Práctico 7

Objetivos.

- Aprender el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
- Familiarizarse con las transformaciones lineales.
- Aprender a calcular el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación lineal respecto a las bases canónicas.
- Aprender a decidir si una función es una transformación lineal, un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo.
- Familiarizarse con el teorema sobre la dimensión del núcleo y la imagen.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Gram-Schmidt

(1) Dados los vectores $v_1 = (1, 1, 1)^t, v_2 = (0, 1, 0)^t, v_3 = (0, 0, 1)^t$:
  (a) Aplicar Gram-Schmidt y ortonormalizarlos.
  (b) Si w_1, w_2, w_3 es la base ortonormal obtenida en a), encontrar una matriz triangular superior R tal que $(v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3)R$.

(2) Si $\{w_1, \dots, w_n\}$ es base ortogonal[1] de $\mathbb{R}^n$ entonces la matriz $Q = (w_1 \dots w_n)$, con w_i vectores columna, cumple $Q^T Q = D$ con $D = \mathrm{diag}(|w_1|^2, |w_2|^2, \dots, |w_n|^2)$.

(3) ⓐ Demostrar que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible es un producto $A = QR$ de matrices $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde $Q^T Q = Id_n$ y R es triangular superior.

Transformaciones lineales

(4) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.
  (a) $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2$, $T(x, y, z) = (x + z, y - z)$.
  (b) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y) = xy$.
  (c) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$.
  (d) La traza $\mathrm{Tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.
  (e) El determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.
  (f) $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

(5) Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$.
  (a) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.
  (b) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

(6) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$.

[1] En particular, si la base es ortonormal, la matriz Q es ortogonal, y no es difícil de ver que vale la recíproca.

(a) Calcular $T(2,3,8)$ y $T(0,1,-1)$.

(b) Calcular $T(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. Es decir, dar una fórmula para T como la de los Ejercicios (4a) y (8).

(c) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que[2] $T(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Observación.

(i) En el Ejercicio (6b) lo que hicimos fue deducir cuánto vale la transformación lineal en todos los vectores de $\mathbb{K}^3$ a partir de saber cuánto vale la transformación lineal en la base canónica. **¡A partir del valor de T en una base podemos saber el valor de T en todo el espacio!** Esto vale para cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales y cualquier base, porque las transformaciones lineales respetan combinaciones lineales y todo vector de un espacio vectorial es combinación lineal de los vectores de una base. Esto es parte del enunciado del Teorema 4.1.1 que lo veremos más en detalle en el próximo práctico.

(ii) La matriz del Ejercicio (6c) es la matriz de la transformación lineal T con respecto a la base canónica. En el próximo práctico aprenderemos a calcular la matriz de una transformación lineal con respecto a distintas bases.

(7) Sea $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ la transformación lineal definida por: Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$T(A) = (a - c + 2d)x^3 + (b + 2c - d)x^2 + (-a + 2b + 5c - 4d)x + (2a - b - 4c + 5d).$$

(a) Decir cuáles de las siguientes matrices están en el núcleo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Decir cuáles de los siguientes polinómios están en la imagen:

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \qquad q(x) = x^3, \qquad r(x) = (x-1)^2.$$

(8) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$.

(a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1,1,1)$, $(-5,1,1)$.

(b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0,1,0)$, $(0,1,7)$.

(c) Dar un conjunto de generadores del núcleo, y describir mediante ecuaciones (implícitamente) a la imagen.

(d) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

[2] En esta parte del ejercicio, y en todos los ejercicios similares, escribiremos/pensaremos a los vectores de $\mathbb{K}^3$ como matrices columna.

(9) Sea $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ dada por $T(v) = Av$, donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Dar un conjunto de generadores de $\mathrm{Nu}(T)$, y describir implícitamente a $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Exhibir una base y calcular la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

(c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.

(d) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$.

(10) a Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial no nulo y $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una transformación lineal. Probar que $T = 0$ ó T es un epimorfismo.

(11) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

(a) Probar que T es un epimorfismo.

