线　　封　　密

# 河南师范大学 2016—2017 学年度第 1 学期

## 2016 级期末考试《高等数学》（公修课） A 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 合分人 | 复核人 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A\neq 0$，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $\operatorname{sgn}A\cdot f(x)$ > 0 。或 = |A|

2. 反三角函数 $y=\arcsin x$ 的主值区间是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

3. 设 $A$ 是常数，如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则称 $y=A$ 是 $y=f(x)$ 的 水平 渐近线。

4. $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的 充分 条件。

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$ $1+e$。

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，那么 $a,b=$ 2, -1。

7. 设 $f(x)$ 可导，且 $f'(1)=2$，那么 $\left[f(e^x)\right]'\Big|_{x=0}=$ 2。

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\lambda x}}=$ 0 （$\alpha$ 为任意实数，$\lambda>0$）。

9. 设 $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$，则 $\int e^x f(e^x)dx=$ $F(e^x)+C$。

10. 设常数 $A=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+k)-f(x)]=$ $kA$。



| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

11. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（ B ）。

（A）$f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小　（B）$f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小　（D）$f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

12. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（ A ）

（A）充分必要条件　（B）充分条件但非必要条件

（C）必要条件但非充分条件　（D）既非充分条件又非必要条件

13. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$，则（ D ）。

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值

（D）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

14. 在下列等式中，正确的结果是（ C ）

（A）$\int f'(x)dx=f(x)$　（B）$\int df(x)=f(x)$

（C）$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　（D）$d\int f(x)=f(x)$

15. 设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $\int f(x)dx=F(x)+C$，$C$ 为任意常数，则下列各式中正确的是（ C ）

（A）$\int f(ax+b)dx=F(ax+b)+C$　（B）$\int f(x^n)x^{n-1}dx=F(x^n)+C$

（C）$\int f(\ln 2x)\frac{1}{x}dx=F(\ln 2x)+C$　（D）$\int f(e^{-x})e^{-x}dx=F(e^{-x})+C$

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

三、计算题（每小题 7 分，共 35 分）

16. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x+1}$ $= e^{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}\cdot(1+\frac{1}{x}) = e^{2}$

17. $y=e^{x^2}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ $= 2xe^{x^2}$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$= e^{u}(u)'$

$= 2xe^{x^2}$.

18. 求由方程 $y=1+xe^{y}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $1+xe^{y}-y=0$.

方程两边求导

$e^{y}+xe^{y}\cdot y'-y'=0$.

$y'=\frac{e^{y}}{xe^{y}-1}$

$y''=\frac{e^{y}y'(xe^{y}-1)-(e^{y}+xe^{y}\cdot y')e^{y}}{(xe^{y}-1)^2}$

$=\frac{-xe^{3y}}{(xe^{y}-1)^3}$



故 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{xe^{3y}}{\dots}$

19. 求 $f(x)=e^{x}$ 的带有拉格朗日型余项的 $n$ 阶麦克劳林公式。

$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots f^{(n)}(x)=e^{x}$

$f(0)=f'(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

故 $e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\theta\in(0,1)$

$e^{x}\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

则误差 $R=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}|x|^{n+1}\ \frac{e^{x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

20. 求 $\int e^{x}\sin x dx$. $= \frac{1}{2}e^{x}(\sin x$

原式 $= -\int e^{x}\,d\cos x$

$= -e^{x}\cos x+\int\cos x\,de^{x}$

$= -e^{x}\cos x+\int e^{x}\,d\sin x$

$= -e^{x}\cos x+e^{x}\sin x+\int e^{x}\sin x dx$

故 $\int e^{x}\sin x dx=\frac{1}{2}[e^{x}(\sin x-\cos x)]+C$

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 四、综合题（每小题5分，共20分）

21. 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程。

当 $t=0$ 时，$x=2, y=1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = -\frac{e^{-t}}{2e^t} = -\frac{e^{-2t}}{2} = -\frac{1}{2e^{2t}}$

当 $t=0$ 时，切线 $k = -\frac{1}{2}$

法线 $k_2 = 2$

切 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

法 $y = 2x - 3$

22. 证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

令 $f(t) = \ln(1+t)$

则 $f(t)$ 满足拉格朗日中值定理

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \quad (0<\xi<x)$

即 $\ln(1+t) = \frac{x}{1+\xi}$

$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$

故当 $x>0$，$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 成立



23. 设曲线通过点 $(1,2)$，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍，求此曲线方程。

