Introduction à la programmation linéaire

Saida.bouakaz@univ-lyon1.fr

Introduction, Modélisation

Objet de la programmation linéaire :
La programmation linéaire peut être vue comme un outil permettant d'allouer, de façon optimale, des ressources disponibles en quantités limitées, à une ou des activités pour obtenir le meilleur résultat ou le meilleur rendement.

3

Introduction par un exemple

•Énoncé

Un ébéniste fabrique des chaises et des tables.
Il peut consacrer au plus 1040 heures et 38 planches de bois.

Une pièce de chaque produit nécessite une quantité donnée de matière première et consomme une durée donnée de travail. les deux produits ne sont pas vendu au même prix

•Objectif

maximiser les gains en respectant les contraintes suivante (temps, fourniture).

➔ Trouver le nombre de fauteuil , le nombre de table qui permettent de maximiser les gains en respectant les contraintes

4

Introduction : exemple1-suite

On a les données suivantes :

1 table prend 50 heures
Nécessite 2 planches

1 table rapporte 420 €.

1 chaise prend 40 heures
Nécessite 1 planche

1 Fauteuil rapporte 300 €.

Quelle doit être la production pour que le gain soient maximal ?

5

Modélisation : modélisation du problème

Nbre de tables et de fauteuils
Pour un gain maximal

X_1 le nombre de tables
$X_1 \geq 0$

X_2 le nombre de chaises
$X_2 \geq 0$

Soit Z le gain de l'ébéniste : $Z = 420\ X_1 + 300\ X_2$
Z est la fonction à maximiser.

Contraintes :

$50\ X_1 + 40\ X_2 \leq 1040$: Contrainte de temps de production
$2\ X_1 + X_2 \leq 38$: Contrainte de quantité de bois

6

Modélisation : mise en équation

Ecriture formelle

PL : Expression standardisée

$Z = 420\,x_1 + 300\,x_2 \rightarrow$ fonction objectif

$50\,x_1 + 40\,x_2 \leq 1040$
$2\,x_1 + x_2 \leq 38$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

contraintes

7

Ecriture standard

Ecriture matricielle (canonique)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$

$C = (420, 300)$

- Le vecteur X code la quantité de production possible (dans l'exemple nombre de tables et chaises) : variable à déterminer
- La matrice A code les besoins en ressources pour la production (par type de ressource) dans l'exemple : besoin en temps et besoin en bois
- Le vecteur B code les limites de capacité (de ressource) production en temps et en matière (dans l'exemple : bois)
- Le vecteur C code les bénéfices/profit de production (dans l'exemple les bénéfices de vente des tables et fauteuils)

8

Ecriture Standart

Forme canonique

- Le système s'écrit :

$$Max\ Z = CX$$

Sous les contraintes $\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$

- Ecriture du système pour l'exemple 1

$$Max\ Z = CX = 420x_1 + 300x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{matrix} AX \leq B \\ x_1 \geq 0\,;\, x_2 \geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9

Caractéristiques de la PL

Définition :
Un programme linéaire est un problème d'optimisation (maximisation ou minimisation) défini par :

- n variables de décision (variables à calculer)
- une fonction objectif linéaire (à optimiser)
- des contraintes sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires

10

Modélisation : généralisation

- Modélisation du problème
  - Spécification de la fonction objectif
    - Maximisation un gain, retour sur investissement, profit, …

      Ou bien
    - Minimisation du coût, ….
  - Spécification des contraintes du problème
    - Contraintes liées à la disponibilité des fournitures
    - Contraintes liées au respect des proportions
    - \+ Contraintes de non négativité (grandeur positives)

11

Expression PL

Dans ce cas le programme linéaire (PL) s'écrit

$$\max Z = CX$$

- Sous les contraintes : $\begin{cases} AX \leq B \\ X_i \geq 0 \end{cases}$

- Avantage de cette écriture : générique

→l'écriture est dite normalisée.

12

Proprietés d'un modèle de programmation linéaire

- Linéarité

  Équations polynômiales de degré 1

  $a_1 X_1^1 + a_2 X_2^1 + \dots + a_n X_n^1$

- Divisibilité & continuité

  Domaine des variables partie de R

- Séparabilité & additivité

  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

- Fonction objectif unique

  Min (coût) ou Max (profit, …)

13

Forme générale d'un problème d'optimisation

$Max\ Z = C\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou bien $Min\ Z = C\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} Cont_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ Cont_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_k \\ \vdots \\ Cont_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Si la fonction C et les fonctions $Cont_i$ sont linéaires alors on a un (PL)

14

Exemple -2

Une entreprise fournit deux types de machines: A et B.
objectif : réaliser la meilleure rentabilité sous les contraintes

Coût de la production/type	A	B
Pompes	1	1
Main d'oeuvre	9 heures	6 heures
Tuyaux	12 m	16 m
Rentabilité/élément		
Prix unitaire	350 €.	300 €.

