座位号

专业

学院

学号

姓名

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

线性代数期末考试试卷及答案

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上(或答题纸上)；

3．考试形式：开（闭）卷；

4. 本试卷共 五大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
评卷人						

一、单项选择题（每小题 2 分，共 40 分）。

1．设矩阵 A为2×2矩阵，B为2×3矩阵，C为3×2矩阵，则下列矩阵运算无意义的是【 】

A． BAC　　B． ABC　　C． BCA　　D． CAB

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+E=0$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则必有 【 】

A． 矩阵 A 不是实矩阵　　B． A=-E　　C． A=E　　D． det(A)=1

3. 设 A 为 n 阶方阵，且行列式 det(A)=1 ，则 det(-2A)= 【 】

A． -2　　B． $(-2)^n$　　C． -2^n　　D． 1

4. 设 A 为 3 阶方阵，且行列式 det(A)=0，则在 A 的行向量组中 【 】

A.必存在一个行向量为零向量

B.必存在两个行向量，其对应分量成比例

C． 存在一个行向量，它是其它两个行向量的线性组合

D． 任意一个行向量都是其它两个行向量的线性组合

5．设向量组a_1,a_2,a_3线性无关，则下列向量组中线性无关的是 【 】

A． a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_1　　B． $a_1,a_2,2a_1-3a_2$

C． $a_2,2a_3,2a_2+a_3$　　D． a_1-a_3,a_2,a_1

6. 向量组(I)：$a_1,\ \ ,a_m\ (m\geq3)$ 线性无关的充分必要条件是 【 】

A.(I)中任意一个向量都不能由其余 m-1 个向量线性表出

B. (I)中存在一个向量，它不能由其余 m-1 个向量线性表出

C. (I)中任意两个向量线性无关

D. 存在不全为零的常数 $k_1,\cdots,k_m$，使 $k_1a_1+\quad+k_ma_m\neq 0$

7. 设 a 为 $m\times n$ 矩阵，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解的充分必要条件是

【　　】

A. A 的行向量组线性相关　　　B. A 的列向量组线性相关

C. A 的行向量组线性无关　　　D. A 的列向量组线性无关

8. 设 a_i、b_i 均为非零常数（i=1，2，3），且齐次线性方程组 $\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\end{cases}$

的基础解系含 2 个解向量，则必有　　　　　【　　】

A. $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$　　B. $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$　　C. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$　　D. $\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$

9. 方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2+x_3=1\\ 3x_1+3x_2+2x_3=a+1\end{cases}$ 有解的充分必要的条件是　　　【　　】

A. a=-3　　B. a=-2　　C. a=3　　D. a=1

10. 设 η_1，η_2，η_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则下列向量组中也为该方程组的一个基础解系的是　　　【　　】

A. 可由 η_1，η_2，η_3 线性表示的向量组　　B. 与 η_1，η_2，η_3 等秩的向量组

C. $\eta_1-\eta_2$，$\eta_2-\eta_3$，$\eta_3-\eta_1$　　D. η_1，$\eta_1-\eta_3$，$\eta_1-\eta_2-\eta_3$

11. 已知非齐次线性方程组的系数行列式为 0，则　　　【　　】

A. 方程组有无穷多解　　B. 方程组可能无解，也可能有无穷多解

C. 方程组有唯一解或无穷多解　　D. 方程组无解

12. n 阶方阵 A 相似于对角矩阵的充分必要条件是 A 有 n 个　　　【　　】

A. 互不相同的特征值　　B. 互不相同的特征向量

C. 线性无关的特征向量　　D. 两两正交的特征向量

13. 下列子集能作成向量空间 R^n 的子空间的是　　　【　　】

A. $\{(a_1,a_2,\ ,a_n)\mid a_1a_2=0\}$　　B. $\{(a_1,a_2,\ ,a_n)\mid \sum_{i=1} a_i=0\}$

C. $\{(a_1,a_2,\ ,a_n)\mid a_i\in z,i=1,2,\ ,n\}$　　D. $\{(a_1,a_2,\ ,a_n)\mid \sum_{i=1} a_i=1\}$

14. 若 2 阶方阵 A 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$，E 为 2 阶单位矩阵，则方阵 E－A 必相似于矩阵【　　】

A. $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 4\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -4\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0 & 0\\-2 & 4\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\-2 & -4\end{bmatrix}$

15.若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & a\\0 & a & 8\end{bmatrix}$ 正定,则实数 a 的取值范围是　　【　　】

A. $a<8$　　B. $a>4$

C. $a<-4$　　D. $-4<a<4$

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）。

16. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，记 A^T 为 A 的转置，则 $A^T B=$______________。

17. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$ 则行列式 det（AA^T）的值为__________.