∵由 …… 两倍

$f'(x) = 2x$

则 $f(x) = x^2 + C$

∵该曲线过点 $(1,2)$

$2 = 1 + C$ 得 $C = 1$

故曲线方程为 $f(x) = x^2 + 1$

24. 求函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值和最小值。

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \in [-3,1] \cup [2,4] \\ -(x^2 - 3x + 2) & x \in [1,2] \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x \in [-3,1) \cup (2,4) \\ -(2x-3) & x \in [1,2] \end{cases}$

令 $f'(x) = 0$，$x = \frac{3}{2}$ 且 $f(x)$ 在 1, 2 处不可导

| $x$ | $-3$ | $(-3,1)$ | $1$ | $(1,\frac{3}{2})$ | $\frac{3}{2}$ | $(\frac{3}{2},2)$ | $2$ | $(2,4)$ | $4$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $20$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{4}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $6$ |

由上表可知最小值为0，最大值为20

密 封 线

# 河南师范大学 2015—2016 学年度第 1 学期

## 2015 级期末考试《高等数学》(公修) 二类 A 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 合分人 | 复核人 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $f(x)$ 在 $a$ 的某去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的 <u>必要</u> 条件。

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$ <u>$e^{-1}$</u>。

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ a+x^2, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$ <u>0</u>.

4. 已知 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，则 $\left.\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'\right|_{x=0}=$ <u>1</u>。

5. 设 $f(x)$ 具有二阶导数且 $f'(1)=0, f''(1)>0$，则 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的 <u>极小值</u>。

6. 设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导且 $f(a^+)=f(b^-)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=$ <u>0</u>。

7. 若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int \cos x f(\sin x)dx=$ <u>$F(\sin x)+C$</u>。

8. 若 $f(x)=a_0+a_1x+\dfrac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n!}x^n$（其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是常数），则对任意的 $k(0\le k\le n)$，$f^{(k)}(0)=$ <u>$a_k$</u>。

9. 设 $f(x)=\sin(\omega x)$，则 $f^{(n)}(x)=$ <u>$\omega^n \sin(\omega x+\frac{n\pi}{2})$</u>（$n$ 为非负整数）。

$f(x)=\sin u,\ u=\omega x$
$f'(x)=(\sin u)'u'_x=(\sin u)'\omega=\omega\cos\omega x=\omega\sin(\omega x+\frac{\pi}{2})$
$f''(x)=\omega^2\sin(\omega x+\pi)$
$\vdots$
$f^{(n)}(x)=\omega^n\sin(\omega x+\frac{n\pi}{2})$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^a}=$ <u>0</u>（$a>1$）。



| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

11. 设 $f(x)=1-\cos x$，则 $x\to 0$ 时（ B ）

（A）$f(x)$ 与 $x^2$ 是等价无穷小

（B）$f(x)$ 与 $x^2$ 是同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 $x^2$ 高阶的无穷小

（D）$f(x)$ 是比 $x^2$ 低阶的无穷小

12. 设 $f(x)$ 在 $a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $a$ 处可导的一个充分条件是（ C ）

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　（B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在

13. 设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内 $f'''(x)>0$ 且 $f''(x_0)=0$，则（ D ）

（A）$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值。　　（B）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。

（C）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。　　（D）$(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

14. 设函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$．当 $n\ge 2$ 时，$f^{(n)}(x)=$（ B ）

$f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2[f(x)]^3$
$f'''(x)=2\cdot 3[f(x)]^2f'(x)=3![f(x)]^4$

（A）$n[f(x)]^{n+1}$　　（B）$n![f(x)]^{n+1}$

（C）$n[f(x)]^{2n}$　　（D）$n![f(x)]^{2n}$

15. 设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\int[f(x)+xf'(x)]dx=$（ A ）

（A）$xf(x)+C$　　（B）$xf(x)$

（C）$xf'(x)+C$　　（D）$f(x)+C$

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

$\overset{\text{洛}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$ (洛必达)

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

17. 设 $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)'$

$= \dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$

$= \dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$

$= \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

18. 求曲线 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程.

对 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ 两边对x求导

$(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})'_x = (a^{\frac{2}{3}})'_x$

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y' = 0$

$y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ $\quad\therefore y'\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a,\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}a} = -1$

$\therefore$ 切线 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}a = -\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$

$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$



19. 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 的带有拉格朗日型余项的 $n$ 阶麦克劳林公式.

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ . $f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$ $\quad f'''(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2\dfrac{2!}{(1+x)^3}$

$\therefore f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad n=2.3\cdots$

$\therefore f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $\quad n=2.3\cdots$

$f'(0)=1 \quad f(0)=0$

$f(x) = f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

$= x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+R_n(x)$

$R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$

20. 求 $\int x\arctan x dx$.

$= \int \arctan x\, d\dfrac{x^2}{2}$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\int x^2\, d\arctan x$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\arctan x + C$

$= \dfrac{x^2+1}{2}\arctan x - \dfrac{x}{2} + C$

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

四、综合题（每小题 5 分，共 15 分）

21. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

令 $F(t)=e^{-t}f(t)$

$\because f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$F(t)$ 也可导.

且 $F'(t)=e^{-t}[f'(t)-f(t)]$

$\because f'(t)=f(t)$ $\therefore F'(t)=0$.

$\therefore F(t)=C$. $\therefore F(t)=e^{-t}f(t)=C$

又 $\because f(0)=1$. $\therefore F(0)=e^{-0}f(0)=C$

$\therefore C=1$

$\therefore e^{-x}f(x)=1$. $f(x)=e^x$

22. 证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

令 $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3$

则 $f'(x)=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1)$

$\because x>1$，$f'(x)>0$. $\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单增

又 $\because f(1)=0$

$\therefore f(x)>0$. 当 $x>1$ 时.

即 $x>1$ 时. $2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0$

$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$



23. 一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数. 求该曲线的方程.

设曲线方程为 $y=f(x)$，由题意

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $\therefore f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

又 $\because f(e^2)=3$. $\therefore 3=f(e^2)=\ln e^2+C$

$\therefore C=1$

$\therefore f(x)=\ln|x|+1$

# 河南师范大学化学学院 2010—2011 学年度第 1 学期

## 2010 级 期末考试《高等数学》A 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微的 __充要__ 条件.

2. 设 $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x_0$ 处连续，则 $f'(x_0)=$ __$\varphi(x_0)$__

3. 当 $a=$ __$-1$__ 时，$f(x)=\begin{cases} x^2+a & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}-2 & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

$0+a=-1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+a)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}-2\right)$

$-1$

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

4. 设 $g(x)$ 为有界函数，函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ x^2 g(x) & x\le 0 \end{cases}$ 则 $f'(0)=$ __0__.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，则 $k=$ __$-3$__.

$(x-3)(x+1)$　$x^2-2x-3$

6. $\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$ __$\arctan^2\sqrt{x}+C$__　arctan 和根号复合函数

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=$ __0__（$n$ 为正整数，$\lambda>0$）.

8. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$ ~~$-e^{-x}f(e^{-x})-F(e^{-x})+C$~~ $-F(e^{-x})+C$

$F'(x)=f(x)$

$=\int e^{-x}dF(e^{-x})=-F(e^{-x})+C$

8. 分部 $u=f(e^{-x})$　$v'=e^{-x}$　$u'=f'(e^{-x})$　$v=-e^{-x}$

$-e^{-x}f(e^{-x})-\int -e^{-x}f'(e^{-x})dx$

9. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^x=4$，则 $C=$ __$\ln\sqrt{2}$__ ~~$-\ln\sqrt{2}$~~

10. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$ __$ak$__.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导且当（　）时，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使得 $f'(\xi)=0$

(A) $f(a)\ne f(b)$　(B) $f(a)=f(b)$　(C) $f(a)f(b)<0$　(D) $f(a)f(b)>0$

12. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为（　）

(A) $f'(1)-f'(0)>f(1)-f(0)$　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$　拉格朗日中值定理

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)-f'(0)$　(D) $f'(1)>f(0)$　$f(1)>f'(0)$

13. 设 $f'(x_0),f'(0)$ 都存在且 $f(0)=0$，下面式子正确的（　）

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$　$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)$　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]=\frac{1}{2}\times 2f'(x_0)=f'(x_0)$

14. 下列说法正确的是（　）

(A) 无穷大是无界数 (B) 无穷大是很大的数 (C) 无穷小是很小的数 (D) 无穷小实际就是零

15. $\displaystyle\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=$（　）

$\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{\cos^2x\tan x}dx=\int\ln\tan x\cdot\frac{\sec^2x}{\tan x}dx=\int\ln\tan x\,d(\ln\tan x)=\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$