On dispose de 200 pompes,
On a 2880 mètres de tuyaux disponibles
On peut consacrer jusqu'à 1566 heures (max)

15

Les étapes pour la formulation du problème PL

1. Comprendre le problème : dégager l'objectif
2. Identifier les variables de decision(s)
   x_1 = nbre de machines de type A produites
   x_2 = nbre de machines de type B produites
3. Définir les contraintes en une combinaison linéaire de variables décisionnelles.
   $1x_1 + 1x_2 \leq 200$ → nombre de pompes
   $9x_1 + 6x_2 \leq 1566$ → coût Main-d'oeuvre.
   $12x_1 + 16x_2 \leq 2880$ → longueur tuyaux

16

Les étapes pour la formulation du problème PL

4. traduire la fonction objectif par une combinaison linéaire du rendement de chaque élément → variables décisionnelles

   Max: $350\, x_1 + 300\, x_2$

5. Identifier les limites supérieures ou inférieures des variables de décision (espace de recherche des solutions)

- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- Posons $x_2 = 0$ ---> on se déplace sur l'axe x_1, on examine les contraintes sur la variable décisionnelle x_1
  1ère contrainte : $1x_1 \leq 200$ → $x_1 \leq 200$
  2° contrainte : $9\,x_1 \leq 1566$ → $x_1 \leq 174$
  3° contrainte : $12\,x_1 \leq 2880$ → $x_1 \leq 240$

17

Exemple

Retour à l'exemple de l'ébéniste

Max : $350\,x_1 + 300\,x_2$

Sous les contraintes
$$\begin{cases} 1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 200 \\ 9\,x_1 + 6\,x_2 \leq 1566 \\ 12\,x_1 + 16\,x_2 \leq 2880 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

18

Résolution graphique et algébrique

Résoudre le problème PL: Une approche intuitive (Suite)

Si x_2=0, la valeur maximale de x_1 est 174 et le profit total est:

(350 € * **174**) + (300 € * **0**) = **60 900 €**

C'est une solution possible mais est-elle *optimale*?

Non!

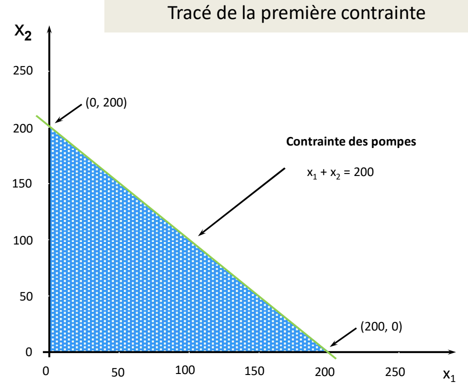
20

Résolution du problème PL Une approche graphique

- Les contraintes d'un problème PL définissent la région de faisabilité.
- Le meilleur point dans la zone de faisabilité correspond à la solution optimale.
- Pour des problèmes à deux (resp. 3) variables, il est facile de tracer la zone de faisabilité et de trouver la solution optimale dans le plan (resp. dans l'espace).
- Attention !! Cette approche est envisageable dans R^2
- Au delà de 3 variables ?!!

