

Teoria dei Sistemi

Simone Palumbo

September 2021

1 Introduzione:

La Teoria dei Sistemi analizza le proprietà dei modelli matematici che descrivono *sistemi dinamici*. Nel corso vedremo esempi di modelli matematici che ben descrivono dei sistemi dinamici in esame, tecniche per l'analisi di questi modelli matematici e degli strumenti per simulare il comportamento di un dato sistema dinamico.

2 Sistema Dinamico:

Un sistema dinamico è un insieme di elementi interconnessi che evolvono nel tempo e su cui si interviene per modificarne il comportamento. Ad un sistema dinamico è associata una equazione differenziale. Il contrario di un sistema dinamico è un sistema statico. Nei sistemi statici l'uscita dipende dall'unico valore presente dell'input, quindi c'è un legame istantaneo, e nessuna condizione iniziale da cui dipende il sistema: dove inizi inizi il risultato è sempre quello. I sistemi statici non hanno quindi memoria, perché non tengono conto del passato. Nei sistemi dinamici invece l'uscita dipende dal valore presente e passato dell'input, poiché - come tra poco vedremo - hanno un'equazione differenziale, cioè vanno integrati, e quindi necessitano di una condizione iniziale x_0 dell'equazione differenziale, che sarà poi il nostro estremo di integrazione. Questa condizione iniziale da cui dipendono i sistemi dinamici e che invece i sistemi statici non hanno, porta a dire che *i sistemi dinamici hanno memoria*, perché tengono conto del passato, cioè della condizione iniziale. Noi ci concentriamo sui sistemi dinamici, a tempo continuo e discreto.

2.1 Sistemi dinamici a tempo continuo lineari stazionari a dimensione finita:

Sono descritti da sistemi di equazioni differenziali del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Dove abbiamo i vettori colonna:

- $\mathbf{x}(t)$, che rappresenta le *variabili di stato* del sistema;
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$, che è il vettore con le derivate di ogni componente di $\mathbf{x}(t)$ come componenti;
- \mathbf{x}_0 , che rappresenta le variabili di stato del sistema all'istante iniziale t_0 (è quindi la nostra condizione iniziale di Cauchy);
- $\mathbf{u}(t)$, che rappresenta gli ingressi del nostro sistema, cioè le variabili su cui si agisce per modificare l'andamento dello stato;
- $\mathbf{y}(t)$, che rappresenta invece le uscite del nostro sistema, ciò che andiamo a misurare per capire il comportamento del sistema.

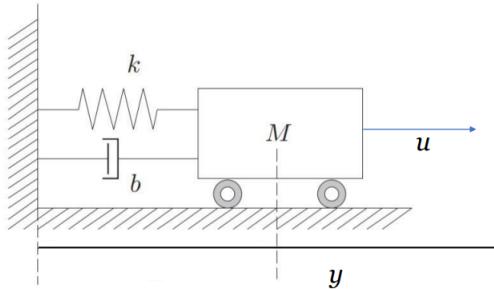
Perché lo abbiamo chiamato così? Un sistema stazionario è un sistema i cui parametri non dipendono dal tempo. Per questo le matrici A, B, C e D non sono seguite da (t) , ma sono invece formate da coefficienti costanti rispetto al tempo. Un sistema è invece lineare quando dipende linearmente dalle variabili di stato e dalle variabili di ingresso, cioè da \mathbf{x} e \mathbf{u} . Vediamo dalle due equazioni che le matrici che premoltiplicano i vettori sono costanti, e i vettori \mathbf{x} e \mathbf{u} non hanno elevazioni a potenza, o altre funzioni applicate, quindi il sistema è stazionario¹ e lineare. I due problemi che ci poniamo sono:

- Come associo a un sistema dinamico il giusto modello matematico?
- Come analizzo il modello matematico per comprendere il comportamento del sistema dinamico a cui è associato?

Facciamo un primo esempio di sistema dinamico, stazionario e lineare.

¹Attenzione a distinguere statico e stazionario! Solo il secondo è un sistema dinamico.

Sistema Meccanico massa molla smorzatore:



Vediamo che il modello consta di una forza di richiamo elastica (molla con coeff. k) e di una forza di attrito (dissipatore, o smorzatore appunto, viscoso con coefficiente b). Come descriviamo il movimento del carrello, che è il nostro sistema dinamico? Innanzitutto ragioniamo, se è una sistema dinamico deve avere una eq. differenziale, essendo questo un carrello soggetto a forze, l'eq. differenziale dovrà essere di secondo ordine, poiché l'accelerazione è la derivata della derivata della posizione. Poi, ricordandoci del secondo principio della dinamica:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Possiamo applicarlo al nostro caso, notando che \mathbf{F} è un vettore che nel nostro caso è composto da tre forze: la forza u trainante, la forza elastica $-ky(t)$ e la forza d'attrito viscoso² provocata dallo smorzatore viscoso $-b\dot{y}(t)$. Avendo considerato che $y(t)$ è la posizione (rispetto all'asse y), \dot{y} è la derivata della posizione, che è la velocità, e \ddot{y} è l'accelerazione. Troviamo quindi che la legge fisica che descrive il movimento del carrello è:

$$u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t) = M\ddot{y}(t)$$

Adesso, isolando l'accelerazione:

$$\ddot{y}(t) = \frac{-k}{M}y(t) + \frac{-b}{M}\dot{y}(t) + \frac{u(t)}{M}$$

Applicando le seguenti due sostituzioni: $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$ l'equazione diventa:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M}$$

Ricordiamoci la relazione differenziale relativa alla seconda sostituzione che abbiamo fatto, cioè $x_2(t) = \dot{y}(t)$, perché la useremo come equazione dopo. Ora ci serve l'altra equazione per il sistema. Come uscita del sistema, cioè ciò che andiamo a misurare, possiamo prendere la posizione $y(t)$ del nostro sistema, cioè $x_1(t)$. In effetti noi volevamo sapere il comportamento del carretto quindi la posizione è ciò che dobbiamo misurare, perché è il risultato (output) dell'input u (cioè l'intensità della forza trainante) che gli diamo, nonché dal rallentamento che subisce, determinato dai valori dei coefficienti (forza elastica e d'attrito viscoso):

$$y(t) = x_1(t)$$

Bene, ora abbiamo tutto ciò che ci serve per scrivere la formula in forma matriciale. *iniziamo dalle 2 equazioni differenziali per x :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{-k}{M}x_1(t) + \frac{-b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} \end{aligned}$$

Considerando x_1 e x_2 come le due componenti del vettore \mathbf{x} , e ricordandoci la regola del *prodotto tra matrici*, troviamo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t)$$

²Ripasso di Fisica: la forza elastica e la forza d'attrito viscoso sono sempre opposte al moto dell'oggetto, per questo hanno il segno meno. Mentre la prima è il prodotto tra il coefficiente elastico della molla e la posizione, la seconda è il prodotto tra il coefficiente di smorzamento e la *velocità*, cioè la derivata della posizione.

Adesso passiamo all'equazione per y , che scritta in forma matriciale diventa:

$$y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

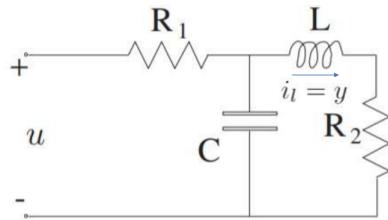
Queste due equazioni matriciali che abbiamo trovato, coincidono con le equazioni di un sistema a tempo continuo lineare stazionario e a dimensione finita, infatti:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}$$

Che è il nostro modello matematico. Sappiamo quindi ora che il nostro carrello che si muove è un sistema dinamico, infatti, proprio come in un sistema dinamico, possiamo intervenire per modificarne il comportamento. Più precisamente, a seconda dei valori dei parametri stazionari M , k e b cambia il comportamento del sistema dinamico. Sul sito <https://www.myphysicslab.com/springs/single-spring-en.html> si può simulare il comportamento del carretto variando i valori di M , k e b , notando i diversi comportamenti che il sistema adotta.

Altro esempio, rete elettrica:



Sappiamo che i legami tra tensioni e correnti di una rete elettrica sono descritte dalle leggi delle maglie e dalle leggi dei nodi (le due leggi di Kirchhoff), nel nostro caso:

- La Legge delle Maglie ci dà:

$$u(t) = R_1 i_1(t) + v_c(t) \implies i_1(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R_1}$$

Per la maglia più a sinistra, mentre:

$$v_c(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + R_2 i_l(t) \implies \frac{di_l(t)}{dt} = \frac{1}{L} v_c(t) - \frac{R_2}{L} i_l(t)$$

Per quella a destra. Notare che per queste equazioni abbiamo chiamato $u(t)$ la differenza di potenziale ai capi del circuito, $v_c(t)$ la differenza di potenziale ai capi del condensatore e $i_l(t)$ la corrente che passa attraverso l'induttore di induttanza L ; ricordandoci poi le formule per la differenza di potenziale (tensione) ai capi di un resistore e di un induttore.

- La Legge dei Nodi invece ci dà:

$$i_1(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} + i_l(t) \implies \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_1(t) - \frac{1}{C} i_l(t)$$

Sostituendo $i_1(t)$ con ciò che abbiamo trovato nella prima Legge:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{R_1 C} u(t) - \frac{1}{R_1 C} v_c(t) - \frac{1}{C} i_l(t)$$

Anche qui, come prima, abbiamo trovato le corrispettive equazioni differenziali per le due componenti che dopo chiameremo x_1 e x_2 , così da poter successivamente calcolare $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\frac{di_l(t)}{dt} = \frac{1}{L} v_c(t) - \frac{R_2}{L} i_l(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{R_1 C} u(t) - \frac{1}{R_1 C} v_c(t) - \frac{1}{C} i_l(t)$$

Adesso adottiamo una sostituzione - come abbiamo abbiam fatto nell'esempio del carretto - chiamando $x_1(t) = v_c(t)$ e $x_2(t) = i_l(t)$, e facendo la stessa cosa fatta nell'esempio del carretto, riusciamo a scrivere l'equazione differenziale in forma matriciale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Prendiamo come uscita, ciò che ci interessa misurare per determinare il comportamento del sistema, l'intensità di corrente che passa nell'induttore, cioè $i_l(t)$. Quindi otteniamo:

$$y(t) = (0 \quad 1) \mathbf{x}$$

E abbiamo la nostra rappresentazione del sistema dinamico. Ora, tornando un passo indietro, riprendiamo le nostre due eq. diff. ricavate dalle due Leggi di Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \frac{di_l(t)}{dt} &= \frac{1}{L} v_c(t) - \frac{R_2}{L} i_l(t) \\ \frac{dv_c(t)}{dt} &= \frac{1}{R_1 C} u(t) - \frac{1}{R_1 C} v_c(t) - \frac{1}{C} i_l(t) \end{aligned}$$

ma stavolta, sempre prendendo la seconda equazione e isolando $u(t)$, proviamo però a sostituire $\frac{dv_c(t)}{dt}$ e $v_c(t)$ con le corrispettive espressioni ricavate dalla prima equazione. Troviamo un'equazione differenziale con solo $i_l(t)$ e u , più ovviamente le costanti:

$$\frac{1}{R_1 L C} u = \frac{d^2 i_l(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} \right) \frac{di_l(t)}{dt} + \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 L C} \right) i_l(t)$$

Adesso operiamo due sostituzioni, diverse da quelle che abbiamo operato prima: $z_1 = i_l$ e $z_2 = \dot{z}_1 = \frac{di_l}{dt}$. Quindi in questo caso le componenti del vettore $\dot{\mathbf{z}}$ saranno diverse dalle componenti del precedente vettore $\dot{\mathbf{x}}$. Abbiamo in questo caso:

$$\frac{1}{R_1 L C} u = \dot{z}_2 + \left(\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} \right) z_2 + \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 L C} \right) z_1 \implies \dot{z}_2 = - \left(\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} \right) z_2 - \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 L C} \right) z_1 + \frac{1}{R_1 L C} u$$

E, come nel caso del carretto, abbiamo la relazione differenziale relativa alla sostituzione appena fatta:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

Bene, ora possiamo, come abbiamo fatto nei due casi precedenti, scrivere le nostre due equazioni differenziali in un'unica compatta equazione matriciale:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_2 + R_1}{R_1 L C} & -\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 L C} \end{pmatrix} u$$

Con \mathbf{z} vettore $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e quindi $\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}$. Per la seconda equazione, cioè l'uscita, prendiamo come output $i_l(t)$:

$$y = (1 \quad 0) \mathbf{z}$$

Notiamo una cosa interessante, chiamata **rappresentazione equivalente**. Un sistema in effetti può avere più rappresentazioni matematiche. Noi ne abbiamo trovate due per la rete elettrica: una con i vettori \mathbf{x} e una con i vettori \mathbf{z} . Ma in generale, come faccio a capire due sistemi di equazioni rappresentano lo stesso sistema dinamico? Dato che, scrivendo due sistemi di equazioni per uno stesso sistema questi sono equivalenti, significa che stiamo facendo un **cambio di coordinate!** Cioè il sistema di eq. che descrive il processo con le variabili x e quello che le descrive con le variabili z sono equivalenti se e solo se:

$$\exists T, |T| \neq 0 \quad \text{t.c.} \quad z = Tx$$

Dove l'ipotesi di determinante non nullo è fondamentale perché si sta parlando di una matrice invertibile³. Se adesso prendiamo i nostri due sistemi di equazioni per descrivere lo stesso processo, cioè la rete elettrica, vediamo che:

³Ricordiamo che il Teorema di Esistenza della Matrice Inversa dice che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante non è nullo.

- Per la prima equazione avevamo:

- Descrizione nelle variabili x:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t)$$

- Descrizione nelle variabili z:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_2+R_1}{R_1 LC} & -\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 LC} \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 LC} \end{pmatrix} u(t) = \tilde{A}\mathbf{z}(t) + \tilde{B}u(t)$$

Quindi, poiché abbiamo visto che queste due equazioni descrivono lo stesso processo, devono essere equivalenti e deve valere la relazione $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$ scritta sopra. Precisamente:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = T\dot{\mathbf{x}} = T(A\mathbf{x}(t) + Bu(t)) = TA\mathbf{x}(t) + TBu(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t)$$

Avendo nell'ultimo passaggio usato la relazione inversa $\mathbf{x} = T^{-1}z$. Notiamo quindi che il cambio di coordinate si basa su $\tilde{A} = TAT^{-1}$ e $\tilde{B} = TB$. Notare che $\tilde{A} = TAT^{-1}$ significa, ricordando la teoria delle matrici, che \tilde{A} e A sono **matrici simili**. Nella teoria dell'algebra lineare *due matrici simili hanno gli stessi autovalori*, e vedremo che *il comportamento del sistema si capisce proprio attraverso gli autovalori della matrice associata al sistema*. Quindi il discorso è che posso cambiare coordinate per studiare un sistema in coordinate più agevoli (le più agevoli sono sicuramente quelle relative alla matrice diagonalizzata), ma comunque le matrici su cui opero devono sempre avere gli stessi autovalori, quelli del sistema.

- Per la seconda equazione avevamo:

- Descrizione nelle variabili x:

$$y(t) = (0 \ 1) \mathbf{x}(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t)$$

- Descrizione nelle variabili z:

$$y(t) = (1 \ 0) \mathbf{z}(t) = \tilde{C}\mathbf{z}(t) + \tilde{D}u(t)$$

Questa volta non dobbiamo moltiplicare tutto per T perché abbiamo y per tutte e due le rappresentazioni (abbiamo presto come uscita $i_l(t)$ per entrambe) ma dobbiamo sostituire x con z ottenendo dalla prima equazione, sempre usando $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{z}(t)$:

$$y(t) = CT^{-1}\mathbf{z}(t) + Du(t)$$

E quindi $\tilde{C} = CT^{-1}$ e $\tilde{D} = D$.

D, la matrice che rappresenta il legame istantaneo tra ingresso e uscita, non cambia, proprio perché è un legame istantaneo, statico. Invece A, B, C cambiano, secondo le relazioni sopra descritte.

Ma non solo esistono più rappresentazioni equivalenti per lo stesso sistema dinamico, è vero anche il contrario! **Una stessa rappresentazione può rappresentare sistemi dinamici diversi**, infatti l'ultima rappresentazione che abbiamo trovato della rete elettrica può facilmente essere confrontata con quella trovata del carretto. Quella del carretto era:

$$u(t) = M\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)$$

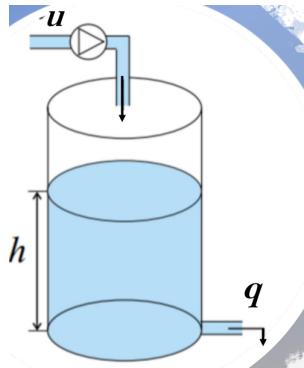
Quella del circuito è:

$$\frac{1}{R_1 LC}u(t) = \frac{d^2i_l(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 LC}\right) \frac{di_l(t)}{dt} + \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 LC}\right) i_l(t)$$

Notiamo che isolando u(t) le equazioni sono equivalenti! Basta porre $R_1 LC = M$, $R_1 R_2 C + L = b$ e $R_2 + R_1 = k$ per ottenere la stessa equazione.

2.2 Sistemi non lineari:

Esempio, un sistema idraulico:



Chiamiamo S la sezione del serbatoio e s la sezione del piccolo condotto di uscita, abbiamo che la variazione di volume del fluido nel serbatoio è uguale alla differenza tra la quantità di acqua che entra (u) e quella che esce (q):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(Sh(t))}{dt} = u(t) - q(t)$$

Avendo che la quantità di acqua che esce è:

$$q(t) = sv(t)$$

Con la velocità del fluido:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

Se chiamiamo $x(t) = h(t)$ abbiamo:

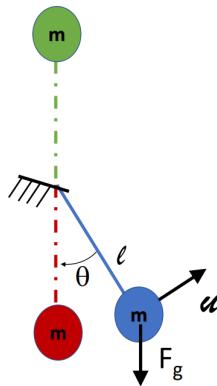
$$\frac{d(Sh(t))}{dt} = u(t) - q(t) \implies \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{s\sqrt{2g}}{S}\sqrt{x} + \frac{1}{S}u(t)$$

E, per l'uscita prendiamo l'acqua in uscita:

$$y(t) = q(t) = sv(t) = s\sqrt{2g}\sqrt{x}$$

Ecco il nostro sistema di due equazioni per il processo, ma attenzione! *Non è lineare!* Questo perché ci sono delle radici, che quindi elevano a potenza la variabile x . E un sistema così, con x elevato ad una potenza, non essendo lineare è più complesso. Vedremo però dei modi per approssimare un sistema dinamico non lineare con uno lineare.

Un altro esempio, il modello del Pendolo:



Ricordiamo che l'equazione del pendolo è:

$$ml\ddot{\theta}(t) + mg\sin\theta(t) + kl\dot{\theta}(t) = u(t)$$

Se applichiamo una forza u sulla massa m questa sopra è la legge che regola il movimento del pendolo. Ovviamente il fatto che θ , la variabile $x(t)$ di questa equazione differenziale, sia argomento del seno, rende questa equazione una equazione *non lineare*. Ma qui ho anche un'altra peculiarità: il pendolo ha due posizioni verticali di equilibrio, quella verde instabile (posizione di *pendolo inverso*), quella rossa stabile. Ci chiediamo, riusciamo a descrivere il sistema tenendo conto di tutte e due queste situazioni diverse? Si che si può, e vedremo più avanti che si farà in questo modo: si scriverà il sistema non lineare di θ e poi lo si approssimerà con un sistema lineare *nell'intorno dei punti di equilibrio*. Vedremo, come l'intuizione e l'esperienza comune ci suggeriscono, che i due comportamenti nei due punti di equilibrio sono completamente diversi.

3 Il caso scalare:

Il caso in cui A, B, C e D si riducono a quattro costanti a, b, c e d . Abbiamo quindi:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

Prendiamo la prima equazione differenziale, che ricordiamo essere una EDO lineare, e (come abbiamo fatto durante il corso di Analisi I⁴) prima troviamo una soluzione per il caso in cui $b = 0$, cioè quando siamo di fronte a una EDO lineare *omogenea*. In analisi abbiamo dimostrato che se $G(t)$ è una primitiva di $a(t)$ allora le soluzioni dell'EDO lineare omogenea sono date da:

$$x(t) = Ce^{G(t)} \quad C \in \mathbb{R}$$

Lo possiamo dimostrare derivando:

$$\dot{x}(t) = Ce^{G(t)}G'(t) = Ce^{G(t)}a(t) = a(t)x(t)$$

Poi se abbiamo una condizione di Cauchy che ci dà condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ supponendo $G(t_0) = 0$ si ha:

$$x(t_0) = Ce^0 = C$$

Da un lato $x(t_0)$ è C , dall'altro deve, per la condizione di Cauchy, essere uguale a x_0 , allora si ha che $x_0 = C$, e perciò la soluzione della nostra prima equazione differenziale, data la condizione iniziale del problema di Cauchy $x(t_0) = x_0$, è:

$$x(t) = x_0 e^{G(t)}$$

Nel nostro specifico caso, essendo $a(t) = a$ una costante, la sua primitiva $G(t)$ è $\int_{t_0}^t a = a(t - t_0)$. Perciò, finalmente, dopo tutto sto pippone sulle equazioni differenziali, abbiamo che:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

Quando è omogenea, cioè $b = 0$:

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

E quando ha condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, ha soluzione:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

Bene, fatta la soluzione per $b = 0$, analizziamo il caso $b \neq 0$, cioè quando abbiamo una EDO lineare del primo ordine *non omogenea*. Si ha che in questo caso, cioè per l'equazione differenziale:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

Data sempre la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Dove abbiamo chiamato τ la v. di integrazione per distinguerla da t negli estremi di integrazione. Chiamiamo il primo addendo *Risposta libera*, perché dipende solo dalle condizioni iniziali, mentre il

⁴se non ti ricordi vai su YT a vedere la lezione 42 del corso del prof. Camilli

secondo addendo, che presente un *Integrale di Convoluzione*, lo chiamiamo *Risposta forzata*, poiché dipende dall'ingresso applicato $u(\tau)$ (e non dipende dalle condizioni iniziali). Possiamo verificare che questa sia effettivamente la soluzione dell'equazione facendo la derivata:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \right) = a e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + \\ &+ e^{a(t-t_0)} b u(t) \frac{d}{dt}(t) - e^{a(t-t_0)} b u(t_0) \frac{d}{dt}(t_0) = a \left(e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \right) + e^0 b u(t) = a x(t) + b u(t)\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale⁵ per risolvere la derivata dell'integrale.

Ora passiamo a $y(t)$:

$$\begin{aligned}y(t) &= c \mathbf{x}(t) + d \mathbf{u}(t) = c(e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau) + d u(t) = \\ &= c e^{a(t-t_0)} x_0 + c \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)\end{aligned}$$

3.1 Ipotesi di linearità su $\mathbf{X} \times \mathbf{U}$:

La suddivisione tra risposta libera e risposta forzata è una conseguenza dell'ipotesi di linearità, cioè l'ipotesi di linearità permette di scrivere:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

L'ipotesi dice:

- Sia $x_1(t)$ lo stato raggiunto al tempo t partendo dallo stato iniziale $x_{0,1}(t_0)$ con ingresso $u_{1,[t_0,t]}$
- Sia $x_2(t)$ lo stato raggiunto al tempo t partendo dallo stato iniziale $x_{0,2}(t_0)$ con ingresso $u_{2,[t_0,t]}$

Allora abbiamo che lo stato raggiunto al tempo t a partire dallo stato iniziale $x_0 = c_1 x_{0,1}(t_0) + c_2 x_{0,2}(t_0)$ con ingresso $u_{[t_0,t]} = c_1 u_{1,[t_0,t]} + c_2 u_{2,[t_0,t]}$ è $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$. Con questa adesso dimostriamo che la soluzione dell'eq. è formata da risposta libera e forzata, nel seguente modo:

- Se lo stato iniziale è $x_{0,1}(t_0) = x_0(t_0)$, mentre l'ingresso è $u_{1,[t_0,t]} = 0$, lo stato raggiunto al tempo t è $x_1(t)$. Vediamo che questo, nella formula che stiamo dimostrando, coincide con il caso in cui c'è solo la risposta libera: $x_1(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 = x_{libera}$
- Se lo stato iniziale è $x_{0,2}(t_0) = 0$, mentre l'ingresso è $u_{2,[t_0,t]} = u_{[t_0,t]}$, lo stato raggiunto al tempo t è $x_2(t)$. Vediamo che questo, nella formula che stiamo dimostrando, coincide con il caso in cui c'è solo la risposta forzata: $x_2(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = x_{forzata}$

Allora, lo stato raggiunto al tempo t a partire dallo stato iniziale $x_0 = c_1 x_0 + c_2 \cdot 0 = c_1 x_0$ con ingresso $u_{[t_0,t]} = c_1 \cdot 0 + c_2 u_{[t_0,t]} = c_2 u_{[t_0,t]}$, posto $c_1 = c_2 = 1$, è $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = x_{libera}(t) + x_{forzata}(t)$. Come volevasi dimostrare.

3.2 Ipotesi di stazionarietà:

Altra ipotesi importante sotto cui ci mettiamo. In pratica, se iniziamo al tempo t_0 con stato iniziale $x(t_0)$ e ingresso $u_{[t_0,t]}(t)$ abbiamo:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Se invece iniziamo al tempo t_1 , ad esempio $t_1 > t_0$, con stato iniziale $x(t_1)$ e ingresso $u_{[t_1,\bar{t}]}(\bar{t})$, cioè avendo posto $\bar{t} = t + t_1 - t_0$, *non cambia niente!* Questo perché gli intervalli di tempo misurati

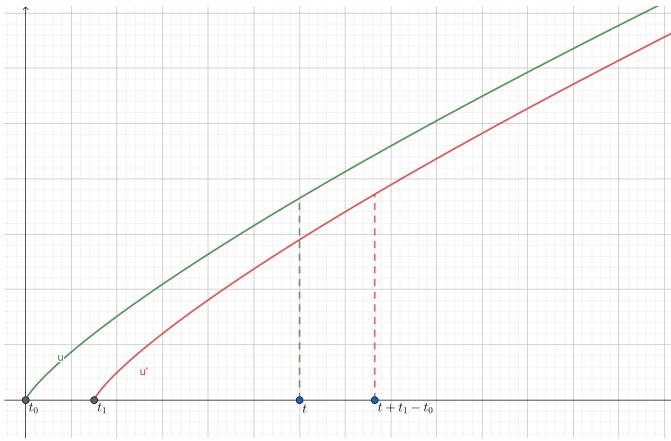


Figure 1: Come vediamo, i due ingressi sono uguali, semplicemente uno è traslato più avanti nel tempo

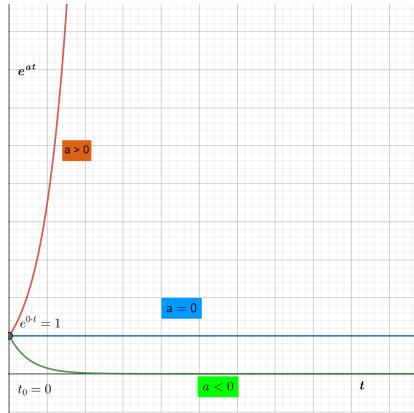
nei due casi li abbiamo presi della stessa lunghezza! Cioè $t-t_0$ è lungo quanto $\bar{t}-t_1 = t-t_0$. Graficamente:

Quindi non importa il tempo iniziale, ciò che conta è la lunghezza dell'intervallo misurato. Poiché non è importante quando inizia il mio esperimento ma l'importante è il tempo trascorso, **non ho nessuna perdita di generalità nel supporre che $t_0 = 0$, quindi possiamo sempre supporre di iniziare al tempo 0 per semplificare.** Se il mio sistema non rispettasse quest'ipotesi non sarebbe stazionario e avrei dei coefficienti che variano nel tempo.

3.3 La risposta in evoluzione libera:

Bene, ora concentriamoci di nuovo sul caso in cui $b = 0$ e $\dot{x} = ax$, con soluzione:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$



Vediamo quindi che al tempo iniziale $t_0 = 0$, abbiamo che la condizione iniziale $x(t_0) = x(0) = e^0 x_0 = x_0$, e se, per fare un esempio, poniamo $x_0 = 1$, il grafico si presenta come sopra: per ognuna delle tre casistiche il grafico parte dal punto iniziale $(0,1)$. Ciò che invece cambia tra i tre casi è il comportamento:

- Se $a > 0$ la funzione diverge, e il grafico si allontana sempre di più dall'origine $x = 0$
- Se $a = 0$ la funzione è costante, e il grafico rimane sempre alla stessa distanza rispetto dall'origine $x = 0$
- Se $a < 0$ la funzione converge a $x = 0$, quindi li grafico si avvicina sempre di più all'origine $x = 0$

⁵nella sua generalizzazione quando gli estremi di integrazione sono dipendenti dalla variabile per cui si deriva

Nel caso scalare quindi è particolarmente facile capire come si comporta il sistema una volta che so qual'è il segno di a . Ad esempio una popolazione di conigli: la popolazione crescerà, allontanandosi sempre di più dalla condizione iniziale, senza mai ritornarci. Quindi in questo caso mi serve un modello con a maggiore di 0. Possiamo inoltre introdurre la costante di tempo⁶ $\tau = -\frac{1}{a}$, cosicché la soluzione si scriva come:

$$x(t) = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} x_0$$

Se, per ipotesi di stazionarietà, poniamo WLOG $t_0 = 0$, abbiamo:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} x(0)$$

Se $\tau = t$:

$$x(\tau) = \frac{1}{e} x(0)$$

Che ci risulta più comodo. La costante di tempo evidenza come la costante a ci permetta di sapere, oltre a se il sistema converge, diverge o resta nel punto iniziale, quanto velocemente si allontana dal punto iniziale x_0 . Facciamo un esempio, poniamo $a < 0$, quindi sappiamo che il sistema converge. τ , attraverso a , ci dice il tempo necessario affinché $x(t)$ si riduca di $\frac{1}{e}$ rispetto a x_0 . Vediamolo con due esempi:

- Se $a = -1$ allora $\tau = 1$, perciò:

$$x(t) = e^{-t} x_0 = \left(\frac{1}{e}\right)^t x_0$$

E cioè, per far allontanare $x(t)$ da x_0 di una quantità pari a $\frac{1}{e}$, devo aspettare $t = 1$ secondo.

- Se $a = -100$ allora $\tau = \frac{1}{100}$, perciò:

$$x(t) = e^{-100t} x_0 = \left(\frac{1}{e}\right)^{100t} x_0$$

E cioè, per far allontanare $x(t)$ da x_0 di una quantità pari a $\frac{1}{e}$, devo aspettare $t = \frac{1}{100}$ di secondo.

Se andassimo a tracciare i grafici di questi due esponenziali, vedremmo che il secondo si appiattisce su 0 molto più velocemente del primo, proprio perché ci vuole meno tempo perché si allontani da x_0 di $\frac{1}{e}$, rispetto invece al primo che ci mette più tempo ad allontanarsi della stessa quantità.

4 Il caso Generale:

Adesso a , b , c e d non sono più costanti ma matrici, comunque matrici a coefficienti costanti però eh. Abbiamo come modello implicito (v. sotto):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

E come modello esplicito (v. sotto):

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Chiamiamo quest'ultimo modello esplicito poiché una volta fissati t_0 , x_0 e u sappiamo tutto sul sistema, anche l'uscita. Al contrario il modello隐式的 non ha questa proprietà. Bene, ora analizziamo i nuovi oggetti del modello esplicito:

- Al posto di a e b ora ci vanno A e B , quindi da $e^{a(t-t_0)}$ abbiamo:

$$\Phi(t) = e^{At} = Id + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_0^{\inf} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Avendo sviluppato in serie di Taylor. Questa è chiamata *Matrice di transizione nello stato*.

⁶Nota che non c'entra nulla con la variabile di integrazione τ usata prima.

- Al posto di a e b ora ci vanno A e B, da $e^{a(t-\tau)}b$ mettiamo:

$$H(t) = \Phi(t)B = e^{At}B$$

Questa è chiamata *Matrice delle risposte impulsive dello stato*.

- Analogamente a sopra, da $ce^{a(t-t_0)}$ mettiamo:

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = Ce^{At}$$

Questa è chiamata *Matrici di trasformazione in uscita*.

- Al posto di d adesso ci va D, quindi da $c \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$, mettiamo:

$$W(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Questa è chiamata *Matrice delle risposte impulsive in uscita*⁷. Ma aspetta, per le altre abbiamo semplicemente sostituito allo scalare la matrice, qua che abbiamo combinato? Abbiamo utilizzato la seguente **proprietà dell'impulso unitario δ** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$$

Cioè l'integrale di una funzione moltiplicata per l'impulso matematico δ è pari alla funzione nel punto in cui è centrato l'impulso. Ovviamente funziona anche il viceversa, quindi

$$u(t) = \int_{t_0}^t \delta(\tau - t)u(\tau)d\tau$$

Quindi $c \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$ diventa:

$$\int_{t_0}^t ce^{a(t-\tau)}bu(\tau) + \delta(\tau - t)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Ora, sapendo quanto valgono le matrici, possiamo andare a verificare che queste due equazioni siano effettivamente soluzioni rispettivamente per $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$, andando a derivare:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(\Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \right)$$

Per il primo termine:

$$\begin{aligned} x(t_0) \frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)} &= x(t_0) \frac{d}{dt} (Id + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots) = \\ x(t_0)(0 + A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2} + \dots) &= x(t_0)A(Id + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots) = x(t_0)Ae^{A(t-t_0)} \end{aligned}$$

Per il secondo termine:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Utilizzo anche qui il Teorema di derivazione Sotto il Segno di Integrale: $\frac{d}{dt} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, \tau)d\tau \right) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{d}{dt} f(t, \tau)d\tau + f(t, \beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt} - f(t, \alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt}$. Che nel nostro caso fa:

$$\int_{t_0}^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t)$$

Quindi la derivata completa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = x(t_0)Ae^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Bu(t) = A \left(x(t_0)e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + Bu(t)$$

Ma quello tra parentesi è proprio uguale a $x(t)$, quindi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Come volevasi dimostrare. Analogamente si può fare per la y .

⁷ $\delta(t)$ è la funzione *delta di Dirac*, che vale 1 in t e 0 altrove.

