

河南师范大学试卷

2019 — 2020 学年第一学期期末考试

《线性代数》(A 卷)

(不能使用计算器)

班级	学号	姓名	总分		
题 目	一	二	三	四	
得 分					
阅卷人					

一、填空题 (共 10 空, 每空 3 分, 共 30 分) 请将正确答案写在题目后面的横线上。

1. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} 3a_1+b_1 & 2b_1+4c_1 & -c_1 \\ 3a_2+b_2 & 2b_2+4c_2 & -c_2 \\ 3a_3+b_3 & 2b_3+4c_3 & -c_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 \mathbf{A} 为 3 阶矩阵, 且 $|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}$, 则行列式 $|-2\mathbf{A}^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 已知矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} = (c_{ij})_{4 \times 3}$, 且满足 $\mathbf{AC} = \mathbf{CB}$, 则 \mathbf{B} 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 阶方阵.

4. 设 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, \mathbf{A} 为 4×3 矩阵, 且 $r(\mathbf{A}) = 2$, 则 $r(\mathbf{AB}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 五元线性方程 $2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 0$ 的基础解系含 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个解向量.

6. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的三个解, 且 $r(\mathbf{A}) = 3, \alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$

$2\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 写出方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解 $\underline{\hspace{2cm}}.$

7. 若向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 3, -1), \alpha_3 = (5, 3, t)$ 线性相关, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 已知 $|\mathbf{A}| = 6$, 且 2 是方阵 \mathbf{A} 的一个特征值, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$ 必是伴随矩阵 \mathbf{A}^* 的一个特征值.

9. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，则矩阵 A _____ 对角化（填“可以”或“不可以”）。

10. 二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ 的秩为_____。

二、简答题（共 4 题，每题 10 分，共 40 分），写出必要的答题步骤

1. 计算下列 2019 阶行列式

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 且矩阵 B 满足关系式 $AB = BA$ ，求 B 。

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ，且 A 的线性无关的特征向量的最多个数为两个，问 λ 满足什么条件？

4. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，又矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ，判定矩阵 B 是否为正交矩阵，给出理由，并求 B^{-1} 。

三、计算题（共 2 题，第一题 10 分，第二题 12 分，共 22 分），写出必要的答题步骤

1. 已知方程组 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$ 有公共解，

求 a 的值，并求出通解.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求一个正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵.

四、证明题（共 2 题，每题 4 分，共 8 分），写出必要的答题步骤

1. 已知向量 α 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中每个向量都正交，求证： α 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 任一
线性组合正交.

2. 设 A 为 n 阶正定矩阵，证明:存在实数 λ ，使得矩阵 $A - \lambda E$ 也为正定矩阵.