河南师范大学环境、化学学院 2022—2023 学年第 I 学期 2022 级期末考试《高等数学》A 卷

题号	一	二	三	四	五	总分	合分人	复核人
得分								

得分	评卷人

一、填空题（请将正确答案填在题上横线内，每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域是 ~~(-2,2]~~ (-2,2)

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$ 在 R 上连续，则 $a=$ 4

$x+2$

3. 函数 $y=x^2+x+1$ 在区间 $[-2,1]$ 上应用罗尔中值定理时，所得的中值 $\xi=$ 0

4. 若 $\int f(x)dx=\arcsin(x-1)+C$，则 $f(x)=$ $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

5. 函数 $y=\cos^2 x$ 与直线 $x=0$、$x=\frac{\pi}{2}$ 和 x 轴所围图形的面积是 ________

得分	评卷人

二、单项选择题（请将正确答案填在题后括号内，每题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n+\cdots 2023^n}=$ (C)

A. 2021 B. 2022

C. 2023 D. 不存在

2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导的一个充分条件是（ D ）

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在 B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在 D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

3. 设在闭区间 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(1)-f(0)$ 的大小顺序是（ D ）

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ B. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ D. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

4. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（ D ）

$-\cos x$

A. $1+\sin x$ B. $1-\sin x$

C. $1+\cos x$ D. $1-\cos x$

5. 在下列等式中，正确的结果是（ C ）.

A. $\int f'(x)dx=f(x)$ B. $\int df(x)=f(x)$

C. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ D. $d\int f(x)dx=f(x)$

得分	评卷人

三、判断题（正确的在题后的括号里画"√"，错误的画"×"，每题 2 分，共 10 分）

1. 收敛数列一定有界. （√）

2. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 一定可微. （√）

3. 当 $x\to0$ 时，$3x^2=o(x)$. （√）

4. 闭区间上的可导函数一定有界. （√）

5. 连续函数 $f(x)$ 一定存在原函数. （×）

得分	评卷人

四、计算及证明（每题 8 分，共 40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ 当x趋近于0时 原式为$\frac{0}{0}$型

用洛必达法则可得

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

2. 求函数 $y=x^{\sin x},(x>0)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=y'=(x^{\sin x})'$

$=(e^{\sin x\ln x})'$

$=(\sin x\ln x)'\cdot e^{\sin x\ln x}$

$=(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})\cdot e^{\sin x\ln x}$

$=(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})\cdot (e^{\ln x})^{\sin x}$

$=(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})\cdot x^{\sin x}$

$=\cos x\ln x\cdot x^{\sin x}+\frac{\sin x\cdot x^{\sin x}}{x}$

3. 计算定积分 $\int_1^2 xe^x\,dx$.

解 ~~由题知~~ $\cancel{\int xe^x dx=\int e^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\int}$

解：设 $Q'=e^x$ $A=x$

则有 $A'=1$ $\int Q'=Q=e^x$

$\int Q'\cdot A=Q\cdot A-\int Q\cdot A'$

$\int xe^x dx=e^x\cdot x-\int e^x dx$

$=e^x\cdot x-e^x=e^x(x-1)$

$\therefore \int_1^2 xe^x dx=e^2(2-1)-e^1(1-1)$

$=e^2$

4. 求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,(a>0)$.

解 原式 $=\int\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$

① $=\int(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$

② $=\int\frac{1}{\sqrt{a-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+x}}dx$

③ $=\int\frac{1}{\sqrt{a-x}}\,d\frac{1}{\sqrt{a+x}}$

④ $=\int(a-x)^{-\frac{1}{2}}\,d(a+x)^{-\frac{1}{2}}$

⑤ $=2(a+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-x)^{-\frac{1}{2}}-\int 2(a+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-x)^{-\frac{1}{2}}dx$

⑥ $=2(a+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-x)^{-\frac{1}{2}}+2(a+x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2(a-x)^{\frac{1}{2}}+4\int(a+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-x)^{\frac{1}{2}}dx$

$=2(a+x)^{\frac{1}{2}}[(a-x)^{-\frac{1}{2}}+2(a-x)^{\frac{1}{2}}]+4\int\frac{(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

5. 设 $a>b>0,n>1$ 证明 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

解 由题可知 设 $f(n)=nb^{n-1}(a-b)$ $h(n)=a^n-b^n$

由拉格朗日中值定理可知 $g(n)=na^{n-1}(a-b)$

$\frac{h(n)-h(0)}{n}=\frac{a^n-b^n-(a-b)}{n}=h'(n\theta)$

$na^{n-1}(a-b)-nb^{n-1}(a-b)$

$=n(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})$

$\because a>b>0$ $\therefore a-b>0$ $n>0$

$n>1$

又 $\because n>1$ $a-b>0$. 且 $H(x)=x^{n-1}$ 为单调增函数

$\therefore H(a)-H(b)=a^{n-1}-b^{n-1}>0$

得分	评卷人

五、综合题（每题 10 分，共 20 分）

1. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 各等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径和高的比是多少？

解：设表面积为 S，底直径为 d

$$\begin{cases} V = Sh \quad ① \Rightarrow S = \dfrac{V}{h} \\ S = \pi r^2 \quad ② \end{cases}$$

$\therefore V = \pi r^2 h$ ③

② ③ 分别等式两边求导得

②：$S' = 2\pi r$ ③ $V' = 2\pi r h + \pi r^2 h'$

$$\frac{dV}{dS} = \frac{\frac{dV}{dr}}{\frac{dS}{dr}} = \frac{2\pi r h + \pi r^2 h'}{2\pi r} = \frac{2hr + r^2 h'}{2r}$$

解 设表面积为 S，底直径为 $d = 2r$ $V = h +$

$$\begin{cases} \pi r^2 h = V \quad ② \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} \ ① \\ S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \quad ③ \Rightarrow \end{cases}$$

① ③ 式分别等式两边求导可得

① $\cancel{2\pi r h + \pi r^2 h' = 1}$

$h' = \frac{V}{\pi} \cdot (r^{-2})'$

$= \frac{V}{\pi} \cdot (-2) \cdot r^{-3}$

$= -\frac{2V}{\pi r^3}$

当表面积最小时 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ 底直径/高 $= 1$

2. 计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

解 由题得 等式两边求导得

$$\frac{2x \cdot x'}{a^2} + \frac{2y}{b^2} = 0 \qquad \cancel{\frac{2x \cdot x'}{a^2} + \frac{2y}{b^2} = 0}$$

$2b^2 \cdot x \cdot x' + 2a^2 y = 0$

$b^2 x = -a^2 y$

$x = -\frac{a^2}{b^2} y$

原式可变为 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2$

$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2$

接 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 又 $\because d = 2r$ $\therefore d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ $\therefore \frac{d}{h} = 1$

$\therefore h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}}$

$= \frac{V}{\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}}$ $= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} > 0$ 当 $S' = 0$ 时 $4\pi r^3 = 2V$ $\therefore r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 当 $S' > 0$ 时

$\frac{2V}{} - \frac{4V}{} = 4\pi r -$

本试卷共 页第 页