5 Alcuni Esempi:

1. Matrice Diagonale con blocchi di dimensione 1: abbiamo i seguenti dati

$$\dot{x}_1 = -2x_1 \quad \dot{x}_2 = 3x_2$$

Quindi qui abbiamo solo sull'evoluzione libera. Scriviamolo in forma matriciale:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x$$

Quindi A è diagonale. Se A è diagonale scrivere l'esponenziale della matrice è molto semplice:

$$e^{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t} = Id + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Facendo i prodotti di ogni matrice per la corrispondente variabile t, e poi sommando tra loro le matrici otteniamo il mega matricione anch'esso diagonale (per il fatto che potenza di matrice diagonale dà una matrice diagonale):

$$\begin{pmatrix} 1 - 2t + \frac{(-2)^2 t^2}{2!} + \frac{(-2)^3 t^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + 3t + \frac{(3)^2 t^2}{2!} + \frac{(3)^3 t^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Avendo notato che i due termini non nulli sono gli sviluppi in serie di quei due esponenziali. Quindi abbiamo trovato che:

$$e^{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

E questo vale in generale per matrici a blocchi di dimensione n, non solo con matrici diagonali con blocchi di dimensione 1. Quindi abbiamo che:

$$x_\ell(t) = \begin{pmatrix} x_{\ell,1}(t) \\ x_{\ell,2}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t - t_0)x(t_0) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$$

O, in altri termini:

$$x_{\ell,1}(t) = e^{-2t}x_1(t_0)$$

E:

$$x_{\ell,2}(t) = e^{3t}x_2(t_0)$$

Facciamo un grafico qualitativo, ponendo completamente a caso $x(t_0)$:

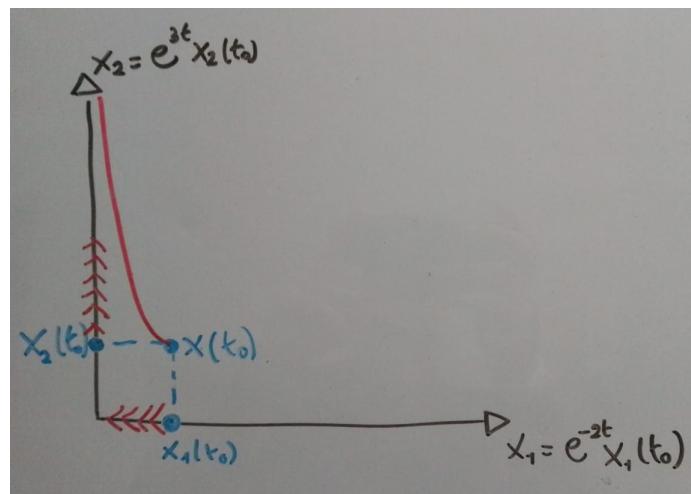


Figure 2: vediamo che x_1 converge a 0, mentre x_2 diverge. Per composizione quindi, la nostra funzione totale si appiattirà sull'asse y mentre divergerà verso l'alto.

1. Caso generale (matrice non diagonale) Nel caso generale invece? Ci ricordiamo che a un processo possiamo associare diverse rappresentazioni, grazie a un cambio di coordinate. Nelle nuove coordinate, se riesco a diagonalizzare posso ricadere nel facile caso sopra descritto. Quand'è che posso diagonalizzare una matrice? Una matrice è diagonalizzabile quando è quadrata e simile a una matrice diagonale. Cioè se D è una matrice diagonale, A è diagonalizzabile se:

$$\exists P \text{ t.c. } PD = AP \text{ o equivalentemente } D = P^{-1}AP$$

Sono cambiate le coordinate ma gli autovalori sono gli stessi. Bene, quindi, poiché sappiamo che esistono più rappresentazioni equivalenti dello stesso sistema, se abbiamo una rappresentazione in variabile x possiamo scriverne una in variabile z :

$$z = Tx$$

Con T matrice invertibile (quindi determinante diverso da 0). Perciò i due modelli impliciti sono:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{y} = Cx + Du$$

Per la rappresentazione in variabile x , mentre per quella in variabile z :

$$\dot{z} = T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}z + TBu$$

$$y = Cx + Du = CT^{-1}z + Du$$

Con le seguenti relazioni tra le matrici in x e in z :

- $A \rightarrow TAT^{-1} = \tilde{A}$
- $B \rightarrow TB = \tilde{B}$
- $C \rightarrow CT^{-1} = \tilde{C}$
- $D \rightarrow D = \tilde{D}$

Se io trovo una T t.c. \tilde{A} è diagonale, allora lo studio del comportamento del sistema ricade nello studio eseguito nel caso precedente. Quali sono i casi che mi permettono di diagonalizzare?

Nel caso di autovalori reali e distinti: se gli autovalori sono tutti reali e distinti allora la matrice è diagonalizzabile. Facciamo quest'esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice triangolare quindi gli autovalori sono quelli sulla diagonale. C'è un cambiamento di coordinate molto utile che mi permette di diagonalizzare la matrice: quello con gli autovalori e gli autovettori. Torniamo al nostro esempio: la matrice è triangolare quindi ha autovalori sulla diagonale: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Quindi da definizione appena data:

- Per $\lambda_1 = -2$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$. Avendo chiamato a e b le due componenti di u , da qui le due equazioni:

$$b = 0 \quad 5b = 0$$

Che implicano $b = 0$ e a variabile in tutto lo spazio. Quindi i vettori che vanno bene per u sono tutti quelli paralleli a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ad esempio. Prendiamo per il nostro esempio proprio il vettore $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Per $\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u = 0 \iff \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$. Da cui:

$$-5a + b = 0 \quad b = 0$$

Cioè $b = 5a$. Perciò vanno bene tutti i vettori $u = \begin{pmatrix} a \\ 5a \end{pmatrix}$. Prendiamo per il nostro esempio il vettore $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bene, ora andiamo a fare questo atteso cambio di coordinate, prendiamo T^{-1} composta da questi autovettori, perciò, pre-moltiplicando entrambi i membri della relazione tra \tilde{A} e A per T^{-1} :

$$T^{-1}\tilde{A} = AT^{-1} \rightarrow (u_1, u_2)\tilde{A} = A(u_1, u_2) = [Au_1, Au_2] = [\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2]$$

Dove l'ultima uguaglianza discende dalla definizione di autovettore. Ora:

$$T^{-1}\tilde{A} = [\lambda_1 u_2, \lambda_2 u_2] = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Quindi, poiché $T^{-1} = (u_1, u_2)$, semplificando:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Cioè abbiamo diagonalizzato con gli autovalori, nel nostro esempio quindi:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ora sappiamo calcolare $e^{\tilde{A}t}$, ma noi vogliamo e^{At} : qual è la relazione tra $e^{\tilde{A}t}$ e e^{At} ? Scopriamolo, andiamo a scrivere lo sviluppo in serie di Taylor:

$$e^{\tilde{A}t} = Id + \tilde{A}t + \tilde{A}^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

Poiché $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{A}^2 = TAT^{-1} \times TAT^{-1} = TA^2T^{-1}$, che ovviamente può essere iterato per ottenere la generale $\tilde{A}^k = TA^kT^{-1}$. Perciò possiamo scrivere, scrivendo $Id = TT^{-1}$ e raccogliendo a sinistra T e a destra T^{-1} :

$$e^{\tilde{A}t} = TT^{-1} + TAT^{-1}t + TA^2T^{-1} \frac{t^2}{2} + \dots = Te^{At}T^{-1}$$

Da cui invertendo:

$$e^{At} = T^{-1}e^{\tilde{A}t}T$$

Abbiamo trovato la relazione che lega i due esponenziali. Ora posso facilmente calcolarmi e^{At} , perché so calcolarmi l'altro esponenziale e so come è fatta T , perché l'ho costruita a partire dagli autovalori.

$$e^{At} = (u_1, u_2)e^{\tilde{A}t} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Con v'_1 e v'_2 autovalori sinistri, e sono le righe della matrice, non le colonne come gli u . Faccio i prodotti tra queste tre matrici e ottengo:

$$e^{At} = e^{-2t}u_1v'_1 + e^{3t}u_2v'_2$$

Inseriamo ora i dati dell'esempio, abbiamo

$$T^{-1} = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Quindi:} \quad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Non ci serve nient'altro, posso trovare:

$$e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Vediamo che le matrici hanno rango 1 perché sono la ripetizione di una colonna 2 volte (n volte in generale): semplicemente ogni ripetizione è moltiplicata per uno scalare diverso. Prendiamo come esempio la prima matrice: è ottenuta ripetendo due volte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, semplicemente ognuna di queste due volte si moltiplica per uno scalare diverso (prima 1 e poi $-\frac{1}{5}$). Stesso analogo discorso si potrebbe fare per righe e funzionerebbe lo stesso. Fatto sta comunque che per questo motivo c'è solo una colonna (o una riga) che è indipendente, e quindi il rango è uno.

Bene, quindi abbiamo capito che dalla soluzione particolare della matrice diagonale noi riusciamo a risolvere tutti quei casi in cui gli autovalori sono reali e distinti: ad ogni autovalore possiamo

associare un autovettore destro. Se questo destro viene utilizzato per la matrice inversa, allora si ha che allora si ha che $\tilde{A} = TAT^{-1}$ è una matrice diagonale che ha gli autovalori sulla diagonale. Usando lo sviluppo in serie arrivo al risultato che $e^{At} = e^{-2t}u_1v'_1 + e^{3t}v'_2$. Perciò siamo arrivati alla soluzione che:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i$$

Nel nostro caso, dato che siamo in evoluzione libera:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i x_0$$

Ora, se io decido di scrivere x_0 come combinazione lineare degli autovettori⁸ $x_0 = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$, significa che ho scritto x_0 nelle coordinate c_j della nuova base di autovettori (u_1, \dots, u_j) . Questo ci semplifica l'espressione, vediamo come: nella mia espressione, io mi ritrovo che x_0 è premoltiplicato per v'_i ; ma se ci ricordiamo che:

$$TT^{-1} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} (u_1 \quad u_2) = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi che $v'_i u_i = 1$, mentre $v'_i u_j = 0$ se $i \neq j$, allora il prodotto $v'_i x_0$ diventa:

$$v'_i x_0 = v'_i (c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) = c_i$$

Valido per ogni i nella somma⁹. Quindi posso scrivere l'evoluzione libera così:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i c_i$$

Qual è il vantaggio di scrivere la nostra equazione con c_i ? Che ora abbiamo scritto l'evoluzione libera scomponendola in n contributi $e^{\lambda_i t} u_i c_i$, chiamati *modi*, lungo n direzioni diverse definite ognuna da un autovettore u_i . Su ognuno di questi modi, la traiettoria evolve secondo la legge temporale definita dall'autovalore λ_i . La traiettoria complessiva è la somma dei modi quindi la composizione di queste n componenti. Vediamolo con il nostro esempio, che ha solo due modi:

$$\lambda_1 = -2 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 3 \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Perciò abbiamo:

$$\Phi(t) = e^{-2t}u_1v'_1 + e^{3t}u_2v'_2$$

E quindi l'evoluzione libera è:

$$x(t) = e^{-2t}u_1c_1 + e^{3t}u_2c_2$$

Avendo moltiplicato entrambi gli autovalori sinistri per x_0 . Perciò, graficamente: Ricordando che la condizione iniziale x_0 è stata messa a caso in quel punto del piano. Infatti, nel caso in cui io avessi preso x_0 a contatto con u_1 , avrei avuto quindi $c_2 = 0$, e quindi la traiettoria avverrà soltanto lungo la direzione dettata da u_2 , idem per x_0 che giace su u_2 . Cioè *posso scegliere le condizioni iniziali in modo da sollecitare solo alcuni modi che voglio*. Questo non sarà sempre vero fuori dal caso di evoluzione libera.

5.1 Schema di Simulazione:

Il nostro sistema può essere descritto sia col modello implicito che con quello esplicito. Il modello隐式 mi permette di simulare il sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Utilizzando Matlab o Simulink si può costruire uno schema di simulazione che permette, una volta fissata la condizione iniziale x_0 e le matrici A, B, C e D , di calcolare l'uscita y in base all'entrata u . Un SW d'Integrazione simile potrebbe essere rappresentato dal seguente schema:

⁸Questo lo posso fare senza problemi perché gli autovettori formano una base

⁹Ogni v'_i è vettore riga, x_0 è un vettore colonna, il prodotto di un vettore riga e un vettore colonna mi dà un coefficiente

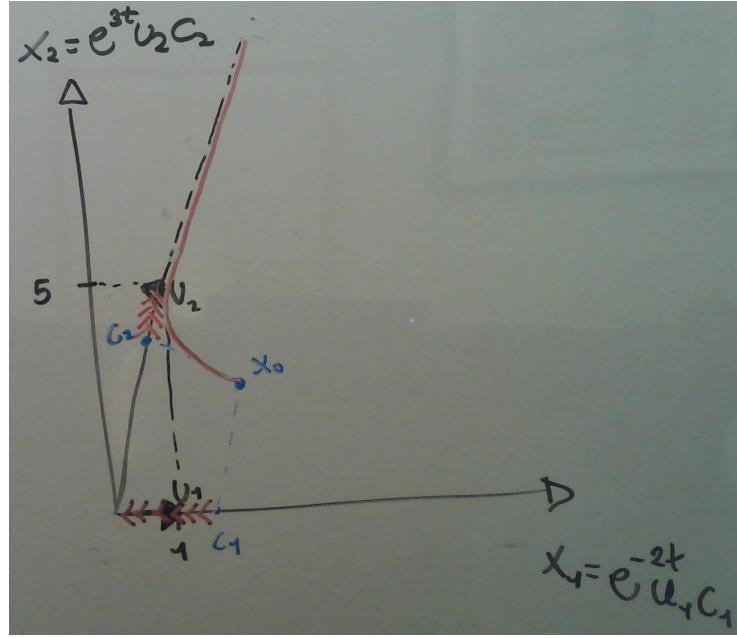
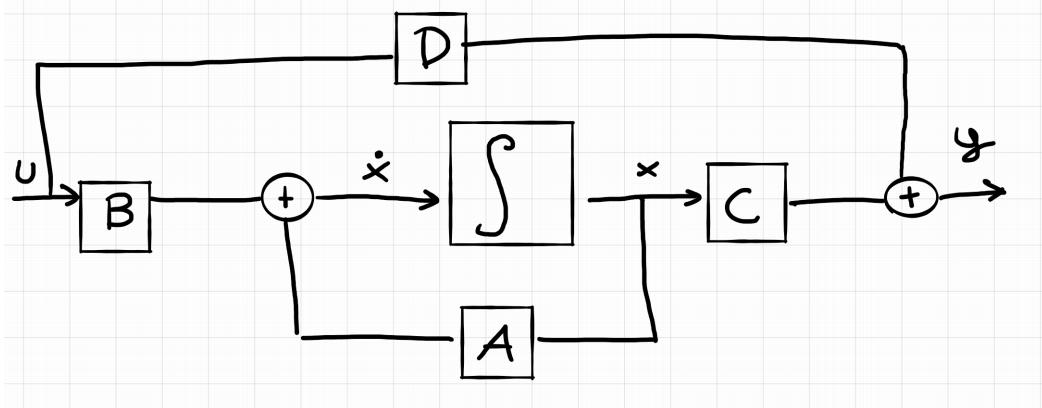


Figure 3: Vediamo che abbiamo scritto le nuove componenti c_1 e c_2 di x_0 proiettate sui nuovi assi u_1 e u_2 , tracciando le parallele a questi ultimi due, le intersezioni tra le parallele e u_1 e u_2 saranno i nostri c_1 e c_2 . Quindi non operiamo più in coordinate cartesiane x_{01} e x_{02} , ma con questi nuovi assi u_1 e u_2 . Poiché su u_1 la funzione converge mentre su u_2 diverge, la traiettoria finale va all'infinito mentre si appiattisce su u_2 .



6 Facciamo un esercizio:

È assegnata la rappresentazione implicita con lo stato di un sistema lineare e stazionario:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\ y(t) &= (1 \ 0 \ 0) x(t)\end{aligned}$$

Non abbiamo ancora visto gli autovalori complessi quindi lo cambiamo un minimo, invece di scrivere alla seconda riga -2 scriviamo +2. Bene, le domande sono:

1. Disegnare lo schema di realizzazione ad essa associato;
2. Calcolare l'evoluzione libera da x_0 generico;
3. Fissare x_0 in modo da sollecitare un solo modo per volta;
4. Studiare l'eccitabilità dei modi naturali rispetto a ciascun ingresso, e l'osservabilità in uscita;
5. Calcolare la risposta impulsiva rispetto all'ingresso $u_1(t)$

Per ora possiamo rispondere alle domande 1,2,3.

