专业:________ 年级:________ 学号:________ 姓名:________

线 封 密

河南师范大学计算机与信息工程学院 2022--2023 学年第二学期 2021 级计算机科学与技术、通信工程、物联网工程、网络工程专业期末考试《概率论与数理统计》A 卷答案

题号	一	二	三	四	五	总分	合分人	复核人
得分								

得分	评卷人

一、判断题 正确划“T”号，错误划“F”号.（每题 2 分，共 10 分），请将答案填入答题卡.

1. 设 A, B, C 为三个事件，则 A, B, C 至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$.　（ T ）
2. 两个独立事件 A,B 一定有 $P(AB)=0$.　（ F ）
3. 服从二维正态分布的随机变量(X,Y)相互独立的充要条件是 X 和 Y 不相关.　（T ）
4. 样本 k 阶原点矩 A_k 以概率收敛到总体 k 阶原点矩 $E(X^k)$.　（ T ）
5. 设 $X_1, X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的样本，则样本方差 S^2 和样本二阶中心距 B_2 都是总体方差的无偏估计.　（ F ）

得分	评卷人

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1．1．已知 10 件产品中有 6 件正品，4 件次品，从中不放回地任取两次，每次取一件，两次都是正品的概率是（ A ）.

(A) 1/3　(B) 2/3　(C) 4/9　(D) 5/9

2.设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$和 $N(1,1)$，则（ B ）.

（A）$P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$；　（B）$P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$；

（C）$P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$；　（D）$P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

3．对离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，下列说法错误的是（ B ）.

(A) $F(x)$间断点均为右连续；

(B) $P\{a\le X<b\}=F(b)-F(a)$；

(C) $F(x)$间断点即为 X 的可能取值点；

(D) $F(x)$间断点的跳跃高度是对应的取值点的概率值.

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望与方差都存在，则下列一定成立的是（ A ）。

（A） $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ ；　（B） $E(XY)=E(X)E(Y)$；

（C） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；　（D） $D(XY)=D(X)D(Y)$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，则 $\dfrac{\sqrt{3}(X_1+X_2)}{\sqrt{2(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}$ 服从与（ C ）分布。

（A） $F(3,2)$　（B） $F(2,3)$

（C） $t(3)$　（D） $t(2)$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，$E(X_1)=D(X_1)=1$，则 $P\{\sum_{i=1}^{100}X_i>110\}$的近似值为(B).

（A）$\Phi(1)$　（B）$\Phi(-1)$　(C) $\Phi(0.1)$　(D) $\Phi(-0.1)$

得分	评卷人

三、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 设随机事件 A,B 是相互独立，已知 $P(B)=0.5, P(A-B)=$ 则 $P(B-A)=$ 0.2 .

2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{2k}{N},(K=1,2,3,4)$ 则 N 为 20 .

3. 若 X 和 Y 的方差分别是 25 和 16，相关系数 $\rho_{XY}=0.2$,则 $D(X+2Y)=$ 105 .

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.5 & 0\le x<1\\ a-e^{-x} & x\ge 1\end{cases}$，则 $a=$ 1 .

5. 设随机变量 X 的期望为 20，方差为 4，利用切比雪夫不等式估计 $P\{16 < X < 24\} \geq$ 3/4__.

6. 在总体 $N(2,0.5^2)$ 中抽取一个容量为 16 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值。则 $P\left\{\overline{X} > 2\right\}=$ 1/2__. .

得分	评卷人

四、 计算题（每题 8 分，共 32 分）

1. 已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者，今从男女人数比例为 6:4 的人群中随机地挑选一人，问：

(1) 此人恰好是色盲患者的概率？

(2) 已知挑选一人是色盲患者，此人是男性的概率是多少？

解：(1) 令事件A表示“抽到一名男生”，$P(A)=0.6$

$\overline{A}$表示"抽到一名女生",$P(\overline{A})=0.4$

令事件B表示“抽到一名色盲者”

依题意可知

$$P(B/A)=5\%,\mathrm{P}(B/\overline{A})=0.25\% \cdots\cdots 2分$$

由全概公式可知

$$P(B)=P(A)P(B/A)+P(\overline{A})\mathrm{P}(B/\overline{A}) \quad \cdots\cdots 2分$$
$$=0.6\times5\%+0.4\times0.25\%$$
$$=0.031 \quad \cdots\cdots 1分$$

（2）由贝叶斯公式可知，所求事件的概率为

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} \quad \cdots\cdots 2分$$

$$=\frac{0.6*5\%}{0.031}=\frac{30}{31} \quad \cdots\cdots 1分$$

2. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，对 X 独立重复观测 4 次，用 Y 表示观测值小于 1/2 的次数，求：Y^2 的数学期望.

