# 河南师范大学

# 2019-2020学年第一学期《概率论与数理统计》试卷

姓名：__________学号：__________ 班级：__________任课教师：__________

**一. 填空题**（每空 2 分，共 22 分）

1. 设 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$，$P(A \cup B) = 0.8$，$P(A) = 0.6$，则 $P(B) =$ _____。

2. 将 4 个球随机放入 3 个盒子中，至少有一个盒子没有球的概率是 _____。

3. 随机变量 $X \sim P(\lambda)$，$Y \sim e(\lambda)$，$P(X \leq 1) = 3P(Y \geq 1)$，则 $\lambda =$ _____。

4. 若 $EX = 0$，$Var(X) = 1$，$EY = 1$，$Var(Y) = 4$，$E(X+Y)^2 = 8$，则 $E(2X+3Y) =$ _____，$\rho(X,Y) =$ _____。

5. 设 $EX = 3$，$EX^2 = 15$，则由切比雪夫不等式 $P(0 < X < 6) \geq$ _____。

6. 设每箱货物的重量是随机的，平均值为 40 公斤，标准差为 5 公斤。100 箱货物装一车，由中心极限定理，一车货物的总重在 3900 公斤到 4050 公斤的概率约为 _____。（$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9773$）

7. 设总体 $X \sim N(0, 2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是其样本，
$$U = \frac{A(X_1 - X_2)}{\sqrt{(X_3 + X_4)^2 + BX_5^2}}$$
服从 $t$ 分布，其自由度为 _____，常数 $A =$ _____，$B =$ _____。

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，均值、方差均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一组样本，则 $\mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信下限为 __________。

## 二. 选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 下面的性质和 $A, B$ 互斥等价的是（　）。

   A）$\bar{A} \subseteq B$　　　B）$A \cup \bar{B} = \bar{B}$

   C）$B\bar{A} = A$　　　D）$\bar{A}\bar{B} = \emptyset$

2. 下列函数中不能作为随机变量分布函数的是（　）。

   A）$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$　　　B）$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$

   C）$\begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 + x^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases}$　　　D）$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ 1, & \frac{3\pi}{2} < x \end{cases}$

3. 设二维连续型随机变量 $(X, Y)$ 的联合密度函数如下（其中 $C$ 为常数），其中 $X, Y$ 独立的是（　）。

   A）$\begin{cases} C(x+y), & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$　　　B）$\begin{cases} Cxy, & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

   C）$\begin{cases} C(x+y), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$　　　D）$\begin{cases} Cxy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

4. 设 $(X, Y) \sim N(1, 2, 1^2, 2^2; 0.5)$，$Z = aX + bY$，若 $EZ = 1$，$X, Z$ 独立，则（　）。

   A）$a = -1,\ b = 1$　　　B）$a = -3,\ b = 2$

   C）$a = 1,\ b = -1$　　　D）$a = 2,\ b = -3$

5. 设总体 $X$ 的期望 $\mu$ 已知，而均值 $\sigma^2$ 未知，$X_1, X_2, X_3$ 是 $X$ 的样本，下列不是统计量的是（　）。

   A）$X_1 + X_2 + X_3$　　　B）$X_1 + EX_2$

   C）$X_1 - \sigma^2$　　　D）$X_1 + \sin(X_2)$

6. 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是参数 $\theta$ 的相互独立的无偏估计，$2Var(\hat{\theta}_1) = 3Var(\hat{\theta}_2)$，要使得 $a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2$ 是 $\theta$ 的最有效的无偏估计，则（　）。

   A）$a = \frac{3}{5},\ b = \frac{2}{5}$　　　B）$a = \frac{2}{5},\ b = \frac{3}{5}$

   C）$a = \frac{9}{13},\ b = \frac{4}{13}$　　　D）$a = \frac{4}{13},\ b = \frac{9}{13}$

## 三. 解答题 ( 共 60 分 )

1. ( 8 分 ) 已知某种病菌在所有人口中的带菌率为 10%。检测时，带菌者呈阳性、阴性反应的概率为 0.95 和 0.05，而不带菌者呈阳性、阴性反应的概率为 0.01 和 0.99。现在某人经检验为阳性，问其为带菌者的概率是多少？

2. ( 8 分 ) 已知离散型随机变量 $X$ 的概率函数（分布律）为

$$P(X=-1)=0.3,\ P(X=0)=0.3,\ P(X=2)=0.4$$

求 $Y=X(X+1)$ 的概率函数（分布律）和 $EY^2$。

3. ( 12 分 ) 连续型随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 < x < 1 \\ c(3-x), & 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

1 ) 验证常数 $c = \frac{1}{2}$;

2 ) 计算 $X$ 的期望和方差;

3 ) 求 $Y = X^2$ 的密度函数。

4.（12 分）二维连续型随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}A(2x+y), & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1）验证 $A=\frac{3}{2}$；

2）计算 $P(X+Y<1)$；

3）求 $X,Y$ 的边缘分布，并判断 $X,Y$ 是否独立。

5.（10 分）设 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-2)}, & x\geq 2\\ 0, & x<2\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 未知。求 $\lambda$ 的矩估计和极大似然估计。

6.（10 分）某种农作物的亩产量服从正态分布 $N(900,\sigma^2)$（单位：千克），现在使用一种新的肥料，测得 10 亩农作物产量的样本均值为 $\bar{x}=980$，样本标准差 $s=50$，取显著水平 $\alpha=0.05$，该种肥料是否显著地提高了农作物的产量？（$t_{0.025}(9)=2.2622, t_{0.025}(10)=2.2281, t_{0.05}(9)=1.8331, t_{0.05}(10)=1.8125$）