**LIF064 Optimisation - TD1**
Modélisation et méthode du simplexe

## Exercice 1

Rappel du problème vu en cours :
Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles.
Un bouquet 1 est composé de 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles. Il est vendu 40€.
Un bouquet 2 est composé de 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Il est vendu 50€.

1. Modéliser le problème sous forme standard.

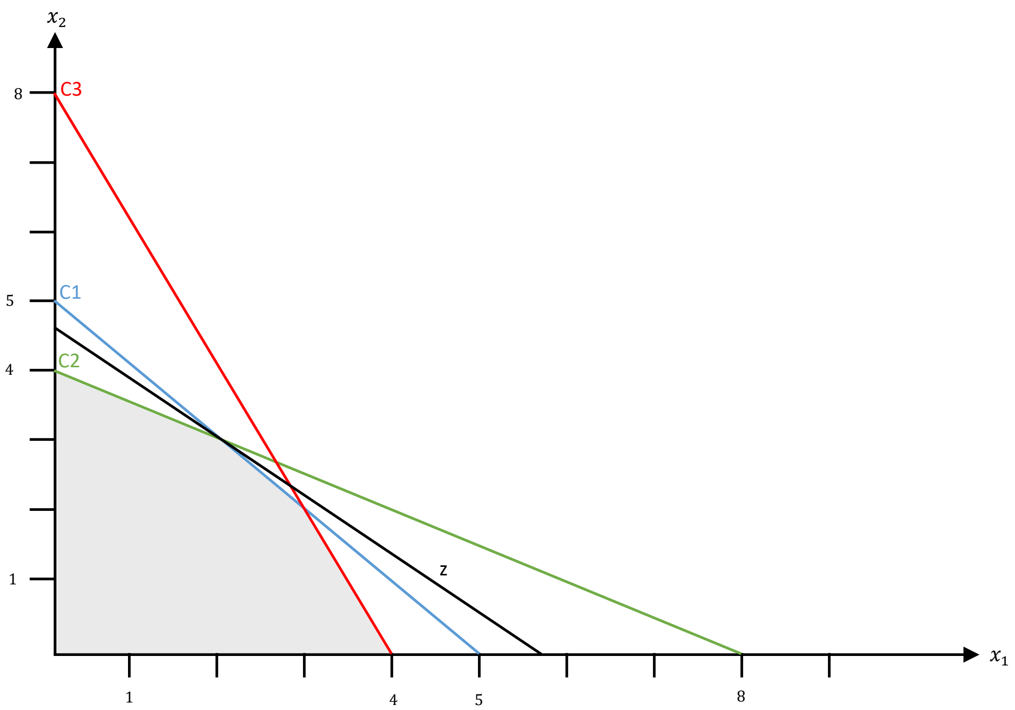
Le système se modélise sous la forme standard :

$$\max_{x_1,x_2} z = 40x_1 + 50x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} 10x_1 & + & 10x_2 & \leq & 50 & (C1) \\ 10x_1 & + & 20x_2 & \leq & 80 & (C2) \\ 20x_1 & + & 10x_2 & \leq & 80 & (C3) \\ x_1 \geq 0 & \text{et} & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le nombre de bouquet 1 est $x_1$ et le nombre de bouquet 2 est $x_2$. On veut maximiser le profit de la vente des deux types de bouquets.
La fonction objective : le profit réalisé par la vente des bouquets confectionnés

2. Résoudre le problème graphiquement.

Nous dessinons les lignes délimitant les demi-plans donnés par les contraintes C1 , C2 et C3 puis z.




On constate que z est maximal au point d’intersection de C1 et C2. Donc on a la solution optimale :

$$\begin{cases}10x_1 + 10x_2 = 50\\ 10x_1 + 20x_2 = 80\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10x_1 + 10x_2 = 50\\ \phantom{10x_1 +{}} 10x_2 = 30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10x_1 + 10x_2 = 50\\ \phantom{10x_1 +{}} x_2 = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = 3\end{cases}$$

Pour cette solution le bénéfice sera $z = 40 \times 2 + 50 \times 3 = 230$€. C3 n'a pas été optimisé au maximum, il restera donc des jonquilles (10).

3. Résoudre de manière algébrique le même problème avec uniquement les contraintes C1 et C2.

De manière algébrique nous pouvons formuler le problème par l'équation matricielle
$A \times X = (B, N) \times X = b$.
Nous avons ici $B = \begin{pmatrix}10 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}$ et $X_B = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix}50\\ 80\end{pmatrix}$

La solution est donnée par $X_B = B^{-1}b$ où $B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix}B_{2,2} & -B_{1,2}\\ -B_{2,1} & B_{1,1}\end{pmatrix}$ et $\det B = B_{1,1}B_{2,2} - B_{1,2}B_{2,1}$

Donc nous avons :

$$X_B = \frac{1}{10 \times 20 - 10 \times 10}\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-1}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

Nous obtenons la même solution qu'à la question précédente car la contrainte supprimée était celle non optimisée.

**Exercice 2**

Un menuisier dispose d'un stock de planches qu'il souhaite mettre à profit. Il dispose de 20 planches A, 22 planches B et 12 planches C. Avec ces planches, il peut construire 2 types de meubles.
Le meuble M1 nécessite 1 planche A, 2 planches B et 1 planche C. Il est vendu 300€.
Le meuble M2 nécessite 2 planches A, 1 planche B et 1 planche C. Il est vendu 200€.

1. Modéliser le problème sous forme standard.

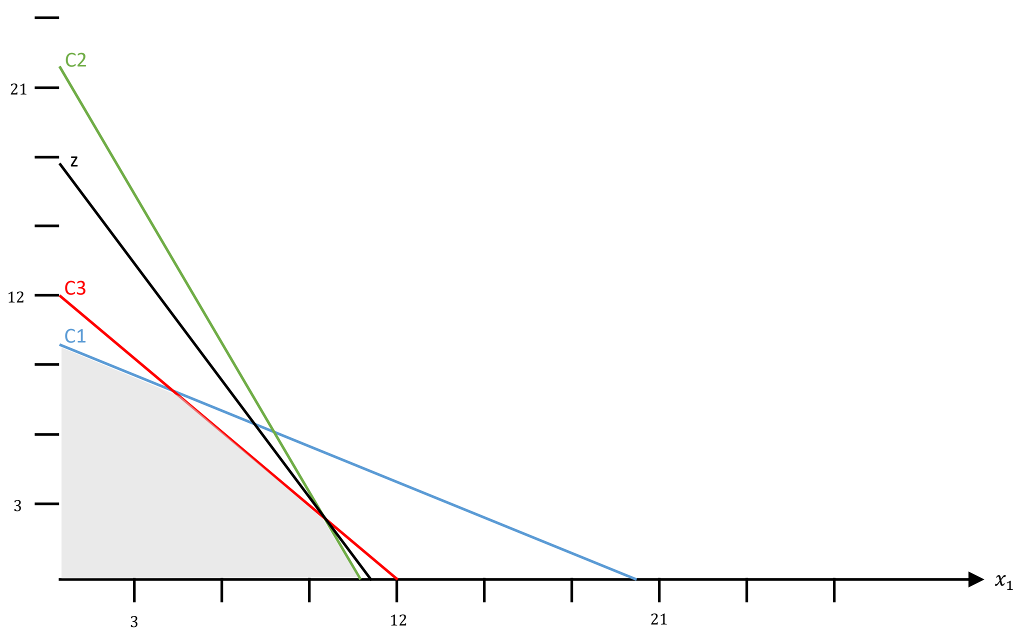
Le système se modélise sous la forme standard :

$$\max_{x_1, x_2} z = 300x_1 + 200x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 & (C1)\\ 2x_1 + x_2 \leq 22 & (C2)\\ x_1 + x_2 \leq 12 & (C3)\\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le nombre de meuble M1 est $x_1$ et le nombre de meuble M2 est $x_2$. On veut maximiser le profit de la vente des deux types de meuble.

2. Résoudre le problème graphiquement.

Nous dessinons les lignes délimitant les demi-plans donnés par les contraintes C1 , C2 et C3 puis z.




On constate que z est maximal au point d'intersection de C2 et C3. Donc on a la solution optimale :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 10 \end{cases}$$

Pour cette solution le bénéfice sera $z = 300 \times 10 + 200 \times 2 = 3400$€. C1 n'a pas été optimisé au maximum, il restera donc des planches A (6).

**Exercice 3 (Examen 2016 – 5pts)**

Un producteur de légumes dispose de 20 jours de travail pour s'occuper de la récolte de 2 champs: un champ de légumes A et un champ de légumes B. Il ne pourra malheureusement pas collecter l'intégralité de sa production à temps : la récolte du champ A prendrait 18 jours et la récolte du champ B prendrait 15 jours. Une journée de travail sur le champ A permet de récolter 500kg de la variété A. Une journée de travail sur le champ B permet de récolter 250kg de la variété B. Pour proposer un peu de variété, le producteur souhaite qu'au moins 25% de la masse de sa production soit constituée de légumes B (par exemple au moins 500 kg de légumes B pour 1500 kg de légumes A).

**Le prix au kilo étant le même pour les deux variétés, le producteur souhaite maximiser la masse de légumes récoltés.**

**Questions**

1. [2 points] Donner la modélisation du problème exprimée sous la forme standard en explicitant clairement la fonction objectif $z$ et les variables et toutes les contraintes.
2. [1.5 points] Donner la représentation graphique du problème (contraintes et masse récoltée).
3. [0.5 point] Y indiquer clairement l'espace des solutions réalisables.
4. [1 point] Résoudre graphiquement le problème et donner les valeurs numériques de la production maximale de légumes.

1. Le problème se modélise sous la forme standard :

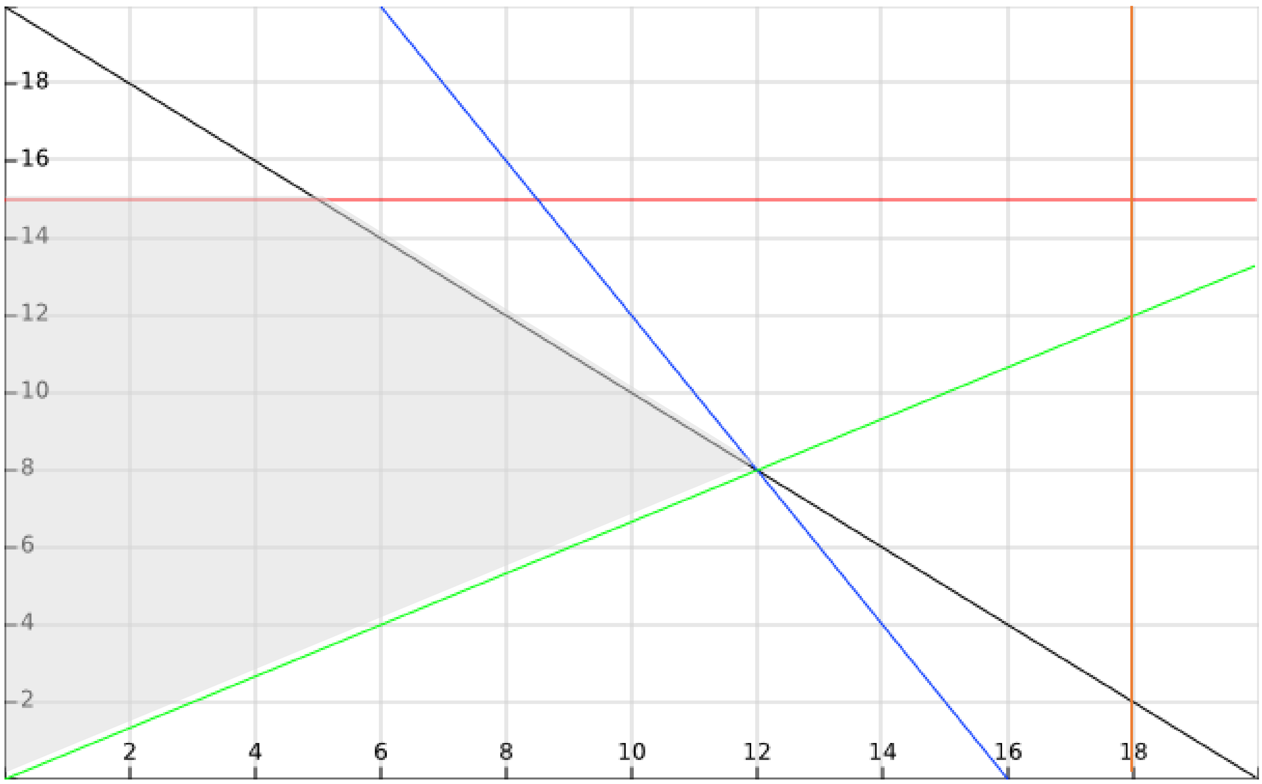
$$\max_{A,B} z = 500A + 250B \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} A + B \leq 20 & (C1) \\ A \leq 18 & (C2) \\ B \leq 15 & (C3) \\ \frac{2}{3}A - B \leq 0 & (C4) \\ A, B \geq 0 \end{cases}$$

Avec $A$ le nombre de jours de récolte du légume A et $B$ celui du légume B.

La contrainte (C4) vient de : $250B \geq \frac{25}{100}(500A + 250B)$

2. et 3. Nous dessinons les droites délimitant les demi-plans donnés par les contraintes (Ci) et z.

(C1) (C2) (C3)(C4) (z)




4. On constate que z est maximal au point d'intersection de (C1) et (C4) donc pour $\begin{cases} A + B = 20 \\ \frac{2}{3}A - B \leq 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $A = 12$ et $B = 8$.

Le producteur de légumes peut passer 12 jours à récolter le légume A (production de 6000 kg de légumes A) et 8 jours à récolter le légume B (production de 2000 kg de légumes B). Il récoltera en tout 8000 kg de légumes.

**Exercice 4 (examen 2017 - 2.5 points)**

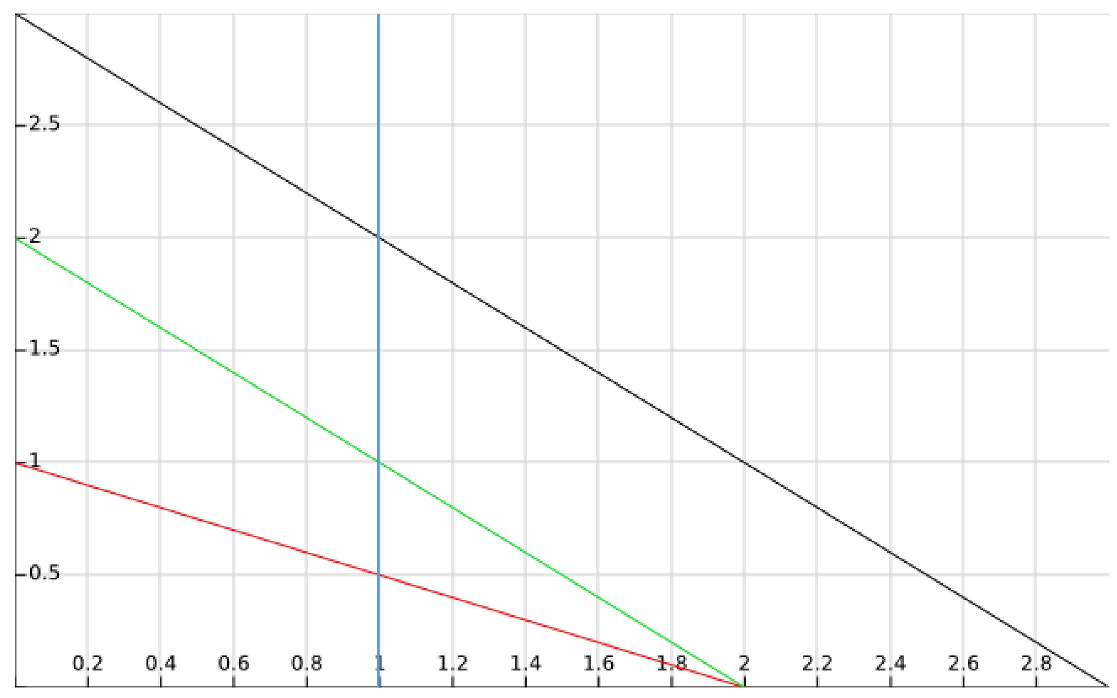
On donne le problème linéaire sous contraintes suivant :

$$\max_{x_1,x_2} z = x_1 + x_2 \qquad \text{s.c.} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 & (C1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 & (C2) \\ x_1 \leq 1 & (C3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Questions**

1. [1.5 point] Donner une représentation graphique du problème (contraintes et z).
2. [1 point] Préciser l'espace des solutions réalisables, et conclure sur la solution au problème.

1. Nous dessinons les droites délimitant les demi-plans donnés par les contraintes (Ci) et z.
(C1)(C2)(C3) (z)




2. L'espace des solutions réalisables est vide. Le problème n'a pas de solution.

**Exercice 5**

Une chaîne de télévision planifie sa prochaine émission politique. On dispose pour cette émission d'un temps d'antenne maximum pour les interviews de 48 minutes. Les invités de cette émission sont : M. Cantin, M. Morin et M. Babin. M. Cantin insiste pour que son temps d'antenne soit au moins le double de celui de M. Babin. Par ailleurs, le réalisateur désire que le temps d'antenne combiné de M. Cantin et de M. Morin soit d'au plus 38 minutes. Par expérience, on sait que :

- M. Cantin attirera 20 000 téléspectateurs par minute d'apparition à l'écran
- M. Morin attirera 30 000 téléspectateurs par minute d'apparition à l'écran
- M. Babin attirera 28 000 téléspectateurs par minute d'apparition à l'écran

1. Modéliser le problème sous forme standard.

Le système se modélise sous la forme standard :

$$\max_{x_1,x_2,x_3} \; z = 20\,000x_1 + 30\,000x_2 + 28\,000x_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 48 & (C1) \\ -x_1 + 2x_3 \leq 0 & (C2) \\ x_1 + x_2 \leq 38 & (C3) \\ x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le temps d'antenne de M. Cantin est $x_1$, celui de M. Morin est $x_2$ et celui de M. Babin est $x_3$. On veut maximiser le nombre de téléspectateurs

2. Utiliser la méthode du simplexe pour
   a. Donner la configuration qui permet de maximiser le nombre de téléspectateurs
   b. Donner dans ce cas l'audience totale de l'émission.

Afin de remplacer les inéquations par des équations, nous introduisons les variables d'écarts $x_4$, $x_5$ et $x_6$. Nous avons donc le problème équivalent suivant (z est divisé par 1000, mais nous multiplierons à la fin pour le résultat final) :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48 \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 38 \\ 20x_1 + 30x_2 + 28x_3 = z \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Aucune des variables $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ne sont des bases, mais évidement $x_4$, $x_5$ et $x_6$ le sont. Pour être (un vecteur de) la base, une variable doit n'apparaître qu'une fois et avec un coefficient de 1. Une solution réalisable initiale est (0,0,0,48,0,38) mais pour laquelle z vaut zéro (y'a surement mieux…).

Pour augmenter z le plus vite possible, nous choisissons d'entrer $x_2$ en base (plus grand coefficient). On l'augmente depuis zéro jusqu'à ce que les variables en base ne deviennent négatives. Ici $x_6$ devient négatif en premier lorsque $x_2 = 38$. Donc nous sortons $x_6$ de la base en faveur de $x_2$. Nous devons donc exprimer les nouvelles variables en bases $(x_4, x_5, x_2)$ en fonction des nouvelles hors bases $(x_1, x_6, x_3)$.
A partir de la nouvelle expression $x_2 = 38 - x_1 - x_6$, nous avons le système :

$$\begin{cases} x_2 = 38 - x_1 - x_6 \\ x_4 = 48 - x_1 - x_2 - x_3 = 48 - x_1 - 38 + x_1 + x_6 - x_3 = 10 - x_3 + x_6 \\ x_5 = 0 + x_1 - 2x_3 \\ z = 1140 - 10x_1 + 28x_3 - 30x_6 \end{cases}$$

Ceci est la fin de la première itération.
On recommence car il y a toujours des coefficients positifs dans z, celui de $x_3$ donc on le choisit pour entrer dans la base. On choisit $x_5$ pour sortir de la base (devient négatif lorsque $x_3 > 0$).
Exprimons $x_3$ en fonction des nouvelles variables hors bases : $x_3 = 0 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5$
D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} x_3 = 0 + \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_5 \\ x_2 = 38 - x_1 - x_6 \\ x_4 = 10 - \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_5 + x_6 \\ z = 1140 + 4x_1 - 14x_5 - 30x_6 \end{cases}$$

Ceci est la fin de la deuxième itération.
On recommence car il y a toujours des coefficients positifs dans z, celui de $x_1$ donc on le choisit pour entrer dans la base. On choisit $x_4$ pour sortir de la base (devient négatif lorsque $x_1 > 20$ contre 38 pour $x_2$).
Exprimons $x_1$ en fonction des nouvelles variables hors bases : $x_1 = 20 - 2x_4 + x_5 + 2x_6$
D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} x_1 = 20 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 \\ x_2 = 18 + 2x_4 - x_5 - 3x_6 \\ x_3 = 10 - x_4 + x_6 \\ z = 1220 - 8x_4 - 10x_5 - 22x_6 \end{cases}$$

Ceci est la fin de la troisième itération. L'optimisation est finie car il n'y a plus de coefficient positif. Le résultat est $(20,18,10,0,0,0)$ pour une valeur $z = 1220$.
La réponse finale est donc M. Cantin parlera 20 minutes, M. Morin 18 minutes et M. Babin 10 minutes. Le nombre de téléspectateurs sera 1 220 000.

**Exercice 6**

Un constructeur doit soumettre à la ville un plan pour un programme de construction de logements sociaux. Dans ce programme, il est possible d'avoir trois types d'appartements, en fonction du nombre de chambres que compte l'appartement. Le loyer mensuel par appartement dépendra du nombre de chambres :

| Type d'appartement | T1 (1 chambre) | T2 (2 chambres) | T3 (3 chambres) |
|---|---|---|---|
| Loyer mensuel | 200 € | 250 € | 300 € |

La réglementation sur la densité de l'occupation des sols ne permet pas de dépasser 600 logements. À cause de la demande, le nombre d'appartements de 3 chambres ne doit pas excéder la somme des deux autres par plus de 20 logements et le double du nombre d'appartements de 1 chambre ne doit pas excéder la somme des deux autres par plus de 100 logements. Toutefois la ville doit maximiser le total du loyer perçu par mois. On cherche à trouver la répartition en T1, T2, T3 que le constructeur peut proposer à la ville pour lui permettre de maximiser le montant du loyer total perçu, tout en respectant chacune des contraintes du problème.

1. Modéliser le problème sous forme standard.

Le système se modélise sous la forme standard :

$$\max_{x_1,x_2,x_3} z = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 600 \quad (C1) \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 20 \quad (C2) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 100 \quad (C3) \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le nombre de T1 est $x_1$, celui de T2 est $x_2$ et celui de T3 est $x_3$. On veut maximiser les loyers perçus.

2. Utiliser la méthode du simplexe pour
   a. Donner la configuration qui permet de maximiser le total des loyers perçus par mois
   b. Donner dans ce cas le montant de somme totale perçue (par mois).

Afin de remplacer les inéquations par des équations, nous introduisons les variables d'écarts $e_1$, $e_2$ et $e_3$. Nous avons donc le problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + e_1 = 600 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + e_2 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + e_3 = 100 \\ 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 = z \\ x_i \geq 0 \text{ et } e_i \geq 0 \end{cases}$$

Aucune des variables $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ne sont des bases, mais $e_1$, $e_2$ et $e_3$ le sont.
Appliquons la méthode de simplexe sous forme de tableau.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 600 |
| $e_2$ | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 20 |
| $e_3$ | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| z | 200 | 250 | 300 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $x_3$. Le ratio positif le plus petit sort donc $e_2$ (avec 20).

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 2 | 2 | 0 | 1 | -1 | 0 | 580 | $e_1 - x_3$ |
| $x_3$ | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 20 | Déjà 1 |
| $e_3$ | 1 | -2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 120 | $e_3 + x_3$ |
| z | 500 | 550 | 0 | 0 | -300 | 0 | -6000 | $z - 300x_3$ |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $x_2$. Le ratio positif le plus petit sort donc $e_1$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 | 290 | $x_2/2$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 310 | $x_2 + x_3$ |
| $e_3$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 700 | $e_3 + 2x_2$ |
| z | -50 | 0 | 0 | -275 | -25 | 0 | -165500 | $z - 550x_2$ |

Tous les coefficients sont négatifs donc l'optimisation par la méthode du simplexe est finie. La solution obtenue est $(0{,}290{,}310{,}0{,}0{,}700)$.
Donc le constructeur peut proposer à la ville de construire aucun T1, 290 T2 et 310 T3, cela lui rapportera $z = 165\ 500$€ de loyer.

**Exercice 7**

Un fermier décide de se lancer dans l'élevage de bœufs, de vaches et de chevaux. Il dispose de 5800 hectares de pâturage. Par expérience, le fermier sait que pour bien se développer, un bœuf requiert 1 hectare de pâturage, une vache laitière requiert 1 hectare et un cheval requiert 1/2 hectare. Durant l'hiver, un bœuf se nourrit de 1 balle de foin, une vache laitière de 4 balles de foin et un cheval de 1 balle de foin. À cause des besoins limités du marché, le fermier ne désire pas plus de 1000 vaches laitières. À l'automne, le fermier dispose de 9000 balles de foin et il sait que son profit net sur chaque bœuf, vache laitière et cheval est respectivement de 18€, 28€ et 10€. Le fermier cherche à maximiser son profit.

1. Modéliser le problème sous forme standard.

Le système se modélise sous la forme standard :

$$\max_{b,v,c} z = 18b + 28v + 10c$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} b + v + \frac{1}{2}c \leq 5800 \quad (C1) \\ b + 4v + c \leq 9000 \quad (C2) \\ v \leq 1000 \quad (C3) \\ b \geq 0 \quad \text{et} \quad v \geq 0 \quad \text{et} \quad c \geq 0 \end{cases}$$

Le nombre de bœufs est $b$, celui de vaches est $v$ et celui de chevaux est $c$. On veut maximiser les profits de l'élevage.

2. En utilisant la méthode du simplexe
   a. Trouver combien de bêtes de chaque espèce le fermier doit-il élever afin de maximiser son profit ?
   b. Donner le montant du profit réalisé.

Afin de remplacer les inéquations par des équations, nous introduisons les variables d'écarts $x_1$, $x_2$ et $x_3$.
Aucune des variables $b$, $v$ et $c$ ne sont des bases, mais $x_1$, $x_2$ et $x_3$ le sont.
Appliquons la méthode de simplexe sous forme de tableau.

| | $b$ | $v$ | $c$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 5800 |
| $x_2$ | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 9000 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1000 |
| z | 18 | 28 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $v$. Le ratio positif le plus petit sort donc $x_3$.

| | $b$ | $v$ | $c$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | -1 | 4800 | $x_1 - v$ |
| $x_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | -4 | 5000 | $x_2 - 4v$ |
| $v$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1000 | Déjà à 1 |
| z | 18 | 0 | 10 | 0 | 0 | -28 | -28000 | $z - 28v$ |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $b$. Le ratio positif le plus petit sort donc $x_1$.

| | $b$ | $v$ | $c$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 1 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | -1 | 4800 | Déjà à 1 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1/2 | -1 | 1 | -3 | 200 | $x_2 - b$ |
| $v$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1000 | Déjà à 0 |
| z | 0 | 0 | 1 | -18 | 0 | -10 | -114400 | $z - 18b$ |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $c$. Le ratio positif le plus petit sort donc $x_2$.

| | $b$ | $v$ | $c$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 1 | 0 | 0 | 2 | -1 | 2 | 4600 | $b - c/2$ |
| $c$ | 0 | 0 | 1 | -2 | 2 | -6 | 400 | $2c$ |
| $v$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1000 | Déjà à 0 |
| z | 0 | 0 | 0 | -16 | -2 | -4 | -114800 | $z - c$ |

Tous les coefficients sont négatifs donc l'optimisation par la méthode du simplexe est finie. La solution obtenue est $(4600,400,1000,0,0,0)$.
Donc l'éleveur peut avoir 4600 bœufs, 1000 vaches et 400 chevaux, cela lui rapportera $z = 114\ 800$€.

**Exercice 8**

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Maximiser z en respectant les contraintes, en utilisant la méthode du simplexe.

Afin de remplacer les inéquations par des équations, nous introduisons les variables d'écarts $e_1$, $e_2$ et $e_3$. Aucune des variables $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ne sont des bases, mais $e_1$, $e_2$ et $e_3$ le sont.

Appliquons la méthode de simplexe sous forme de tableau.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 2 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| $e_2$ | 4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| $e_3$ | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 8 |
| z | 5 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $x_1$. Le ratio positif le plus petit sort donc $e_1$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 3/2 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 5/2 | $x_1/2$ |
| $e_2$ | 0 | -5 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | $e_2 - 4x_1$ |
| $e_3$ | 0 | -1/2 | 1/2 | -3/2 | 0 | 1 | 1/2 | $e_3 - 3x_1$ |
| z | 0 | -7/2 | 1/2 | -5/2 | 0 | 0 | -25/2 | $z - 5x_1$ |

Le coefficient de z le plus grand entre en base donc $x_3$. Le ratio positif le plus petit sort donc $e_3$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | -1 | 2 | $x_1 - x_3/2$ |
| $e_2$ | 0 | -5 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | Déjà à 0 |
| $x_3$ | 0 | -1 | 1 | -3 | 0 | 2 | 1 | $2x_3$ |
| z | 0 | -3 | 0 | -1 | 0 | -1 | -13 | $z - x_3/2$ |

Tous les coefficients sont négatifs donc l'optimisation par la méthode du simplexe est finie. La solution obtenue est (2,0,1,0,1,0). On a donc la configuration optimale $(x_1, x_2, x_3) = (2{,}0{,}1)$ avec coût $z = 13$.