解： $$P\{X<\frac{1}{2}\}=\int_0^{1/2}3x^2dx=1/8 \quad \cdots\cdots 2分$$

$$Y\sim b(4,\frac{1}{8}) \quad \cdots\cdots 2分$$

$$EY=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}, DY=4\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{16} \quad \cdots\cdots 2分$$

$$EY^2=DY+(EY)^2=\frac{7}{16}+\frac{1}{4}=\frac{11}{16} \quad \cdots\cdots 2分$$

3. 设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 $Y=2X+1$ 的概率密度.

解：$y=2x+1$ 是单调可导的，且 $y\geq1$ ……2分

$x=h(y)=(y-1)/2$, $h'(y)=\frac{1}{2}$ ……2分

由公式法可知： $f_Y(y)=\begin{cases}f(\frac{y-1}{2})\cdot\frac{1}{2}, & y\geq1\\ 0, & y<1\end{cases}$ ……2分

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y-1}{2}} & y\geq1\\ 0 & y<1\end{cases} \quad \cdots\cdots 2分$$

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下

X \ Y	-1	0	1
0	1/4	0	1/4
1	0	a	0

求(1). 参数 a

(2). X和 Y的边缘分布；

（3）计算 ρ_{XY},判断 X 和 Y 是否相关.

解：（1）a=1/2 ……2分

(2). $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ ……2分

(3). EX=1/2 EY=0,EXY=0,

Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0 ……2分

ρ_{XY}=0,X 和 Y 不相关. ……2分

得分	评卷人

五、综合题（每题 11 分，共 22 分）

1. 设(X,Y)服从区域 $D:\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$ 上均匀分布，求：

（1） (X,Y)的联合密度函数；

（2） 边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否相互独立；

（3） 若 $Z=X+Y$，求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解：(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1,0<y<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$ ……1分

(2)当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f(x,y)=0$, 故 $f_X(x)=0$

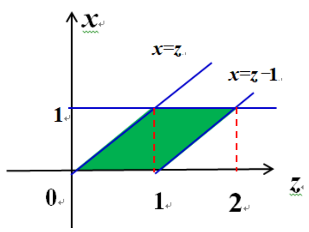
当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 1dy=1$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$ ……2分

由对称性得 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

可见对一切 x,y, 均有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

故 X 和 Y 相互独立 ……2分



(3)由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ ……2分

仅当 $\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<1\\ z-1<x<z\end{cases}$ 时，被积函数不为零

当 $0<z<1$

$f_Z(z)=\int_0^z 1dx=z$ ……2分

当 $1\le z<2$

$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 1dx=2-z$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}z, 0<z<1\\ 2-z, 1\le z<2\\ 0,\ 其他,\end{cases}$ ……2分

2 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, 0\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$$

其中，$\theta>0$ 未知参数，设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本，求：

（1）参数 θ 的矩估计量；

（2）参数 θ 的最大似然估计量.

解：(1)

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}x^{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$ ……2分

解得令 $\theta=\left(\frac{\mu_1}{1-\mu_1}\right)^2$

用样本均值 $\overline{X}$ 替代 μ_1，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$ ……2分

（2）设 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 为样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{n/2}\prod_{i=1}^n x_i^{\sqrt{\theta}-1}$$ ……2分

取对数可得

$$\ln L=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$$ ……2分

对参数 θ 求导可得 $\frac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{\sum_{i=1}^n\ln x_i}{2\sqrt{\theta}}=0$ ……1分

解得 θ 的最大似然估计值为

$$\theta=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$$

从而 θ 的最大似然估计量为

$$\theta=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$$ ……2分