$$

Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Un *isomorfismo de álgebras de Boole*
$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ es un isomorfismo de reticulados que además satisface que para todo $x \in B$,

$$f(\neg x) = \neg' f(x) \;\text{ y }\; f(0) = 0' \;\text{ y }\; f(1) = 1'.$$

Teorema

$f : (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1) \to (B', \vee', \wedge', \neg', 0', 1')$ *es isomorfismo de álgebras de Boole sii* $f : (B, \leq) \to (B', \leq')$ *es isomorfismo de posets.*

Átomos e irreducibles

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset con elemento mínimo 0 y $a \in P$. Decimos que a es *átomo* en $\mathbf{P}$ sii $a \neq 0$ y, para todo $b \in P$,

$$b \leq a \text{ implica } b = a \text{ o } b = 0,$$

es decir, a **cubre a** 0.

Átomos e irreducibles

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset con elemento mínimo 0 y $a \in P$. Decimos que a es *átomo* en $\mathbf{P}$ sii $a \neq 0$ y, para todo $b \in P$,

$$b \leq a \text{ implica } b = a \text{ o } b = 0,$$

es decir, a **cubre a** 0.

Definición

Sea $\mathbf{P} = (P, \leq)$ un poset reticulado a es *(supremo) irreducible* en $\mathbf{P}$ sii $a \neq 0$ (si existiere elemento mínimo 0) y para todo $b, c \in P$,

$$a = b \vee c \text{ implica } a = b \text{ o } a = c,$$

es decir, si a **cubre exactamente a un elemento**.

Irreducibles y átomos en $\mathbf{D_n}$

1. Los átomos se corresponden con los primos y los irreducibles con las potencias de primos.
2. Todo irreducible sólo puede cubrir a un elemeto que es irreducible o 1.
3. De todos los elementos que cubren a un irreducible, a lo sumo uno puede ser irreducible.

Irreducibles y átomos en $\mathbf{D_n}$

1. Los átomos se corresponden con los primos y los irreducibles con las potencias de primos.
2. Todo irreducible sólo puede cubrir a un elemeto que es irreducible o 1.
3. De todos los elementos que cubren a un irreducible, a lo sumo uno puede ser irreducible.

¿Cuáles de los siguientes reticulados son isomorfos a algún $\mathbf{D_n}$?

Irreducibles y átomos en $\mathbf{D_n}$

1. Los átomos se corresponden con los primos y los irreducibles con las potencias de primos.
2. Todo irreducible sólo puede cubrir a un elemeto que es irreducible o 1.
3. De todos los elementos que cubren a un irreducible, a lo sumo uno puede ser irreducible.

¿Cuáles de los siguientes reticulados son isomorfos a algún $\mathbf{D_n}$?