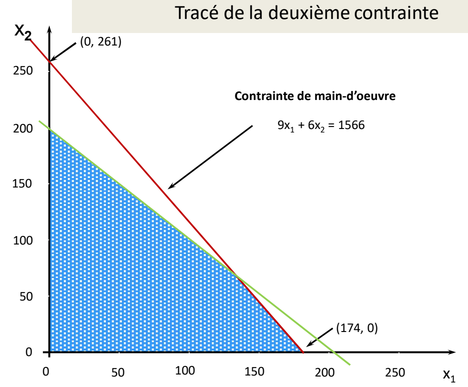
21

Tracé de la première contrainte



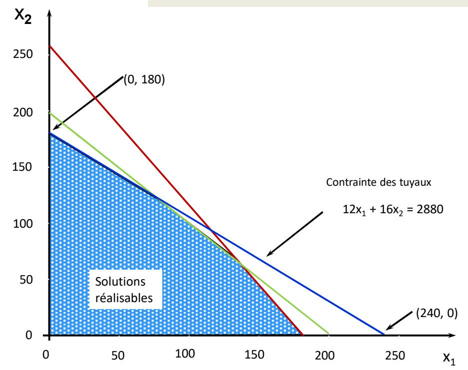
22

Tracé de la deuxième contrainte



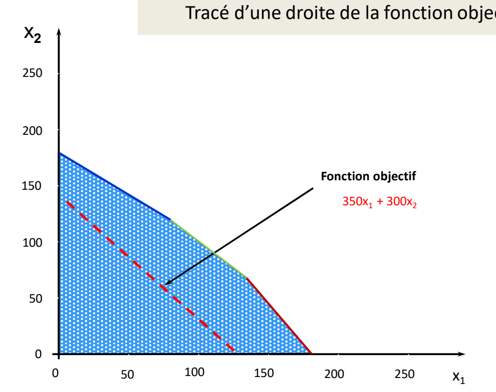
23

Tracé de la troisième contrainte



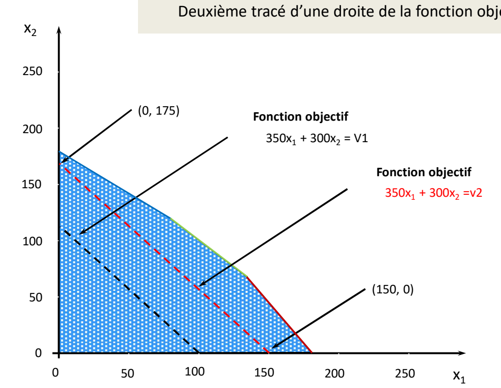
24

Tracé d'une droite de la fonction objectif



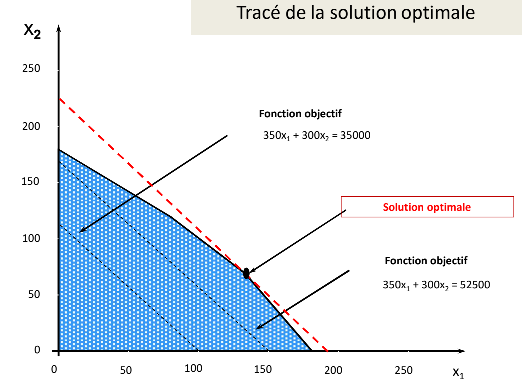
25

Deuxième tracé d'une droite de la fonction objectif



26

Tracé de la solution optimale



27

Calcul de la solution optimale

Comment déterminer la solution ?

La solution optimale est l'un des sommets du polygone (polyèdre) convexe qui délimite le domaine des solutions réalisables.
Un sommet correspond à l'intersection de 2 (ou plus) contraintes.

La solution maximise la fonction objective

28

Calcul de la solution optimale

Pour l'exemple :
La solution optimale se trouve à l'intersection des contraintes de pompes et de main d'œuvre.

Soit :

$x_1 + x_2 = 200$ (1)
$9x_1 + 6x_2 = 1566$ (2)

On résout le système :

$x_2 = 200 - x_1$ (3)

29

Calcul de la solution optimale (Suite)

Par substitution on obtient :

$9x_1 + 6\,(200 - x_1) = 1566$
d'où $x_1 = 122$

La solution optimale est :

$x_1 = 122$
$x_2 = 200 - x_1 = 78$

Profit total = (350 € * **122**) + (300 € * **78**) = **66 100** €

30

Situations spéciales : Remarque 1

- Plusieurs anomalies peuvent survenir:
  - Solutions optimales multiples
  - Contraintes redondantes
  - Problème non-contraint ("Unbounded Solutions")
  - Non réalisable

31

Situations spéciales : Remarque 2

- ATTENTION !!! Certaines contraintes peuvent ne pas agir car elles sont au-delà de ce que d'autres imposent → contrainte redondante

- On peut remplacer la recherche d'un maximum par la recherche d'un minimum, dans ce cas on transforme le pbme en 1 problème équivalent → voir chapitre : problème dual.

32

Remarques -3

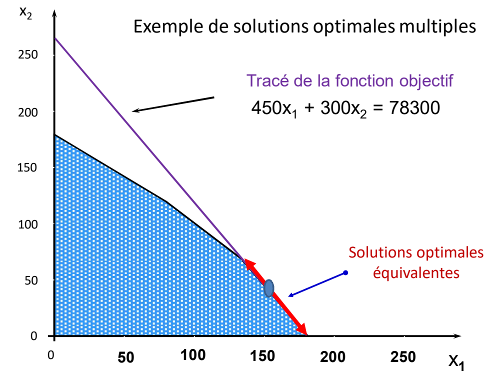
- Les $a_{i,j}$, b_i, c_j ne sont pas nécessairement positifs (voir suite du cours)

- Plusieurs situations peuvent se rencontrer
  - Il n'existe pas de x_j satisfaisant les inéquations (1)
  - Parmi les x_j satisfaisant les inéquations la somme peut être aussi grande que l'on veut (2)
  - Il existe plusieurs valeurs donnant l'optimum
  - Il existe une et une seule valeur donnant l'optimum

33

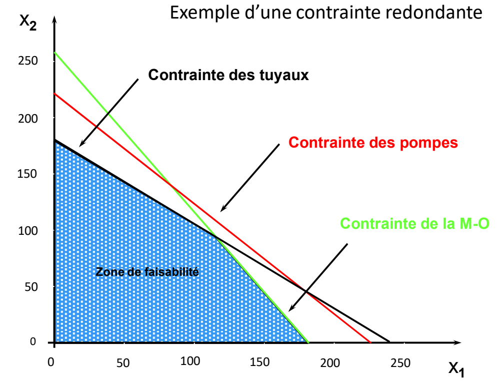
Résolution Graphique

Exemple de solutions optimales multiples



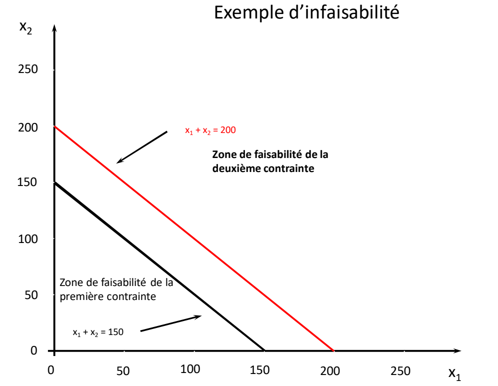
34

Exemple d'une contrainte redondante

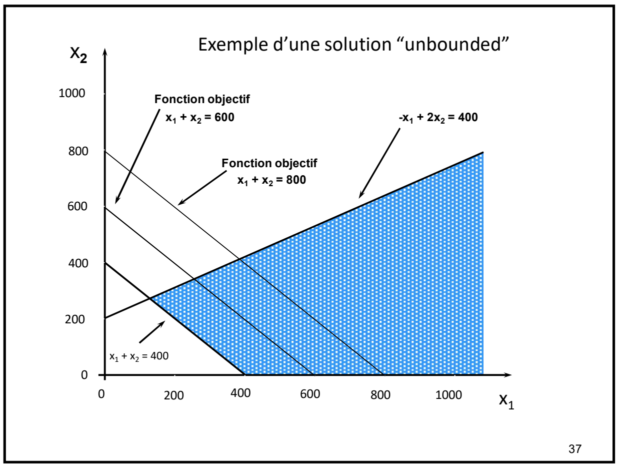


35

Exemple d'infaisabilité



36



Remarques

- Une solution **réalisable**, c'est une instanciation de x qui vérifie les contraintes.
- Une solution **réalisable optimale** est une solution réalisable qui maximise Z (ou minimise Z).
- Mathématiquement l'ensemble des solutions réalisables optimales décrit une partie d'un hyperplan de R^n avec n la dimension de x.

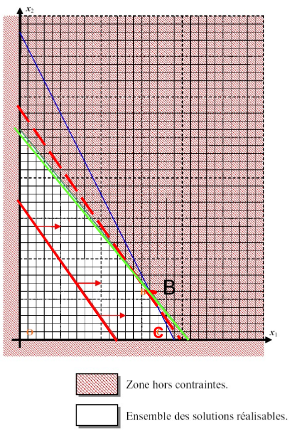
38

Résolution graphique de l'exemple 1

- On a 2 contraintes donc 2 droites :
  - En vert : $50 x_1 + 40 x_2 = 1040$
    $\Leftrightarrow 5 x_1 + 4 x_2 = 104$
    et on a les points (0 , 26) et (20.8 , 0)
  - En bleu : $2 x_1 + x_2 = 38$
    et on a les points (0 , 38) et (19 , 0)
- La droite de maximalisation sera une parallèle à la droite en rouge : $420 x_1 + 300 x_2 = A$

Trouver x_1 ,x_2 qui maximisent A (x_1 , x_2) est l'un des sommets du polygone

39



On teste les différentes valeurs point B de coordonnées (6 , 16) unique solution réalisable optimale.
On applique donc les coordonnées de B dans *Z pour*
On voit que le gain est maximal et on obtient :
420 * 16 +300 * 6 = 8520 € .

il faut donc produire :

16 tables et **6** chaises

40

Résolution algébrique

Exemple :
Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles.
Il doit réaliser des bouquets il a les possibilités suivantes :
1- Des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant
8 lys, 10 roses et 20 jonquilles,
2- des bouquets qu'il vend 50 euros qui comprennent
5 lys, 20 roses et 10 jonquilles.
Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ? → voir solution en TD

41

Résolution algébrique

Rappel
Soit une matrice A de dimension (m, n) telle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ avec m < n}$$

Rappel :Résolution graphique dans R^2

Une contrainte ≡ une droite ⇔ $\begin{cases} ^\circ\ recherche\ des\ points\ intersections\ des\ droites \\ ^\circ\ recherche\ parmi\ ces\ points, celui\ qui\ maximize\ Z \end{cases}$

Si on est dans R^m : trouver les intersections des différents contraintes
→ (solution graphique difficile à appliquer au dela de R^2)

Rappel : une base de *A est un ensemble de* ***m*** *colonnes de A formant une matrice carrée inversible*

C'est une sous matrice de A de taille m

42

Résolution algébrique

Rappel
Soit une matrice A de dimension (m, n) telle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ avec m} < \text{n}$$

Une base de *A est un ensemble de **m** colonnes de A formant une matrice carrée inversible*

C'est une sous matrice de A de taille m

Résolution algébrique

Rappel

Une matrice carrée C de taille n est inversible si :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ ; } \det(c) \neq 0$$

Exemple résolution directe

$$\mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} cofact(c_{11}) & \cdots & cofact(c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cofact(c_{n1}) & \cdots & cofact(c_{nn}) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$$

Résolution algébrique

Base et Variables basiques quelques définitions

- Toute matrice B formé de m colonnes linéairement indépendantes de A est une base (ordonnée) du système
- Les colonnes de B sont dites basiques, les autres sont dites hors base
- Les variables associées aux colonnes de B sont dites variable basiques
- Une variable de base a un coefficient égal à 1 dans une des équations du système et des coefficients nuls partout ailleurs
- La liste ordonnée des variables basique (ou de leurs indices) sera aussi appelée base.