(b) Dar la dimensión del núcleo de T.

(c) Encontrar una matriz A tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A?

(12) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios anteriores son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos. Para las que sean isomorfismos, hallar la inversa.

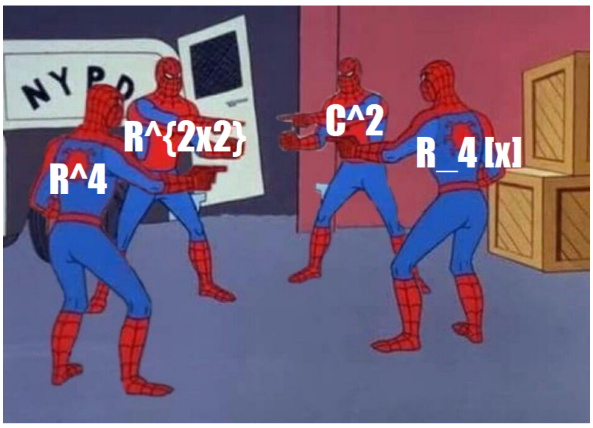
(13) Encontrar un isomorfismo entre

(a) $\mathbb{R}^{mn}$ y el conjunto de matrices $m \times n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

(c) a $\mathbb{R}$ y $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ definido como en ejercicio 1 del Práctico 6.

Observación: Por lo visto en el teórico y en el Ejercicio 13, resulta que $\mathbb{R}^{mn}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial) y $\mathbb{R}_n[x]$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esto justifica, por ejemplo, que cuando trabajamos con polinomios y matrices siempre terminemos trabajando con vectores en $\mathbb{R}^n$. Podemos ejemplificar la situación con el siguiente meme (entiendase $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial):



(14) Shelby y Melina[3] están estudiando sobre la existencia de transformaciones lineales. Llegan a la conclusión de que no existe ninguna transformación lineal tal que
  (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\dim \operatorname{Im} T = 2$ y $\dim \operatorname{Nu} T = 2$.
  (b) T inyectiva, con $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (7, 2, 10)$.
  (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ y $T(-3, 2) = (1, 1)$.

Explicar en cada caso porqué Shelby y Melina tienen razón.

(15) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
  (a) Sea $T : \mathbb{K}^6 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ un epimorfismo y W un subespacio de $\mathbb{K}^6$ con $\dim W = 3$. Entonces existe $0 \neq w \in W$ tal que $T(w) = 0$.
  (b) Sean $T, U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{array}{lcl} T(1,0,1) = (1,2,1) & , & T(2,1,0) = (2,1,0), T(-1,0,0) = (1,2,1) \\ U(1,1,1) = (1,1,0) & , & U(3,2,1) = (0,0,1), U(2,2,-1) = (3,-1,2). \end{array}$$

  Entonces $T = U$.
  (c) Si $\dim V$ es impar, entonces no existe ninguna transformación lineal $T : V \to V$ tal que $\operatorname{Nu} T = \operatorname{Im} T$.
  (d) Sean V y W espacios vectoriales con $\dim V = n = \dim W$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal tal que existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ es una base, entonces T es un isomorfismo.

(16) Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sea W^V el espacio vectorial de todas las funciones de V en W. Denotamos $\operatorname{Hom}(V, W) := \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$.
  (a) Probar que $\operatorname{Hom}(V, W)$ es un subespacio de W^V.
  (b) Sean T, U transformaciones lineales de V en V. Probar que $T \circ U$ es una transformación lineal, donde $\circ$ denota la composición usual de funciones.

Observación: De (16a) podemos ver que el conjunto $\operatorname{Hom}(V, W)$ de todas las transformaciones lineales de V en W es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (¿se imagina analizar transformaciones lineales entre conjuntos de transformaciones lineales?).

En el caso particular en que $W = \mathbb{K}$, se denota $V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$ y se lo llama el *espacio dual* de V, y a sus elementos se los llama *funcionales lineales*. Así, por ejemplo, la función traza $\operatorname{Tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal.