(A) $\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$　(B) $(\ln\tan x)^2+C$　(C) $\frac{1}{2}\ln\tan x+C$　(D) $\ln\tan x+C$

16. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^x$，则 $\int xf'(x)dx=$（　）

$(e^x)'=f(x)=e^x$　$=\int xe^x dx$　$u=x$　$v'=e^x$　$u'=1$　$v=e^x$　$xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

(A) $e^x(x-1)+C$　(B) $e^x x+C$　(C) $e^x+C$　(D) $e^x(x-1)$

17. 设 $f(x)$ 有连续导数，下面式子正确的是（　）

(A) $\int f'(x)dx=f(x)+C$　(B) $\int df(x)=f(x)+C$

(C) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$　(D) $\int f'(x)dx=f(x)+C$

18. 当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是（　）时，则必有 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$.

(A) 任意函数　(B) 有界函数　(C) 无界函数　(D) 无穷大量

19. 设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\displaystyle\int\frac{f(x)+xf'(x)}{xf(x)}dx=$（　）

(A) $xf(x)$　(B) $xf(x)+c$　(C) $\ln|xf(x)|$　(D) $\ln|xf(x)|+C$

20. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则 $x\to 0$ 时有（　）

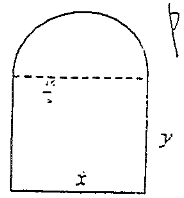
(A) $f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小　(B) $f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小　(D) $f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

四、综合题（每小 5 分,共 10 分）

1. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图所示），截面的面积为$5\text{m}^2$。问底宽$x$为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？




周长 $l = x+2y+\pi\cdot\frac{x}{2}$

面积 $xy+\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2=5$

$y=\frac{1}{x}(5-\frac{\pi}{8}x^2)$

得 $l=$ - - - -

求 $l'$

令 $l'=0$

$x=\sqrt{\frac{40}{\pi+4}}$ （舍去 $x=-\sqrt{\frac{40}{\pi+4}}$

$\sqrt{\frac{40}{\pi+4}}$

长：

宽：

p16

$xy+\frac{1}{2}\pi\times(\frac{x}{2})^2=5$

$xy+\frac{\pi x^2}{8}=5$

$y=\frac{5-\frac{\pi x^2}{8}}{x}=\frac{5}{x}-\frac{\pi x}{8}$

$x+2y+\pi\times\frac{x}{2}$

$f(x)=x+\frac{\pi x}{2}+\frac{10}{x}-\frac{\pi x}{4}$

$=x+\frac{10}{x}+\frac{\pi x}{4}$

$f'(x)=1-\frac{10}{x^2}+\frac{\pi}{4}$

$=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}$

$1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}=0$

$x^2=\frac{10}{1+\frac{\pi}{4}}=\frac{40}{4+\pi}$

$x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$

2. 证明：若函数$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足关系式$f'(x)=f(x)$，且$f(0)=1$，则$f(x)=e^x$.

$\frac{f(x)}{e^x}$

$f(0)=1$

求 $C$

$\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}$

$\varphi'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=0$

$\therefore \varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}=C$

$\because \varphi(0)=\frac{f(0)}{e^0}=1$

$\therefore C=1$ 即 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}=1$

$\therefore f(x)=e^x$

# 河南师范大学化学学院 2010—2011 学年度第 1 学期

## 2010 级 期末考试《高等数学》B 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时右极限 $f_+(x_0)$ 及左极限 $f_-(x_0)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 充要 条件.

2. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导的 充要 条件.

3. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，且在 $x_0$ 的某领域内 $f(x)$ 具有二阶连续导数，则必有 $f''(x_0)=$ 0 .

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=$ 0 .

5. 设 $f(x)$ 为有界函数，$\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=$ 0 .

6. 若 $\int f(x)dx = F(x)+C$，则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$ $-F(e^{-x})+C$ .

7. 若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是常数，且 $a_0\neq 0$)，则 $f^{(n)}(x)=$ $a_0\cdot n!$ . $(x^n)^{n+1}=0$ $(x^n)^n=n!$

8. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，则 $f'(0)=$ $(-1)^n\cdot n!$ .
$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$
$f'(0)=n!$

9. 洛必达法则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\frac{n!}{e^x}=$ 0 （$n$ 是正整数）.

10. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=$ $-\frac{1}{x^2}$ .
$(\ln x)'=f(x)=\frac{1}{x}$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

11. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则 $x\to 0$ 时有（ B ）.

A) $f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小　　(B) $f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小



$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$

22. $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \tan\sqrt{1+x^2}\,d\sqrt{1+x^2} = \int \tan u\,du = -\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

23. $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$. $e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{e^y+x}$ $(e^y+x\neq 0)$

24. 设 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2-\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=-f'(2)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$

25. 设某函数的图形上有拐点 P(2,4)，在拐点 P 处曲线的切线斜率为 -3，又知这个函数的二阶导数 $y''=6x+C$，求这个函数. $y=x^3-6x^2+9x+2$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

四、证明题（10 分）

P187 7

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导且 $f(a)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,a)$ 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明：设 $F(x)=x\cdot f(x)$

$F(0)=0$　$F(a)=0$　则 $F(a)=F(0)=0$

$F'(x)=f(x)+xf'(x)$　由罗尔定理得

存在 $F'(\xi)=0$ 则 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

$[\xi f(\xi)]'=0$

$F(x)=xf(x)$

$F'(x)=f(x)+xf'(x)$

$F(0)=0$

$F(a)=0$　$F(0)=F(a)=0$

则有 $F'(\xi)=0$

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

(C) $f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小　　(D) $f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

12. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 一定（ C ）

(A) 可导　(B) 可微　(C) 有最大值和最小值　(D) 以上都不对

13. 下列式子正确的是（ D ）

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$　(B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)$

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$　(D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$

14. 下列说法正确的是（ A ）

(A) 无穷大是无界量　　(B) 无穷大是很大的数

(C) 无穷小是很小的数　　(D) 无穷小实际就是零

15. 若 $\int f(x)dx=x^2+c$，则 $\int xf(1-x^2)dx=$（ B ）

(A) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　(B) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

(C) $2(1-x^2)^2+C$　(D) $-2(1-x^2)^2+C$

16. 已知 $y=e^{f(x)}$ 且 $f'(x)$ 存在，则 $dy=$（ C ）

(A) $f'(x)e^{f(x)}df(x)$　(B) $e^{f(x)}dx$

(C) $e^{f(x)}df(x)$　(D) $f'(x)dx$

$\ln y=\ln e^{f(x)}$　$\ln y=f(x)$　$\frac{y'}{y}=f'(x)$　$y'=yf'(x)=e^{f(x)}f'(x)$　$dy=e^{f(x)}f'(x)dx=e^{f(x)}df(x)$

17. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且当（ C ）时，在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f(\xi)=0$

(A) $f(a)=f(b)$　(B) $f(a)=f(b)$　(C) $f(a)f(b)<0$　(D) $f(a)f(b)>0$

18. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$（ D ）

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

19. 设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\int\dfrac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}dx=$（ A ）

(A) $\dfrac{x}{f(x)}+C$　(B) $\dfrac{x}{f(x)}$　(C) $\dfrac{x}{f'(x)}+C$　(D) $\dfrac{1}{f(x)}+C$

20. 设 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=$（ B ）

(A) $\frac{1}{x}+C$　(B) $-\frac{1}{x}+C$　(C) $\ln x+C$　(D) $-\ln x+C$

$f(\ln x)=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$.　$\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=\int x^{-2}dx=-\frac{1}{x}+C$.



| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^3}=\frac{1}{2}$

22. 设 $f(x)=e^{\tan^k x}$，且 $f'(\frac{\pi}{4})=e$，求 $k=\frac{1}{2}$

$f'(x)=e^{\tan^k x}\cdot k\tan^{k-1}x\cdot\sec^2 x$　$f'(\frac{\pi}{4})=e\cdot k\cdot 2=e$　$2k=1$　$k=\frac{1}{2}$

23. $y=f(x)$ 由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定，求 $y''$

24. 求 $\int\dfrac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{1}{\arcsin x}+C$

25. 求 $\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

令 $t=\sqrt{x}$，$x=t^2$，$dx=dt^2=2tdt$.　$\int\frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\cdot 2tdt=2\int\frac{\arctan t}{1+t^2}dt=2\int\arctan t\,d\arctan t=(\arctan t)^2+C=(\arctan\sqrt{x})^2+C$.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