18. 行列式 $\begin{vmatrix}3 & 4 & 8\\5 & 9 & 1\\7 & 2 & 6\end{vmatrix}$ 的值为______________________.

19. 若向量组 $a_1=(1, 2, 3), a_2=(8, t, 24), a_3=(0, 0, 1)$ 线性相关，则常数 t=_______.

20.向量组（10，20），(30，40)，（50，60）的秩为___________.

21.齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\2x_1+x_2-3x_3=0\end{cases}$ 的基础解系所含解向量的个数为_______

22.已知 $x_1=(1, 0, 2)^T$、$x_2=(3, 4, 5)^T$ 是 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解向量，则对应齐次线性方程 $Ax=0$ 有一个非零解 ξ =_________.

23.矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 的全部特征值为 _______________。

24．设 λ 是 3 阶实对称矩阵 A 的一个一重特征值，$\xi_1=(1, 1, 3)^T$、$\xi_2=(4, a, 12)^T$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则实常数 a=_________.

25.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2+8x_1x_3+x_3^2$ 对应的实对称矩阵 A=_________.

三、计算题（，共 50 分）

25．计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 7 & 2 \end{vmatrix}$的值。

26．设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A^2-AB=E$，其中 E 是三阶单位矩阵，求矩阵 B。

27．a 取何值时，方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=a \end{cases}$有解？在有解时求出方程组的通解。

28．设向量组a_1,a_2,a_3线性无关。试证明：

向量组$\beta_1=a_1+a_2+a_3,\beta_2=a_1-a_2,\beta_3=a_3$线性无关。

29．试证向量组$a_1=(1,0,1),a_2=(1,1,0),a_3=(0,1,1)$为$R^3$的一组基，并求向量$x=(2,2,2)$在该组基下的坐标。

2007 线性代数考试试题 B

----------参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分）

1.A　2.A　3.B　4.C　5.D　6.A　7.B　8.C　9.D　10.D

11.B　12.C　13.B　14. C　15. D

二、填空题（本大题共 10 空，每空 3 分，共 30 分）

16. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 17. 9 18. -360 19. 16 20. 2

21. 1 22. $(2,4,3)^T$(或它的非零倍数) 23. 1、2、3

24. 4 25. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

26. $D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$…………4 分 $=96.$…………8 分

27. 解:由于 $A^2-AB=E$, 因此 $AB=A^2-E$, 又 $|A|=1\neq0$, 故 A 可逆, ……2 分

所以 $B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……8 分

28. $\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$, 故当且仅当 a=2 时，有解。…………2 分

当 $a=2$ 时，得 $\begin{cases} x_1=3-2x_2 \\ x_3=-2+x_2 \end{cases}$ (x 是任意)，

所以 $x=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k是任意常数)…………8 分 或

$\begin{cases} x_1=-1-2x_3 \\ x_2=2+x_3 \end{cases}$ (x_3任意)，即 $x=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k是任意常数).…………8 分

29. 证一：设有一组数 x_1,x_2,x_3 使 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0,$…………2 分

即 $(x_1+x_2)a_1+(x_1-x_2)a_2+(x_1+x_3)a_3=0$

由 a_1,a_2,a_3 线性无关，有

$\begin{cases} x_1+x_2 & =0 \\ x_1-x_2 & =0 \\ x_1 \quad +x_3 & =0 \end{cases}$…………2 分

该方程组只有零解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。…………6 分

证二：因 a_1, a_2, a_3 线性无关，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 a_1, a_2, a_3 线性表出的系数行列式

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 故线性无关。（若只证明△≠0，不强调 a_1, a_2, a_3 线性无关这一条件，就得出 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关的结论，扣 2 分）。故命题得证。…8 分

30．证明：令

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，则 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，故向量组

$a_1 = (1,0,1), a_2 = (1,1,0), a_3 = (0,1,1)$ 为 R^3 的一组基，…………4 分

又设 $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，得线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$

解之得向量 $x = (2,2,2)$ 在该组基下的坐标为 $x = (1,1,1)$ 。…………8 分