Innhold

1 Timeplan

Mandag	08:15–10:00 Forelesning i R1
Tirsdag	12:15–14:00 Øvingsforelesning i R7 Oppgaver til neste øvingsforelesning legges ut
Onsdag	12:15–14:00 Mattelab i S7
Torsdag	12:15–14:00 Mattelab i S7
Fredag	12:15–14:00 Forelesning i F1

2 Mengder

Symboldefinisjoner

$\in$	«Element i»
$\mid$	«Slik at» eller «Er divisor i»
$\subseteq$	«Delmengde av»
$M \times M$	«Kartesisk plan», mengde med par, altså $\{\langle a, b\rangle\}$
$\cup$	«Union»
$\cap$	«Snitt»
$\setminus$	«Differanse», en mengde minus en annen
$\overline{M}$	«Komplement-mengde», gitt et univers $\mathcal{U}$, er dette mengden av alle elementene i $\mathcal{U}$ som ikke er i M. Dette vil altså si at $M \cup \overline{M} = \mathcal{U}$.

2 Relasjoner

En relasjon R av en mengde A er en delmengde av $A \times A$. Relasjoner kan også fungere mellom forskjellige mengder. For eksempel vil en relasjon R fra mengden A til mengden B være en delmengde av $A \times B$.

Eksempler på relasjoner:

- $R_{\leq} = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$ som er en relasjon av $A = \{1,2,3\}$.
- $R_{=} = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$ som er en relasjon av $A = \{1,2,3,4\}$.

Infiksnotasjon
Hvis $R \subseteq A \times B$, og $\langle a, b \rangle \in R$, kan vi skrive aRb i stedet for $\langle a, b \rangle \in R$. Dette kalles infiksnotasjon. Dette er ikke så viktig tydeligvis.

Egenskaper:

En relasjon R av mengden A er:

- Refleksiv dersom $\langle a, a \rangle \in R$ for alle $a \in A$. Altså hvis alle parene med like tall fra A finnes i relasjonen R.
- Irrefleksiv dersom $\langle a, a \rangle \notin R$ for alle $a \in A$. Altså må det ikke finnes noen par $\langle a, b \rangle$ hvor a og b er like.
- Symmetrisk dersom $\langle a, b \rangle \in R$ og $\langle b, a \rangle$ for alle $a, b \in R$. Altså for alle par i relasjonen, må også et par der a og b har blitt «speilvendt» finnes i relasjonen.
- Anti-symmetrisk dersom $\langle a, b \rangle \in R$ og $\langle b, a \rangle \in R$ bare hvis $a = b$. Altså, i motsetning til symmetriske relasjoner, kan du ikke ha par i relasjonen som — om de blir snudd på (a og b bytter plass) — fortsatt finnes i relasjonen. Det eneste unntaket til dette er par hvor både a og b er like. Om disse blir snudd på får du selvfølgelig bare det samme paret.
- Transitiv dersom $\langle a, b \rangle \in R$ og $\langle b, c \rangle \in R$ bare hvis $\langle a, c \rangle \in R$. Det som funket for meg for å klare å gripe dette var å tenke slik; for hvert par i relasjonen, se på det siste tallet (b). Hvis det er noen andre par som begynner med

dette tallet, se på det siste tallet i disse andre parene. Nå må du kombinere det første tallet i paret du startet med, og det siste tallet i det andre paret du fant (det som starter med samme tall som start-paret slutter med) til å lage et nytt par. Om dette paret ikke finnes i relasjonen, er den ikke transitiv. Derimot, hvis dette stemmer for alle par du klarer å «kombinere», er relasjonen transitiv.

Ekvivalensrelasjoner

En ekvivalensrelasjon er en relasjon som både er refleksiv, symmetrisk, og transitiv. Kan f.eks. være $R_=$ (det finnes ikke så mange fler).

Partielle ordninger

En partiell ordning er en relasjon som både er refleksiv, anti-symmetrisk, og transitiv. Et eksempell på dette er divisor-relasjonen, $R_{\text{div}} = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ divisor i } y \}$

Partielle ordninger kan vi sette opp visuelt ved hjelp av *hasse-diagrammer*. Dette går ut på noen regler:

- Vi trenger ikke å tegne pilhoder, siden alle strekene beveger seg i samme retning.
- Vi trenger ikke å tegne linjer mellom elementer som er «skilt» mellom en eller flere andre elementer. Siden relasjonen er transitiv, vet vi at det finnes et par mellom alle elementer som «henger på samme linje».
- En partiell ordning vil også inkludere alle par med like elementer, f.eks $\langle 1,1 \rangle$. Vi trenger ikke å tegne linjer fra et element tilbake til seg selv, siden vi vet at dette er sant for alle elementer.

Et eksempel på en partiell ordning er relasjonen $R_{\text{div}} = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ divisor i } y \}$. For eksempel, hvis R_{div} er en relasjon av $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, så kan vi tegne et hasse-diagram.

3 Funksjoner

Nytt perspektiv

Funksjonene vi er kjent med fra videregående utgjør punkter på en graf. Disse punktene kan skrives som par, som er en delmengde av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Altså kan vi si at alle funksjoner er relasjoner.

For en funksjon f som tar elementer fra mengden A som input, og gir elementer fra B som output skriver vi $f: A \to B$. Vi kan gå videre til å definere et funksjonsuttrykk etter dette, f. eks. $f(x) = 2x + 3$.

For at en relasjon skal være en funksjon, må alle elementene i definisjonsområdet resultere i nøyaktig 1 verdi fra verdiområdet når det settes inn i funksjonen.

Egenskaper

Injektive funksjoner
En funksjon er injektiv dersom ingen input-verdier resulterer i samme output-verdier som en annen input-verdi.

Surjektive funksjoner
En funksjon er surjektiv dersom alle elementene i verdimengden er mulige å få som output fra funksjonen.

Bijeksjoner
En bijeksjon er en funksjon som både er injektiv og surjektiv. Hvis vi ser litt logisk på dette, skjønner vi at definisjonsmengden og verdimengden må ha like mange elementer, det vi kaller for *lik kardinalitet*.

Kardinalitet
Om det finnes en injektiv funksjon $f: A \to B$, så må B ha minst like mange elementer som A. Om funksjonen er surjektiv derimot, må A ha minst like mange elementer som B.

Kardinalitet for uendelige mengder
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, og $\mathbb{Q}$ har alle like mange elementer matematisk sett. Dette betyr at vi kan lage en bijeksjon fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{N}$, for eksempel slik:

$$f(z) = \begin{cases} 2z - 1 & x > 0 \\ -2z & x \leq 0 \end{cases}$$