

# Rigidez de Grafos e Estruturas

Aluno: Gustavo Café de Miranda

Departamento de Física, CFM, UFSC

Orientador: Prof. Dr. Douglas Gonçalves

Departamento de Matemática, CFM, UFSC

Agosto 2018

## Resumo

O estudo de rigidez de estruturas tem inúmeras aplicações em ciências naturais e engenharias; nano-estruturas, biologia molecular, robótica e astronomia são as áreas mais recorrentes. Na literatura sobre condições para realização única de grafos, são encontradas algumas definições para rigidez, de grafos e estruturas, apresentando diferenças sutis. Procuramos neste trabalho catalogar aquelas que são mais usuais na literatura. Para isso estudamos, não diretamente os grafos, mas as estruturas, i.e. pares  $(G, p)$ , sendo  $G$  um grafo e  $p$  uma realização. Destacaram-se na literatura as definições de rigidez para estruturas: local, global, infinitesimal, minimal e redundante. Desenvolvemos então uma caracterização da rigidez por meio de álgebra linear, e associamos a cada estrutura uma matriz  $M$  (a matriz de rigidez), cujo posto revela se a estrutura é ou não infinitesimalmente rígida. Em seguida mostramos que, se nos restringimos a classe de grafos genéricos, então rigidez local e infinitesimal são equivalentes. Por fim, verificamos que certas considerações sobre a rigidez de estruturas genéricas são, na verdade, propriedades intrínseca dos grafos, que podem ser caracterizados por resultados teóricos da literatura, como a condição de Maxwell e o Teorema de Laman.

Palavras Chave: Rigidez de Grafos e Estruturas, Condição de Maxwell, Teorema de Laman.

# 1 Introdução

Apesar de podermos encontrar exemplos na história da matemática de autores que se envolveram com o estudo da geometria de distâncias, esta pode ser encarada como uma área cujo estudo sistemático é relativamente recente. Exemplo disto é que o seu problema fundamental, que definiremos mais adiante, só foi mencionado explicitamente pela primeira vez em 1978, e que o primeiro livro integralmente dedicado ao seu estudo só foi publicado em 2013, segundo Lavor e Liberti [?, pg.1]. Ou seja, temos agora um objeto de estudo que se mostra redescoberto, por assim dizer, pela comunidade, e por isso há na literatura tantos avanços e aplicações recentes.

As aplicações do estudo de rigidez de grafos e estruturas são bastante diversas. De fato, onde quer que se encontrem armações ou interações estáveis, há espaço para examiná-las sob a ótica do estudo de rigidez. Por exemplo, saber se uma estrutura de barras e juntas não irá se deformar, ou se uma nanoestrutura manterá sua forma em certas condições, são exemplos de aplicações em construção civil e nanotecnologia, respectivamente. Porém não nos interessa aqui estudar especificamente as aplicações ou os casos que envolvem estruturas físicas reais. Iremos estudar estas estruturas no sentido matemático, isto é, com definições, teoremas e demonstrações.

A estrutura do texto divide-se da seguinte maneira: primeiro introduzimos rapidamente algumas definições abstratas sobre grafos na seção 2, depois tratamos na seção 3 do *problema de geometria de distâncias*, que está relacionado ao nosso estudo sobre rigidez. Também na seção 3, definimos o que entendemos por uma *estrutura* e discutimos a rigidez desta, desenvolvemos ferramentas úteis para o estudo consequente, e tratamos de rigidez através de uma abordagem por meio de álgebra linear. Na seção 4 discutimos como, analisando as estruturas associadas à um grafo, tirar conclusões sobre a rigidez do grafo ele mesmo. Na seção 5 expomos um organograma que busca mapear as diversas implicações entre as definições discutidas ao longo do texto. Finalmente, a seção 6 é dedicada à conclusão deste trabalho.

## 2 Grafos

Vamos agora introduzir alguns conceitos chave que serão necessários para enunciar o problema fundamental da geometria de distâncias e então dar início ao nosso estudo.

**Definição 2.1** *Definimos um grafo  $G = (V, E)$  como um conjunto de vértices  $V$  e arestas  $E \subseteq V \times V$ .*

Sendo um grafo  $G = (V, E)$  e sendo subconjuntos  $X \subseteq V$  e  $E(X) \subseteq E$  o subconjunto de arestas associadas ao subconjunto de vértices  $X$ , denominamos  $|X|$  e  $|E(X)|$  a *cardinalidade* de  $X$  e  $E(X)$ , respectivamente. Isto quer dizer que  $|X|$  nos dá o número de vértices em  $X$ , e  $|E(X)|$  o número de arestas que conectam estes vértices.

**Definição 2.2** Um grafo é dito *simples* se dado  $\{x, y\} \in E$  então  $x \neq y$ .

Isto é, um grafo simples é tal que nenhuma de suas arestas está conectada a um mesmo vértice pelas duas pontas. Abaixo seguem alguns exemplos.

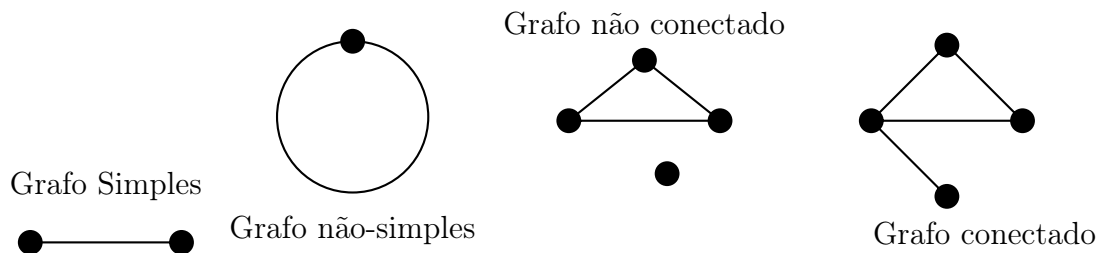


Figura 1: Exemplos de grafos

**Definição 2.3** Dizemos que um grafo é *conectado* se não é possível separar o conjunto  $V$  em dois outros  $A, B$  tais que  $V = A \cup B$ , com  $A \cap B \neq \emptyset$ , tal que não existe  $\{a, b\} \in E$  com  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

**Definição 2.4** Define-se também um grafo  $G = (V, E)$  como *completo*, se  $E$  contém todos os pares possíveis de elementos de  $V$ .

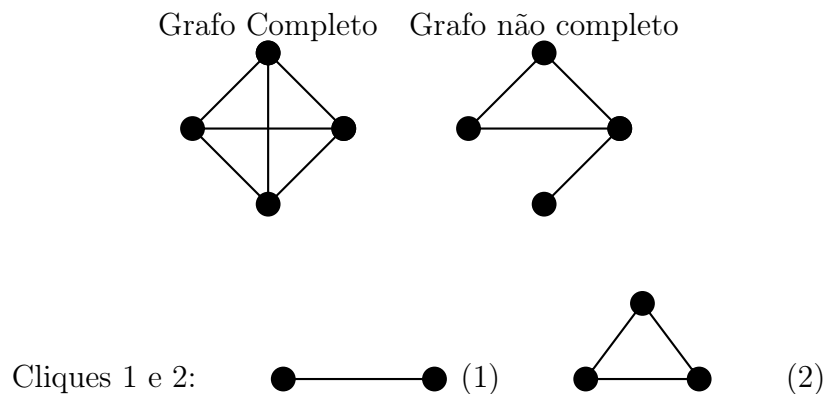


Figura 2: Exemplos de grafos

A definição de grafo completo é equivalente a dizer que  $a, b \in V$  implica que  $\{a, b\} \in E$ , ou então que  $|E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$ .

Se obtemos um novo grafo  $G'(V', E(V'))$  a partir de um grafo  $G = (V, E)$  removendo um vértice (e suas arestas associadas), i.e.  $V' = V - \{a\}$  e  $E(V') = E - \{a, b_i\}$ , com  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  vértices que estavam conectados a  $\{a\}$ , então chama-se  $G'$  de um *subgrafo de*  $G$ . Similarmente, também chama-se um *subgrafo de*  $G$ , quando removemos um elemento de  $E$ , i.e. obtemos  $G''(V, E'')$  onde  $E'' = E - \{a, b\}$ . Por vezes usa-se na literatura a notação  $V' = V - v$  e  $E' = E - e$ , assim como  $G' = G - v$  ou  $G' = G - e$ .

Se um subgrafo  $G'$  de  $G$  é completo chama-se então de uma *clique*. Veja as Figuras 1 e 2 para alguns exemplos.

**Definição 2.5** *Chama-se um grafo  $G$  de Floresta quando é uma união disjunta de grafos, cujos todos os vértices são conectados, de maneira não cíclica.*

É importante ressaltar, antes de avançarmos, que podemos associar a cada aresta de um grafo um número real, i.e. podemos definir um funcional como  $d : E \rightarrow \mathbb{R}$ , e temos então um grafo *ponderado* com pesos associados a cada aresta,  $G = (V, E, d)$ .

### 3 O Problema fundamental da Geometria de Distâncias

Agora estamos prontos para enunciar o Problema fundamental da Geometria de Distâncias (ou PGD):

Dado  $k \in \mathbb{Z}_+$  e um grafo simples  $G = (V, E, d)$ , com peso nas arestas  $d : E \rightarrow (0, \infty)$  encontre um mapa  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que

$$\|x(u) - x(v)\| = d(u, v), \quad \forall \{u, v\} \in E, \quad (1)$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana.

Quer dizer, queremos achar um mapa que associe pontos aos vértices do nosso grafo, cujas distâncias entre eles (os pontos) são as mesmas dos valores que estão definidos por  $d$ . Aqui chamamos este mapa de *realização* de  $G$ .

**Definição 3.1** *Sendo  $G$  um grafo e  $x$  uma realização, chama-se o par  $(G, x)$  de uma estrutura.*

Veja que rotações, translações e reflexões totais, sempre vão preservar estas distâncias entre os pontos  $x(u)$  e  $x(v)$ , e então outras soluções podem

ser obtidas por estas transformações. Na verdade, se o nosso PGD tiver uma solução, podemos obter infinitas outras, por meio de translações, rotações, e reflexões totais. Por esta razão, chamamos estas transformações de *triviais*.

Excetuando-se as soluções obtidas por meio de transformações triviais, o conjunto solução do PGD pode ser de três tipos: vazio, finito, ou infinito não enumerável. Ora, imagine a seguinte estrutura  $(G_1, p_1)$  (da Figura 3) para fins ilustrativos, onde  $V = \{u, v, r\}$  e  $E = \{\{u, v\}, \{v, r\}\}$ ,  $d(u, v) = 1$ ,  $d(v, r) = 1$ . Então  $p_1$  satisfaz o PGD associado a  $G_1 = (V, E, d)$  para  $k = 2$ ; inclusive seu conjunto solução é infinito, mesmo desconsiderando as transformações que chamamos de triviais; pois que admite rotações parciais, i.e. rotações da nossa aresta  $\{v, r\}$  em torno do vértice  $v$ . Quer dizer, essa estrutura admite que uma de suas arestas gire livremente em torno do vértice  $v$ , e assim, para cada uma dessas rotações temos uma solução diferente para o nosso PGD.

Agora, se adicionamos a restrição  $d(u, r) = 1$  obtemos a estrutura  $(G_2, p_2)$  da Figura 3, que, se desconsiderarmos as transformações triviais, admite somente uma solução em  $\mathbb{R}^2$ , pois agora não valem mais as rotações parciais de antes. Veremos mais adiante, que grafos completos como  $G_2$  só admitem outras soluções se forem resultantes de transformações triviais.

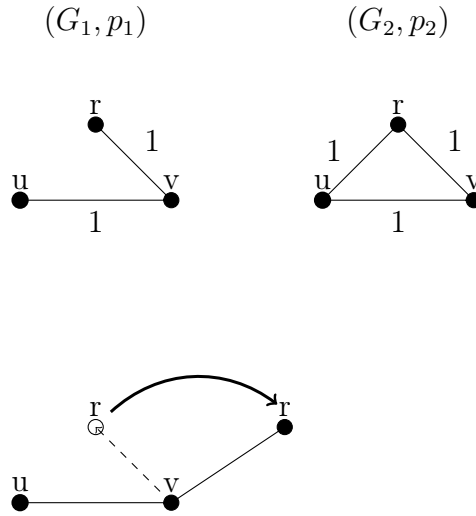


Figura 3: Soluções

Mas poderíamos ter ido mais além. Imagine que queiramos adicionar uma restrição ao  $G_1$  do tipo  $d(u, r) = 5$ . Se fizermos isto, não existirão soluções possíveis para o nossa estrutura, i.e. não existe realização que consiga satisfazer todas as distâncias do PGD. O que é de se esperar, pois aqui criamos uma restrição que viola a desigualdade triangular, pois temos  $d(u, v) = 1$ ,  $d(v, r) =$

1,  $d(u, r) = 5$ . Então nosso conjunto solução aqui é vazio.

Veja que há uma relação importante entre o número de soluções e o quanto nossa estrutura resultante pode se transformar (isto é, mudar os vértices de posição, preservando as distâncias entre eles). Não é por acaso, pois se o grafo admite realização, terá estrutura, e irá satisfazer o nosso PGD e então poderá ter finitas, ou infinitas (não enumeráveis), maneiras de organizar os vértices sem deixar de satisfazer as restrições das distâncias.

É importante ressaltar que há um grande salto na quantidade de soluções, de finito para infinito não enumerável. Isso se deve ao fato de que, quando o conjunto é finito, as soluções nos dão estruturas que são muito discrepantes umas das outras, enquanto que, quando é infinito, temos soluções que são muito parecidas, i. e. mexemos muito pouco a estrutura e obtemos outra solução. Veja, por exemplo, as estruturas da Figura 3 para  $G_1$  e  $G_2$ . O que provoca esta diferença entre o número de soluções é somente a diferença de uma restrição de uma estrutura para a outra. Quer dizer,  $G_1$ , por não ter a restrição adicional que  $G_2$  tem (a de  $d(u, r) = 1$ ), pode rotacionar as suas arestas em torno do vértice  $v$ , e logo, para cada rotação em torno de  $v$  (por menor que seja) terá uma solução nova. Enquanto que, para a  $G_2$ , não há como girar uma aresta em torno de um vértice sem que seja, ou um movimento trivial (isto é, gire toda a estrutura junto), ou deixe de ser uma solução para o PGD. Então intuitivamente, deve haver certa *flexibilidade* toda vez que tivermos arestas livres, rotações parciais, ou menos restrições que necessário; e deve haver uma relação entre a quantidade de restrições e a *rigidez* de uma estrutura. É isto que examinaremos mais a fundo nas próximas seções.

### 3.1 A matriz de Rigidez

Deste problema surgem inúmeras maneiras de pensar sobre grafos. Vamos, então seguir Jackson [?, pg. 4] no seguinte tratamento. Imagine que podemos encontrar uma família de realizações  $p$  de  $G$ , parametrizadas por  $t \in [0, 1]$ .

**Definição 3.2** *Chamamos de um movimento infinitesimal (ou simplesmente movimento) da estrutura  $(G, p_0)$  para  $(G, p_1)$  como uma função  $P : [0, 1] \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ , de forma que ela satisfaça:*

- (M1)  $P(0, v) = p_0(v)$  e  $P(1, v) = p_1(v), \forall v \in V$ ,
- (M2)  $\|P(t, u) - P(t, v)\| = \|p_0(u) - p_0(v)\|, \forall t \in [0, 1], \forall \{u, v\} \in E$ ,
- (M3)  $P(t, v)$  é uma função contínua de  $t, \forall v \in V$ .

Assim, temos que: por (M1), o começo do movimento de cada vértice em  $t = 0$  seja o da nossa estrutura original  $p_0(v)$ , e que o final do movimento em  $t = 1$  seja no vértice desejado da nossa estrutura final  $p_1(v)$ ; (M2) nos garante que o tamanho das arestas não seja deformado no movimento; e finalmente (M3) garante que  $P$  é como um caminho diferenciável, e então podemos derivar a seguinte equação com respeito a  $t$  (sendo  $d(u, v)$  constante) e obter:

$$\begin{aligned} (\|P(t, u) - P(t, v)\|^2)' &= (d(u, v)^2)', \\ 2(P'(t, u) - P'(t, v)) \cdot (P(t, u) - P(t, v)) &= 0, \\ ((P(t, u) - P(t, v)) \cdot (P'(t, u) - P'(t, v))) &= 0, \quad \forall \{u, v\} \in E. \end{aligned}$$

Fazendo  $P'(t, u) = q(u)$  e  $P(t, u) = p(u)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , temos,

$$(p(u) - p(v)) \cdot (q(u) - q(v)) = 0, \quad \forall \{u, v\} \in E \quad (2)$$

onde  $x \cdot y$  denota o produto interno usual. Veja então que temos um sistema linear com linhas indexadas por  $\{u, v\} \in E$ , e agrupando os coeficientes  $(p(u) - p(v))$  em uma matriz  $M$ , e aplicando essa matriz a um vetor  $w$  das velocidades  $(q(u) - q(v))$ , temos pela nossa equação (2):

$$Mw = 0.$$

A matriz  $M$  é chamada de *Matriz de rigidez*. Note que uma matriz de rigidez de uma estrutura  $(G, p)$  de dimensão  $k$  terá as linhas indexadas pelas arestas e as colunas indexadas por cada coordenada de um vértice  $v \in V$ , i.e. terá  $k|V|$  colunas, onde  $|V|$  é o número de vértices do nosso grafo.

Abaixo temos a matriz para uma estrutura  $(G, p)$  de um grafo  $G$ , por conveniência faremos aqui  $p(V_i) = p_i, i \in \{1, 2, 3\}$ .

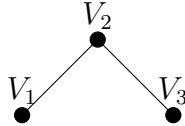


Figura 4: Grafo  $G$

$$M = \begin{pmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{2x} & V_{2y} & V_{3x} & V_{3y} \\ (p_1 - p_2)_x & (p_1 - p_2)_y & (p_2 - p_1)_x & (p_2 - p_1)_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (p_2 - p_3)_x & (p_2 - p_3)_y & (p_3 - p_2)_x & (p_3 - p_2)_y \end{pmatrix}.$$

Se tomamos uma função de distância  $d$  conveniente que satisfaça  $d(V_1, V_2) = \sqrt{2} = d(V_2, V_3)$ , podemos escolher a realização que toma o mesmo grafo e o coloca nos seguintes pontos

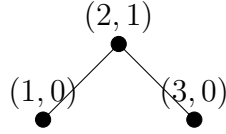


Figura 5: Estrutura  $(G, p)$

então

$$M = \begin{matrix} & V_{1x} & V_{1y} & V_{2x} & V_{2y} & V_{3x} & V_{3y} \\ \begin{matrix} e_{1,2} \\ e_{2,3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-2 & 0-1 & 2-1 & 1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3 & 1-0 & 3-2 & 0-1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

isto é

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos então que nossa matriz de rigidez  $M$  terá certas características, a saber: ela será esparsa, i.e. é uma matriz com muitos zeros. Note também que  $M$  tem seus valores espelhados na linha, isto é,  $m_{11} = -1$ , na coluna  $V_{1x}$ , mas seu valor correspondente na coluna de  $V_{2x}$  é  $m_{13} = 1$  logo  $m_{11} = -m_{13}$ . O que faz sentido, pois montamos a matriz pelos valores da equação (2), que serão opostos para pares de vértices ligados por uma mesma aresta.

### 3.2 Rigidez Global e Rigidez Local

Agora que já esclarecemos os pontos preliminares, podemos introduzir certas considerações sobre os conceitos centrais deste estudo, isto é, os de *rigidez* e *rigidez infinitesimal*. Mas antes vamos definir o conceito mais geral de *rigidez global*. Para enunciá-lo formalmente, vamos definir primeiro o que são estruturas equivalentes e congruentes.



**Definição 3.3** Dizemos que duas estruturas  $(G, p_0)$  e  $(G, p_1)$  são equivalentes se  $\forall \{u, v\} \in E, \|p_0(u) - p_0(v)\| = \|p_1(u) - p_1(v)\|$

Quer dizer, uma estrutura é equivalente se preserva todas as distâncias  $d(u, v)$  com  $\{u, v\} \in E$ . Por outro lado, duas estruturas são *congruentes* se preservam a distância entre todos os vértices.

**Definição 3.4** Duas estruturas  $(G, p_0)$  e  $(G, p_1)$  são congruentes se

$$\|p_0(u) - p_0(v)\| = \|p_1(u) - p_1(v)\|, \forall u, v \in V$$

**Definição 3.5** Dizemos que uma estrutura  $(G, p)$  é globalmente rígida se todas suas estruturas que são equivalentes são também congruentes.

Por exemplo, toda estrutura de um grafo completo é globalmente rígida. Pois estando todos os vértices conectados por arestas, então qualquer movimento dos vértices está restrito ao tamanho das arestas, e logo a distância entre todos vértices é preservada.



Figura 6: Realizações equivalentes

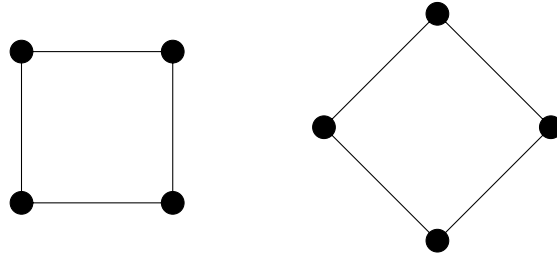


Figura 7: Realizações congruentes

Poderíamos também tratar de rigidez de maneira a permitir que realizações equivalentes que sejam muito próximas à realizações congruentes sejam consideradas rígidas. Ora, para isto podemos definir abertos em torno de cada vértice e então, dada qualquer realização  $p_1$  que for equivalente a uma  $p_0$  e que estiver tão próxima quanto quisermos de  $p_0$ , e então, sendo  $p_1$  necessariamente congruente, poderíamos classificar a estrutura como rígida.

**Definição 3.6** Uma estrutura  $(G, p_0)$  é dita *localmente rígida* se  $\exists \epsilon > 0$  tal que toda estrutura  $(G, p_1)$  que é equivalente a  $(G, p_0)$  e que satisfaz  $\|p_0(v) - p_1(v)\| < \epsilon, \forall v \in V$ , é também congruente a  $(G, p_0)$ .

Do contrário, dizemos que é *localmente flexível*. Observe a Figura 8 com um exemplo de uma estrutura que é localmente rígida porém não é globalmente rígida. Nesta estrutura, podemos ver que há uma flexão discreta, isto é, há duas realizações que são equivalentes mas não congruentes, logo ela não é globalmente rígida. Porém é localmente rígida em  $\mathbb{R}^2$ , pois que as realizações que satisfazem  $\|p_0(v) - p_1(v)\| < \epsilon, \forall v \in V$  que forem equivalentes serão congruentes também. Portanto vemos que estruturas podem ser rígidas (localmente) e não ter realização única. Então o conjunto solução do PGD (1) pode ter mais de uma solução para uma estrutura localmente rígida (mesmo desconsiderando as transformações triviais).

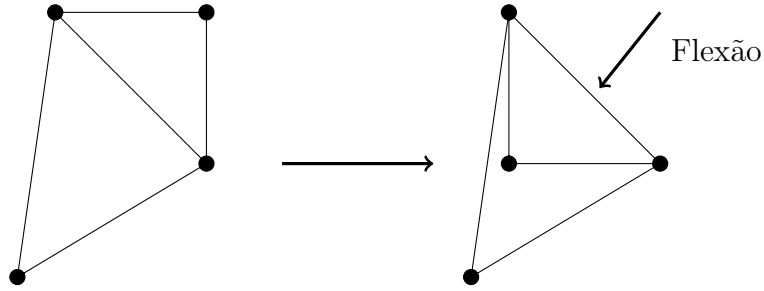


Figura 8: Flexão discreta

Na verdade, é sempre importante explicitar a dimensão ambiente da nossa estrutura. Pois veja que esta mesma estrutura em  $\mathbb{R}^3$  seria flexível, afinal, esta flexão que era discreta em duas dimensões, torna-se contínua em três. De maneira informal, é o mesmo que uma dobradiça, que com a nova dimensão ganha movimento contínuo, mas que era fixa quando estava no plano. Veja por exemplo a Figura 9.

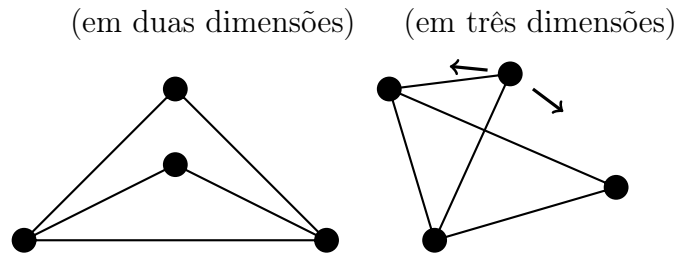


Figura 9: Dependência da dimensão para rigidez

### 3.3 Rigidez Infinitesimal

No caso em que nossa estrutura admite movimentos infinitesimais que satisfaçam as nossas equações na Definição 3.2, que sejam diferentes de rotações totais ou translações totais da estrutura (que como veremos satisfazem trivialmente as equações), então dizemos que é *infinitesimalmente flexível*. Assim, é infinitesimalmente flexível a estrutura que admite movimentos infinitesimais que levam a realizações localmente equivalentes mas que não são congruentes. Caso contrário, dizemos que é *infinitesimalmente rígida*.

Mas podemos ainda caracterizar a rigidez infinitesimal de maneira construtiva, e não como a negação da definição de flexibilidade infinitesimal. Para isso vamos examinar algumas propriedades da nossa matriz de rigidez  $M$ , a qual definimos pela nossa equação (2). Lembre-se que  $M$  tem o número de colunas igual ao número de vértices  $|V|$  multiplicado pela dimensão  $k$ , e tem o número de linhas igual ao número de arestas  $|E|$  na nossa estrutura. Vamos mostrar para o seguinte grafo com os vértices mapeados por  $p$  em  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , como na Figura 10.

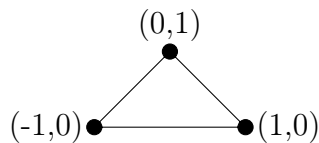


Figura 10: Exemplo de estrutura e matriz de rigidez

Temos aqui :

$$M_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{2x} & V_{2y} & V_{3x} & V_{3y} \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_{1,2} \\ e_{1,3} \\ e_{2,3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Percebe-se que os valores na matriz trocam de sinal quando tomamos outro vértice como referência, isto é, aqui temos  $V_{1x} = -V_{2x}$  para  $e_{1,2}$ . É importante ressaltar novamente a dependência na dimensão. Aqui construímos a matriz  $M_2$  para  $\mathbb{R}^2$ , mas se quiséssemos construir esta matriz para  $\mathbb{R}^3$  teríamos que adicionar a dimensão às coordenadas dos vértices, e então teríamos três colunas para cada vértice. Logo se na nossa matriz  $M_2$  tínhamos quatro colunas, na nossa matriz  $M_3$  teremos 9 colunas. Veja por

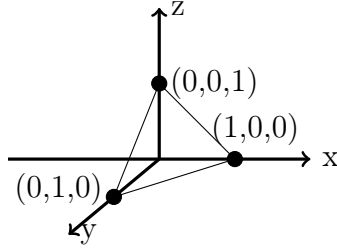


Figura 11: Exemplo de estrutura e matriz de rigidez em  $\mathbb{R}^3$

exemplo o mesmo grafo, mas com realização em  $\mathbb{R}^3$  que leva os vértices para  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , com matriz  $M_3$ :

$$M_3 = \begin{matrix} & V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} & V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} & V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \\ \begin{matrix} e_{1,2} \\ e_{1,3} \\ e_{2,3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

Há mais considerações que devemos fazer sobre a nossa equação  $Mw = 0$ . Veja que todos os vetores que satisfizerem esta equação estarão no núcleo da transformação linear associada a nossa matriz. Podemos mostrar que as velocidades associadas aos movimentos triviais (isto é, rotações, translações de todo o grafo, reflexões totais, também chamados de *movimentos de corpos rígidos*) estarão no núcleo desta matriz de rigidez. Pois veja que os movimentos rígidos preservam as distâncias entre os vértices, logo temos que a nossa função  $P(t, v)$  que originou nossa equação (2) será tal que  $\forall \{u, v\} \in E$

$$\|P(t, u) - P(t, v)\| = \|P(0, u) - P(0, v)\| \quad \forall t \in [0, 1].$$

Então, este movimento rígido está no núcleo de  $M$ .

Vê-se então que, se nossa estrutura admite somente os movimentos rígidos (triviais) então ela será infinitesimalmente rígida. Em outras palavras, se o núcleo de  $M$  é formado apenas por vetores velocidade associados aos movimentos triviais, então a estrutura será infinitesimalmente rígida. Podemos afirmar o mesmo em termos do posto de  $M$ , denotado por  $r(M)$ , pois pelo Teorema do núcleo e da imagem temos que  $r(M) = nk - \dim(Ker(M))$  e sendo a dimensão do núcleo de  $M$  maior ou igual o número  $T$  de graus de liberdade associado aos movimentos triviais, então  $T \leq \dim(Ker(M))$ , concluímos que  $r(M) \leq nk - T$ , onde  $n = |V|$ ,  $k$  o número de dimensões, e  $nk$  o número de graus de liberdade.

A quantidade de graus de liberdade associado aos movimentos triviais  $T = \frac{k(k+1)}{2}$  pode ser deduzida pelo fato de que em  $\mathbb{R}^k$  temos  $\frac{k(k-1)}{2}$  tipos de rotações e  $k$  tipos de translações. Então

$$T = \frac{k(k-1)}{2} + k = k^2/2 - k/2 + k = k^2/2 + k/2 = \frac{k(k+1)}{2} \quad (3)$$

Logo o posto da nossa Matriz  $M$  será majorado por  $S(n, k) = nk - (\frac{k(k+1)}{2})$ , e neste caso extremo, a dimensão de seu núcleo  $Ker(M) = (\frac{k(k+1)}{2})$ . Então definimos

$$S(n, k) = \begin{cases} nk - (\frac{k(k+1)}{2}), & \text{se } n \geq k \\ (\frac{n(n-1)}{2}), & \text{se } 0 < n < k. \end{cases} \quad (4)$$

Disso podemos então introduzir a definição central desta seção (aqui seguimos Asimow e Roth [? , pg. 173] e Jackson [? , pg. 6]) e desenvolver nossos resultados anteriores de maneira mais rigorosa.

**Definição 3.7** *Uma estrutura  $(G, p)$  é infinitesimalmente rígida em  $\mathbb{R}^k$  quando  $r(M_{(G,p)}) = S(n, k)$ .*

Os próximos dois exemplos das Figuras 12, foram retirados de Asimow e Roth [? , pg. 288] e [? , pg. 188]. Este grafo, com estrutura  $(G_B, p_B)$  na Figura 12, considerada em  $\mathbb{R}^2$ , aparenta ter uma estrutura rígida mas é, na verdade infinitesimalmente flexível, pois podemos rotacionar continuamente ambos triângulos que o compõem, sem violar o tamanho das arestas, portanto não é rígida. De fato, podemos calcular o posto de sua matriz de rigidez  $r(M_B) = 8 < 6 \cdot 2 - 3 = 9 = S(n, d)$ , em  $\mathbb{R}^2$ , logo trata-se de uma estrutura infinitesimalmente flexível.

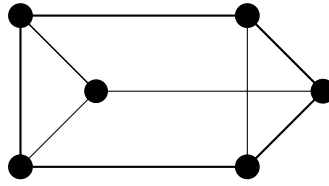


Figura 12: Estrutura  $(G_B, p_{B1})$

Da Definição 3.7 e da discussão acima podemos introduzir os seguintes resultados.

**Lema 3.8** *Seja  $(G, p)$  uma estrutura em  $\mathbb{R}^k$  com  $n \geq 2$ . Então temos que  $r(M_{(G,p)}) \leq S(n, k)$ .*

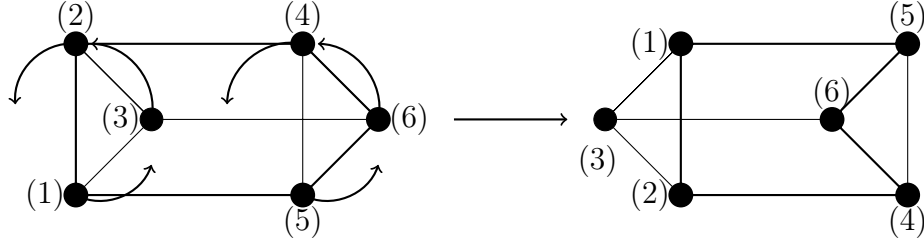


Figura 13: Rotação parcial da estrutura  $(G_B, p_{B1})$

*Prova:* Vamos considerar somente o caso em que a estrutura  $(G, p)$  está propriamente em  $\mathbb{R}^k$ , quer dizer, quando a variedade afim gerada pelos pontos  $p(v)$ ,  $v \in V$ , é igual a  $\mathbb{R}^k$ . Assim temos que o número de vértices será  $n \geq k + 1$ . Pois caso contrário,  $n \leq k$ , e então podemos tomar um ambiente de dimensão menor  $\mathbb{R}^b$ , onde  $b \leq n - 1$ , e teremos  $n \geq b + 1$ , o que é garantido pelo fato de que  $b \geq 0$  e  $n \geq 2$ . Seja  $T_0$  o subespaço gerado pelos movimentos triviais (translações e rotações), então temos que  $T_0$  é subespaço de  $\text{Ker}(M)$ , como vimos anteriormente. Veja que  $T_0$  contém um conjunto linearmente independente de vetores dado pelos movimentos das  $k$  translações e  $\frac{k(k-1)}{2}$  rotações. Logo

$$\dim(\text{Ker}(M)) \geq \dim(T_0) \geq \frac{k(k+1)}{2}$$

Logo  $r(M) \leq nk - \frac{k(k+1)}{2} = S(n, k)$  □

Para provar o seguinte teorema usaremos das mesmas considerações que fizemos acima (as que nos conduziram a equação 4), mas iremos demonstrá-lo aqui de maneira mais formal.

**Teorema 3.9** *Se  $r(M_{(G,p)}) = S(n, d)$ , i.e. se  $(G, p)$  é infinitesimalmente rígida, então a estrutura  $(G, p)$  é localmente rígida.*

*Prova:* Vamos provar pela contrapositiva. Suponha agora que  $(G, p)$  não é localmente rígida, então deve existir um movimento não trivial  $P(t, v)$  tal que

$$\|P(t, u) - P(t, v)\|^2 = \|p_0(u) - p_0(v)\|^2$$

para  $t \neq 0$  e  $\forall \{u, v\} \in E$ , mas com

$$\|P(t, u) - P(t, v)\|^2 \neq \|p_0(u) - p_0(v)\|^2$$

para algum  $\{u, v\} \notin E$ ; isto é, um movimento que leva a realizações equivalentes mas não congruentes. Em outras palavras, temos uma realização

próxima a nossa realização original que preserva o tamanho das arestas, mas não preserva a distância entre todos os vértices.

Como este movimento  $w$  não é um movimento trivial (pois movimentos triviais são congruências), então  $w \notin T_0$ . Logo temos que  $\dim(Ker(M)) > \dim(T_0)$ , e então  $r(M) < nk - \dim(T_0)$ . Dai concluímos que  $r(M) < S(n, k)$ .

Logo se  $r(M_{(G,p)}) = S(n, k)$  então  $(G, p)$  é localmente rígida  $\square$

### 3.4 Estruturas Genéricas e rigidez infinitesimal

Algumas considerações intuitivas de que o condicional do Teorema 3.9 pode ser um bicondicional são garantidas pelo teorema no fim desta seção. Porém, para enunciar formalmente este teorema devemos tratar de mais uma condição para garantir sua validade, a saber: que a estrutura seja *genérica*. A seguinte definição pode ser encontrada em [?, pg. 4].

**Definição 3.10** *Uma estrutura  $(G, p)$  é genérica quando o conjunto que contém as coordenadas de todos os pontos  $p(v), v \in V$  é algebricamente independente sobre  $\mathbb{Q}$ .*

Lembrando que um conjunto é algebricamente independente sobre  $\mathbb{Q}$ , quando os elementos desse conjunto não são raízes de nenhum polinômio formado por coeficientes em  $\mathbb{Q}$ .

Portanto se houver um polinômio tal que alguma realização  $p$  satisfaz  $Q(p(v_0), \dots, p(v_n)) = 0$  então esta estrutura é chamada de *não genérica*. Tais estruturas terão características que queremos evitar, por exemplo, ter três (ou mais) vértices colineares.

Vamos mostrar a seguir alguns exemplos de estruturas não genéricas, que são localmente rígidas mas não são infinitesimalmente rígidas. As seguintes estruturas das Figuras 15 e 14 são não genéricas.

A estrutura  $(G_A, p_A)$  da Figura 14, quando em  $\mathbb{R}^2$  tem Matriz de rigidez com posto  $r(M_A) = 7$ , porém  $S(n, 2) = 9$ , logo  $r(M_A) < S(n, 2)$  e poderíamos dizer que o grafo é então flexível (infinitesimalmente), quer dizer, ele não é infinitesimalmente rígido em  $\mathbb{R}^2$ .

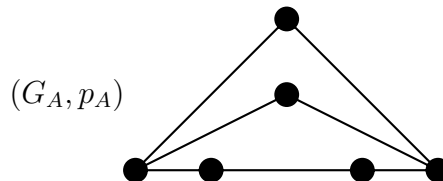


Figura 14: Grafos não genéricos

Vemos porém que não há como mover os vértices sem mover toda a estrutura, exceto no caso de uma flexão discreta. Vemos então que é localmente rígida em  $\mathbb{R}^2$ , mesmo não sendo infinitesimalmente rígida.

No seguinte exemplo, mostraremos que a estrutura não é infinitesimalmente rígida, mesmo sendo localmente rígida, sem calcular explicitamente o posto de sua matriz de rigidez.

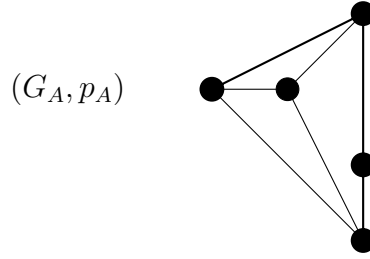


Figura 15: Grafos não genéricos

Na seguinte argumentação, estaremos assumindo que  $p(v)$  também pode indicar a posição de um vértice  $v$  na realização  $p$ . Nomearemos os vértices de  $(G_A, p_A)$  como na Figura 16. Vamos mostrar primeiramente que é infinitesimalmente flexível. Seja  $q(v_5)$  um vetor como o abaixo, perpendicular à reta que conecta  $p(v_1)$  a  $p(v_4)$ , e fazendo  $q(v_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , então vale que:

$$(p(v_i) - p(v_j)) \cdot (q(v_i) - q(v_j)) = 0 \quad \forall \{v_i, v_j\} \in E_A$$

Porém temos que  $(p(v_5) - p(v_2)) \cdot (q(v_5) - q(v_2)) = ((p(v_5) - p(v_2)) \cdot q(v_5)) \neq 0$ . Logo existe um vetor  $w$  formado pelas velocidades instantâneas  $q$  acima, na equação  $Mw = 0$  que não pertence ao conjunto dos movimentos triviais, mas pertence ao núcleo de  $M$ , logo (na notação da demonstração anterior)  $w \notin T_0$ . Assim  $\dim(Ker(M)) > \dim(T_0) = \frac{d(d+1)}{2} = 3$ . Logo  $r(M_{(G_A, p_A)}) < S(n, k) = S(n, 2)$ , e então a estrutura não é infinitesimalmente rígida.

Vamos mostrar agora que é localmente rígida. Suponha que exista um movimento  $(G_A, p_A)$  para  $(G_A, p_A^*)$ , e denomine  $H$  um grafo tal que  $H$  é  $G$  sem o vértice  $v_5$ . Como  $H$  é composto de triângulos compartilhando a mesma base, e cada triângulo é por si só globalmente rígido, então  $(H, p)$  é rígida. Então  $(H, p)$  é congruente a  $(H, p^*)$ . Logo, sendo congruente, então podemos realizar um movimento trivial tal que tenhamos  $p^*(v_i) = p(v_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Finalmente, se colocarmos  $v_5$  em  $H$ , e obtermos  $G$ , então como  $p(v_5)$  deve ficar exatamente na linha que conecta  $p(v_1)$  e  $p(v_4)$  então temos que  $p^*(v_5)$



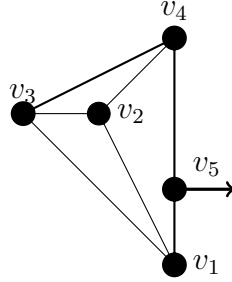


Figura 16: Grafos não genéricos

também deve estar na linha que conecta  $p^*(v_1)$  e  $p^*(v_4)$ , logo  $p(v_5) = p^*(v_5)$  e então  $(G_A, p_A)$  é equivalente a  $(G_A, p_A^*)$ . Logo a estrutura é localmente rígida.

Veja que pela estrutura não ser genérica, isto é, por ter três vértices colineares, então já não pudemos afirmar que a estrutura era infinitesimalmente rígida, mesmo que localmente rígida. Estas considerações nos dão a motivação para o teorema no final desta seção.

Também como exemplo, temos este mesmo grafo da Figura 12 com outra estrutura <sup>1</sup> na Figura 17, mas com a aresta central suficientemente curta para impossibilitar o movimento de rotação que tínhamos antes, explicitado na Figura 13. Logo, a estrutura é localmente rígida. Porém, se calculamos explicitamente  $M$  e  $r(M)$  obtemos que  $r(M_C) = 8 < 9 = S(n, d)$ . Logo é rígido em  $\mathbb{R}^2$ , mas continua não sendo infinitesimalmente rígido neste mesmo espaço.

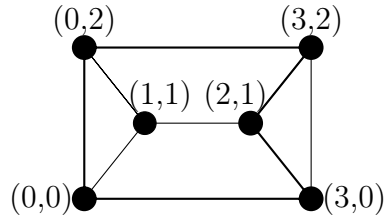


Figura 17:  $(G_C, p_C)$  em  $\mathbb{R}^2$

Dadas todas estas considerações, podemos agora enunciar o teorema que nos garante a relação entre rigidez local e rigidez infinitesimal da estrutura.

<sup>1</sup>isto é, temos o mesmo grafo, porém a função  $d(u, v)$  do nosso PGD associa um valor diferente à distância entre os dois vértices centrais, logo outra realização é necessária para resolver o problema.

**Teorema 3.11** *Seja  $(G, p)$  uma estrutura genérica, então  $(G, p)$  é localmente rígida se e somente se é infinitesimalmente rígida.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [? , pg. 173].

Com este novo teorema, temos uma ferramenta para tratar as estruturas que nos interessam, como veremos na próxima seção. Repare também que tivemos que nos restringir a estruturas genéricas, pois, como vimos pelos exemplos anteriores, estruturas não-genéricas estão fora do escopo do nosso teorema. Não nos é garantido que toda estrutura localmente rígida seja infinitesimalmente rígida. Porém, se uma estrutura for genérica, podemos garantir nosso bicondicional. Isto é, toda estrutura genérica que é localmente rígida tem matriz de rigidez com posto  $S(n, k)$ . Este teorema é uma ferramenta importante, pois podemos agora estender nossas considerações sobre estruturas infinitesimalmente rígidas para as localmente rígidas, e vice versa, desde que sejam genéricas.

## 4 Condição de Maxwell e Teorema de Laman

Como vimos na seção anterior, a rigidez infinitesimal de uma estrutura genérica  $(G, p)$ , e logo a rigidez local, pode ser determinada pelo posto de sua matriz de rigidez  $M$ . Assim, podemos dizer, permitido certo grau de abuso de linguagem, que a rigidez infinitesimal de uma estrutura depende da quantidade de *arestas independentes* existentes no grafo. Com arestas independentes, queremos dizer que as linhas da matriz de rigidez  $M$  associadas a estas arestas são linearmente independentes. Logo o posto de  $M$  será inteiramente determinado pela quantidade de arestas independentes em  $G$ . Isto motiva a nossa seguinte definição.

**Definição 4.1** *Dizemos que um grafo  $G = (V, E)$  é independente em  $\mathbb{R}^k$  quando  $r(M_{(G,p)}) = |E|$ , i.e.  $M_{(G,p)}$  tem posto linha completo.*

Quer dizer, como cada aresta está associada a uma linha da matriz de rigidez, então quando ocorrer que  $r(M_{(G,p)}) = |E|$ , temos que todas as linhas correspondentes as arestas são independentes. Em outras palavras um grafo  $G$  é independente quando todas as arestas do grafo  $G$  são independentes. Perceba, porém, que independência não implica em rigidez.

**Definição 4.2** *Dizemos que uma estrutura genérica  $(G, p)$  é minimalmente rígida, quando é infinitesimalmente rígida e  $G$  é independente. Isto é, temos  $r(M_{(G,p)}) = |E| = S(n, k)$ .*

Logo se uma estrutura é *minimalmente rígida* então se removermos qualquer aresta, ela se torna flexível. Afinal, dado uma estrutura infinitesimalmente rígida  $(G, p)$  de um grafo  $G = (V, E)$  independente, temos que  $S(n, k) = |E| = r(M_{(G, p)})$ . Logo se removemos uma aresta, removemos também uma linha da matriz de rigidez, e sendo o grafo independente, retiramos uma linha linearmente independente das demais, logo, sendo esta nova subestrutura  $(G', p')$ , temos que  $r(M_{(G', p')}) = |E'| < S(n, k)$ , pois aqui  $n' = n$ . Então  $(G', p')$  é infinitesimalmente flexível.

**Definição 4.3** Dizemos que uma estrutura genérica localmente rígida  $(G, p)$  é *redundantemente rígida*, se dado  $\{u, v\} \in E$  e uma subestrutura  $(G', p')$  tal que  $G' = (V, E')$  onde  $E' = E - \{u, v\}$ , e  $(G', p')$  é localmente rígida.

Destas definições retiramos algumas consequências interessantes que relacionam o número de arestas independentes à rigidez da estrutura.

**Lema 4.4** Se  $(G, p)$  é genérica e localmente rígida, então  $|E| \geq S(|V|, k)$ .

Ora é direto que, sendo  $(G, p)$  localmente rígida e genérica, então temos que  $r(M_{(G, p)}) = S(|V|, k)$ , então o número de arestas independentes é igual ao posto. Logo, adicionando-se arestas dependentes teremos  $|E| \geq S(|V|, k)$ . Em outras palavras, a igualdade é satisfeita quando  $(G, p)$  é minimalmente rígida, e ocorre desigualdade estrita quando é redundantemente rígida.

**Lema 4.5** Sejam  $V' \subset V$  e  $E' \subset E$ , para  $G = (V, E)$  e um subgrafo  $G' = (V', E')$ . Se  $(G, p)$  é minimalmente rígida então  $\forall V' \subset V$ ,  $|E'| \leq S(|V'|, k)$ .

Veja que, sendo a estrutura minimalmente rígida, então quando retiramos um vértice, retiramos pelo menos uma aresta que conecta este vértice a algum outro. Logo, ao considerarmos o subgrafo  $G(V', E')$ , retiramos sempre um número de arestas maior ou igual que o número de vértices. Lembre que uma estrutura minimalmente rígida deixa de ser rígida se retiramos uma aresta (e não um vértice). Podemos ter estruturas minimalmente rígidas que retirado um vértice permanecem rígidas, veja por exemplo a Figura 18

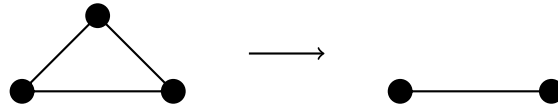


Figura 18:

Antes de avançarmos para o teorema central desta seção, vamos primeiro provar mais um lema, que pode ser encontrado em [?, pg.5].

**Lema 4.6** *Toda estrutura genérica localmente rígida  $(G, p)$  admite uma subestrutura localmente rígida  $(G', p')$  com exatamente  $S(n, k)$  arestas, onde  $n$  é o número de vértices de  $G$ .*

*Prova:* Como a estrutura  $(G, p)$  é genérica e localmente rígida então é infinitesimalmente rígida, e daí sua matriz de rigidez  $M_{(G, p)}$  tem posto  $r(M) = S(n, k)$ . Então basta tomar a própria estrutura que já é rígida e descartar arestas redundantes, i.e. linhas que são linearmente dependentes até que tenhamos o número de linhas igual ao do posto, e assim obtemos  $(G', p')$  que é infinitesimalmente rígida. Observe que, como  $(G', p')$  é formada pelos mesmos vértices que  $(G, p)$  exceto algumas arestas, então preserva a propriedade de ser genérica, e então, é rígida.  $\square$

Com o Lema 4.6, podemos então enunciar o seguinte teorema, cuja prova é baseada em [?, pg. 7]. Aqui definimos  $E(X)$  como o conjunto de arestas que conectam os vértices  $X \subseteq V$  de um grafo  $G = (V, E)$

**Teorema 4.7 (Condição de Maxwell)** *Se um grafo  $G = (V, E)$  é independente em  $\mathbb{R}^k$ , dado uma subestrutura  $(G', p)$ , onde  $G' = (X, E(X))$ , então  $|E(X)| \leq |X|k - \frac{k(k+1)}{2} = S(|X|, k)$ .  $\forall X \subseteq V$ , onde  $|X| \geq (k+1)$ .*

*Prova:* Suponha que  $|E(X)| > |X|k - \frac{k(k+1)}{2}$ , para algum  $X \subseteq V$  com  $|X| \geq (k+1)$ . Então temos que, sendo  $H = (X, E(X))$ ,  $H$  terá matriz de rigidez  $M_{(H, p_H)}$  tal que

$$r(M_H) \leq S(|X|, k) = |X|k - \frac{k(k+1)}{2} < |E(X)|$$

Logo devem haver linhas dependentes em  $M_H$ , pois esta matriz tem exatamente  $|E(X)|$  linhas. Como  $H$  é subgrafo de  $G$  então temos que  $E(X) \subseteq E$ , logo  $M_{(G, p)}$  tem linhas dependentes. Concluimos então que  $G$  não pode ser independente, o que é uma contradição.  $\square$

Podemos assumir que a condição de Maxwell é também suficiente quando  $k = 1$ , o que nos é garantido pelo seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [?, pg.9].

**Lema 4.8** *Seja  $(G, p)$  uma estrutura em  $\mathbb{R}$ .  $G$  é independente se e somente se  $|E(X)| \leq |X| - 1 \quad \forall X \subseteq V$ , com  $|X| \geq 2$*

Este lema equivale a dizer que em uma dimensão  $k = 1$ ,  $G$  é independente se e somente se  $G$  é uma *Floresta*, isto é, é uma união disjunta de grafos onde todos os vértices são conectados (de maneira não cíclica). Com este lema podemos então fazer a conexão do Teorema 4.7 com o nosso conceito de rigidez.

**Teorema 4.9** *Seja  $(G, p)$  uma estrutura genérica em  $\mathbb{R}$ . Então  $(G, p)$  é localmente rígida se e somente se  $G$  é conectado.*

*Prova* Sejam  $F \subset E(G)$  o conjunto de todas as arestas independentes de  $G$ , as quais estão associadas as linhas independentes de  $M_{(G, P)}$ ; e  $H$  o subgrafo de  $G$  que tem  $F$  como conjunto de arestas, i.e. o subgrafo de  $G$  que é independente. Pelo Lema 4.8,  $|E(X)| \leq |X| - 1 \quad \forall X \subseteq V_H$ , e  $H$  é conectado.

Estas considerações já nos garantem a condicional necessária: Se  $(G, p)$  é localmente rígida então

$$|E(H)| = r(M_{G,p}) = S(|V|, 1) = |V| - 1.$$

Afinal  $r(M_{(G,p)}) = S(|V|, 1)$ , pois a estrutura é infinitesimalmente rígida, e sendo  $H$  é o subgrafo das arestas independentes de  $G$ ,  $|E(H)| = r(M_{G,p})$ . Como  $H$  é uma floresta, e logo é conectado de maneira não cíclica, então tendo  $|E(H)| = |V| - 1$ , concluímos que  $H$  contém todos os vértices de  $G$ , e logo  $G$  é conectado.

Suponha agora que  $G$  é desconectado. Sem perda de generalidade, suponha que o vértice  $v_1 \in V$  é o vértice desconectado. Então é fácil termos um movimento infinitesimal (uma translação por exemplo) que mova  $G - v_1$  e mantenha  $v_1$  no lugar, isto é, um movimento não trivial que é equivalente mas não é congruente. Logo  $(G, p)$  é infinitesimalmente flexível.

Pelo nosso Teorema 3.11, podemos assumir os mesmos resultados para rigidez local.  $\square$

Então, a condição de Maxwell nos garante que para  $k = 1$ , rigidez e independência de uma estrutura são equivalentes ao grafo ser conectado.



Figura 19: Estrutura rígida em  $\mathbb{R}$

Poderíamos também nos perguntar se o nosso condicional no Teorema 4.7 pode ser estendido para um bicondicional também em  $\mathbb{R}^2$ . Para esta indagação a resposta é afirmativa, e podemos encontrar a prova para este resultado em [?, pg. 17]

**Teorema 4.10 (de Laman)** *Um grafo  $G$  é independente em  $\mathbb{R}^2$  se e somente se  $|E(X)| \leq 2|X| - 3, \forall X \subseteq V$ , com  $|X| \geq 3$ .*

**Definição 4.11** *Dizemos que um grafo é de Laman quando satisfaz o Teorema de Laman.*

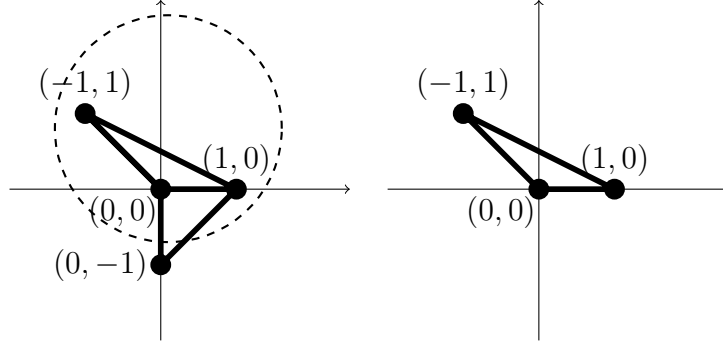


Figura 20: Estrutura em  $\mathbb{R}^2$  e subestrutura

Lembre que uma estrutura é minimalmente rígida se o grafo for independente e se for infinitesimalmente rígida. Então é direto que unindo estas condições com o Teorema de Laman, teremos o seguinte resultado

**Corolário 4.11.1** *Uma estrutura  $(G, p)$  é minimalmente rígida em  $\mathbb{R}^2$  se e somente se  $|E| = 2|V| - 3$  e  $\forall X \subseteq V, |E(X)| \leq 2|X| - 3$ , com  $|X| \geq 3$*

Então se temos um grafo de Laman  $L = (V, E)$  em uma estrutura tal que  $|E| = 2|V| - 3$ , podemos afirmar que este possui estrutura minimalmente rígida. Assim, podemos agora associar a independência do grafo com a rigidez da estrutura com facilidade para  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos tomar a estrutura da Figura 20, e como subestrutura a parte de dentro do círculo como ilustrado (de fato, poderíamos ter escolhido qualquer subestrutura),

Veja que, pela nossa realização escolhida, teremos uma matriz de rigidez  $M$  com posto  $r(M) = 5$ , e como nosso grafo tem exatamente 5 arestas, i.e. (sendo  $G = (E, V)$ )  $|E| = 5$ , então nosso grafo é independente. Já pelo Teorema 4.10 então temos que  $|E(V)| = 5 = 2(4) - 3 = 2|V| - 3$  como esperado. Agora, tomando a nossa subestrutura, reduzimos a quantidade de vértices, e logo de arestas, e então temos  $r(M') = 3 = |E(X)|$ , logo é independente, onde  $M'$  é a matriz de rigidez da subestrutura. E, como antes,  $2|X| - 3 = 2|3| - 3 = 3$ . Este processo faz muito sentido, afinal, ao subtrairmos um vértice, nós subtraímos duas arestas independentes, logo tiramos duas linhas linearmente independentes da nossa matriz  $M$ . Como no teorema temos  $2|X| - 3$ , então, ao subtrairmos um vértice diminuimos  $2|X| - 1 - 3 = (2|X| - 3) - 2$ , acompanhando o lado esquerdo da desigualdade.

Vamos tomar agora um exemplo que não seja infinitesimalmente rígido, como da Figura 21.

Veja que aqui a nossa estrutura tem 4 arestas e sua matriz de rigidez  $M$  tem posto  $r(M) = 4$  logo  $r(M) = |E|$ , e é independente. Mas por não ser

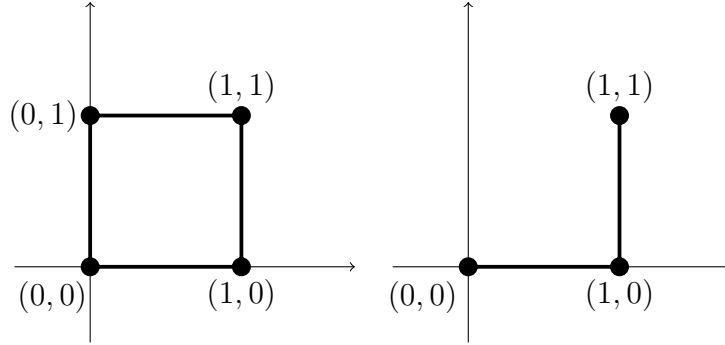


Figura 21: Estrutura em  $\mathbb{R}^2$  e subestrutura

infinitesimalmente rígido temos a relação  $r(M) < S(|V|, 2)$ . Mesmo assim, ainda vale nosso teorema pois nele há uma desigualdade, e, de fato, temos  $|E| < 2|V| - 3$ , com  $|V| = 4$ . Se tomamos a subestrutura resultante ao retirarmos um vértice, então temos  $2 = r(M') = |E(X)| < 2(3) - 3 = 2|X| - 3 = 3$ . Podemos ainda seguir retirando vértices e obtermos uma subestrutura em que ainda obedece a desigualdade  $1 \leq 2^2 - 3 = 1$ . Vale perceber que em todos estes passos, nosso grafo permaneceu independente, e também manteve a desigualdade atestada pelo Teorema 4.10.

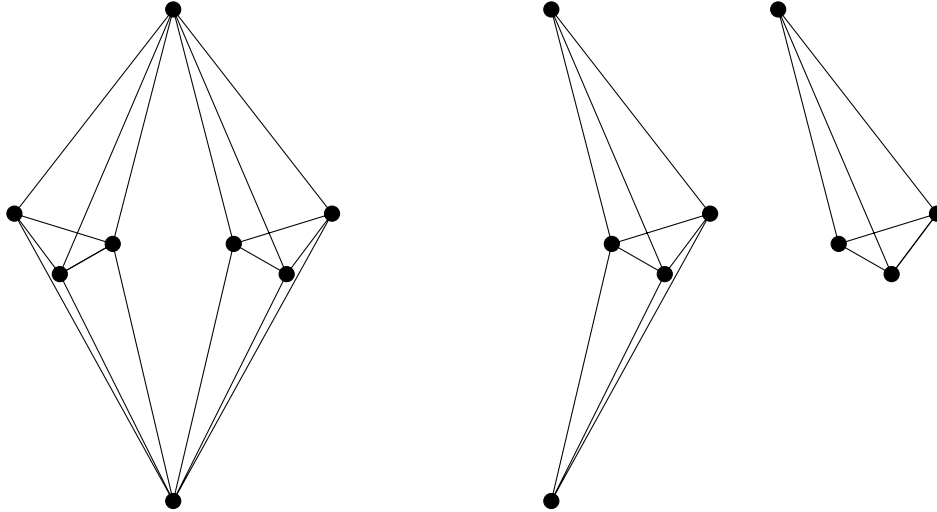


Figura 22: Double Banana e subestruturas

Na verdade, todos os subgrafos de um grafo de Laman serão grafos de Laman, afinal, a condição de Laman se aplica a todos os grafos formados por subconjuntos do conjunto de vértices original, o qual vale que  $|E(X)| \leq 2|X| - 3$ . Então podemos dizer que retirar vértices de um grafo de Laman

preserva a propriedade de ser não só independente em  $\mathbb{R}^2$  como de valer o Teorema de Laman.

**Corolário 4.11.2** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo de Laman e dado  $v \in V$  definimos  $V' = V - \{v\}$ , então  $G' = (V', E(V'))$  é de Laman.*

Poderia se pensar se podemos generalizar o bicondicional do Teorema 4.10 para  $\mathbb{R}^n$ , mas mostraremos por um contra exemplo que não vale para  $\mathbb{R}^3$  (porém podemos ainda garantir o Teorema 4.7).

Um contra exemplo clássico na literatura é o da Figura 22, conhecido com "Double Banana". Para este grafo, cada uma das suas subestruturas obedece a propriedade que procuramos, porém há uma que foge a regra, a saber: a própria estrutura.

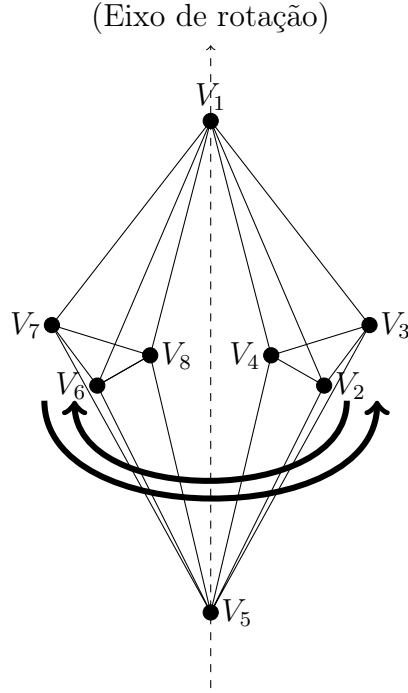


Figura 23: Double Banana com vértices nomeados

Seja  $G_B = (V, E)$  o grafo e  $(G_B, p)$  a estrutura associados a Figura 22. Percebemos que para todos subgrafos vale que  $|E(X)| \leq 3|X| - 6$ . Se  $G_B$  fosse independente, então a estrutura deveria ser infinitesimalmente rígida pois

$$|E| = r(M_{(G_B, p)}) = 18 = 3|8| - 6 = S(8, 3).$$

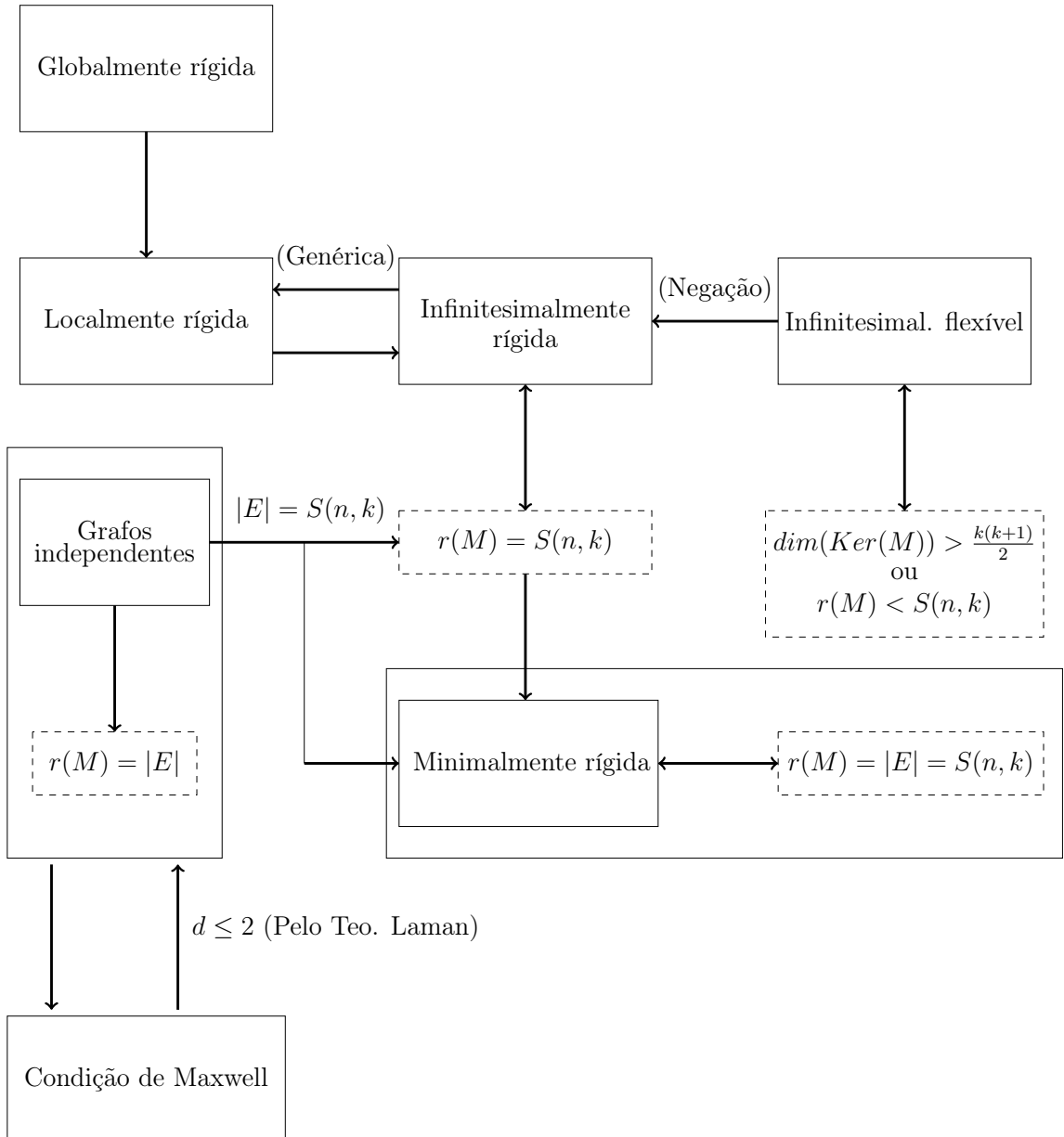
Porém, basta ver a Figura 23 para ver que a estrutura é infinitesimalmente flexível, pois há um movimento que leva à realizações equivalentes que não



são congruentes. Logo temos que  $r(M_{(G_B, p)}) < 18$ , e então  $G$  tem pelo menos uma aresta dependente. Concluimos que  $G$  não é independente.

## 5 Organograma

Neste organograma buscamos resumir de maneira gráfica tudo aquilo que foi discutido no restante do texto. Nesta imagem estão representadas por setas as implicações que vimos, e setas com texto acima aquelas implicações que necessitem de mais hipóteses.



## 6 Conclusão

Procuramos neste trabalho mapear na literatura as definições mais usuais de rigidez para grafos e para estruturas. Vimos então que há diversas definições e que pudemos estabelecer implicações e equivalências entre elas, sempre dadas as devidas restrições. Vimos também que algumas conclusões sobre a rigidez de estruturas puderam ser estendidas para objetos mais abstratos, os grafos, possibilitando então falar também de rigidez de grafos em termos de objetos estudados anteriormente, como a rigidez das estruturas associadas.

Fruto desta nossa catalogação é um organograma (na seção 5), no qual procuramos promover um panorama geral do que foi discutido até agora. Espera-se também que este trabalho de revisão de literatura sirva como introdução os interessados em iniciar seus estudos em rigidez, visto a complexidade e variedade que acompanham este tópico.

## Agradecimentos

Ficam aqui também agradecimentos, ao meu orientador pelo ensino, a paciência, e o cuidado; ao programa PIBIC do CNPq pelo financiamento; e a muitos outros pelo apoio de todos os dias.