四、综合题（10 分）

26. 设某函数的图形上有拐点 $P(2,4)$，在拐点处曲线的切线斜率为 $-3$，又知这个函数的二阶导数 $y''=6x+C$，求这个函数。

23. $1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$

$(\frac{1}{2}\cos y-1)y'=-1$

$y'=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cos y-1}=-\dfrac{2}{\cos y-2}$

$y''=-\dfrac{-2(-\sin y\cdot y')}{(\cos y-2)^2}=-\dfrac{2\sin y\cdot y'}{(\cos y-2)^2}=\dfrac{2\sin y\cdot\frac{2}{\cos y-2}}{(\cos y-2)^2}=\dfrac{4\sin y}{(\cos y-2)^3}$

$\frac{1}{2}\sin y=y-x$　$4\sin y=8(y-x)$　$=\dfrac{8(y-x)}{(\cos y-2)^3}$

# 河南师范大学化学科学学院 2008—2009 学年度第 1 学期

2008 级期末考试《高等数学》(一)A 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微的 <u>充要</u> 条件.

2. 设 $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x_0$ 处连续，则 $f'(x_0)=$ <u>$\varphi(x_0)$</u>

3. 当 $a=$ <u>$-1$</u> 时，$f(x)=\begin{cases} x^2+a & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}-2 & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

4. 设 $g(x)$ 为有界函数，$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ x^2 g(x) & x\le 0 \end{cases}$，则 $f'(0)=$ <u>0</u>

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-4}=4$，则 $k=$ <u>$-3$</u>

6. $\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$ <u>$(\arctan\sqrt{x})^2+C$</u>

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=$ <u>0</u>，(其中 $n$ 为正整数，$\lambda>0$).

8. ~~$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=$~~

9. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^x=4$，则 $c=$

10. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$ <u>$ak$</u>

第 1 页 共 6 页

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、单项选择题（每小题 3 分，30 分）

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导且当（ ）时，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使得 $f'(\xi)=0$.

(A) $f(a)\ne f(b)$　(B) $f(a)=f(b)$

(C) $f(a)\cdot f(b)<0$　(D) $f(a)\cdot f(b)>0$

12. 设在 $[0,1]$ 上，$f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为（ ）

(A) $f'(1)-f'(0)>f(1)-f(0)$　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)-f'(0)$　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

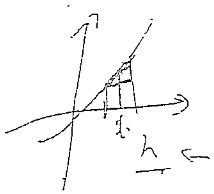
13. 设 $f'(x_0)$，$f'(0)$ 都存在且 $f(0)=0$，下面式子正确的是（ ）

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)$



$f(x+\Delta x)-f(x)$

14. 设 $f(x)$ 具有连续导数，下列式子正确的是（ ）

(A) $d\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)dx$　(B) $d\left[\int_a^b f(t)dt\right]=f(x)dx$

(C) $\int f'(x)=f(x)$　(D) $\int df(x)=f(x)$

15. $\int\dfrac{\ln\tan x}{\cos x\cdot\sin x}dx=$

第 2 页 共 6 页

$(\ln\tan x)' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}$  $\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\tan x}$ , $\frac{1}{2\ln\tan x}$

（A） $\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+c$　　（B） $(\ln\tan x)^2+c$

（C） $\frac{1}{2}\ln\tan x+c$　　（D） $\ln\tan x+c$

$F(x)=e^x$ : $f$

$f'(x)=e^x$

$(x\cdot e^x)$

16、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^x$，则 $\int xf'(x)dx=$（　）

$\int x\,df(x) = f(x)+C$

$\int x\,df(x)$

$xf(x)-\int f(x)dx$

$=xf(x)$

（A） $e^x(x-1)+c$　　（B） $e^x x+c$　　（C） $e^x+c$　　（D） $e^x(x-1)$

17、若 $\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx=\frac{1}{2}$，则 $a=$（　）

$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{0} a\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{0} d e^{ax}$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$

（A） 2　　（B） $\frac{1}{2}$　　（C） 0　　（D） 1

18、当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是（　）时，则必有 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$

（A） 任意函数　（B） 有界函数　（C） 无界函数　（D） 无穷大量

19、设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\int\frac{f(x)+xf'(x)}{f^2(x)}dx$

$\int\frac{d\,xf(x)}{f^2(x)}$

（A） $\frac{x}{f(x)}$　　（B） $\frac{x}{f(x)}+c$　　（C） $\frac{x}{f^2(x)}+c$　　（D） $\frac{1}{f(x)}+c$

20、设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则 $x\to 0$ 时有（　）

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}$

（A） $f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小　　（B） $f(x)$ 与 $x$ 是同价但非等价无穷小

（C） $f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小　　（D） $f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

21、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{\int_0^x \sin^3 t\,dt}$



22、函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

23、设 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(2-\Delta x)-f'(2)}{\Delta x}$

$= -f''(2)$

24、设某函数的图形上有拐点 $P(2,4)$，在拐点 $P$ 处曲线的切线斜率为—3，又知这个函数的二阶导数 $y''=6x+c$，求这个函数.

$4=6\times2+c \Rightarrow c=-8$

$y''=6x-8$

$y'=3x^2-8x+A$

$3\times4-8\times2+A=-3$

$A=-3+16-12$

$=1$

$y'=3x^2-8x+1$

$\therefore y=x^3-4x^2+x+B$

$8-4\times4+2+B=4$

$B=4-8+16-2$

$=10$

$y=x^3-4x^2+x+10$

25、求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积.

设 $x=a\cos t$

$y=b\sin t$ $(0\le t\le\frac{\pi}{2})$

则 $A=4A'$

$A'=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot a(-\sin t)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t\,dt$

$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt$

$=\frac{ab}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt\right)=\frac{\pi}{4}ab$

~~$=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$~~

$\therefore A=\pi ab$

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

四、证明题（ 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=f(\xi)\int_c^b g(x)dx$$

$\xi\in(a,b)$ $f(\xi)=A\in[f(a),f(b)]$

1. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$

则 $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$

2. 若 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

且 $f'(0)=0$ 则 $n$ ___ $n>2$

3. 设 $f'(\ln x)=1+x$

则 $f(x)=$ ___

(A) $x+e^x$ (B) $x+e^x+C$ <B>

(C) $1+x$ (D) $1+\ln x+C$

4. 积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx=$ ___

$\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx=2\int\frac{\frac{1}{4\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}}dx$

$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}}d\frac{\sqrt{x}}{2}$

$=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$

5. $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\geq 0\\ \frac{1}{1+\cos x} & -1<x<0\end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

令 $x-2=t$ 则 $x=t+2$ $dx=dt$

当 $x=1$ 时 $t=-1$ 当 $x=4$ 时 $t=2$

则 $\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt$

$=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$

$=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$

$=[\tan\frac{t}{2}]_{-1}^0-\frac{1}{2}[e^{-t^2}]_0^2$

$=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$

7. 求 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围成的面积

解 $A=\int_{-2}^4[(y+4)-\frac{1}{2}y^2]dy$

$=[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}]_{-2}^4=18$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & x\geq 0\\ \frac{1}{1+e^x} & x<0\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$

令 $t=x-1$ 则 $x=t+1$

$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt$

$=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

$=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt$

$=\int_{-1}^0\frac{e^t+1-e^t}{1+e^t}dt+\int_0^1\frac{d(1+t)}{1+t}$

$=\int_{-1}^0(dt-\frac{de^t}{1+e^t})+\ln 2$

$=1 \ldots -\int_{-1}^0\frac{d(1+e^t)}{\ldots}$

$\frac{1}{\cos x}-\sin x$

$\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x$

$\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\sin x^3}$

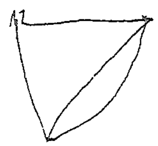
$\frac{1}{\cos x}-1$

$\frac{1-\cos x}{\sin x^2\cos x}$

$\frac{1-\cos x}{\cos x}$

$\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin x^3}=\frac{\tan x\,2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x^3}$

$1-2\cos^2\frac{x}{2}=\cos x$



# 河南师范大学化学与环境科学学院 2007—2008 学年度第 1 学期

## 2007 级 期末考试《高等数学》A 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

一、填空题（每题 3 分，共 3 0 分）

1. $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微的 充要 条件.

2. 若 $f(x)$ 在 $a$ 的某个领域内为有界函数，则 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=$ $0$.

3. 当 $a=$ $1$ 时，$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+x & x\ge 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

4. 设 $f(x)=x|x|$，则 $f'(0)=$ $0$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，则 $k=$ $-3$.

