Innlevering 1 — Lineær algebra

Oppgave 1

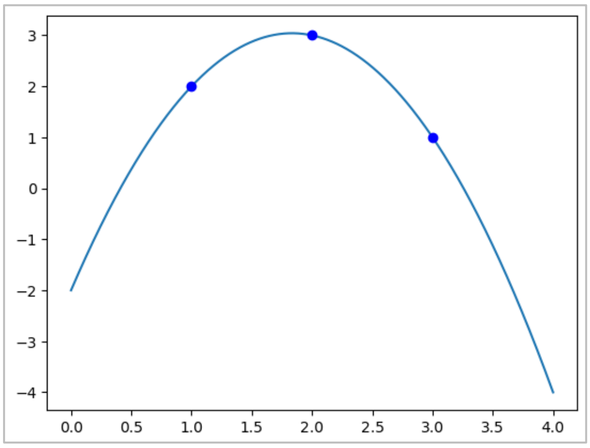
Siden vi vet at polynomet går gjennom punktene $(1,2)$, $(2,3)$, og $(3,1)$, kan vi skrive opp følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

Om vi løser dette ved hjelp av Gauss-eliminasjon, får vi løsningsmengden $\mathcal{L} = \left\{a = -\frac{3}{2}, b = \frac{11}{2}, c = -2\right\}$. Vi kan dobbeltsjekke dette ved hjelp av denne Python-koden:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def p(x):
    return -3/2 * x**2 + 11/2 * x - 2


graf_x = np.linspace(0, 4, 1000)
graf_y = p(graf_x)

punkter_x = np.array([1, 2, 3])
punkter_y = p(punkter_x)

plt.plot(graf_x, graf_y)
plt.plot(punkter_x, punkter_y, 'bo')
```

Som gir følgende utskrift:



Vi ser at alle punktene er på grafen, og vi vet derfor at polynomet $p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2$ er riktig.

Oppgave 2

Matrisen A er gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Den enkleste måten å finne inversmatrisen på vil selvfølgelig være å bruke en datamaskin — men om vi skal gjøre det for hånd, kan man bruke radoperasjoner. Slik kan man notere det:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}R_1 \\ -2R_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2 \\ -2R_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_3 \\ -2R_3 \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\frac{3}{2}R_2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Inversmatrisen til A, A^{-1}, er gitt ved:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Koden nedenfor har jeg kopiert fra Jupyter Notebook. Det eneste jeg har lagt til er linjen som skriver ut B.

```
# her er litt syntaks for matriseregning

# vi importerer pakkene vi trenger
import numpy as np

A = np.array([[2,3,4],[3,4,5],[4,5,7]]) # her lager vi matrisa A ved å oppgi
radvektorer
B = np.linalg.inv(A)  # her bruker vi den innebygde rutinen i python for å
finne A^(-1)
print(B)
```

Dette gir utskriften:

```
[[-3.  1.  1.]
 [ 1.  2. -2.]
 [ 1. -2.  1.]]
```

Som vi ser, er matrisen lik den vi kom fram til.

I denne oppgaven skal vi også finne et andregradspolynom som går gjennom (1,1), (2,2), og (3,2). Som i oppgave 1, kan vi sette opp et lineært ligningssystem basert på dette:

$$\begin{aligned} a + \quad b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 2 \\ 9a + 3b + c &= 2 \end{aligned}$$

Om vi løser dette ligningssystemet får vi løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \{a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}, c = -1\}$$

Altså går følgende polynom, som jeg velger å kalle q, gjennom alle de tre punktene:

$$q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$$

Av kontinuerlige polynomer med reelle tall er dette det eneste som går gjennom punktene (1,1), (2,2), og (3,2).

Oppgave 3 ligger på siste side.

Oppgave 3

I oppgave 1 og 3 fant vi disse polynomene:

- $p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2$, som gikk gjennom punktene $(1,2)$, $(2,3)$, og $(3,1)$.
- $q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$, som gikk gjennom punktene $(1,1)$, $(2,2)$, og $(3,2)$.

Vi skal finne enda et kvadratisk polynom, r, som går gjennom punktene $(1,3)$, $(2,5)$, og $(3,3)$. Om vi legger sammen y-verdiene i de to punktene som p og q går gjennom ved samme x-verdi, ser vi at vi får y-verdiene som r går gjennom ved på samme sted. Med andre ord kan vi legge polynomene p og q sammen for å finne r:

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) \\ &= \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1\right) \\ &= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}x - 2 - 1 \\ &= -2x^2 + 8x - 3 \end{aligned}$$

Vi sjekker at dette polynomet stemmer med følgende Python-kode:

```
def r(x):
    return -2*x**2 + 8*x - 3

print(f"r(1)={r(1)}")
print(f"r(2)={r(2)}")
print(f"r(3)={r(3)}")
```

Dette gir utskriften:

```
r(1)=3
r(2)=5
r(3)=3
```

Som vi ser, stemmer det at polynomet r er gitt ved $r(x) = -2x^2 + 8x - 3$.