Práctico 6

Espacios vectoriales

Objetivos.

- Familiarizarse con los conceptos de espacio y subespacio vectorial.
- Familiarizarse con los conceptos de conjunto de generadores e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.
- Aprender a caracterizar subespacios por generadores y de manera implícita.
- Dado un subespacio W, aprender a extraer una base de cualquier conjunto de generadores de W, y a completar cualquier subconjunto linealmente independiente de W a una base.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco. $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

(1) Probar que el conjunto de números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones $x \oplus y = x \cdot y$ y $\lambda \odot x = x^\lambda$.

(2) Si $(V, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S es un conjunto cualquiera, sea
$$V^S = \{f : S \to V : f \text{ es una función}\},$$
el conjunto de todas las funciones de S en V. Definimos en V^S la suma y el producto por escalares de la siguiente manera: Si $f, g \in V^S$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces $f + g : S \to V$ y $c \cdot f : S \to V$ están dadas por
$$(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad (c \cdot f)(x) = c \odot f(x), \qquad \forall\, x \in S.$$
Probar que $(V^S, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Observación: Los espacios $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^{m\times n}$ son casos particulares del Ejercicio 2. En efecto, $\mathbb{K}^n$ se identifica con el conjunto de todas las funciones de $S = \{1, \dots, n\}$ en $V = \mathbb{K}$ donde cada n-upla $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ representa la función del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en $\mathbb{K}$ dada por $f(i) = a_i$. Análogamente una matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$ se puede pensar como una función del conjunto $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ en $\mathbb{K}$.

Entonces el Ejercicio 2 nos da otra demostración de que $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^{m\times n}$ son espacios vectoriales.

(3) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

(4) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.
- (a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
- (b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- (c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.
- (d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.
- (e) $B \cup D$.
- (f) $B \cap D$.

(5) (a) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{K}^{n\times n}$ son subespacios vectoriales.
- (i) El conjunto de matrices invertibles.
- (ii) El conjunto de matrices de traza cero $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \ : \ \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. ¿Qué pasa si cambiamos 0 por cualquier otro escalar de $\mathbb{K}$?

(iii) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.

(b) Decidir si el subconjunto de polinomios de grado 2, junto con el polinomio nulo, es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$.

(c) Decidir si $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Observación. Podemos apreciar como un simple cambio en la condición que define al subconjunto hace que dicho subconjunto sea o no un subespacio vectorial.

(6) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(7) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

(8) Sean $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$ y $z = (3, 4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.

(a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w de dos maneras distintas, con coeficientes todos no nulos.

(b) Escribir z como combinación lineal de u y v.

(c) Escribir z como combinación lineal de u y w.

(d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

Observación. En (a) de este ejercicio vemos como un vector se puede escribir de varias maneras como combinación lineal de vectores dados. Esto pasa porque $\{u, v, w\}$ es LD.

(9) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.

(a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del Ejercicio 7 - Práctico 2.

(b) Los conjuntos descriptos en el Ejercicio 8 - Práctico 2.

(c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p'(1) = 0 \text{ y } p(2) = p(3)\}$

(d) $W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \right\}$.

(10) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

(a) $\langle (1, 0, 3), (0, 1, -2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $\langle x^3 + 2x + 1, -x^2 - x, 2x^3 + 3x^2 - x + 4 \rangle \subseteq \mathbb{R}_4[x]$.

(11) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1, 0), (2, 1, -2, 0), (3, 0, -1, 0) \rangle.$$

(a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(12) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

(a) $\{(4, 2, -1), (0, 2, 1), (-1, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\} \subset \mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(c) $\{1, x + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x + 1\} \subset \mathbb{R}_4[x]$.