Domanda 1: Abbiamo:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0) x(t)$$

Per ognuno di questi canali devo andare a riscrivere l'equazione delle singole variabili. Quindi:

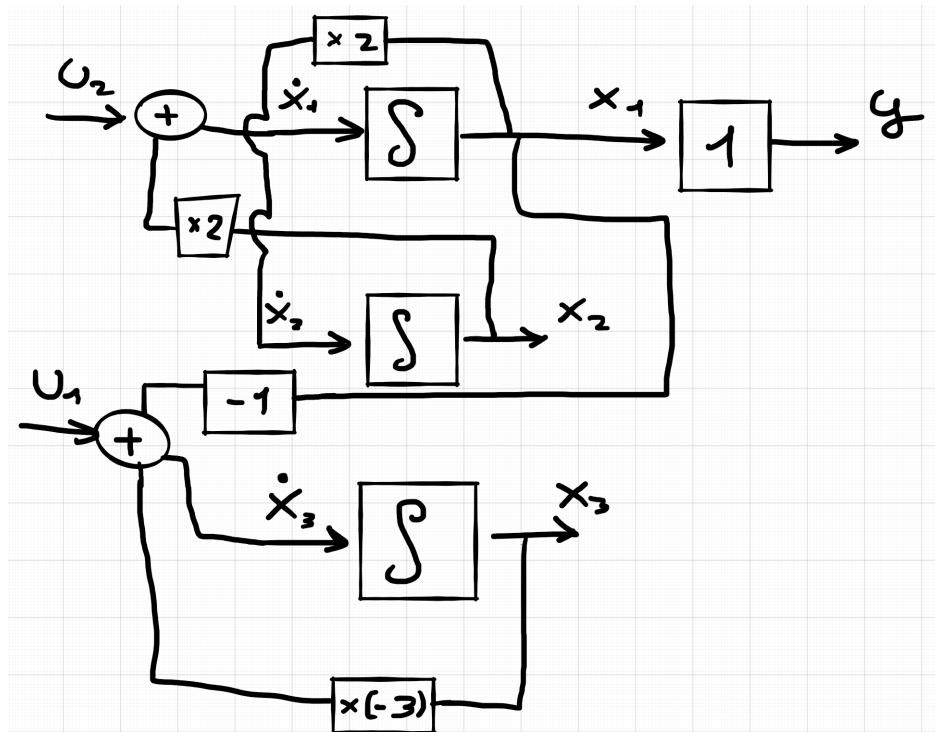
$$\dot{x}_1 = 2x_2 + u_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - 3x_3 + u_1$$

$$y = x_1$$

Bene ora posso tracciare lo schema di simulazione:



Domanda 2: Se sostituiamo 2 a -2 per i motivi sopra specificati, vediamo che:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Il primo passo è calcolare gli autovalori del sistema, cioè trovare le soluzioni di $\det(A - \lambda I) = 0$. Utilizzando sarrus vediamo che gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$

Adesso troviamo gli autovettori per ogni autovalore¹⁰:

$$\text{Per } \lambda_1 = 2 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a = -b \\ c = a \end{cases}$$

¹⁰Chiamiamo a, b e c le componenti di u

Quindi fisso a e trovo b e c, prendiamo, per a = 1: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Per } \lambda_2 = -2 : \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a = b \\ c = \frac{1}{5}a \end{cases}$$

Quindi fisso a e trovo b e c, prendiamo, per a = 5: $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Per } \lambda_3 = -3 : \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2}b \\ b = -\frac{3}{2}a \\ a = 0 \end{cases}$$

Quindi a = b = 0, mentre c = k, $\forall k \in \mathbb{R}$. Prendiamo, per k = 1: $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notare che potevamo,

senza svolgere i calcoli, che la matrice ci avrebbe portato a questa situazione, poiché aveva l'ultima colonna tutta nulla (quindi determinante della matrice nulla e rango non massimo), e quindi c non sarebbe comparso nel sistema di disequazioni, diventando un parametro k. Bene, abbiamo trovato gli autovettori che ci servono.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Moto Naturale Aperiodico: un Modo Naturale associato a un *Autovalore Reale* è chiamato *Aperiodico*. Se l'autovalore è positivo si tratta di un modo naturale aperiodico divergente, perché la parte reale dell'autovalore (cioè tutto l'autovalore se esso è reale) è positiva. Se invece la parte reale è negativa si tratta di un modo naturale aperiodico convergente. Questo perché la parte reale dell'autovalore (cioè tutto l'autovalore se esso è reale) è negativa.

Ok torniamo alla domanda, cosa ci manca da calcolare, abbiamo già autovalori e autovettori destri. Cosa ci manca? La domanda ci chiede di calcolare l'evoluzione libera *generica*, non ho un x_0 dato in determinate coordinate, non ho bisogno di andarmi a calcolare c_i attraverso i v'_i , scrivo genericamente:

$$x(t) = e^{2t}u_1c_1 + e^{-2t}u_2c_2 + e^{-3t}u_3c_3$$

Se adesso, dovessi fissare x_0 per sollecitare un modo alla volta, ricordandoci che:

$$x_0 = u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3$$

Vado a rendere nulli gli c_i appartenenti ai modi che non voglio che compaiano. Ancora, se io volessi una condizione iniziale x_0 in modo che la mia traiettoria sia convergente, allora in questo caso devono esserci solo modi convergenti e $c_1 = 0$. Vediamo comunque che in generale, la traiettoria tende nell'origine sul piano creato da u_2 e u_3 , mentre diverge per u_1 , quindi la traiettoria si schiaccerà sempre di più su u_1 , mentre lo percorre all'infinito.

6.1 Per quanto riguarda invece l'evoluzione forzata:

Sempre per autovalori reali e distinti.

$$x_{forzata}(t) = \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Se pensiamo al caso di un sistema con un ingresso soltanto, B è rappresentata da un'unica colonna, e quindi, in un certo senso, gioca come uno stato iniziale, solo che è uno stato iniziale fisso, quindi sollecita alcuni modi secondo una certa combinazione. Se ho più colonne invece potrò scegliere gli

ingressi in modo da avere eventualmente più gradi di libertà. Quindi ogni singola colonna è come se fosse uno stato iniziale fissato. Bene, poiché:

$$H(t) = e^{At} = \sum e^{\lambda_i t} u_i v'_i B$$

Avendo sfruttato l'espressione che abbiamo già trovato per e^{At} . Vediamo che il modo i-esimo compare nell'espressione di $H(t)$ solo se $v'_i B \neq 0$, che può essere sia scalare sia matrice (scalare comporta che il modo è eccitabile o non eccitabile, matrice comporta che il modo può anche essere eccitabile solo per alcuni canali, per alcuni ingressi, poi vediamo). In quel caso chiameremo il modo *Modo Aperiodico Eccitabile*. Questo è importante perché se un modo è eccitabile posso trovare un ingresso per manipolarlo, così che mi risulti più comodo; se invece un modo non è eccitabile non posso manipolarlo. Se invece il modo è uguale a 0 non c'è alcuna scelta per far comparire quel modo e quindi viene detto Non Eccitabile. Riprendiamo il nostro esempio, abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A differenza di $\Phi(t)$ dove, grazie a c_i , non ero obbligato a calcolarmi gli autovettori sinistri v'_i , nel caso del calcolo di $H(t)$ devo farlo per forza. Sapendo quanto valgono gli u_i costruiamo la matrice T^{-1} , e invertendo troviamo la matrice T , che ha sulle righe gli autovettori v'_i . Svolgendo i calcoli questi ultimi sono:

$$v'_1 = \left(\frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \right) \quad v'_2 = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right) \quad v'_3 = \left(-\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 1 \right)$$

Bene, ora possiamo vedere quali canali sono eccitabili:

$$H(t) = e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Facendo i prodotti tra la seconda e la terza matrice per ogni addendo abbiamo:

$$\text{per } \lambda_1 = 2 : \quad (0 \quad \frac{1}{10}) \neq 0$$

Quindi il modo è eccitabile. Precisamente è eccitabile solo per il secondo ingresso u_2 , poiché la prima colonna è nulla.

$$\text{per } \lambda_2 = -2 : \quad (0 \quad \frac{1}{2}) \neq 0$$

Quindi il modo è eccitabile. Precisamente è eccitabile solo per il secondo ingresso u_2 , poiché la prima colonna è nulla.

$$\text{per } \lambda_3 = -3 : \quad (1 \quad -\frac{3}{5}) \neq 0$$

Quindi il modo è eccitabile. Precisamente è eccitabile per tutti e due gli ingressi. Quindi tutti e tre i modi compaiono nella somma di $H(t)$ finale. Andiamo a svolgere l'ultimo prodotto matriciale:

$$H(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Vediamo, come nel caso precedente, che queste matrici hanno tutte e 3 rango uno, poiché sono formate dalla stessa riga (o stessa colonna) ripetuta 3 volte, ma ogni volta questa riga (o questa colonna) può essere moltiplicata per uno scalare diverso. Questo però significa che c'è una sola riga (o colonna) linearmente indipendente, e quindi il rango è 1.

6.2 Andiamo ora a vedere $\Psi(t)$:

L'evoluzione libera in uscita è caratterizzata da questa matrice. Devo ragionare esattamente nello stesso modo in cui ho ragionato con $H(t)$:

$$\Psi(t) = Ce^{At} = C \sum e^{\lambda_i t} u_i v'_i$$

Se per qualche ragione $e^{\lambda_i t}$ non compare, non ci sarà nessun x_0 che permetterà che l'evoluzione libera sia influenzata dall'i-esimo modo. E quali sono le condizioni per cui un certo modo non

compare? Questo: diremo che il modo aperiodico è *osservabile*, cioè io lo riesco a *vedere in uscita*, se $Cu_i \neq 0$, se invece è uguale a 0 l'uscita non sarà caratterizzata da quel modo, che sarà non osservabile. Quindi, riprendendo il nostro esempio:

$$Cu_1 = 1 \neq 0 \quad Cu_2 = 5 \neq 0 \quad Cu_3 = 0$$

Quindi il terzo modo non è osservabile in uscita. Posso poi però scegliere x_0 t.c. sollecito entrambi o solo uno dei due restanti modi.

6.3 Bene, ora occupiamoci di $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = C \sum e^{\lambda_i t} u_i v'_i B + D\delta(t)$$

Quindi *il modo compare in uscita se è simultaneamente eccitabile e osservabile*. Perché simultaneamente devono valere $Cu_i \neq 0$ e $v'_i B \neq 0$. Nel nostro esempio:

$$W(t) = 5e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Poiché il terzo non era osservabile, *non compare nella risposta in uscita*. Quindi alla fine abbiamo risposto anche alla domanda 3 (già prima mi sa, era tipo eccitabilità e osservabilità). Ok ora facciamo la 5: $W(t)$ è la risposta impulsiva complessiva, allora devo prendere solo le prime componenti, che sono entrambe 0. Quindi la risposta in uscita per l'ingresso u_1 è 0.

6.4 Quiz:

Per un sistema lineare stazionario con un solo ingresso e una sola uscita:

- **L'uscita è sempre proporzionale all'ingresso?** Spieghiamolo con un esempio: prendiamo un circuito elettrico con una resistenza e un condensatore. Se prendo come uscita la tensione della resistenza, in questo caso, per la legge di Ohm è legame istantaneo (statico, senza memoria) allora si è proporzionale. Se invece prendo come uscita la tensione del condensatore c'è un legame differenziale (derivata della tensione ai capi del condensatore), e quindi no, l'uscita non è proporzionale all'ingresso (poiché non abbiamo $y = ku$ ma $\dot{y} = ku$ in questo caso, in generale qualsiasi altra relazione differenziale)
- **L'evoluzione in uscita è la somma dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata.** Sì! Abbiamo il termine relativo all'evoluzione libera, con la matrice $\Psi(t)$, e il termine relativo all'evoluzione forzata, con la matrice $W(t)$.
- **La stazionarietà si riflette nell'indipendenza dal tempo delle matrici A, B e C.** Esatto. Noi quando andiamo a scrivere la soluzione possiamo scrivere $e^{A(t-t_0)}$, non potremmo scrivere questa cosa se A fosse dipendente dal tempo.
- **L'evoluzione libera in uscita, associata ad una combinazione lineare di stati, è pari alla stessa combinazione lineare di evoluzioni libere.** Sì, ma per l'evoluzione totale (non solo libera) dovremmo considerare la combinazione degli stati iniziali e degli ingressi secondo gli stessi coefficienti. **NON HO PROPRIO CAPITO STA DOMANDA E STA FRASE, QUINDI SE $x(t) = x_1c_1 + x_2c_2$ allora $y(t) = y_1c_1 + y_2c_2$??**
- **Un sistema stazionario è un sistema che non si muove:** no si muovono, fino ad ora abbiamo visto tutti sistemi stazionari e si muovevano. Un sistema stazionario è un sistema nel quale quello che conta è l'intervallo e non il singolo istante (ipotesi di stazionarietà).
- **L'evoluzione in uscita associata ad una combinazione lineare di ingressi è pari alla stessa combinazione lineare delle uscite.** Proviamo a fare il calcolo: supponiamo di partire da x_0 e applicare ingresso u_1 , poi ne facciamo un'altra in cui partiamo sempre da x_0 ma applichiamo ingresso u_1 . Infine partiamo sempre da x_0 ma applichiamo combinazione lineare degli ingressi $c_1u_1 + c_2u_2$. Ora ci chiediamo, l'evoluzione in uscita associata alla combinazione lineare degli ingressi (cioè l'ultimo caso) è pari alla combinazione lineare delle uscite del primo e del secondo caso? No, possiamo vederlo, ponendo $t_0 = 0$:

$$y_1 = \Psi x_0 + \int H u_1$$

$$y_2 = \Psi x_0 + \int H u_2$$

Per i primi due casi, mentre per il terzo:

$$y = \Psi x_0 + c_1 \int H u_1 + c_2 \int H u_2$$

Ma questo non è uguale a $y_1 c_1 + y_2 c_2$, perché lo sia dovrebbe essere $c_1 = c_2 = x_0$ NON MI SEMBRA CHE SIA COSÌ:

$$y = \Psi x_0 + x_0 \int H u_1 + x_0 \int H u_2 = x_0 (\Psi + \int H u_1 + \int H u_2)$$

Questo è dovuto al fatto che la condizione iniziale (x_0) non è combinazione lineare di x_0 e x_0 , cioè delle condizioni iniziali nei primi due casi, quindi non c'è linearità.

- **La risposta impulsiva è sempre un modello completo del sistema.** No, solo con $H(t)$ e $W(t)$ non ho tutte le informazioni, mi servono le altre matrici.
- **Un modello matematico può descrivere più fenomeni fisici.** Abbiamo visto che stesso modello può essere massa molla smorzatore ma anche circuito elettrico.
- **Un sistema dinamico ammette uno e un solo modello matematico.** Falso, ad esempio abbiamo visto il circuito elettrico, a seconda delle coordinate che utilizzavo, aveva un diverso modello matematico.
- **Un sistema lineare evolve su una linea.** No, perché l'evoluzione su una linea è un sistema scalare, un sistema lineare evolve nello spazio in generale.

6.5 Due Esercizi con sistema a Tempo Discreto:

fino ad ora abbiamo parlato solo di sistemi a tempo continuo. In quelli a tempo discreto invece il tempo non evolve a tempo continuo ma a istanti di tempo discreti. Es. misuro qualcosa all'inizio di ogni anno, quindi istanti discreti. Le equazioni nel caso di sistema a tempo discreto sono:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Esprime il comportamento attraverso un'equazione ricorsiva (la prima). Per esempio se penso ad una popolazione studentesca: Ebbene, in questo caso abbiamo per gli studenti del primo anno:

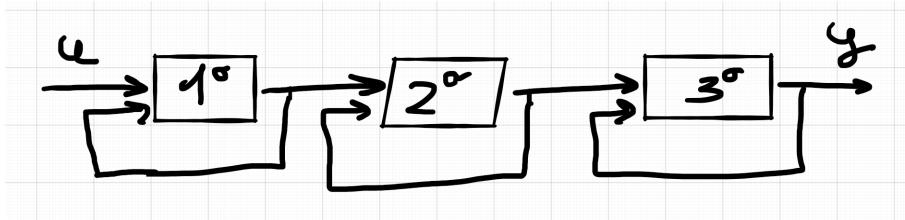


Figure 4: Uno studente che entra al 1° anno può andare avanti al 2° o "tornare indietro" cioè ripetere l'anno. Per semplicità, non consideriamo studenti che entrano da altre facoltà o che abbandonano gli studi.

$$x_1(t+1) = u + \beta_1 x_1(t)$$

Con β coefficiente e x_1 studenti che non sono passati al secondo anno, perché devono ripetere il primo. Per quelli del secondo anno:

$$x_2(t+1) = (1 - \beta_1)x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$$

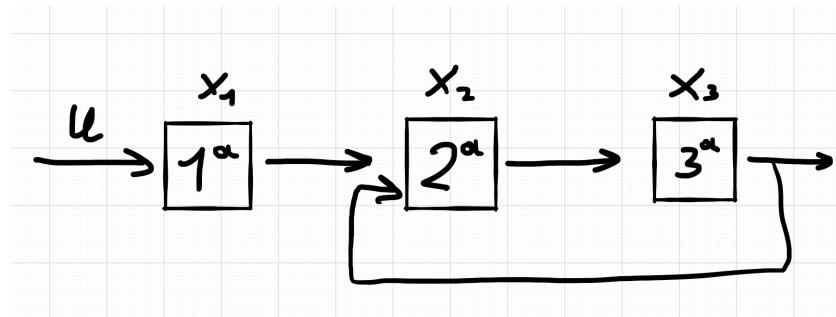
Con $(1 - \beta_1)x_1$ studenti che sono passati al secondo anno (**complementare di chi non è passato al secondo anno, visto nella formula prima**) più quelli che non sono passati al terzo anno $\beta_2 x_2$. Per quelli del terzo anno:

$$x_3(t+1) = (1 - \beta_2)x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

Quindi i laureati sono:

$$y = (1 - \beta_3)x_3(t)$$

Secondo Esercizio: Un processo di lavorazione è costituito da 3 operazioni elementari della stessa durata, eseguite in successione su un pezzo inizialmente grezzo. All'uscita del terzo stadio viene effettuato un controllo di qualità: il 10% dei pezzi prodotti viene scartato ed il 15% viene reimpresso al secondo stadio ed i restanti pezzi rappresentano il prodotto finito. Determinare il modello matematico del processo. Abbiamo:



- 10% x_3 scartato
- 15% x_3 rimandato in 2
- 75% prodotto finito

Quindi:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= u(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + 15\%x_3(t) \\ x_3(t+1) &= x_2(t) \end{aligned}$$

7 Richiami di Algebra Lineare e Geometria:

7.1 Indipendenza Lineare:

I vettori v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendente se presa la combinazione lineare $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0$ questa ha solo soluzione banale (tutti i coefficienti $a_i = 0$)

7.2 Generatori:

Un insieme di vettori di uno spazio vettoriale V si dice generatore di V se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di almeno uno di questi vettori.

7.3 Base:

Una base di uno spazio vettoriale V è un insieme di generatori indipendenti tra loro di V

7.4 Coordinate:

Fissata una base $B = (v_1, \dots, v_n)$ di V , e preso un vettore $\omega \in V$, si ha che ω si può scrivere in un solo modo come combinazione lineare dei vettori di B : $\omega = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. I coefficienti c_1, \dots, c_n sono detti coordinate del vettore ω rispetto alla base B .

7.5 Matrice inversa:

A è invertibile se $|A| \neq 0$. L'inversa è:

$$A^{-1} = \left(\frac{A^{ij}}{\det A} \right)^T$$

Dove A^{ij} è la matrice dei complementi algebrici (o cofattori) degli elementi a_{ij} , che ricordiamo essere, per ogni elemento a_{ij} della matrice:

$$\text{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} C_{ij}$$

Dove C_{ij} è il minore complementare relativo a a_{ij} , cioè il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la riga i e la colonna j alle quali appartiene a_{ij} . Per verificare se il calcolo dell'inversa è giusta puoi moltiplicare l'inversa per l'originaria: se esce la matrice identità allora il calcolo è giusto.

7.6 Rango:

Il rango di una matrice A è il suo massimo numero di righe (o colonne) indipendenti. Per calcolarlo si calcola l'ordine massimo dei minori non nulli di A. Cioè calcolo i determinanti delle sottomatrici quadrate di A, quella più grande che ha determinante non nullo ha ordine pari al rango della matrice.

7.7 Autovalore:

Un autovettore di T è una soluzione λ dell'equazione:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

7.8 Molteplicità Algebrica:

Sia A una matrice quadrata di ordine m e sia λ_0 un suo autovalore. Si dice molteplicità algebrica dell'autovalore λ_0 il numero che esprime quante volte l'autovalore λ_0 è radice del polinomio caratteristico ($\det(A - \lambda I)$).

7.9 Autovettore:

Quel vettore u t.c.:

$$[A - \lambda I]u = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad Au = \lambda u$$

In particolare questo è l'autovettore destro.

8 Prodotto vettore riga per vettore colonna e viceversa:

Vettore riga per vettore colonna: il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna dà uno scalare

Vettore colonna per vettore riga: il prodotto di un vettore colonna per un vettore riga dà una matrice. Puoi fare velocemente il calcolo pensando che si tratti di una matrice che ha come colonne il vettore colonna ripetuto n volte, dove n è la lunghezza del vettore riga, ogni volta oltiplicato per uno scalare diverso. In effetti quando fai questo prodotto stai moltiplicando il vettore colonna per ogni componente del vettore riga.

8.1 Nel caso di autovalori complessi coniugati:

Richiamo sui numeri complessi: Un numero complesso è un numero della forma $x+iy$, x e y numeri reali e i unità immaginaria definita come soluzione dell'equazione $x^2 = -1$, cioè $i^2 = -1$. Grazie ai complessi si possono risolvere tutte le equazioni di secondo grado, anche quelle con discriminante negativo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Quel \pm nella formula indica che se un numero complesso è soluzione di un'equazione a coefficienti reali, allora anche il suo complesso coniugato è soluzione della stessa equazione. Poiché il Teorema Fondamentale dell'Algebra stabilisce che un qualsiasi polinomio di grado n ammette ha precisamente n soluzioni nel campo complesso, nel caso di un'equazione di grado dispari, poiché le soluzioni complesse devono per forza essere in coppia (per quanto detto sopra), tra le soluzioni ci sarà sempre almeno un numero reale.

Bene, fatto il richiamo, torniamo a noi e facciamo un caso semplice: una matrice 2x2. Nel caso di autovalori complessi e coniugati quindi, poiché $n = 2$ avremo solo due soluzioni, in particolare vediamo che succede:

$$\det(A - \lambda I) = [\lambda - (\alpha + j\omega)][\lambda - (\alpha - j\omega)] = 0$$

Quindi le soluzioni sono due autovalori complessi e coniugati, con j unità immaginaria:

$$\lambda_1 = \alpha + j\omega$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = \alpha - j\omega$$

Questa coppia coniugata di autovalori forma un moto detto pseudo-periodico (quindi due autovalori un moto non due moti!). Di conseguenza, calcolando gli autovettori, vediamo che ad autovalori complessi corrispondono autovettori complessi, con una parte reale e una parte immaginaria:

$$u_1 = u = u_a + ju_b$$

$$u_2 = u^* = u_a - ju_b$$

Usando u e u^* come vettori di T^{-1} , avremmo come matrice:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

Da cui troviamo che:

$$e^{\hat{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^* t} \end{pmatrix}$$

Ma essendo gli autovalori complessi questo non è comodo. Allora proviamo a usare u_a e u_b , che sono reali, come basi di T^{-1} . Quindi torniamo indietro al calcolo degli autovettori:

$$[A - \lambda I]u = 0$$

Nel caso di autovalori complessi:

$$[A - (\alpha + j\omega)I][u_a + ju_b] = 0$$

E stavolta però separiamo parte reale e parte complessa:

$$[(A - \alpha I) - (j\omega I)][u_a + ju_b] = 0$$

Adesso svolgendo tutti i prodotti, ricordando che $Iu_a = u_a$ e idem per u_b , e che $j^2 = -1$, troviamo:

$$Au_a - \alpha u_a - j\omega u_a + jAu_b - j\alpha u_b + \omega u_b = 0$$

Sappiamo che un'equazione composta da parte reale e immaginaria è uguale a 0 se sia la parte reale che quella immaginaria fanno 0, quindi abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} Au_a = \alpha u_a - \omega u_b \\ Au_b = \alpha u_b + \omega u_a \end{cases}$$

Avendo diviso la seconda equazione per j . Compattando in una matrice:

$$A(u_a, u_b) = (u_a, u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Da questa equazione possiamo calcolare gli autovettori di un autovalore¹¹. Bene, ora se ci ricordiamo la relazione per passare dalla matrice A a una qualsiasi matrice \tilde{A} , grazie a un cambio di coordinate:

$$AT^{-1} = T^{-1}\tilde{A}$$

¹¹Il modo di farlo è il seguente: prendiamo il primo prodotto a sinistra e tiriamoci fuori n espressioni, idem a destra. Ora le equazioni di destra vengono egualate alle corrispettive equazioni di sinistra (quelle che sono nella stessa posizione di riga e colonna). Notiamo che di n equazioni (con n dimensione di A), solo $2n-2$ saranno indipendenti, le altre 2 potranno essere tralasciate. Questo perché quando facciamo i prodotti matriciali stiamo ripetendo, ad esempio a sinistra, A due volte, semplicemente una volta moltiplicata per u_a e una volta per u_b , idem a destra. Vedremo più avanti un esempio di calcolo di questo sistema di n equazioni.

e prendiamo T^{-1} composta dagli autovettori u_a e u_b , quest'ultima relazione e quella sopra coincidono, cioè significa che:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Notare che $\det(\tilde{A} - \lambda I) = 0$ ritornerebbe i due autovalori $\lambda = \alpha \pm j\omega$. Ciò significa che ogni volta, IN QUALSIASI SITUAZIONE, troviamo una matrice della forma $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$, sappiamo subito che i suoi autovalori sono $\lambda = \alpha \pm j\omega$. Torniamo a noi, la domanda ora è: quanto vale $e^{\tilde{A}t}$? Ci ricordiamo Formula di Eulero:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Nel nostro caso:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Da cui si può dimostrare:

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Dimostrazione: Torniamo nella base (u, u^*) . Riprendiamo e riscriviamo:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{(\alpha+j\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-j\omega)t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{pmatrix}$$

Adesso Formula di Eulero:

$$e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t + j \sin \omega t & 0 \\ 0 & \cos \omega t - j \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Ora dobbiamo cercare quel cambiamento di coordinate che ci permette di passare da \tilde{A} a \hat{A} . Notiamo che la base:

$$(u, u^*) = (u_a + ju_b, u_a - ju_b) = (u_a, u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

Poiché il determinante è non nullo si può invertire la matrice, quindi esiste un cambiamento di coordinate che mi permette di passare da \hat{A} a \tilde{A} . Bene, troviamo il cambio di coordinate. Iniziamo ponendo:

$$T^{-1} = (u, u^*) \quad \bar{T}^{-1} = (u_a, u_b)$$

Da cui, prestando attenzione a pre-moltiplicare e post-moltiplicare nella giusta maniera, si ottiene:

$$T^{-1} = (u_a, u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \implies T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} (u_a, u_b)^{-1} = -\frac{1}{2j} \begin{pmatrix} -j & -1 \\ -j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \end{pmatrix}$$

Ora, per come abbiamo definito T , il cambio di coordinate dalla matrice A originaria alla matrice \hat{A} è:

$$\hat{A} = T A T^{-1} = -\frac{1}{2j} \begin{pmatrix} -j & -1 \\ -j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \end{pmatrix} A(u_a, u_b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

Ma notiamo in mezzo che:

$$\begin{pmatrix} v'_a \\ v'_b \end{pmatrix} A(u_a, u_b) = \bar{T} A \bar{T}^{-1} = \tilde{A}$$

Perché abbiamo definito la nostra \tilde{A} come quella matrice ottenuta col cambio di coordinate relativo agli autovettori reali (u_a, u_b) . Quindi ora abbiamo:

$$\hat{A} = -\frac{1}{2j} \begin{pmatrix} -j & -1 \\ -j & 1 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

Ma abbiamo calcolato prima che l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$ è proprio $-\frac{1}{2j} \begin{pmatrix} -j & -1 \\ -j & 1 \end{pmatrix}$, ciò significa che questo è il cambio di coordinate che lega \hat{A} e \tilde{A} , con matrice del cambio di coordinate pari a

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$. Adesso che so il passaggio di coordinate da \hat{A} a \tilde{A} passiamo agli esponenziali, pre- e post-moltiplichiamo nella giusta maniera:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} e^{\hat{A}t} \begin{pmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2j}$$

Adesso ci ricordiamo che:

$$e^{\hat{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t + j \sin \omega t & 0 \\ 0 & \cos \omega t - j \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Ciò significa che:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t + j \sin \omega t & 0 \\ 0 & \cos \omega t - j \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2j}$$

Da cui, svolgendo i calcoli:

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

□

Fatta la dimostrazione, ora sappiamo calcolare:

$$e^{At} = T^{-1} e^{\tilde{A}t} T$$

Svolgendo tutti i prodotti troviamo:

$$e^{At} = e^{\alpha t} [\cos \omega t [u_a v'_a + u_b v'_b] + \sin \omega t [u_a v'_b - u_b v'_a]]$$

Questa è l'espressione della nostra $\Phi(t)$. Quindi per ottenere l'espansione libera mi basta moltiplicare per x_0 , e ottenere le coordinate c_i :

$$x_{libera}(t) = e^{\alpha t} [\cos \omega t [u_a c_a + u_b c_b] + \sin \omega t [u_a c_b - u_b c_a]]$$

Esprimendo tutto rispetto ai due autovettori otteniamo:

$$x_{libera}(t) = e^{\alpha t} [(\cos \omega t c_a + \sin \omega t c_b) u_a + (\cos \omega t c_b - \sin \omega t c_a) u_b]$$

Bene, ora se ci ricordiamo la rappresentazione polare (per la prima uguaglianza) e la Formula di Eulero (per la seconda uguaglianza) abbiamo la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi, ricordandoci che $\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$:

$$z = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

Con ρ **modulo** e θ **fase**¹² del numero complesso z. Se noi prendiamo il nostro numero complesso $z = c_b + j c_a$, allora:

$$c_b + j c_a = m(\cos \theta - j \sin \theta) = m e^{j\theta}$$

Adesso dividiamo e moltiplichiamo la nostra evoluzione libera per m:

$$x_{libera}(t) = m e^{\alpha t} [(\cos \omega t \sin \theta + \sin \omega t \cos \theta) u_a + (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) u_b]$$

Poiché, utilizzando le formule goniometriche del triangolo rettangolo (fai il disegno del piano in \mathbb{R}^2 se non ci credi):

- $\frac{c_a}{m} = \sin \theta$

- $\frac{c_b}{m} = \cos \theta$

¹²Ricordiamo che la fase di un numero complesso si trova facendo $\arctg(\frac{\omega}{\alpha})$

Adesso, utilizzando le formule di addizione del seno e di addizione del coseno:

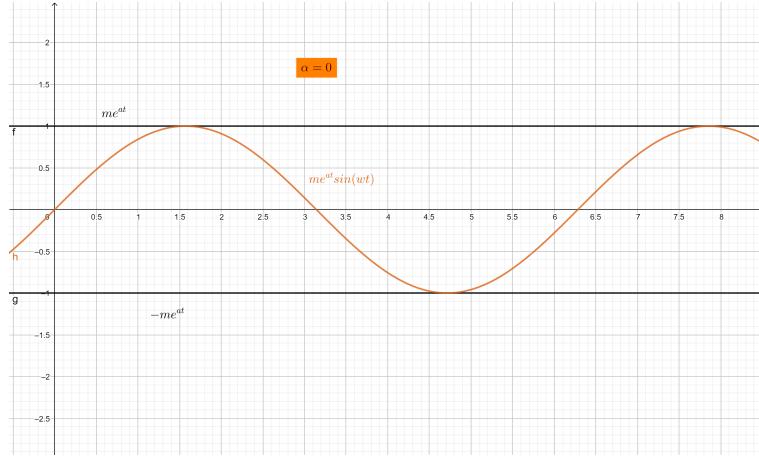
$$x_{libera}(t) = me^{\alpha t}(\sin(\omega t + \theta)u_a + \cos(\omega t + \theta)u_b)$$

Di conseguenza abbiamo:

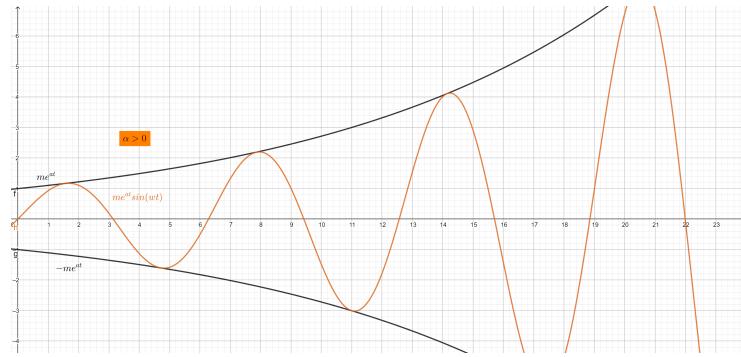
- Lungo u_a la traiettoria si sviluppa come $me^{\alpha t}\sin(\omega t + \theta)$
- Lungo u_b la traiettoria si sviluppa come $me^{\alpha t}\cos(\omega t + \theta)$

Per il momento poniamo $\theta = 0$ tanto si tratta solo di uno sfasamento che trasla le curve a destra o a sinistra rispetto all'asse y. Prendiamo per esempio la traiettoria lungo u_a :

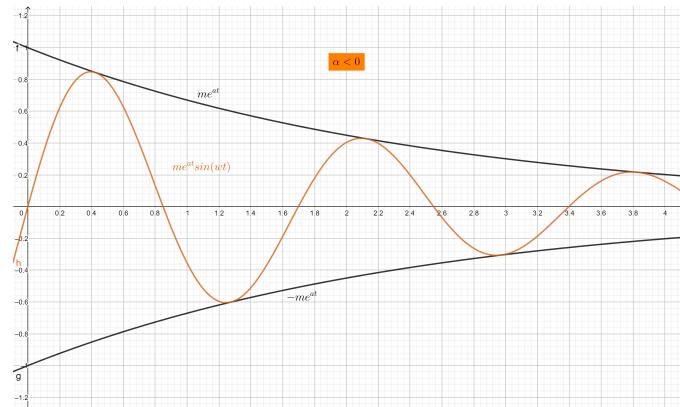
- Se $\alpha = 0$ l'esponenziale fa 1:



- Se $\alpha > 0$ l'esponenziale è crescente:

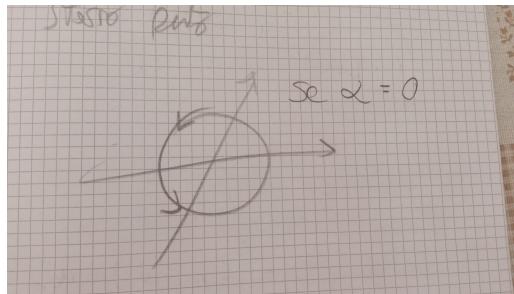


- Se $\alpha < 0$ l'esponenziale è decrescente:



Vediamo che si tratta quindi di un *inviluppo della funzione esponenziale con una funzione sinusoidale*. E questo solo per la traiettoria di u_a , poi abbiamo la traiettoria di u_b , fatta dall'inviluppo della funzione esponenziale con una funzione cosinusoidale. Quindi la traiettoria composta di seno e coseno è una spirale.

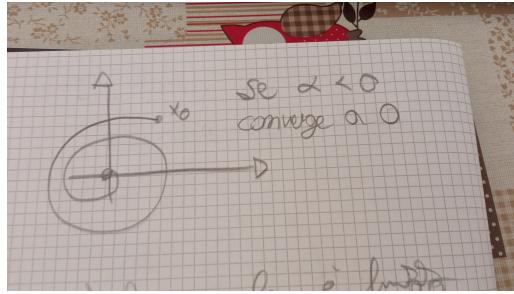
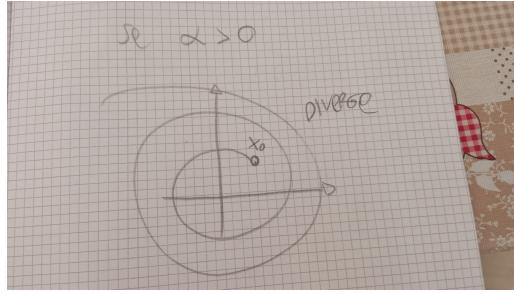
- Se $\alpha = 0$ la spirale è in realtà un cerchio: la traiettoria torna sempre al punto di partenza.



In questo caso si dice che la traiettoria è limitata.

- Se $\alpha > 0$ la spirale diverge verso l'infinito.
- Se $\alpha < 0$ la spirale converge a 0.

E con questo abbiamo trovato $\Phi(t)$, ci mancano ancora le altre 3 matrici.



8.2 Per quanto riguarda $H(t)$

Sappiamo che in generale:

$$H(t) = e^{At}B$$

Nel caso complesso, utilizzando $\Phi(t)$ si ha che:

$$e^{\alpha t}(\cos \omega t(u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin \omega t(u_a v'_b - u_b v'_a))B$$

Vediamo che ci sono 4 prodotti con B, 2 del tipo $v'_a B$ e 2 del tipo $v'_b B$. Perciò un modo pseudoperiodico non caratterizza la risposta forzata (perché non si palesa in $H(t)$), se entrambi questi prodotti sono nulli. In tal caso si dirà non eccitabile con impulsi di ingresso. Invece, se almeno uno di questi due prodotti non è nullo il modo è eccitabile con impulsi di ingresso.

8.3 Per quanto riguarda $\Psi(t)$:

Nel caso complesso abbiamo:

$$\Phi(t) = Ce^{At} = Ce^{\alpha t}(\cos \omega t(u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin \omega t(u_a v'_b - u_b v'_a))$$

Anche qui 4 prodotti di 2 tipi: Cu_a e Cu_b . In questo caso, poiché $\Psi(t)$ caratterizza l'evoluzione libera in uscita, si vede che la risposta libera di un modo è osservabile in uscita se almeno una delle due tipologie di prodotto non è nulla.

8.4 Per quanto riguarda $W(t)$:

In generale abbiamo:

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

E sappiamo che i modi compaiono grazie al primo addendo, il secondo rappresenta solo il legame diretto, quindi ora possiamo trascurarlo. Nel nostro caso complesso:

$$W(t) = Ce^{At}B = Ce^{\alpha t}(\cos \omega t(u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin \omega t(u_a v'_b - u_b v'_a))B$$

Mi trovo 4 tipi di prodotti: $v'_a B e v'_b B$ connessi all'eccitabilità e $Cu_a e Cu_b$. Vediamo che questi prodotti sono mischiati tra loro, cioè svolgendo i prodotti ci troviamo $Cu_a v'_B$ e $Cu_a v'_a B$ e idem

per Cu_b , cioè ci sono tutte le combinazioni. Quindi perché un termine non compaia tutti e due gli elementi di una coppia devono essere nulli, questo significa che basta uno per ogni coppia non nullo perché un modo pseudoperiodico sia presente nella $W(t)$.

8.5 Esempio con massa molla smorzatore:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) \mathbf{x}$$

Vediamo che il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

Poniamo $m = 1$, $b = 4$ e $k = 5$. Troviamo gli autovalori:

$$\lambda_1 = -2 + j \quad \lambda_2 = \lambda_1* = -2 - j$$

Adesso, per trovare gli autovettori $u_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ e $u_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ (ricordiamo che conviene trovare questi reali piuttosto che quelli complessi nel solito modo), facciamo come detto:

$$\text{Per } \lambda_1 = -2 + j: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Troviamo:

$$\begin{cases} a_2 = -2a_1 + b_1 \\ b_2 = -a_1 - 2b_1 \\ -5a_1 - 4a_2 = -2a_2 + b_2 \\ 5b_1 - 4b_2 = -a_2 - 2b_2 \end{cases}$$

Queste 4 sono dipendenti, se leviamo le ultime due sono indipendenti. Quindi ci bastano le prime due:

$$\begin{cases} a_2 = -2a_1 + b_1 \\ b_2 = -a_1 - 2b_1 \end{cases}$$

Adesso dobbiamo fissare a_1 per u_a e b_1 per u_b . Ad esempio, fissando $a_1 = 1$ troviamo $a_2 = -2$; mentre fissando $b_1 = 0$ troviamo $b_2 = -1$. Quindi i nostri due autovettori reali sono:

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Adesso possiamo trovare la nostra evoluzione libera:

$$x_{libera}(t) = me^{\alpha t} (\sin(\omega t + \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos(\omega t + \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Ci mancano solo θ e m e abbiamo tutto. **Definiamo le quantità:**

$$m = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Quindi calcoliamo c_1 e c_2 . Li calcoliamo per due condizioni iniziali diverse:

- Nel caso in cui $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Innanzitutto calcoliamoci gli autovettori sinistri trasposti:

$$v'_1 = (1 \ 0) \quad v'_2 = (-2 \ 1)$$

Da cui:

$$c_1 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \quad c_2 = (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5$$

Da cui:

$$m = 25 \quad \theta = 0$$

- Nel caso in cui $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gli autovettori sinistri trasposti sono sempre gli stessi:

$$v'_1 = (1 \ 0) \quad v'_2 = (-2 \ 1)$$

Da cui:

$$c_1 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad c_2 = (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Da cui:

$$m = \sqrt{2} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Così ci siamo calcolati l'evoluzione libera per due condizioni iniziali diverse.

Torniamo al polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

Stavolta poniamo $m = 1$, $b = 0$ e $k = 1$. Non tutti i coefficienti sono positivi ($b = 0$) quindi le radici non sono tutte reali e negative (Regola di Cartesio). E infatti vediamo che:

$$\lambda_1 = j \quad \lambda_2 = -j$$

Quindi $\alpha = 0$ e $\omega = 1$. Bene ora calcoliamo:

$$e^{At} = 1 \cdot (\cos(t)(u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin(t)(u_a v'_b + u_b v'_a))$$

Quindi abbiamo soluzioni periodiche. Infatti l'evoluzione libera è:

$$\Phi(t) = m(\cos(t + \theta)u_a + \sin(t + \theta)u_b)$$

Quindi periodicamente ritornerò negli stessi punti e la mia traiettoria composta è chiusa. Come abbiamo già fatto vedere graficamente (nel disegno per $\alpha = 0$) in precedenza all'inizio del capitolo.

8.6 Altro Esempio:

Prendiamo un modello di evoluzione libera:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x = A_1 x$$

Poi prendiamo un secondo sistema molto simile:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} x = A_2 x$$

Gli autovalori sono gli stessi per tutte e due le matrici, essendo entrambe triangolari con stessa diagonale.

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2 \implies \lambda_1 = -1 \quad \text{con ma} = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{con ma} = 1$$

Vero per entrambi i sistemi, ma il loro comportamento è diverso. Prendiamo il primo sistema e calcoliamo gli autovettori:

$$[A_1 + 2I]u = 0$$

Calcoliamo prima il secondo:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passiamo ora al primo, vediamo che questo autovalore ha molteplicità algebrica 2, quindi mi aspetto che abbia 2 autovettori. Perché questo accada però, la matrice A_1 deve avere una caduta di rango pari alla molteplicità algebrica, cioè deve avere rango 1, sennò non trovo tanti autovalori quanta

molteplicità algebrica. Troviamo effettivamente che la matrice ha rango 1, e che a e b sono due parametri k_1 e k_2 , mentre $c = a + b$. Quindi:

$$u_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_1 + k_2 \end{pmatrix} \implies u_{11} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_1 \end{pmatrix}, u_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Fissiamo $k_1 = 1$ e $k_2 = 1$. Calcolando $\tilde{A} = TAT^{-1}$ troviamo:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi siamo riusciti a diagonalizzare e trovare una matrice diagonale, ma solo perché la molteplicità algebrica di tutti gli autovalori corrispondeva con la caduta di rango della matrice A_1 , o se volete con la molteplicità geometrica di ogni autospazio.

Prendiamo ora:

$$\dot{x} = A_2 x$$

Gli autovalori sono gli stessi, le molteplicità algebriche idem ma quando vado a calcolare gli autovettori, per u_2 non ci sono problemi, come prima:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mentre adesso la differenza sta in u_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Il rango non è 1 però, non 2!! Quindi trovo ∞^1 soluzioni e non ∞^2 . Quindi la molteplicità geometrica è 1 e non 2. Il nostro autovettore potrebbe essere:

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questo perché A_2 non è diagonalizzabile. Non trovo un cambiamento di base che mi dia una matrice diagonale. Il massimo che riesco a fare è scrivere:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Chiamata forma (o struttura) di Jordan. Si tratta di una matrice diagonale a blocchi¹³ in cui gli autovettori associati agli autovalori che non hanno molteplicità geometrica pari alla molteplicità algebrica hanno una struttura particolare. In questo caso c'è la struttura più semplice possibile: autovalori sulla diagonale e uno sulla diagonale subito sopra. Ci potrebbero essere strutture più complesse. Notiamo che il blocco degli autovettori relativi all'autovalore che non rispetta la condizione $ma = mg$ è un blocco 2×2 , perché la molteplicità algebrica è 2, in generale $ma = n$ implica blocco $n \times n$. Cosa fare ora allora? Lo vedremo bene più avanti, ma fondamentalmente dobbiamo ricavarci un'altro vettore associato all'autovalore -1 (quello che ci causa problemi), nel seguente modo:

$$[A - \lambda I]u_{12} = u_{11}$$

¹³Per una qualsiasi matrice, basta raggruppare visivamente in un certo modo i delle sottomatrici per ottenere una matrice blocchi. Una matrice diagonale a blocchi è una matrice che ha tutti blocchi di matrici nulle tranne che sulla diagonale.

Questa si chiama *Catena*. Calcoliamo la soluzione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da cui troviamo $a = 1$, $b = k$ e $c = b$. Quindi per esempio:

$$u_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adesso quindi proviamo a scrivere T^{-1} con questo nuovo autovalore:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui, calcolando T, troviamo che:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

E abbiamo ritrovato la matrice di cui parlavamo. Poi, come già detto, lo vedremo nel dettaglio in un altro contesto, che $e^{\tilde{A}t}$ avrà leggi temporali e^{At} , e^{-t} , e^{-2t} . La novità è nel secondo termine, col polinomio t, poi lo vedremo con calma. Per ora da recepire c'è: fin quando la caduta di rango è pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore sono in grado di trovare tanti autovettori indipendenti quanto è la molteplicità algebrica dell'autovalore, e quindi sono in grado di diagonalizzare. Se questo non accade la matrice non è diagonalizzabile e la struttura, comunque con un suo perché, è più complessa, e viene chiamata struttura di Jordan, che in futuro vedremo.

Un'altra cosa importante: Nel primo caso, per A_1 , per l'autovalore $\lambda = -1$ avevamo molteplicità algebrica 2 e due parametri. Abbiamo scelto 2 determinati parametri, ma potevamo sceglierli in modo diverso. Questo pone dei limiti nello studio dell'eccitabilità e osservabilità. Se faccio delle scelte può essere $v_i' B$ o $C u_i$ viene nullo, con altre scelte può venire non nullo. Quindi mi chiedo fino a che punto è vero lo studio che facciamo sull'oss. e l'ecc. nel caso in cui la molteplicità algebrica dell'autovalore sia maggiore di 1. Poi vedremo bene questa cosa in futuro.

Altra cosa importante ancora: Quando trovo che una matrice è triangolare o diagonale a blocchi, NON PER FORZA NEL CASO IN CUI LA MATRICE NON SIA DIAGONALIZZABILE, posso calcolarmi gli autovalori normalmente come sempre o, utilizzando un'analogia scorciatoia a quella che si utilizza per le matrici diagonali o triangolari normali, posso calcolarmi gli autovalori dei blocchi sulle diagonali: quelli saranno tutti i miei autovalori. Facciamo un esempio:

$$\tilde{A}_2 = TAT^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Questa è una matrice a blocchi triangolare, quindi, prendendo i due blocchi sulla diagonale e calcolando i seguenti determinanti:

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1 \pm j \quad \det((1 - \lambda)) = 0 \iff \lambda_3 = 1$$

9 Sistemi a tempo discreto:

Il modello隐式的 è;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Lo stato è identificato da un'equazione ricorsiva.

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Posso utilizzare questo modello隐式的 come schema di simulazione, sostituendo il blocco integratore con un blocco ritardo:

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & & \text{I} \\ \text{I} & \text{RIT} & \text{I} \\ \text{I} & & \text{I} \end{array}$$

Anche in questo caso siamo interessati a vedere le caratteristiche delle soluzioni e come comprendere il comportamento del sistema attraverso gli autovalori. Vediamo, se poniamo $k = 0$:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

Quindi:

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

Continuando così...

$$x(k) = A^kx(0) + A^{k-1}Bu(0) + \dots + Bu(k-1)$$

Abbiamo due termini:

$$A^kx(0)$$

Che identifica l'evoluzione libera, poiché dipende solo dalla condizione iniziale.

$$A^{k-1}Bu(0) + \dots + Bu(k-1)$$

Che, poiché dipende dall'ingresso, è l'evoluzione forzata. Che possiamo riscrivere come:

$$\sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau)$$

Questa è la somma di convoluzione. Sostituendo queste due espressioni nell'espressione implicita dell'uscita:

$$y(k) = CA^kx(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} CA^{k-1-\tau} Bu(\tau) + Du(\tau)$$

Quindi abbiamo un'evoluzione libera:

$$CA^kx(0)$$

E poi una forzata:

$$\sum_{\tau=0}^{k-1} CA^{k-1-\tau} Bu(\tau) + Du(\tau)$$

Vediamo che tutti i termini di $x(k+1)$ e y sono caratterizzati dalla matrice di transizione $A^k = \phi(t)$. L'esponente può essere k o anche $k-1$. Andiamo a vedere nel caso generale l'espressione di A^k . Noi A^k già l'abbiamo vista a tempo continuo, già la sappiamo scrivere.

Nel caso di autovalori reali e distinti: sappiamo che A è diagonalizzabile, quindi se \tilde{A} è la matrice diagonale:

$$\tilde{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Quindi $A^k = T^{-1}\tilde{A}^kT$. Sono gli stessi discorsi del caso continuo. Ora facendo i calcoli, utilizzando come vettori di T gli autovettori:

$$A^k = \sum_i^n \lambda_i^k u_i v_i'$$

Se fisso x_o nella base degli autovettori $x_0 = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$. Ottengo che l'evoluzione libera è:

$$x_\ell(k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u_i c_i$$

Quindi l'evoluzione libera è scomposta in n componenti, ognuna lungo la direzione di un autovettore che procede secondo la legge temporale dell'autovalore. Ma la legge tempocorale è cambiata, è λ_i^k : non c'è più l'esponenziale. Questo che significa?

$$|\lambda_i| > 1$$

Ad esempio se $\lambda_i = 2$ la traiettoria tende ad allontanarsi dall'origine con dei salti discreti, anche se $\lambda_i = -2$ la traiettoria si allontana dall'origine, ma lo fa oscillando, passando a destra e sinistra dell'origine. Quindi se $|\lambda| > 1$ la traiettoria è divergente, ma nel primo caso parliamo di modo aperiodico $\lambda > 1$ e nel secondo caso di modo alternante $\lambda < -1$. Se invece:

$$|\lambda| < 1$$

Ad esempio se $\lambda_i = \frac{1}{2}$, la traiettoria va verso l'origine. Invece se $\lambda = -\frac{1}{2}$ converge all'origine oscillando, passando da destra a sinistra dell'origine. Se invece:

$$\lambda = 1$$

Parto in un punto c_i , rimango lì, poiché $1^k = 1$. Mentre se:

$$\lambda = -1$$

Passo da c_i a $-c_i$.

Se abbiamo autovalori complessi coniugati: ad autovalori complessi coniugati corrispondono autovettori complessi coniugati. Usiamo le coordinate u_a e u_b che sono reali. Ottenendo la matrice:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Se riscriviamo gli autovettori in coordinate esponenziali, ricordandoci che $\rho = |z|$:

$$\lambda = \alpha + j\omega = |\lambda|e^{j\theta}$$

E quindi troviamo in coordinate polari che:

$$\alpha = |\lambda| \cos(\phi) \quad \omega = |\lambda| \sin(\phi)$$

Perciò:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \iff \tilde{A}^k = |\lambda|^k \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^k = |\lambda|^k \begin{pmatrix} \cos(k\phi) & \sin(k\phi) \\ -\sin(k\phi) & \cos(k\phi) \end{pmatrix}$$

Dimostriamo l'ultima uguaglianza:

Dimostrazione: Iniziamo calcolando la matrice per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Utilizzando le formule di somma e sottrazione per gli archi otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}$$

Ora scriviamo che:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

possiamo dimostrare, per induzione, che:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} \cos((k-1)\phi) & \sin((k-1)\phi) \\ -\sin((k-1)\phi) & \cos((k-1)\phi) \end{pmatrix}$$

poiché l'abbiamo dimostrato al primo passo (la base) all'inizio, per $k = 2$. Quindi:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\phi & \sin k\phi \\ -\sin k\phi & \sin k\phi \end{pmatrix}$$

Avendo utilizzato anche in questo prodotto le formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno. Quindi abbiamo dimostrato per induzione che:

$$\tilde{A} = |\lambda|^k \begin{pmatrix} \cos k\phi & \sin k\phi \\ -\sin k\phi & \cos k\phi \end{pmatrix}$$

□

E questo era solo per \tilde{A}^k , ma adesso vogliamo calcolare A^k :

$$A^k = T^{-1} \tilde{A}^k T$$

E svolgendo calcoli analoghi fatti nel caso a tempo continuo troviamo:

$$|\lambda|^k (\cos(k\phi)(u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin(k\phi)(u_a v'_b + u_b v'_a))$$

Avremo una traiettoria che si muove lungo una spirale, a salti, e in base al valore del modulo di λ questa convergerà $|\lambda| < 1$, ripercorre la stessa traiettoria chiusa se $\lambda = 1$ e divergerà $|\lambda| > 1$. Ricordiamo che il modulo di un numero complesso si trova facendo la radice quadrata della somma dei quadrati di parte reale e immaginaria. Bene, ora prendiamo la condizione iniziale nella base (u_a, u_b) :

$$x_0 = c_a u_a + c_b u_b \quad \text{con } c_a = v'_a x_0 \text{ e } c_b = v'_b x_0$$

Quindi quando andiamo a calcolare:

$$x_\ell(k) = |\lambda|^k (\cos(k\phi)(u_a c_a + u_b c_b) + \sin(k\phi)(u_a c_b - u_b c_a))$$

Questo sempre nel caso di una matrice 2x2. Facciamo, come nel caso continuo, la seguente cosa: prendiamo un numero complesso z con parte immaginaria c_a e parte reale c_b :

$$z = c_b + j c_a = m e^{j\theta}$$

Dove mettiamo θ per distinguere da ϕ di prima. Vediamo che, come nel caso continuo:

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2} \quad \theta = \arctg\left(\frac{c_a}{c_b}\right)$$

Ora dividiamo e moltiplichiamo tutto per m :

$$x_\ell(k) = m |\lambda|^k \left(\cos(k\phi) \left(u_a \frac{c_a}{m} + u_b \frac{c_b}{m} \right) + \sin(k\phi) \left(u_a \frac{c_b}{m} - u_b \frac{c_a}{m} \right) \right) = m |\lambda|^k (\cos(k\phi)(u_a \sin \theta + u_b \cos \theta) + \sin(k\phi)(u_a \cos \theta - u_b \sin \theta))$$

Adesso isoliamo u_a e u_b , così da identificare esplicitamente le traiettorie nelle due direzioni.

$$x_\ell(k) = |\lambda|^k m ((\cos(k\phi)\sin\theta + \sin(k\phi)\cos\theta)u_a + (\cos(k\phi)\cos\theta - \sin(k\phi)\sin\theta)u_b)$$

Utilizziamo anche qui le formule di addizione del seno e del coseno e otteniamo:

$$x_\ell(k) = |\lambda|^k m ((\sin(k\phi+\theta)u_a + (\cos(k\phi+\theta))u_b)$$

Ecco la mia traiettoria finale¹⁴. Bene, ora possiamo scrivere la forma *più generale* della matrice $\Phi(k)$:

$$\Phi(k) = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i^k u_i v'_i + \sum_{j=1}^{k_2} |\lambda_j|^k (\cos(k\phi)(u_{ja} v'_{ja} + u_{jb} v'_{jb}) + \sin(k\phi)(u_{ja} v'_{jb} - u_{jb} v'_{ja}))$$

Cioè il caso generale in cui compaiono sia k_1 autovalori reali sia k_2 coppie di autovalori complessi e coniugati. Trovato Φ , possiamo trovare tutte e tre le altre matrici:

$$H(k) = A^{k-1} B = \Phi(k-1) B$$

Qua Φ va calcolato in $k-1$ e non in k , ma oltre questo, per quanto riguarda l'eccitabilità dei modi, vediamo dalla espressione che abbiamo scritto di Φ , post-moltiplicandola per B che:

¹⁴Notiamo la differenza con la traiettoria nel caso continuo: dove nel caso continuo c'era ω ora c'è ϕ

- I modi aperiodici o alternati sono eccitabili se $v_i' B \neq 0$
- I modi pseudo-periodici sono eccitabili se almeno uno tra $v_{ja}' B \neq 0$ e $v_{jb}' B \neq 0$

I modi eccitabili si ritroveranno in $H(k)$. Ora occupiamoci di $\Psi(k)$:

$$\Psi(k) = CA^k = C\Phi(k)$$

Anche qui avremo un'espressione, che ci porterà a diversi prodotti:

- Per i modi aperiodici o alternati $Cu_i \neq 0$
- Per i modi pseudo-periodici almeno uno tra $Cu_{ja} \neq 0$ e $Cu_{jb} \neq 0$

Infine, ultima matrice:

$$W(k) = CA^{k-1}B \quad \text{se } k \geq 1 \quad W(k) = D \quad \text{se } k = 0$$

D è il legame diretto, mentre $CA^{k-1}B$ tiene conto dei modi. Un modo compare in $W(k)$ se è simultaneamente eccitabile e osservabile.

9.1 Esempio a Tempo Discreto: Popolazione di Conigli:

Nota anche come Sequenza di Fibonacci. Abbiamo una coppia di conigli che ogni 2 mese si riproducono e fanno due figli. Il periodo che esaminiamo è sufficientemente breve per supporre che non ci siano decessi. Qual è la regola matematica che descrive questo?

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \quad \text{per } k \geq 2$$

Proviamo a scrivere questa formula con il modello a tempo discreto che abbiamo studiato adesso. Innanzitutto vediamo che abbiamo un'inizializzazione (primi due conigli), ma non abbiamo ingressi. Ciò vuol dire che abbiamo solo un'evoluzione libera. Dopodiché, se adottiamo le seguenti sostituzioni:

$$x_1(k) = u_{k-2} \quad x_2(k) = u_{k-1}$$

Allora possiamo scrivere che:

$$x_1(k+1) = u_{k-1} = x_2(k) \quad x_2(k+1) = u_k = u_{k-1} + u_{k-2} = x_2(k) + x_1(k)$$

Compattando ora in una matrice troviamo:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(k)$$

Come uscita prendiamo:

$$y(k) = x_2(k)$$

Si tratta di una catena di ritardi, simile a quella di integratori vista l'altra volta. Vediamo che quando abbiamo una matrice del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

cioè una matrice con 1 SOPRA la diagonale principale e tutto il resto 0 per prime le n-1 righe, mentre sull'n-esima riga ci sono dei coefficienti, si ha che il suo polinomio caratteristico è sempre:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Poiché la nostra matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è proprio di questo tipo, possiamo di certo svolgere i calcoli, ma sappiamo già che il suo polinomio è:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Questa struttura matriciale corrisponde ad una sequenza di ritardi nel nostro caso (discreto) e una sequenza di integratori nel caso continuo. Comunque gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Quanto valgono i moduli dei λ ?

$$|\lambda_1| = \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| > 1 \quad |\lambda_2| = \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$$

Quindi il primo è un modo aperiodico e il secondo è alternante. Andiamo a calcolare gli autovettori:

$$\text{per } \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}: \quad u_1 = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{per } \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}: \quad u_2 = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

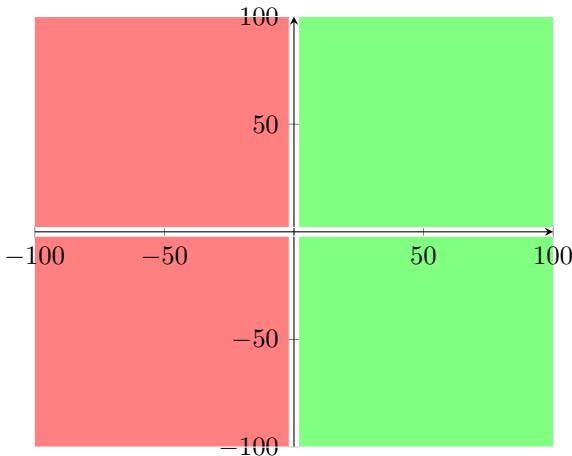
Da cui poi calcoliamo gli autovettori sinistri trasposti. Ora abbiamo tutto ciò che ci serve per trovare le quattro matrici (in realtà essendo solo evoluzione libera ce ne sono solo due di matrici):

$$\Phi(k) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k u_i v'_i + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k u_i v'_i$$

$$\Psi(k) = (0 \ 1) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k u_i v'_i + (0 \ 1) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k u_i v'_i$$

Nel nostro modello potevamo considerare nuove immissioni di conigli, quindi un ingresso u . In tal caso avremmo dovuto considerare anche le altre due matrici $H(k)$ e $W(k)$.

Ricapitolando:



Queste sono le traiettorie convergenti (in rosso) e divergenti (in verde) per sistemi a tempo continuo, se invece siamo proprio sull'asse immaginario dovrò fare attenzione: se sono semplici (molteplicità algebrica = 1) sono traiettorie limitate, per molteplicità algebrica maggiore di 1 devo fare attenzione, poi vedremo meglio questa cosa. Per quanto riguarda i sistemi a tempo discreto invece la discriminante è il cerchio di raggio unitario:

10 Discretizzazione:

A questo punto ci chiediamo: cosa succede se abbiamo un sistema a tempo continuo, ma il processo lo controlliamo¹⁵ tramite, ad esempio, un calcolatore? Quindi qualcosa che manda un segnale a istanti discreti.

Per progettare questo controllore abbiamo due modi: calcolo a tempo continuo il controllore e poi lo implemento con un intervallo discreto, oppure uso questo modo:

¹⁵Il controllore è il componente che manipola il sistema per fargli fare quello che vogliamo.

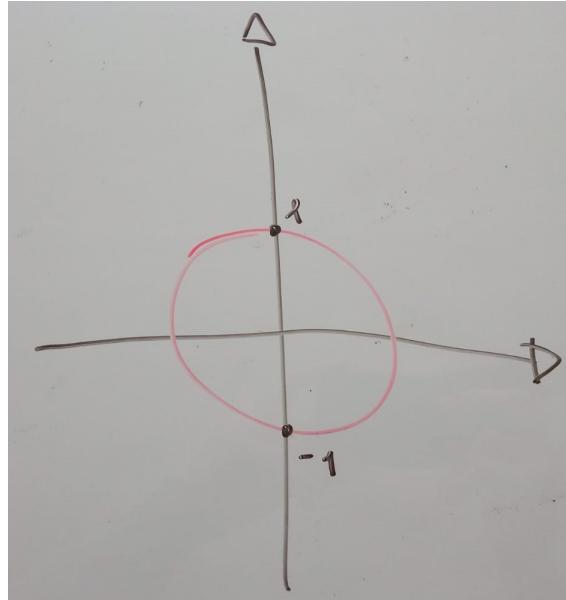
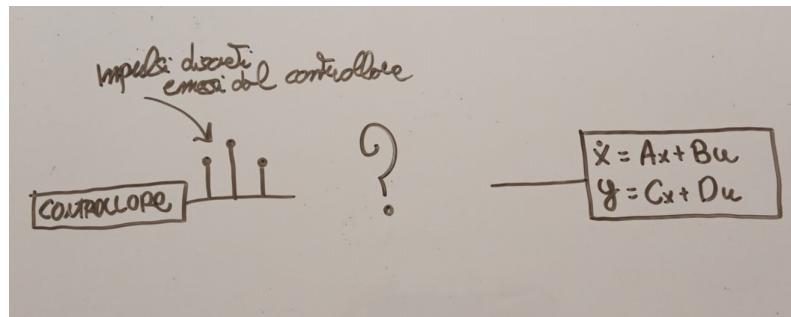
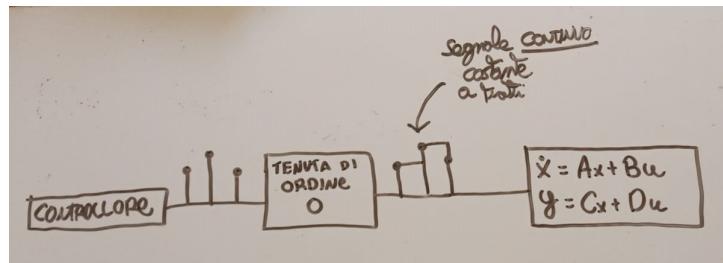


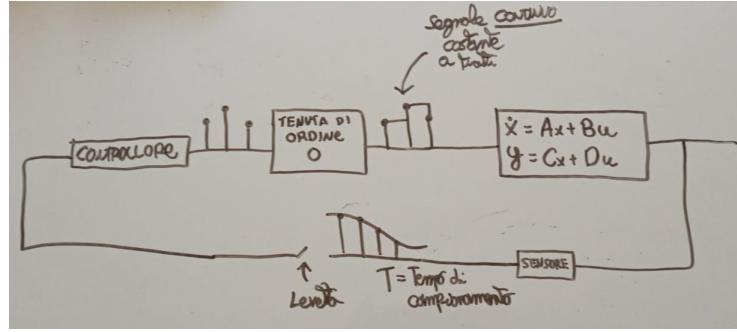
Figure 5: Se la traiettoria è dentro al cerchio è convergente, se è fuori dal cerchio è divergente (aperiodica o alternante). Se le traiettorie sono sul cerchio, devo distinguere tra molteplicità algebrica unitaria (in questo caso si hanno traiettorie limitate) e molteplicità algebrica maggiore di 1.



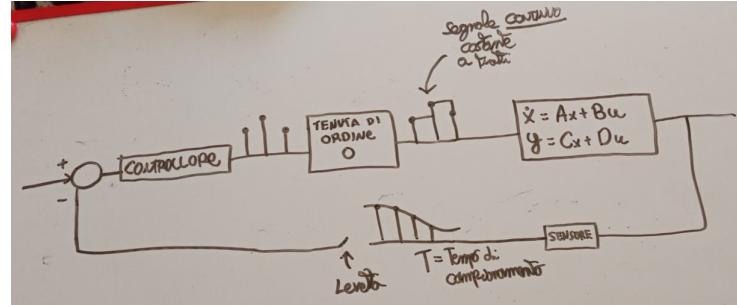
- Siccome il processo è continuo in ingresso accetta segnali continui, quindi prima cosa da fare è determinare un segnale continuo a partire da uno discreto. Il più semplice è con il sistema di tenuta di ordine 0, che prende il segnale e lo mantiene per tutto l'intervallo costante a quel valore. Cioè tramuta il segnale a intervalli discreti in un segnale costante a tratti, che è un segnale continuo.



- Adesso pensiamo all'ingresso del controllore: i segnali di riferimento in ingresso al controllore possono utilizzare le misure dell'uscita, per esempio con dei sensori. Quindi prendo la mia misura in uscita dal sistema e tramuto il segnale, grazie a dei sensori e poi ad un campionamento, in un segnale discreto. Che significa campionare il segnale? Significa che c'è una levetta che si apre e chiude, così da far passare il segnale a intervalli discreti, io lo misuro in questi intervalli regolari. Chiamiamo T il tempo di campionamento. Adesso ho il mio ingresso al controllore, cioè il segnale campionato.
- Il segnale campionato insieme a un riferimento sono i miei ingressi al controllore. Il riferi-



mento serve perché se io voglio che la mia uscita abbia un certo comportamento, paragono il comportamento dell'uscita rispetto a il comportamento che vorrei avere e l'errore tra i due mi quantifica l'azione che devo esercitare.



Se io ora guardo il mio sistema complessivo, dall'ingresso del controllore all'uscita del processo, questo rappresenta un sistema discreto. Posso quindi progettare il controllore discreto non più considerando il sistema continuo ma vedendo se c'è descrizione discreta per il sistema. Prima strategia era: prendo processo continuo, calcolo il controllore in base alle prestazioni che voglio, e poi lo implemento in maniera discreta. Seconda strategia: processo continuo, controllore discreto, cerco di capire se c'è modello matematico discreto per sistema e con questo modello calcolo controllore. Utilizziamo questa seconda strategia. Ora il problema è: qual è il sistema discreto equivalente associabile al sistema continuo?? Quindi abbiamo, ingresso discreto, uscita discreta, e conoscendo il modello continuo e il tempo di campionamento T vogliamo trovare il modello discreto. L'idea è la seguente, prendiamo il nostro processo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x} = Ax + Bu &\implies x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Dopodiché fisso il mio intervallo di osservazione (t_0, t) proprio pari a un intervallo di campionamento, quindi $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$, con il quale riscrivo l'equazione, ottenendo:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Avendo utilizzato il fatto che $t - t_0 = T$. Dobbiamo supporre che le operazioni di *campionamento* e *tenuta sincroni*, quindi l'ingresso sull'intervallo $(kT, (k+1)T)$ è un ingresso costante e pari proprio al suo valore in kT . Quindi essendo costante posso portarlo fuori dal segno dell'integrale.

