Innhold

1 Komplekse tall

Representering

Et komplekst tall er et tall som består av en reell del, og en imaginær del. Den imaginære delen er avhengig av den imaginære enheten, definert ved $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$.

Kartesisk form

Et komplekst tall z representert på kartesisk form skrives som $z = x + iy$ der x er den reelle delen, og iy er den imaginere delen.

Polarform

Komplekse tall på kartesisk form kan tegnes som punkter på en graf, der x er verdien langs førsteaksen, og y er verdien langs andreaksen. Gitt dette kan vi tegne en vektor til dette punktet, og denne vektoren vil ha en lengde r og en vinkel θ. Vinkelen følger samme logikk som vinkelen i enhetssirkelen, altså hvor mange grader vektoren har gått mot klokka fra en vektor langs førsteaksen.

Det finnes forskjellige måter å representere komplekse tall på om vi skal ha det på polarform. Hvis vi ser på det kartesiske uttrykket, ser vi at x må være lengden av vektoren r multiplisert med cosinus-verdien til vinkelen θ. På samme måte må y være lik lengden av vektoren r multiplisert med sinus-verdien til vinkelen θ. Altså:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\theta + r\,i\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + \sin\theta) \end{aligned}$$

En annen måte å representere komplekse tall i polarform på er ved hjelp av eulers tall. Eulers formel sier at $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Dette kjenner vi igjen fra utredningen ovenfor. Altså:

$$\begin{aligned} r(\cos\theta + \sin\theta) &= r\left(e^{i\theta}\right) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

Nå har vi to måter å representere komplekse tall på i polarform.

Operasjoner

Addisjon og subtraksjon av komplekse tall fungerer som normalt; vi behandler i som hvilken som helst annen algebraisk variabel. For eksempel:

$$z = 2 + 3i$$
$$w = 3 - i$$

$$z + w = 5 + 2i$$
$$z - w = -1 + 4i$$

Altså:

$$c_1 = a + bi$$
$$c_2 = c + di$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + i(b + d) \end{aligned}$$

Multiplikasjon blir litt annerledes derimot. Vi tenker på samme måte som når vi ellers multipliserer paranteser med flere ledd, men siden $i \cdot i = -1$, får vi egenskapene nedenfor:

$$c_1 = a + bi$$
$$c_2 = c + di$$

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + i(ad + bc) - bd \\ &= ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

Å dele med et komplekst tall krever også en utredning:

$$c_1 = a + bi$$
$$c_2 = c + di$$

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{a+bi}{c+di} \\
&= (a+bi)\cdot\frac{1}{c+di} \\
&= (a+bi)\cdot\frac{1}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} \\
&= (a+bi)\cdot\frac{1(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\
&(a+bi)\cdot\frac{c-di}{c^2+d^2} \\
&= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bci-adi}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}
$$

Man trenger ikke nødvendigvis å huske formelen neders. Om man husker utredningen, kan man selvfølgelig gjøre det med et vanlig komplekst tall som ikke er definert med a, b, c, og d.

Kompleks konjugent

Gitt et komplekst tall $z = a + bi$ er den komplekse konjugenten $\overline{z} = a - bi$. Ut i fra dette kan vi ganske enkelt utlede disse egenskapene:

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2a$
- $z - \overline{z} = 2bi$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Hvis vi ser på den siste egenskapen, $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, og husker at komplekse tall kan representeres som vektorer i et kartesisk plan, kan vi komme frem til at lengden av vektoren kan representeres slik:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$$

2 Lineære likningssystemer

Et lineært likningssystem kan ikke inneholde ukjente variabler i høyere grad enn 1, eller produkter mellom flere ukjente variabler. For eksempel er ikke x^2 eller xy lov i et system hvor x og y er ukjente.

Gauss-eliminasjon

Gauss-eliminasjon er en måte å endre et likningssystem på, uten å endre løsningsmengden. Vi har tre lovlige operasjoner:

- Man kan bytte om rekkefølgen på likningene.
- Man kan gange alle ledd i likningen med et tall som ikke er 0.
- Man kan summere en likning med en annen likning multiplisert med et tall som ikke er 0.

Målet med Gauss-eliminasjon er å sette opp likningssystemet på det vi kaller *redusert trappeform*. Hva det er ser man på eksempelet nedenfor.

Gitt likningssystemet:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 7 \\ x - 7y + z &= 3 \\ 3x + 4y + z &= 11 \end{aligned}$$

Kan vi skrive det opp slik:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right.$$

Herfra kan vi bruke de lovlige operasjonene som vi definerte ovenfor til å omforme dette slik at det er på redusert trappeform. Her velger jeg å bruke symbolet R_n for rad n. Hvis jeg skriver $-2R_2$ ved siden av den første raden for eksempel, betyr det altså at jeg trekker fra det dobbelte av den andre raden:

$$\begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 7 & \\ 1 & -7 & 1 & 3 & -\frac{1}{2}R_1 \\ 3 & 4 & 1 & 11 & -\frac{3}{2}R_1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 7 & \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & +\frac{1}{3}R_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 7 & +3R_3 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{3}{2}R_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -\frac{15}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} +\frac{2}{15}R_2 \\ \cdot\left(-\frac{2}{15}\right) \\ \cdot(-3) \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}$$

Denne matrisen kan vi skrive ut igjen som et normalt likningssystem med de nye koeffisientene ovenfor. Fra dette ser vi løsningene:

$$\begin{aligned} x &= \ \ 4 \\ y &= \ \ 0 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

3 Matriser

Matriser i likningssystemer

Mye av det vi gjorde med lineære likningssystemer og Gauss-eliminasjon henger sammen med matriser og matriseoperasjoner. Det er faktisk mulig å representere likningssystemer som matriser. Hvis vi tar likningssystemet fra tidligere som eksempel:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 7 \\ x - 7y + z &= 3 \\ 3x + 4y + z &= 11 \end{aligned}$$

… kan skrives som:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi skal se nærmere på hvorfor dette fungerer.

Matrisemultiplikasjon

En matrise A ganget med en annen matrise B er en matrise som inneholder skalarproduktene mellom radene i A og kolonnene i B.

- For at to matriser skal kunne multipliseres sammen, må A ha like mange kolonner som B har rader. Med andre ord må A være like bred som B er høy.
- Matrisen som vi ender opp med vil ha like mange rader, altså være like høy, som A. Den vil også ha like mange kolonner, altså være like bred, som B.

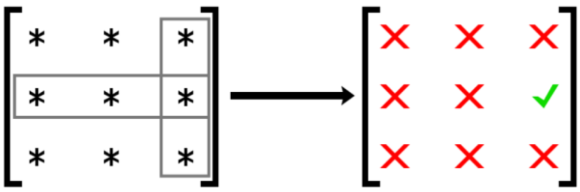
La oss se på et eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1 \cdot a + 2 \cdot d + 3 \cdot g} & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Denne prosessen gjentar vi for alle de ukjente i produktmatrisen. For eksempel, når vi skal finne tallet som ligger i til høyre i midten, gjør vi slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a + 2d + 3g & ? & ? \\ ? & ? & \boxed{4 \cdot c + 5 \cdot f + 6 \cdot i} \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

En fin huskeregel er dette: I matrisene som vi multipliserer sammen, kan vi tenke oss en slags boks rundt tallene som vi jobber med (som jeg har gjort ovenfor). Hvis vi tenker oss at vi legger matrisene over hverandre, og ser på hvor disse boksene krysser hverandre, ser vi hvor resultatet av dette skalarproduktet skal ligge i den nye matrisen.



Husk at i matrise A går vi alltid fra venstre til høyre, og i matrise B går vi alltid fra toppen og nedover.

Determinanter

For en 2×2 matrise er determinanten gitt ved:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

For en 3×3 matrise er determinanten gitt ved:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Legg merke til at det andre leddet er minus.