(d) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

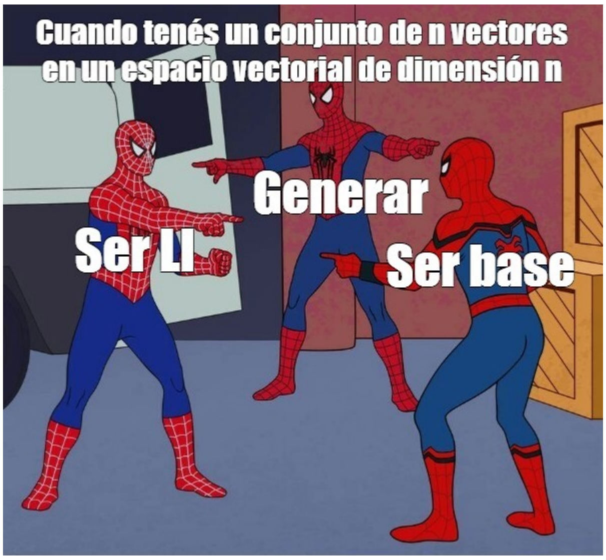
(e) ⓐ $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(13) (a) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

(b) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces $\alpha+\beta, \alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

(14) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.
(a) Los subespacios del Ejercicio (9).
(b) $W = \langle (1,0,-1,1), (1,2,1,1), (0,1,1,0), (0,-2,-2,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
(c) Matrices triangulares superiores 2×2.
(d) El conjunto de matrices triangulares superiores $n \times n$ ($n \geq 3$) con coeficientes reales (probar primero que es un subespacio).

Observación (útil para Ejercicio 15 y para la vida). Dado un espacio vectorial de dimensión n, entonces un conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es LI $\iff$ genera $\iff$ es base. Para no olvidarnos de esto, vamos a dejarlo anotado.



(15) Decidir si es posible extender los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales. En caso afirmativo, extender a una base.
(a) $\{(1,2,1,1), (1,0,1,1), (3,2,3,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
(b) $\{(1,2,0,0), (1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(16) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

(17) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.
(a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.
(b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial W_k de V de dimensión k de manera que $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n$.

(18) Dar una base y la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.
(b) Sean S, T y U subespacios de un espacio vectorial V tales que

$$S \cap T = S \cap U, \; S + T = S + U, \; \text{y } T \subset U.$$

Entonces $T = U$.
(c) ⓐ Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertenece a W.

(d) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.

Definición: Sean W_1, W_2 subespacios de V. Decimos que V es la *suma directa* de W_1 y W_2 si $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, y lo denotamos como $V = W_1 \oplus W_2$.

(20) (a) Probar que $\mathbb{R}^2 = \langle(1,0)\rangle \oplus \langle(0,1)\rangle$.
(b) (i) Probar que el conjunto de matrices simétricas $n\times n$ y el conjunto de matrices antisimétricas $n \times n$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
(ii) ⓐ Probar que $\mathbb{R}^{n\times n} = \{\text{matrices simétricas}\} \oplus \{\text{matrices antisimétricas}\}$.

(21) ⓐ Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ todos distintos. Probar que el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, ..., e^{\lambda_n x}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es LI. Concluir que $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es infinita.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(22) Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.
(a) $\mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y $c \odot (x, y) = (cx, y)$.
(b) $\mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$ y $c \odot (x, y) = (cx, 0)$.

(23) Decidir en cada caso si el subconjunto W dado es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.
(a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1x_3 = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
(b) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, j > 1,\ x_1 = x_j\}$, $V = \mathbb{R}^n$.
(c) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p'(0) + p''(0) = 0\}$, $V = \mathbb{R}[x]$.
(d) $W = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \ : \ a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$, $V = \mathbb{R}[x]$.
(e) El conjunto de matrices triangulares superiores estrictas (es decir, con ceros en la diagonal). $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ ¿Qué pasa si cambiamos cero por cualquier otro escalar?
(f) El conjunto de matrices A tales que $A^2 = 0$. $V = \mathbb{K}^{n\times n}$.
(g) $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^{[0,1]}$.
(h) $W = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ : \ f(x^2) = f(x)^2\}$, $V = \mathbb{R}^{[0,1]}$.

