Math note

new learning

组织：LaTeX Program

时间：March 12, 2025

版本：1.0

ElegantLaTeX Program

Math is simple but dedicate.

目录

第 1 章 Example

内容提要

- details
- warnings

1.1 details

there are some details about Why i do it.

定义 1.1 (another name)
I DONT know how to do it.

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

练习 1.1 its okay.

练习 1.2 its okay.

例题 1.1 example

解 its a solution.

证明 this is a proof

定理 1.1
theorem.

笔记 123 note

性质 456 property

推论 1.1
corollary

注 这是笔记

结论 conclusion

1.2 warnings

练习 1.3 its okay.

第 2 章 一些补充

内容提要

- ❑ 求积符号 (累乘)

2.1 求积符号 (累乘)

定义 2.1 (累乘)

若有数列 $\{a_n\}$, 那么把它的前 N 项相乘可得

$$\prod_{n=1}^{N} = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_N \tag{2.1}$$

♣

性质

1. 乘法结合律

$$\prod_i a_i \prod_j b_j = \prod_{i,j} a_i bj$$

2. 幂运算

$$(\prod_i a_i)^m = \prod_i a_i^m$$

2.2 *BAC-CAB 定理

定义 2.2 (BAC-CAB 定理)

对于 A, B, C 三个向量, 满足

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$(B \times C) \times A = C(A \times B) - B(A \times C) \tag{2.2}$$

♣

证明 证明略.

2.3 坐标变换

定义 2.3 (旋转变换)

已知直角坐标系中一点 $P(x, y)$, P 绕原点逆时针旋转 α 角, $(\alpha \in R)$ 之后变为 $P'(x', y')$, 则有

$$\begin{cases} x' = (\cos\alpha)x + (-\sin\alpha)y \\ y' = (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{cases}$$

或记为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

♣

2.4 Gauss 积分

先来个简单的情形.

定义 2.4

以下积分被定义为一个高斯积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx. \tag{2.3}$$

♣

解 在极坐标中求解.

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \tag{2.4}$$

令$r^2=x^2+y^2$, 上式变为

$$I^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdrd\theta=2\pi\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr. \tag{2.5}$$

令 $t=r^2, dt=2rdr$, 得

$$\begin{aligned} I^2&=\pi\int_0^{+\infty} e^{-t}dt\\ &=\pi\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{+\infty}\\ &=\pi. \end{aligned} \tag{2.6}$$

此时高斯积分为

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}. \tag{2.7}$$

笔记 更一般, 由换元积分法

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{2.8}$$

证明 待证.

推论 2.1

一般来说, 高斯积分指的是形如

$$G(n)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx. \tag{2.9}$$

的定积分.

♡

证明

$$\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}. \tag{2.10}$$

利用分部积分, 给 $G(n)$ 降阶:

$$\begin{aligned} G(n)&=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1}\cdot xe^{-x^2}\,dx\\ &=\left[x^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}dx\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{n-1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}\,dx\\ &=\frac{n-1}{2}G(n-2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

因此, 我们只要计算出 $G(0)$ 和 $G(1)$, 就可以利用式（2.11）, 推出所有高斯积分.

其中

$$\begin{cases} G(0) = \sqrt{\pi} \\ G(1) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases} \tag{2.12}$$

2.5 Gamma 函数

既然都了解了 Gauss 积分了，那就看看 Γ 函数.

Γ 函数 (**gamma function**)可看成是阶乘或实数域的拓展，我们只讨论实数域上的积分定义. 该方法可以定义 $(-1,\infty)$ 区间的阶乘.

$$\begin{aligned} x! &\equiv \Gamma(x+1) \\ &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt (x > -1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

定义 2.5

Γ 函数在区间 $(0,\infty)$ 被定义为

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt (x > 0). \tag{2.14}$$

♣

可以证明新定义的阶乘的递推关系仍为

$$(x+1)! = (x+1)x!(x > -1). \tag{2.15}$$

且 $0! = 1$. 所以当 x 取正整数 N 时，式（2.13）结果仍是熟悉的 $N! = N(N-1)(N-2)\cdots 1$.

笔记 给出基于分部积分法的推导过程.

验证，当 x 取正整数时，新定义的阶乘 $x! = \Gamma(x+1)$ 与原来的定义 $x! = x(x-1)\cdots 1$ 相同. 首先

$$\begin{aligned} 0! &= \Gamma(1) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

使用分部积分法，

$$\begin{aligned} x! &= \Gamma(x+1) \\ &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \left(-t^x e^{-t}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \\ &= x(x-1)!. \end{aligned} \tag{2.17}$$

注 可以考虑推广了. 看个讨论范围内最小半整数的阶乘.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)! &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中使用了换元法令 $x = t^2$ 将定积分变为 Gauss 积分.