$x^2-2x+k=0$

$9-6+k=0$

$k=-3$.

6. 设 $f(x)$ 为连续函数，则积分 $\cancel{\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)f\left(t+\frac{1}{t}\right)dt}=$ $0$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=$ $0$ （$n$ 为正整数，$\lambda>0$）

8. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=$ $\cancel{2}$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ $\cancel{\frac{1}{3}\ln 8}$ $\ln 2$

10. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$ $ka$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+3a}{x-a}\right)^x$

$\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^x$

$\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{x-a+a}$

$\dfrac{\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{x-a}}{\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{-a}}=$

$\dfrac{\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot 3a}}{\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{-a}}=$

$e^{3a}=8$

$e^{3a}=e^{\ln 8}$

$a=\frac{1}{3}\ln 8$

$=\ln 2$



| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

二、单项选择题（每小题 3 分，共 3 0 分）

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当（ $\cancel{B}$ C ）时则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使得 $f(\xi)=0$

（A）$f(a)\ne f(b)$　　（B）$f(a)=f(b)$

（C）$f(a)f(b)<0$　　（D）$f(a)f(b)>0$

12. 设在 $[0,1]$ 上，$f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为（ B ）

$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)>f(0)-f(1)$

（A）$f'(1)-f'(0)>f(1)-f(0)$　　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)-f'(0)$　　（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

13. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ A ）

（A）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

（B）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

（D）$\lim\limits_{h\to\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在

14. 设 $f(x)$ 具有连续导数，下列式子正确的是（ B ）

（A）$\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)dx\right]=f(x)$　　（B）$\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$

（C）$\int f'(x)dx=f(x)$　　（D）$\int df(x)=f(x)$

15. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$（ C ）

（A）$\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+C$　　（B）$\arcsin\sqrt{x}+C$

（C）$2\arcsin\sqrt{x}+C$ （D）$2\arcsin(2x-1)+C$

16. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，则 $\int xf'(x)dx=$（ D ）

（A）$\sin x-\frac{2\cos x}{x}+C$ （B）$\cos x-\frac{2\sin x}{x}$

（C）$\sin x-\frac{2\cos x}{x}$ （D）$\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$

$F(x)=\frac{\sin x}{x}$

$f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$f'(x)=\frac{-x\sin x\cdot x^2}{x^2}$

$f'(x)=\frac{-x^2\sin x-2x(x\cos x-\sin x)}{x^4}$

$-\int x^2\sin x$

$-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x$

$-\sin x$

17. 下列广义积分收敛的是（ ）

（A）$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $(a>0)$ （B）$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$

（C）$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x dx$ （D）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$

18. 下列说法正确的是（ D ）

（A）无穷小是很小的数，无穷大是很大的数

（B）无穷小实际就是零

（C）无界量就是无穷大

（D）无穷大量是无界量

19. 设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\int\frac{f(x)+xf'(x)}{xf(x)}dx=$（ A ）

（A）$\ln|xf(x)|+c$ （B）$\ln|xf(x)|$

（C）$\ln|f(x)|+c$ （D）$\ln|x|+c$

20. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则 $x\to0$ 时有（ B ）

（A）$f(x)$ 与 $x$ 是等价无穷小

（B）$f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小

（D）$f(x)$ 是比 $x$ 低阶的无穷小

P74

$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

$\frac{f(x)}{x}=\frac{2^x+3^x-2}{x}=\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}$

$=\ln2+\ln3$

$=\ln6\ne1$



| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

21. 计算 $\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$.

$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$ $e^{-t^2}dt$

解：$\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt=\int_{\cos x}^{1}(-\frac{1}{2t})e^{-t^2}d(-t^2)=\int_{\cos x}^{1}(-\frac{1}{2t})de^{-t^2}$

22. $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$e^y y'+y+xy'=0$

$\therefore y'=\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{e^y+x}$

23. 设 $f(x)=e^{\tan^k x}$ 且 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e$，求 $k$

$f(x)=e^{\tan^k x}$

$f'(x)=e^{\tan^k x}\cdot\sec^2x\cdot k\tan^{k-1}x$

$f'(x)=e^{\tan^k x}k\tan^{k-1}x\sec^2x$

$\therefore f'(\frac{\pi}{4})=2ek=e$

$\therefore k=\frac{1}{2}$