(24) Escribir al vector $1 + 2i$ como combinación $\mathbb{R}$-lineal (es decir, con coeficientes reales) y como combinación $\mathbb{C}$-lineal (es decir, con coeficientes complejos) de los vectores $1 + i$ y $1 - i$.

(25) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.
(a) $\langle(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
(b) $\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.
(c) $\{p_1(x), \ldots, p_n(x)\} \subset \mathbb{R}_{n+1}[x]$ donde $p_1(x), \ldots, p_{n+1}(x)$ tienen todos distinto grado.

(26) En este ejercicio no es necesario hacer ninguna cuenta. Es lógica y comprender bien la definición de LI y LD. Probar las siguientes afirmaciones.
(a) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
(b) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
(c) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.

(27) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.
(a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z = 0, x + y + w = 0\}$.
(b) $W = \langle(-1, 1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 2, -1), (1, 0, 1, 1, 0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^5$.

(c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ a + d = b + c\}$.

(28) Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2, respectivamente. Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$.

(b) Sean V_1 y V_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de A_1 y A_2, respectivamente. Dar un conjunto de generadores de $V_1 + V_2$.

Para el siguiente ejercicio, se recomienda usar la calculadora de matrices para realizar los cálculos, ya que *la vida es eso que pasa mientras uno reduce una matriz* 6×6.

(29) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^6$:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) \ : \ u + v + w = 0, \ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0) \rangle \, .$$

(a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1), \ (0, 0, 0, 1, 0, -1), \ (1, 1, 1, 0, 0, 0), \ (3, 0, 0, 1, 1, 3), \ (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$

(d) Para los vectores v del punto anterior que estén en $W_1 + W_2$, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

(e) ¿Es la suma $W_1 + W_2$ directa?

(30) Sea H el conjunto de las matrices hermitianas $n \times n$ y AH el conjunto de matrices antihermitianas $n \times n$.

(a) Considerando $\mathbb{C}^{n \times n}$ como $\mathbb{R}$-esp. vectorial, ¿son H y AH subespacios vectoriales?

(b) Considerando $\mathbb{C}^{n \times n}$ como $\mathbb{C}$-esp. vectorial, ¿son H y AH subespacios vectoriales?

(c) ⓐ Probar que $\mathbb{C}^{n \times n} = H \oplus AH$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial).

(31) ⓐ Exhibir una base y dar la dimensión de:

(a) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ : \ A^t = A\}$. Usar (20b) para dar la dimensión de las matrices antisimétricas.

(b) $W = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \ : \ A^* = A\}$ (considerado como $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathbb{C}^{n \times n}$). Usar (30c) para dar la dimensión de las matrices antihermitianas.

(c) $W = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \ : \ \operatorname{Tr} A = 0\}$.

(32) Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$, es decir S es el conjunto de funciones *pares* y T el conjunto de funciones *impares*. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = S \oplus T$.

Ayudas. (12e) Plantear la condición de LI y evaluar en algunos x convenientes para obtener condiciones sobre los escalares.

(19c) Usar 14c.

(20b) Probar que, dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumple que $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es una matriz simétrica y $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es una matriz antisimétrica.

(21) Plantear la condición de LI. Derivar $n - 1$ veces la igualdad y evaluar las n igualdades en 0 para sacar una condición sobre los escalares. Si le es útil piense en el caso $n = 2$ o $n = 3$ primero.

(30c) Razone análogamente a 19b.

(31) La idea es similar a 14d. Para ver que son LI, plantear la condición directamente y usar que E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ es base de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Comentario: Como podrá observar, muchos de los ejercicios de este práctico se reducen a hacer cuentas con sistemas de ecuaciones como en el Práctico 2, como lo ejemplifican los siguientes memes: