# 河南师范大学计算机与信息工程学院 2023--2024 学年第二学期 2022 级计算机科学与技术、通信工程、物联网工程专业 2023 级人工智能专业期末考试《概率论与数理统计》A 卷答案

## 一、判断题 正确划“T”号，错误划“F”号.（每题 2 分，共 10 分）

1. T　　2. T　　3. F　　4. F　　5.T

## 二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. D　　2. C　　3. C　　4. B　　5.A　　6. B

## 三、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. 0.7　　2. $2p^3-p^5$　　3. $-\frac{3}{2}$　　4. $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y-3}{2})$　　5. 27　　6. $\frac{3}{5}$

## 四、计算题（每题 8 分，共 32 分）

1. 解 设 $B$: 油箱加满，$A_1$：使用 92 号汽油，$A_2$：使用 95 号汽油，$A_3$：使用 98 号汽油。

（1）根据全概率公式可得，所求的概率为

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3) \quad \cdots\cdots 2分$$

$$=0.3\times0.4+0.6\times0.35+0.5\times0.25=0.455 \quad \cdots\cdots 2分$$

（2）根据贝叶斯公式可得，所求的概率为

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)} \quad \cdots\cdots 2分$$

$$=\frac{0.35\times0.6}{0.455}=\frac{6}{13} \quad \cdots\cdots 2分$$

2. 解：（1）由密度函数的规范性可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}kx^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}k，\ 解得 k=\frac{3}{2} \cdots\cdots 2分$$

（2） $P\left\{0<X<\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{16}$ ……2分

（3） $X$ 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x<-1\\ \int_{-1}^{x}\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ ……2分

$$=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}(x^3+1), & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$ ……2分

3. 解：（1）依题意可得 $\begin{cases}a+b=\frac{1}{4}\\ E(X)=\frac{3}{8}+b=\frac{1}{2}\end{cases}$ 解得 $a=b=\frac{1}{8}$ ……3分

（2） $P\{Y\le 1\mid X=1\}=\frac{P\{Y\le 1,X=1\}}{P\{X=1\}}$

$$=\frac{P\{Y=1,X=1\}+P\{Y=0,X=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{3}{4}$$ ……3分

（3） $E(XY)=1\times 1\times\frac{1}{4}+1\times 2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ ……2分

4. 解：依题意可知 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 相互独立且均服从 $N(0,36)$。……2分

（1） $\overline{X}\sim N(0,4)$，所求的概率为

$$P\{-3<\overline{X}<3\}=P\{-\frac{3}{2}<\frac{\overline{X}}{2}<\frac{3}{2}\}=2\Phi(1.5)-1=0.8664$$ ……3分

（2） $D(X_1)=D(X_2)=D(X)=36$

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X_1-X_2,X_1+X_2)}{\sqrt{D(X_1-X_2)}\sqrt{D(X_1+X_2)}}=\frac{D(X_1)-D(X_2)}{D(X_1)+D(X_2)}=0$$ ……3分

**五、综合题（每题 11 分，共 22 分）**

1. 解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_0^x 2(x+y)\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\cdots\cdots 2\text{分}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_y^1 2(x+y)\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}-3y^2+2y+1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\cdots\cdots 2\text{分}$$

在面积不为零的区域$\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1\}$上有

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\cdots\cdots 1\text{分}$$

故 $X$，$Y$ 不是相互独立的。

（2） $P\{X\leq\frac{1}{2}\}=\iint\limits_{x\leq\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x 2(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}$ ……2分

（3） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$

仅当$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<x\end{cases}$时，上述被积函数不为零。……2分

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{z}2z\mathrm{d}x=z^2, & 0\leq z<1\\ \int_{\frac{z}{2}}^{1}2z\mathrm{d}x=2z-z^2, & 1\leq z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\cdots\cdots 2\text{分}$$

2. 解：（1） $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\theta}x^{\frac{1+\theta}{\theta}}\Big|_0^1=\frac{1}{1+\theta}$ ……2分

解得$\theta=\frac{1}{\mu_1}-1$ ……1分

用样本均值$\overline{X}$代替$\mu_1$，得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{\overline{X}}-1$……2分

（2）设$x_1,x_2,\ldots,x_n$为样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{(1-\theta)/\theta} & 0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$ ……2分

当 $0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n$ 时，$\ln L(\theta)=-n\ln\theta+\dfrac{1-\theta}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ……2分

对 $\theta$ 求导，并令导数为 0，可得 $\dfrac{\mathrm{d}(\ln L(\theta))}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}-\dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ……1分

解得 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

从而 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ ……1分