Résolution algébrique

Transformation l'inéquation j ($j = 1, \cdots, m$), en une équation en ajoutant une variable x_{n+j} . Les x_{n+j} sont appelées **variables d'écart**

pour la première contrainte cela se traduit par :

$$\underbrace{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \le b_1}$$

donne :

$$\underbrace{a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \boxed{+\, x_{n+1}} = b_1}$$

46

Résolution algébrique

En appliquant ce principe aux m inéquations (contraintes) :

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \le b_1 \\ \cdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \le b_m \end{cases}}$$

on obtient

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}}$$

47

Résolution algébrique -4

Ecriture matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & \cdots & a_{1n}x_n & x_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & \cdots & a_{mn}x_n & 0_1 & \cdots & 0 & x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

N

B

X = $[x_B, x_N]$

La solution particulière obtenue en fixant à zéro les variables hors base est appelée solution basique associée à la base B :

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$$

48

Résolution algébrique

Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

On se retrouve avec un système de m équations à $n+m$ variables (n variables décisionnelles, m variables d'écart)

on doit alors adapter C en faisant rentrer les variable d'écart :

$$C = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c x_n \underbrace{+0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \cdots + 0x_{n+m}}$$

Résolution algébrique

On obtient les sous matrices ***B*** et ***N*** de ***A*** ainsi que x_B et x_N de $\boldsymbol{X}$:

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}^{B} \; \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{N}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} x_B \\ \\ \left.\right\} x_N \end{matrix}$$

$$\boxed{\text{on a donc : } \quad A \cdot X \;=\; (B, N)\binom{x_B}{x_N}}$$

Résolution algébrique – 7

Récapitulatif :

La matrice A passe à une matrice de dimension $(m, n+m)$
X passe à une matrice de dimension $(n+m, 1)$ *: vecteur colonne*
et C à une dimension $(1, n+m)$ *(C est* complétée avec m « 0 ») *vecteur ligne*

On a remplacé les inégalités par des égalités pour avoir un système d'équations qu'on peut exprimer par une formulation matricielle, mais on augmente le nombre de variables (ajout de variables d'écarts). On obtient un système lié.

une variable d'écart exprime le surplus pour la ressource exprimée par la contrainte.

Retour à l'exemple 1 (1)

Rappel de l'exo1

Un ébéniste fabrique des chaises et des tables.

Il peut consacrer au plus 1040 heures et 38 tronçons de bois.

On transforme les matrices pour faire disparaître les inégalités :

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 420 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 420x_1 + 300x_2 + 0\ x_3 + 0\ x_4$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de dim 2, les bases seront des matrices de dimension (2,2)

x_3 : exprime ce qu'on ne consommera pas en main d'œuvre (compte tenu de la limite fixée) en ayant la solution optimale

x_4 : exprime ce qu'on ne consommera pas en quantité de bois

52

Retour à l'exemple

On transforme les différentes matrices pour faire disparaître les inégalités des contraintes :

$$\begin{pmatrix} 50 & 40 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 420 & 300 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice *A est de dimension 2 donc les bases seront des matrices de dimension (2, 2). On cherchera les vecteurs (les solutions) de chaque sous-matrice libre (correspond à la recherche des intersections des doites (contraintes)*

Pour une base M de A, On utilisera les formules suivantes :

53

Rappel

$$\det M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \Leftrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Transformation : système étendu :

$$Ax = (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$d'où \quad Bx_B = b - Nx_N$$

54

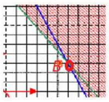
Retour à l’exemple 1 (3)

$x_B = B^{-1}\ Nx_N$

D’où : $Bx_B = b - Nx_N$ → on cherche les cas où $x_N = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \det B = -30 \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ; x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$$



C’est le point **B** du graphique

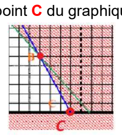
$$x = (16 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^t$$

Retour à l’exemple 1 (4)

$$B_2 = \begin{pmatrix} 50 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \det B_2 = -2; B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -25 \end{pmatrix}$$

$$x_N = (0 \quad 0)^t; x_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 90 \end{pmatrix}$$

C’est le point **C** du graphique

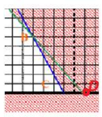


$$x = (19 \quad 0 \quad 90 \quad 0)^t$$

Retour à l’exemple 1 (5)

$$B_3 = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\ \det B_3 = 50 \quad \Rightarrow B_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & 0 \\ -\frac{1}{25} & 1 \end{pmatrix}\ ;\ x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 20.8 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

C’est le point D ***hors contraintes*** du graphique

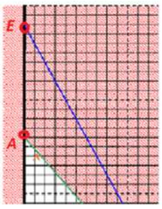


$$x = (20.8 \quad 0 \quad 0 \quad 3.6)^t$$

Retour à l'exemple 1 (6)

$$B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -40 \end{pmatrix} \; ; \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} 38 \\ -480 \end{pmatrix}$$

$$B_5^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{40} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \end{pmatrix}$$



x * est le point E ***hors contraintes*** du graphique ; x ** est le point ***A*** du graphique

$x^* = (0 \quad 38 \quad -480 \quad 0)^t$

$x^{**} = (0 \quad 26 \quad 0 \quad 12)^t$

Retour à l'exemple 1 (7)

$$B_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B = \begin{pmatrix} 1040 \\ 38 \end{pmatrix}$$

C' est le point ***O*** du graphique

$x^* = (0 \quad 0 \quad 1040 \quad 38)^t$

Le report des différentes valeurs dans Z montrent que B est bien la valeur qui optimise Z=Cx

Solution $x = (16 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^t$

Propriétés

- L'ensemble des sommets du polygone convexe formé par l'ensemble des solutions réalisables correspondent à un ensemble de bases réalisables
- La maximisation (ou minimisation) de Z est obtenue en un des sommets du polygone convexe formé par l'ensemble des solutions réalisables, c'est donc une solution de base réalisable.

Remarque : pour trouver les différents sommets du polygone, nous avons procédé à la résolution de tous les sous systèmes libres.

Méthode du simplexe

MÉTHODE du SIMPLEXE

- INTRODUCTION
  - développée initialement par George Dantzig en 1947 pour répondre à des problèmes de logistiques de la chaîne d'approvisionnement de l'armée américaine.
  - seule méthode exacte pour résoudre des problèmes linéaires de grande taille (calcul systématique)
  - Principe : méthode itérative algébrique où l'on circule séquentiellement sur les sommets en empruntant les arêtes jusqu'à l'obtention de la solution optimale
  - Cette méthode consiste en la recherche des sommet du polygone (Polyèdre)

62

QUELQUES DÉFINITIONS : Rappel

- Systèmes d'équations équivalents
  - Systèmes qui possèdent le même ensemble de solutions
- Variable de base
  - Variable qui a un coefficient unitaire positif dans une des équations du système et des coefficients nuls partout ailleurs
- Opérations pivot
  - Opération de Gauss pour transformer un système d'équations équivalent dans lequel une variable devient de base
- Système canonique
  - Système d'équations où il y a **une** variable de base par équation
- Solution de base
  - Système d'équations où les variables hors base sont fixées à zéro et la résolution porte sur les variables de base

63

Introduction à la méthode du simplexe

Retour sur l'exemple de l' ébéniste

Ecriture standard avec l'ajout des variables d'écart

$$Max\ Z = 420x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0\,x_4$$

Sous les contraintes
$$\begin{cases} 50x_1 + 40x_2 + x_3 + 0x_4 = 1040 & (C1) \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 38 & (C2) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

64

Méthode du simplexe

$$\begin{cases} x_3 & = & 1040 - 50x_1 - 40x_2 \\ x_4 & = & 38 - 2x_1 - x_2 \\ Z & = & 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

Idée

Vérifie les contrainte

$(0{,}0,\ \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4})$ solution réalisable $\Rightarrow$ *au point « O » et on a* $Z = 0$

(On change de base)

*On va exprimer les variables de la **base en fct** des variable **hors base :***

$$(\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}) = \boldsymbol{fct}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$$

65

Méthode du simplexe

Idée

- Augmenter une variable ayant un coefficient positif dans Z augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives (autrement dit : tant que les contraintes sont vérifiées)

$$\begin{cases} x_3 & = & 1040 - 50x_1 - 40x_2 \\ x_4 & = & 38 - 2x_1 - x_2 \\ Z & = & 420x_1 + 300x_2 \end{cases}$$

66

Méthode du simplexe

1. On cherche la variable x_i dont le coef maximise Z (en supposant les autres nulles ici : x_1
2. On fait passer la variable x_1 dans la base
3. on fait sortir une autre variable de la base

➔ variables à gauche des signe « = » variables «en base»
les autres = variables «hors base»

!! Pour garder l'admissibilité de la solution (solution réalisable), l'augmentation de x_i doit être stoppée dès qu'une contrainte n'est plus vérifiée.

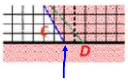
On fait sortir de la base la variable qui correspond à la contrainte la plus forte (dans ce cas les autres contraintes sont par conséquent vérifiées).

67

Méthode du simplexe

On cherche la valeur limite (admissible) de x_1 en posant $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50x_1 \geq 0 \\ x_4 = 38 - 2x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 20.8 \\ x_1 \leq 19 \end{cases} \boxed{\Rightarrow x_1 \leq 19}$$



Cette contrainte correspond à x_4

Donc c'est x_4 qui doit sortir de la base et x_1 rentre en base
⇒ on calcule x_1 à partir de $x_4 = 38 - 2x_1 \geq 0$

et on obtient : $\boxed{x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4}$

68

Méthode du simplexe

Ainsi on obtient pour les variables de la base : x_1, x_3

$$\begin{cases} x_3 = 1040 - 50\left(19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right) - 40x_2 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 420\left(\underbrace{19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4}_{x_1}\right) + 300x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1040 - 50\left(19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right) \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90x_2 - 210x_4 \end{cases}$$

Dans la nouvelle expression de Z c'est x_2 qui rentre en base

69

Méthode du simplexe

On recommence le même procédé avec ce nouveau système

$$\begin{cases} x_1 = 19 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \\ x_3 = 90 - 15x_2 + 25x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 38 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

On fait sortir x_3 de la base. On recalcule le nouveau système

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 19 - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{4}x_4\right) - \frac{1}{2}x_4 \\ Z = 7980 + 90\left(6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4\right) - 210x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 16 + \frac{1}{30}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ Z = 8520 - 6x_3 - 60\,x_4 \end{cases}$$

70

Méthode du simplexe

Résultat après réduction :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 - \frac{1}{15}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_1 = 16 + \frac{1}{30}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ Z = 8520 - 6x_3 - 60\,x_4 \end{cases}$$

Il n'y a plus de variable à coefficient positif dans Z

Il n'y a plus de variable qui peut croite sans diminuer la valeur de Z

Max Z et la valeur de x_1 , x_2 sont obtenues en mettent x_3 , x_4 à 0 dans le dernier système.

(Z=8520, x_1 =16, x_2 =6)

71

Algorithme du simplexe

1. **Choisir** une solution initiale réalisable X^0 (initialiser les variable décisionnelles à « 0 »)
2. **Exprimer** les variables en base (à l'initialisation : variable d'écart) en fonction des variables hors base (à l'initialisation : variables décisionnelles)
3. **Si tous** les coefficients dans Z sont négatifs alors (on est à l'optimum) les variables en base donnent la solution optimale → Arrêt
4. **Sinon** / il existe des coefficients positifs dans Z,
   Soit x_j la variable ayant le plus fort coefficient **positif** (dans Z)
5. **calculer** la valeur maximale de x_j sous la contrainte : variables en base restent positives ou nulles. Soit x_i une des variables en base qui correspond à la contrainte retenue
6. **Faire entrer** la variable x_i en base et passer x_j dans l'ensemble des variables hors base (x_j sort de la base)
7. **Exprimer** les variables en base en fonction des variables hors base
8. **Retourner** en **3**

72

Rappel

On obtient les sous matrices ***B*** et ***N*** de ***A*** ainsi que $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ et $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ de $\boldsymbol{X}$:

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}^{B} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_1 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^{N}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ x \\ x \end{matrix}}\right\} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ x \\ x \end{matrix}}\right\} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{matrix}$$

on a donc : $Ax = (B, N)\binom{x_B}{x_N}$

Simplexe : notation en tableau

On part du système avec les variables d'écart

$$Ax_B + Nx_N = b$$
$$Z = \underbrace{C_B x_B}_{vect.\ base} + \underbrace{C_N x_N}_{hors\ base}$$

ou bien: $Ax = (B, N)\binom{x_B}{x_N}$

Notation en tableau

D'où $$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Où $B^{-1}Nx_N$ combinaison des variables hors base
$B^{-1}b$: constante

$$Z = Cx = C_B x_b + C_N x_N$$
$$Z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)x_N$$

Où $B^{-1}Nx_N$ combinaison des variables hors base
$B^{-1}b$: constante

Notation en tableau : exemple

Ce qui se traduit par (on utilise le système augmenté des variables d'écart

$$Z = \underbrace{C_B b}_{Z_B} + \underbrace{(C_N - N)}_{\Delta_N} x_N + 0x_B$$

76

Notation en tableau : exemple

Ce qui se traduit par (on utilise le système augmenté des variables d'écart

$$Z = \underbrace{C_B b}_{Z_B} + \underbrace{(C_N - N)}_{\Delta_N} x_N + 0x_B$$

Toutes les variables du système

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	50	40	1	0	1040
x_4	2	1	0	1	38
	420	300	0	0	0

$$\underbrace{\quad}_{\Delta_N x_N} \qquad \underbrace{\quad}_{0x_B} \qquad \underbrace{\quad}_{-Z_B}$$

Variables en base :

77

Notation en tableau : exemple

Retour à l'exemple : initialisation $x_1 = 0$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1040$; $x_4 = 38$

	x_1	x_2	x_3	x_4	B	
x_3	50	40	1	0	1040	→1040/50=20.8
x_4	2	1	0	1	38	→38/2=19
Z	420	300	0	0	0	

Le coefficient maximal (positif non nul) dans Z (de la matrice C), s'il existe, désigne la variable x_i qui passe en base → x_1

On divise la colonne de B par la valeur du coefficient correspondant de la colonne x_i (pivot) → Coef de x_1

→ la valeur **minimale** obtenue donne la variable qui passe en base (ici → x_4)

78

Notation en tableau : exemple

On fait rentrer x_1 en base et on normalise la ligne du pivot en mettant le pivot à 1 et on annule les autres coefficient de la même colonne c.a.d
Combinaison linéaire entre la ligne courante et la ligne du pivot pour annuler les coefficients correspondant sur la colonne du pivot (élimination de gauss) sauf l'élément qui rentre en base

(1')=(1)-50(2')
(2')=.5(2)
(3')=(3)-420(2')
transformations

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	0	15	1	-25	90	→ 90/15 = 6
x_1	1	1/2	0	1/2	19	→ 19/(1/2) = 28
Z	0	90	0	-210	-7980	Z – 420 × 19

$$Z = 0 - 420 \times 19 = -7980$$

79

Notation en tableau : exemple

(**) A l'initialisation Z=0

On vient de calculer les éléments du premier tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	0	15	1	-25	90	
x_1	1	1/2	0	1/2	19	
Z	0	90	0	-210	-7980	Z – 420 × 19 (**)

On applique la méthode sur le nouveau tableau obtenu puisque dans la ligne « Z » du tableau (bleu) il y a au moins un coeff. positif

80

Notation en tableau : exemple

Dans le nouveau tableau, les coefficients de Z sont tous négatifs ou nuls

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	1/(15)	-5/3	6
x_1	1	0	-1/30	4/3	16
Z	0	0	-6	-60	- 8520

C'est le dernier tableau car il n'y a plus de nombres positifs sur la dernière ligne

On a la solution qui maximise Z : x_1= 16 ; x_2= 6; x_3 =0 ; x_4 =0
$Z = +8520$

81

Algorithme général

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	B
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	$0 \cdots 0$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	$1\ 0 \cdots 0$		b_2
x_{n+3}	a_{31}	a_{32}	$\cdots$	a_{3n}	0	$0\ 1 \cdots 0$		b_3
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	$0 \cdots 0$	1	b_m
Z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	$0 \cdots 0$	0	0

On suppose ici que c_2 est le coef. Maximal (positif) dans Z, donc la colonne 2 est celle du pivot, elle donne la variable qui rentre en base

Schéma général (1)

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	B	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	$0 \cdots 0$	0	b_1	b_1/a_{12}
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	$1\ 0 \cdots 0$		b_2	b_2/a_{22}
x_{n+3}	a_{31}	a_{32}	$\cdots$	a_{3n}	0	$0\ 1 \cdots 0$		b_3	$\frac{b_3}{a_{32}}$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	$0 \cdots 0$	1	b_m	$\frac{b_m}{a_{m2}}$
Z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	$0 \cdots 0$	0	0	

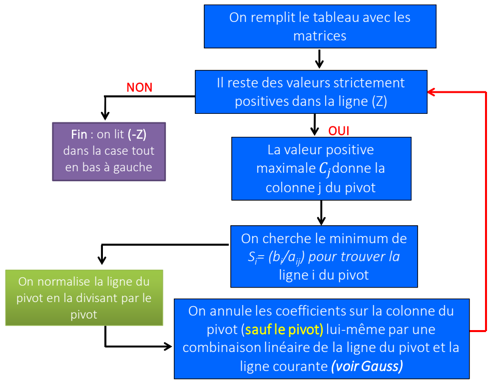
x_{n+3}

On suppose que $\frac{b_3}{a_{32}}$ est minimal donc la $ligne$ 3 est celle du pivot, c'est elle qui donne la variable qui sort de la base : x_{n+3}

Schéma général (2)

		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	B
$1'=1-\mathbf{3'} \cdot a_{12}$	x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	$0 \cdots 0$	0	b_1
$2'=2-\mathbf{3'} \cdot a_{22}$	x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	$1\ 0 \cdots 0$	0	b_2
$\mathbf{3'} = 3/a_{32}$	x_{n+3}	a_{31}	a_{32}	$\cdots$	a_{3n}	0	$0\ 1 \cdots 0$	0	b_3
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$m'=m-3' \cdot a_{m2}$	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	$0 \cdots 0$	1	b_m
$Z'=Z-\mathbf{3'} \cdot c_2$	Z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	$0 \cdots 0$	0	0

Algorithme général



85

Récapitulatif: choix des variables entrantes

choisir une variable dont le coeff dans la fonction objectif est > 0

→ Règle ambigüe

plusieurs variables peuvent être candidates

But : choisir la variable pour minimiser le nombre d'itérations dans l'algorithme

Règle du plus grand accroissement de z

Choisir de faire entrer la variable qui fait le plus augmenter la fonction objectif

86

La règle du plus grand coefficient est plus souvent utilisée que la règle du plus grand accroissement car elle est calculable plus facilement

Lorsque plusieurs variables sont candidates à entrer en base (selon un certain critères) choisir celle qui a le plus petit indice dans le tableau. Faire de même avec les variables sortant de la base.

Théorème — Bland (1977)
si on applique cette dernière règle, l'algorithme du simplexe ne peut pas cycler.

87