1	2	3	4	5	6	7		Calif.

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Algebra II - Final (cursada 2020/21)

6 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Sea A una matriz de tamaño $n\times n$ con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   - A es invertible.
   - El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para todo $Y \in \Bbbk^{n\times 1}$.
   - El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución (la trivial).
2. (12 pts) Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim V - \dim(\mathrm{Nu} f)$.
3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
   (a) (3 pts) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente. Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.
   (b) (3 pts) Existe un isomorfismo entre $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \operatorname{tr} A = 0\}$ y $\mathbb{R}^7$.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ la transformación lineal tal que $T(p(x)) = x\,p'(x) + p(1)$. Probar que $\det T = n!$.

5. (15 pts) Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un $\Bbbk$-espacio vectorial V y consideramos los vectores

$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = u_1 - u_2, \qquad v_3 = u_1 - u_2 + u_3, \qquad v_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4.$$

   Probar que, para cada $n = 2, 3, 4$, el subespacio generado por $u_1, u_2, \cdots, u_n$ coincide con el subespacio generado por $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Deducir que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ también es una base de V.

6. (a) (8 pts) Enunciar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

   (b) (12 pts) Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(-1, 0, 1, 1, 0)$ y $(-2, 2, 4, 5, 1)$. Hallar una base ortogonal de S y una de $S^{\perp}$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, $T(A) = A^t$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   (a) (10 pts) Probar que 1 y -1 son los autovalores de T.

   (b) (10 pts) Dar bases de los correspondientes autoespacios y decidir si T es diagonalizable.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS