Øving 1

Oppgave 1

a) Vi ser at snittet $B \cap C$ er alle oddetall med 3 som divisor. Dermed kan vi skrive denne mengden som $B \cap C = \{\, 6x + 3 \mid x \in \mathbb{N} \,\}$.

b) Mengden A er alle naturlige tall over 0, og mengden B er alle oddetall over 0. Dermed vil differansen mellom A og B være alle partall over 0, altså $A \setminus B = \{2x | x \in \mathbb{N}, 0 < x\}$.

c) Differansen mellom B og C vil være alle oddetall over 0 som ikke har 3 som divisor. Dette kan vi skrive som $B \setminus C = \{\, 2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 3 \nmid x \,\}$.

d) Mengden A inneholder alle naturlige tall over 0, og mengden D inneholder de fire første tallene over eller lik 0 med 4 som divisor, altså 0, 4, 8, 12. En union mellom A og D vil derfor bare gi oss alle naturlige tall, siden alle tall bortsett fra 0 allerede finnes i A. Mengden B inneholder alle positive oddetall, og siden alle oddetall også er naturlige tall, vet vi at B må være en delmengde av $A \cup D$. Matematisk kan vi skrive:

$$A \cup D = \mathbb{N} \Rightarrow B \subseteq A \cup D$$

e) Komplimentmengden til D, $\overline{D}$, med $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ som univers, vil være alle naturlige tall, bortsett fra 0, 4, 8, eller 12. Siden 0 er ekskludert fra dette komplementet, og $\overline{D}$ kun inneholder positive hele tall ellers, vet vi at det må være en delmengde av A, som inneholder alle naturlige tall over 0. Matematisk skriver vi:

$$\overline{D} = \mathbb{N} \setminus \{0,4,8,12\} \Rightarrow \overline{D} \subseteq A$$

f) Mengden B inneholder bare alle positive oddetall, og C inneholder alle tall med 3 som divisor, som er høyere eller lik 0. Mengden A inneholder alle naturlige tall over 0, inkludert positive partall. $B \cup C$ har noen partall, nemlig dem som har 3 som divisor, som 6 eller 12 — men alle andre partall blir ekskludert, og dermed er $B \cup C = A$ usant.

Oppgave 2

a) Mengden $A \cap B$ vil i seg selv være en delmengde av B, siden den førstnevnte kun inneholder elementer som er i både A og B. Mengden $\mathcal{P}(B)$ vil inneholde alle mulige delmengder av $A \cap B$, siden det ikke er noen elementer i $A \cup B$ som ikke er i B. Dette betyr også at potensmengden til $A \cap B$ er en delmengde av potensmengden til B.

b) Potensmengden til $\emptyset$ vil inneholde alle delmengder av $\emptyset$. Den tomme mengden har kun en delmengde, altså seg selv. Vi ser derfor at $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{\{\}\} \neq \emptyset$, altså at påstanden er usann.

c) $A \cap B$ er en delmengde av $A \cup B$, siden den førstnevnte mengden kun inneholder elementer som er i både A og B. Derfor er det også et element av potensmengden til $A \cup B$, som inneholder alle delmengdene til $A \cup B$. Altså:

$$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

d) En union mellom potensmengdene til A og B, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, vil ikke nødvendigvis inneholde enkelte mengder som finnes i potensmengden til unionen mellom A og B, $\mathcal{P}(A \cup B)$. $A \cup B$ er også en delmengde av seg selv, som betyr at $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Det er ingen garanti for at $A \cup B$ finnes i en av potensmengdene til A eller B. Derfor er påstanden usann.

e) Potensmengden $\mathcal{P}(A \setminus B)$ inneholder delmengder med elementer fra A. Disse elementene finnes ikke nødvendigvis i delmengdene i unionen $\mathcal{P}(\overline{A}) \cup \mathcal{P}(B)$. I den sistnevnte mengden er ikke A inkludert på noen som helst måte, og vi kan derfor ikke si at alle delmengdene i $\mathcal{P}(A \setminus B)$ finnes i $\mathcal{P}(\overline{A}) \cup \mathcal{P}(B)$. Utsagnet $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(\overline{A}) \cup \mathcal{P}(B)$ er derfor ikke sant.

Gitt mengden $A = \{1,2,3,4\}$ og relasjonen $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle\}$ ser vi at:

a) R ikke er refleksiv.

b) R ikke er symmetrisk.

c) R er transitiv.

d) R er antisymmetrisk.

e) R er irrefleksiv.

Oppgave 4

Vi har at mengden A er gitt ved $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Relasjonen $\{\langle x, y\rangle \mid x + y \text{ er et partall}\}$ er den samme som $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle\}$. Vi ser at denne mengden er

a. Refleksiv

b. Symmetrisk

c. Transitiv

b) Relasjonen $\{\langle x, y\rangle \mid x \cdot y \text{ er et partall}\}$ kan bli gitt ved $\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$, altså mengden der minst et tall i paret er et partall. Vi ser at denne mengden er:

a. Symmetrisk

Oppgave 5

a) For funksjonen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved $f(x) = x + 2$ er injektiv fordi den er lineær. Den stiger alltid med samme verdi, som betyr at det ikke er noen måte for den å «falle tilbake» til en gammel verdi den har vært ved før. Men funksjonen er ikke surjektiv; det laveste tallet vi kan få ut fra den er 2, ved at $f(0) = 0 + 2 = 2$. Det er ingen måte å få 0 eller 1 ved hjelp av denne funksjonen.

b) Funksjonen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{hvis } x \text{ er et partall} \\ \frac{x-1}{2}, & \text{hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$ er ikke injektiv, fordi verdier som $x = 2$ og $x = 3$ gir samme tall i funksjonen. Den er surjektiv derimot, ved at alle naturlige tall er gjort rede for i utskriften til funksjonen. For hvert naturlig tall finnes det et partall og et oddetall som gir det naturlige tallet som utskrift. Hvis vi skal ha 3 for eksempel, kan vi sette inn 6 eller 7.

Oppgave 6

a) Vi vet at M er tellbar, som betyr at det finnes en injektiv funksjon $f: M \to \mathbb{N}$. Med dette kan vi liste opp alle elementene i M som $m_1, m_2, \dots, m_i$ der i er gitt ved $i = f(m_i)$. Vi kan være sikre på at en ny mengde $M \cup \{42\}$ er tellbar ved å bruke den injektive funksjonen $g: M \cup \{42\} \to \mathbb{N}$, definert slik:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = 42 \\ f(x) + 1 & \text{for } x \neq 42 \end{cases}$$

b) For å vise at $M \cup N$ er tellbar når M og N er tellbare, kan vi tenke oss en injektiv funksjon som gir tilbake et partall om det man setter inn er element i M , og et oddetall om det kun er element i N. Vi antar at funksjonene $f_M: M \to \mathbb{N}$ og $f_N: N \to \mathbb{N}$ er definert. Da kan vi definere funksjonen $f_{M \cup N}: M \cup N \to \mathbb{N}$, og bruke den til å vise at mengden $M \cup N$ er tellbar:

$$f_{M\cup N}(x) = \begin{cases} 2f_M(x) & \text{for } x \in M \\ 2f_N(x) + 1 & \text{for } x \in N \end{cases}$$

Her kan man merke seg at dette vil også fungere om de injektive funksjonene f_M og f_N ikke skriver ut de naturlige tallene i rekkefølgen $0, 1, 2, 3, \ldots$ — da ender man bare opp med større hopp mellom hvert tall man får fra funksjonen $f_{M\cup N}$. Dette vet vi fordi alle funksjonene skriver kun ut naturlige tall.