De (16b) podemos ver que uno puede definir un producto (la composición) en $\operatorname{Hom}(V, V)$ y se verifica de manera no tan difícil que este conjunto cumple una serie de propiedades de manera que $(\operatorname{Hom}(V, V), +, \cdot, \circ)$ es un *álgebra*.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(17) Encontrar vectores $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ donde $w_1 = (1, 1, 1)$.

(18) Repetir el ejercicio (4) con las siguientes casos (en el item (f) $C[0, 1]$ denota las funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$):
  (a) $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $T(x, y) = (x + 1, y)$.
  (b) $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, $T(x, y, z) = (z - y, 0)$.
  (c) $T : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}$, $T(p(x)) = p(a)$, donde $a \in \mathbb{K}$ es un escalar fijo.
  (d) $L_A : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}^{n \times n}$, $L_A(B) = AB$, donde A es una matriz fija.
  (e) $\operatorname{ad}_A : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}^{n \times n}$, $\operatorname{ad}_A(B) = AB - BA$, donde A es una matriz fija.

[3] Dos estudiantes del turno mañana.

(f) $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $(T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(19) Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \text{Re}(z)$. Decir si T es una transformación lineal considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(20) Dar una base del núcleo y caracterizar por ecuaciones la imagen de las siguientes transformaciones lineales:

(a) $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, 0)$.

(b) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

(c) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $T(p(x)) = (p(1), p(2))$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 & x_1 - 2x_3 \\ -x_1 & x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

(21) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}[x]$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = x^2 + 2x + 3$, $T(e_2) = -x^2 + 5$ y $T(e_3) = -2x^2 + 3x + 1$. Calcular $T(a, b, c)$ para todo $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

(22) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Sean $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$. Entonces existe un isomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(W_1) = W_2$.

(b) Existe una transformación lineal suryectiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(e_1) = (-1, 2, 0, 0)$, $T(e_2) = (1, 2, 1, 0)$, $T(e_3) = (3, 14, 5, 0)$ y $T(e_4) = (8, 0, 2, 1)$.

(c) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ genera W, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V.

(d) Existe un epimorfismo $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1, 0, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 0, -1, 2)$ pertenecen al núcleo de T.

(23) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $\text{Nu}(T) \subseteq \text{Nu}(T^2)$.

(b) $\text{Im}\, T \cap \text{Nu}\, T = \{0\} \iff \text{Nu}\, T^2 \subset \text{Nu}\, T$.

(24) Sea $V = \mathbb{K}[x]$. Sean $D : V \to V$ el operador *derivación*, es decir $D(p(x)) = p'(x)$, y T el operador *multiplicación por x*, es decir $T(p(x)) = xp(x)$.

(a) Probar que $D \circ T - T \circ D = \text{Id}$.

(b) Probar por definición que D es un epimorfismo y que no es un monomorfismo.

(c) Sea $E : V \to V$ el operador *integración indefinida*, es decir

$$E(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_0x^{n+1}.$$

Probar que $D \circ E = \text{Id}$ pero que $E \circ D \neq \text{Id}$.

Observación: Este ejercicio nos muestra que en dimensión infinita hay propiedades de transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita que ya no valen. Por ejemplo (b) nos dice que Teorema 4.3.8 no vale si $\dim V$ es infinita.

Ayudas.

(3) Considerar el conjunto de n vectores dados por las columnas de A. Aplicar Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal $\{\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n\}$. Normalizarlos con $w_i = \frac{\tilde{w}_i}{|w_i|}$ Formar con los vectores columna $\{w_i\}_{i=1}^n$ la matriz Q y ver que se cumple $A = QR$ con R triangular superior. Para esto despejar las columnas de A en términos de los w_i.

(10) Usar que $\dim V = \dim \text{Nu}\, T + \dim \text{Im}\, T$.

(13c) Pensar en una transformación biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_{>0}$ que lleve sumas en productos cuya inversa lleve productos en sumas.