河南师范大学计算机与信息工程学院 2022--2023 学年第二学期 2021 级计算机科学与技术、通信工程、物联网工程、网络工程专业期末考试《概率论与数理统计》B 卷答案

1. 判断题（每题 2 分，共 10 分）

1. × 2. × 3. √ 4. √ 5. √

2. 选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. B 2.C. 3. C . 4. B 5.C 6.D

3. 填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. $3p^2(1-p)^2$ 2. 20 3. $N(-6,5)$ 4. 4 5. 0.8185 6. $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$

4. 计算题（每题 10 分，共 30 分）

1. 解：设 B：买到一件次品，A_1：买到一件甲厂的产品，A_2：买到一件乙厂的产品，A_3：买到一件丙厂的产品。 …………1分

（1）则由题意得

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)$$

$$=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

$$=0.02\times\frac{1}{4}+0.01\times\frac{1}{4}+0.03\times\frac{1}{2}\approx 0.0225$$ …………3分

（2）次品来自与甲厂的概率为 $P(A_1|\mathrm{B})=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)\cdot P(\mathrm{B}|A_1)}{P(B)}\approx 0.22$ ………..2 分

次品来自与乙厂的概率为 $P(A_2|\mathrm{B})=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)\cdot P(\mathrm{B}|A_2)}{P(B)}\approx 0.11$ ………..2 分

次品来自与丙厂的概率为 $P(A_3|\mathrm{B})=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)\cdot P(\mathrm{B}|A_3)}{P(B)}\approx 0.67$ ………..2 分

次品来自于丙厂的可能性最大

2.解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos xdx=1$, 得 a=1/2 ………………2 分

（2） $P\left\{0<X<\frac{\pi}{4}\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ……………3 分

（3）当 $x<-\frac{\pi}{2}, F(x)=0$； ……………1 分

当 $x\geq\frac{\pi}{2}, F(x)=1$； ……………1 分

对于任意的 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\cos xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{1}{2}(\sin x+1)$$

所以，分布函数为

$$F(\mathrm{x})=\begin{cases}0 & x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}(\mathrm{sinx}+1) & -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$ ………………3 分

3. **解** （1）由 (X,Y) 的联合分布律可知，关于 X 的边缘分布律为

X	1	2	3
P	0.4	0.2	0.4

2分

关于 Y 的边缘分布律为

Y	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

2分

则有

$E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2,$

$E(Y)=(-1)\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$

2分

(3) $Z=(X-Y)^2$ 的所有可能取值为 0,1,4,9,16. 且有

$P\{Z=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1,$

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=0.1+0.1=0.2,$

$P\{Z=4\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=1\}$

$=0.2+0+0.1=0.3,$

$P\{Z=9\}=P\{X=2,Y=-1\}+P\{X=3,Y=0\}=0.1+0.3=0.4,$

$P\{Z=16\}=P\{X=3,Y=-1\}=0.$

故 $Z=(X-Y)^2$ 的分布律为

Z	0	1	4	9	16
P	0.1	0.2	0.3	0.4	0

2分

从而 $Z=(X-Y)^2$ 的数学期望为

$E(Z)=0\times0.1+1\times0.2+4\times0.3+9\times0.4+16\times0=5.$ 2分

5. 综合题（每题 12 分，共 24 分）

1. 解：（1）边缘概率密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy, & x>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{x+1}{2e^x}, & x>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ………..2 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dx, & y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{y+1}{2e^y}, & y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ………2 分

得 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{(x-2)(y-2)}{4\mathrm{e}^{x+y}}\neq f(x,y)$，故 X 和 Y 不相互独立 ………………2 分

（2）$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z\text{-}y,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{z}\frac{1}{2}z\cdot e^{-z}dy, & z>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ……………4 分

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ …………….2 分

2.解：

$$E\left(X\right)=\int_c^{+\infty}x\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^{\theta}\int_c^{+\infty}x^{-\theta}dx=\frac{\theta c^{\theta}}{1-\theta}x^{-\theta+1}\Big|_c^{+\infty}=\frac{c\theta}{\theta-1}$$ -----2 分

根据矩估计的定义，可得

$$\frac{c\theta}{\theta-1}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$ ----------------------------2 分

所以

$$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$$ --2 分

样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} x\theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)}=\theta^{n} c^{c\theta}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\theta+1)}$$ --------------------1 分

对数似然函数为$LnL(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ -------------------2 分

对上式求导，可得$\frac{d}{d\theta}LnL(\theta)=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

解得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln c}$ ------------------------------------2 分

θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln c}$ ---1 分