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau u(kT)$$

Ora ci ricordiamo le equazioni di un sistema a tempo discreto:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

Quindi, confrontando con l'espressione di prima, troviamo che:

$$A_d = e^{At} \quad B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T-\tau} d\tau$$

Mentre per l'uscita abbiamo:

$$y(kT) = C_d x(kT) + D_d u(kT)$$

Che confrontata con:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ci dà:

$$C_d = C \quad D_d = D$$

Quindi una volta che so A, B, C e D sono in grado, una volta fissato il tempo di campionamento T, di calcolare A_d , B_d , C_d e D_d . Su C_d e D_d non c'è nulla da dire, soffermiamoci sulle altre due:

$$A_d = e^{AT}$$

Se voglio gli autovalori del sistema a tempo discreto, qual è la connessione tra questi e quelli del sistema a tempo continuo? Se penso ad A in forma diagonale, abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightarrow e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} \end{pmatrix}$$

Ciò significa che A_d è una matrice diagonale e i suoi autovalori sono:

$$\lambda_D = e^{\lambda_i T}$$

Ma questo è un caso particolare o una regola generale? Se la matrice è diagonalizzabile, gli autovalori non cambiano con i cambiamenti di coordinate quindi assumo che sia sempre vero se la matrice è diagonalizzabile, ma quando non lo è? E in più, come dimostro che gli autovalori sono legati da questa relazione?

$$\lambda_D = e^{\lambda_i T}$$

DIMOSTRARE PER CASA che $\lambda_D = e^{\lambda_i T}$.

Dimostrazione: Nel caso di autovalori distinti, sia reali che complessi coniugati:

$$A_d = e^{AT} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} u_i v'_i$$

Dove la sommatoria presenterà eventualmente autovalori e autovettori complessi. Ciò significa possiamo scrivere:

$$[A_d - \lambda_D I] u_D = [\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} u_i v'_i - \lambda_D I] u_D = 0$$

Il nostro obiettivo è dimostrare che:

$$\lambda_{D,j} = e^{\lambda_j T}$$

Cioè che il j-esimo autovalore discreto è collegato al j-esimo autovalore continuo secondo questa relazione. Per dimostrarlo, basta prendere la relazione scritta prima e sostituire $\lambda_{D,j} = e^{\lambda_j T}$, considerando che dobbiamo inoltre sostituire l'autovettore corrispondente al j-esimo autovalore discreto (u_D) con l'autovettore del j-esimo autovalore continuo (u_j). Quindi, vado a sostituire:

$$[\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} u_i v'_i - e^{\lambda_j T} I] u_j = 0$$

Siccome $v'_i u_j = 0$ a meno che $i = j$, e in quel caso vale 1, di tutta la sommatoria rimane solo il termine j-esimo, quindi:

$$e^{\lambda_j T} u_j - e^{\lambda_j T} I u_j = 0$$

Che è ovviamente vero. \square

Che implicazioni ha la relazione appena dimostrata?

$$\lambda_D = e^{\lambda_i T}$$

Fissiamo un certo T e vediamo:

$$\lambda_D = e^{\lambda_i T} \implies \log(\lambda_D) = \lambda_i T$$

- Se $\lambda_D > 1$ allora $\lambda_i T$ è maggiore di 0. Cioè *a un modo divergente a tempo continuo corrisponde un modo divergente a tempo discreto.*
- Se invece $\lambda < 1$ allora $\lambda_i T$ è minore di 0. Quindi *a un modo convergente a tempo continuo corrisponde un modo convergente a tempo discreto.*
- Se $\lambda_D = 1$ allora $\lambda_i T = 0$, quindi **ad un modo limitato a tempo continuo corrisponde un modo limitato a tempo discreto.**
- Inoltre vediamo che gli autovalori di un sistema discretizzato (non discreto in generale, deve essere nato da un sistema a tempo continuo tramite discretizzazione), non possono assumere certi valori. In particolare:
 - Non possono essere uguali a 0, altrimenti $\lambda_i T$ dovrebbe essere $-\infty$
 - Possono essere negativi soltanto se corrispondenti a una coppia di autovalori complessi coniugati, caso che ora tratteremo.

Vediamo adesso il caso degli autovalori complessi e coniugati:

- Se $\lambda = \alpha \pm j\omega$ allora $e^{\alpha T}(\cos\omega T \pm j\sin\omega T)$. Quindi a coppie di autovalori complessi a tempo continuo corrispondono coppie di autovalori complessi a tempo discreto che saranno convergenti quando quelle a tempo continuo lo sono e saranno divergenti quando quelle a tempo continuo lo sono.

Abbiamo però la sensazione di non ritrovare i modi alternanti, perché $e^{\lambda T}$ è sempre un numero positivo, non può essere negativo. C'è un'unica eccezione a questo, proprio nel caso degli autovalori complessi e coniugati:

$$\lambda = \alpha \pm j\omega \implies e^{\alpha T}(\cos\omega T \pm j\sin\omega T)$$

Fissando T t.c. $j\sin\omega T = 0$ e $\cos\omega T = -1$, così da ottenere un esponenziale negativo. Ma qual è questa T che ci permette di fare questo? Si tratta di quella T t.c. $\omega T = 2k\pi + \pi$, perciò:

$$T = \frac{\pi}{\omega}$$

Questo significa che mentre a tempo continuo giro in una spirale continua, in questo caso faccio dei salti. E questo è un caso molto particolare. E abbiamo scoperto tutto su A_d . Passiamo ora a B_b .

$$B_b = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T - \tau} d\tau$$

Facciamo un cambio di variabili: pongo $\xi = (k+1)T - \tau$, quindi $d\tau = -d\xi$ e quando $\tau \rightarrow kT$ si ha che $\xi \rightarrow T$ mentre quando $\tau \rightarrow (k+1)T$ si ha che $\xi \rightarrow 0$. Quindi, fatto questo cambio di variabili, posso scrivere:

$$B_b = \int_0^T e^{A\xi} B d\xi$$

Adesso, *nel caso particolare in cui A è invertibile*, si ha che, sviluppando in serie:

$$B_b = \int_0^T (Id + A\xi + A^2 \frac{\xi^2}{2!} + \dots) B d\xi = [Id\xi + A \frac{\xi^2}{2} + A^2 \frac{\xi^3}{3 \cdot 2!} + \dots]_0^T B$$

Ora utilizziamo il fatto che A sia invertibile, moltiplicando a sinistra prima per A e poi per A^{-1} , sempre a sinistra, ottenendo:

$$B_b = A^{-1} [A\xi + A^2 \frac{\xi^2}{2} + A^3 \frac{\xi^3}{3!} + \dots]_0^T B$$

Se adesso nel termine in parentesi quadre sommo e sottraggo l'identità, ritroviamo lo sviluppo dell'esponenziale:

$$B_b = A^{-1} [-Id + Id + A\xi + A^2 \frac{\xi^2}{2} + A^3 \frac{\xi^3}{3!} + \dots]_0^T B = A^{-1} [e^{A\xi} - Id]_0^T B = A^{-1} [e^{AT} - Id] B$$

Dove l'ultimo passaggio vale perché $e^{A \cdot 0} = e^{O_n}$, che sappiamo dà la matrice diagonale con esponenziale sulla diagonale. Questa volta l'esponenziale sulla diagonale è $e^0 = 1$, quindi si tratta in

realità della matrice identità Id , che sottratta alla matrice identità fa scomparire il termine. Ecco perché rimane solo il primo termine. Bene, questo nel caso in cui io moltiplico a sinistra prima per A e poi per A^{-1} , ma se invece moltiplicassi a destra, prima della B , per A e poi per A^{-1} ? **Ce lo lascia da fare, dice che otteniamo una formula simile ma a me sembra uguale semplicemente con un termine spostato.** Comunque ricordiamo che questa formula è applicabile solo nel caso particolare in cui A è invertibile, non si può fare in generale.

11 Esercizio su Sistema Discreto e Come calcolare Autovalori Complessi Coniugati:

Facciamo un esempio su un sistema dinamico e approfittiamone per far vedere come calcolare il sistema relativo agli autovalori complessi coniugati, che avevamo promesso di far vedere. Prendiamo il seguente modello:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0) x(t)$$

Calcolare l'evoluzione libera in $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e svolgere l'analisi modale.

Risposta: vediamo che la matrice A è una matrice triangolare superiore a blocchi:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Ciò vuol dire che gli autovettori sono sulle diagonali dei due blocchi, cioè:

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} \right) \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm j$$

Avendo notato che A_2 è nella forma $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$. Per l'autovettore relativo al primo autovalore procediamo come sempre, trovando:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ora, per quanto riguarda la coppia di autovalori complessi, utilizziamo la formula di cui parlavamo:

$$A(u_a, u_b) = (u_a, u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Che nel nostro caso è:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, svolgendo il prodotto matriciale sia a destra che a sinistra:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_3 = a_1 - b_1 \\ a_2 + a_3 = a_2 - b_2 \\ -a_2 + a_3 = a_3 - b_3 \\ \frac{1}{2}b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + b_1 \\ b_2 + b_3 = a_2 + b_2 \\ -b_2 + b_3 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

Come abbiamo già detto, di queste $2n = 6$ (con n dimensione di A) equazioni, solo $2n - 2 = 4$ sono indipendenti, e le altre due sono dipendenti. Questo significa anche che il rango della matrice è 4 e che troveremo due variabili da impostare come parametri. Risolvendo il sistema, e ponendo $b_2 = 0$ e $b_3 = 5$:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 0 \\ b_1 = -2 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 5 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato che:

$$\text{per } \lambda_{2,3}: \quad u_a = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ok, ora ci chiede l'evoluzione libera a partire da $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per calcolarla, abbiamo bisogno degli autovettori trasposti sinistri, che troviamo calcolandoci T . Essi sono:

$$v'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad v'_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \quad v'_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Da cui, poiché $c_i = v'_i x_0$:

$$c_1 = \frac{1}{5} \quad c_a = \frac{1}{5} \quad c_b = \frac{1}{5}$$

Bene, ora possiamo scrivere la nostra evoluzione libera:

$$x_\ell(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} + |\lambda_{2,3}|^t m((\sin(t\theta + \phi)) \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + (\cos(t\theta + \phi)) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix})$$

Dove per il modulo del numero complesso scegliamo uno qualsiasi tra λ_2 e λ_3 , dato che, essendo coniugati, il loro modulo è lo stesso. Questo vale:

$$\rho = |\lambda_{2,3}| = \sqrt{\alpha + \omega} = \sqrt{2}$$

Inoltre ci ricordiamo che:

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2} = \frac{1}{5}\sqrt{2} \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c_a}{c_b}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ora ci manca solo θ (comunque mi sa ha invertito θ e ϕ rispetto alla teoria). Come calcolare θ ? Ci ricordiamo che θ , la fase di un numero complesso, si trova in questo modo:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Come abbiamo fatto prima con ϕ . Abbiamo tutto! Scriviamo la nostra evoluzione libera:

$$x_\ell(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} + (\sqrt{2})^t \frac{1}{5} \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

adesso **Analisi Modale**: oltre a sapere se un modo naturale è aperiodico o pseudoperidico, convergente o divergente, ci serve, per l'analisi modale, sapere se è *eccitabile o osservabile*. Nota che, poiché non dobbiamo calcolare le quattro matrici, non dobbiamo calcolare tutte le coppie relative agli autovalori coniugati, ma ne basta una sola: quella che ci dice se il modo è eccitabile. Idem per l'osservabilità. Vediamo l'osservabilità:

$Cu_1 = 1 \rightarrow$ modo aperiodico convergente osservabile

$Cu_a = 6 \rightarrow$ modo pseudo-periodico convergente osservabile

Vediamo che ci basta calcolare Cu_a per sapere se il moto è osservabile, ma nel caso volessimo le quattro matrici, allora abbiamo bisogno di calcolare anche Cu_b . Vediamo ora l'eccitabilità:

$v'_1 B = (1 \ -\frac{8}{5}) \neq 0 \rightarrow$ modo aperiodico convergente osservabile e eccitabile tramite entrambi gli ingressi

$v'_a B = (0 \ \frac{1}{5}) \neq 0 \rightarrow$ modo pseudo-periodico conv. oss. ed eccitabile sicuramente tramite il secondo ingresso

Non possiamo dire nulla sull'osservabilità tramite il primo ingresso perché in questo caso non c'è, ma potrebbe palesarsi in $v'_b B$.

12 Lezione del 12-10:

Ci mancava B discreta se A non è invertibile:

$$B_d = \int_0^T e^{A\xi} B d\xi = \int_0^T (Id)\xi + A\xi + A^2 \frac{\xi^2}{2} + A^3 \frac{\xi^3}{3!} + \dots] B d\xi = [(Id)\xi + A \frac{\xi^2}{2} + A^2 \frac{\xi^3}{3!} + \dots]_0^T B$$

Considerando che ξ calcolata in 0 è 0:

$$B_d = \left((Id)T + A \frac{T^2}{2} + A^2 \frac{T^3}{3!} + \dots \right) B$$

Ok, quindi ora abbiamo:

$$A_d = e^{AT} = Id + AT + A^2 \frac{T^2}{2} + \dots$$

$$B_d = \left((Id)T + A \frac{T^2}{2} + A^2 \frac{T^3}{3!} + \dots \right) B$$

C'è un trucchetto per eseguire meglio la computazione di queste due matrici. Ci accorgiamo che possiamo scrivere:

$$A_d = e^{AT} = Id + AT + A^2 \frac{T^2}{2} + \dots = Id + A \left((Id)T + A \frac{T^2}{2} + \dots \right) = Id + A\Psi_n$$

Dove abbiamo semplicemente raccolto A a partire dal secondo addendo, lasciando fuori l'identità, e abbiamo chiamato Ψ_n l'espressione derivante dal raccoglimento. Adesso passiamo a B discreta, e vediamo che anche lì abbiamo lo stesso termine raccolto:

$$B_d = \Psi_n B$$

In questo modo calcolando Ψ_n calcolo sia A_d che B_d .

12.1 Sistemi finito-discretizzabili e catena di autovettori:

Un caso particolare ce l'ho quando ho due sistemi che si dicono finito-discretizzabili¹⁶, cioè quelli in cui, calcolando lo sviluppo di A, mi accorgo che A elevato alla qualcosa fa 0, e ciò mi garantisce che qualsiasi potenza successiva sia 0. Così che la mia somma infinita diventi finita. Un esempio di questi è la catena di integratori. Facciamo un esempio:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = u$$

Possiamo fare lo schema di simulazione associato che parte da u, passando per 3 integratori di cui l'ultimo fa entrare $x_2 = \dot{x}_1$ ed esce x_1 . Chi è la matrice del sistema?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹⁶Perché le matrici del sistema discretizzato sono caratterizzate da un numero finito di termini in T, cioè lo sviluppo di Taylor non continua all'infinito.

Mentre l'uscita è:

$$y = x_1 \implies C = (1 \ 0 \ 0) \quad D = 0$$

Voglio calcolare il sistema discretizzato equivalente. Cioè devo calcolare:

$$e^{AT}$$

Ma vediamo che A è una matrice triangolare: ha tre autovalori sulla diagonale e sono tutti e tre 0:

$$\lambda = 0 \quad ma = 3$$

Quando vado a calcolare gli autovettori ho una situazione complicata, perché se vado a calcolare $[A - \lambda I]u = 0$ siccome il rango di $A - \lambda I$ è 2 trovo un unico autovettore, ma io ne ho bisogno di 3. Come fare? Innanzitutto si trova la prima soluzione da $[A - \lambda I]u = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \implies u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dopodiché cerchiamo u_2 tale che:

$$[A - \lambda I]u_2 = u_1$$

E questa viene chiamata *catena di autovettori*, questi sono gli *autovettori generalizzati*. In questo caso ho una sola catena. Comunque calcoliamo u_2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adesso tocca all'ultimo u_3 :

$$[A - \lambda I]u_3 = u_2$$

Da cui troviamo:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ok, trovati gli autovettori. Il fatto di essere ricordi a questa procedura implica che la matrice A sia già in forma di Jordan:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cioè ha gli autovalori sulla diagonale e degli 1 subito sopra. *Se vediamo i tre autovettori che otteniamo vediamo che formano la matrice identità*: questo ci dice che siamo già nella forma buona. A questa struttura però, quando io vado a calcolare e^{AT} corrispondono leggi più complicate, non solo gli esponenziali. Proviamo ad aggirare il problema, andiamo a calcolare e^{AT} :

$$e^{AT} = Id + AT + A^2 \frac{T^2}{2} + \dots$$

Normalmente lo faremo con gli autovettori o con gli autovettori generalizzati, si può fare, ma questo è un caso particolare:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Facciamo il prodotto righe per colonne e otteniamo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ed è chiaro che potenze successive alla terza continueranno ad essere nulle. Ciò significa che quando scrivo l'esponenziale:

$$e^{AT} = Id + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{T^2}{2}$$

E basta, perché le altre potenze rendono nulle tutti gli altri addendi. Notiamo che, poiché $\lambda = 0$:

$$e^{\lambda t} = 1$$

In realtà, in queste situazioni, come dicevamo, escono fuori anche altre leggi temporali, più complicate, in questo caso:

$$te^{\lambda t} \quad \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}$$

In questo caso $\lambda = 0$ mi ritrovo 1, t e t^2 . Ovviamente, a seconda della lunghezza della catena, avrò altri termini polinomiali ed esponenziali di grado maggiore. Quindi in generale in questi casi escono fuori dei termini che sono *inviluppi di esponenziale e polinomiale*. Comunque, tornando a noi, quindi abbiamo la nostra A discreta che è:

$$A_d = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E invece la mia B discreta?

$$B_d = \int_0^T e^{A\xi} Bd\xi = \int_0^T (Id + A\xi + A^2 \frac{\xi^2}{2}) Bd\xi$$

La A non è invertibile, quindi dobbiamo fare così:

$$[(Id)\xi B + A \frac{\xi^2}{2} B + A^2 \frac{\xi^3}{3!} B]_0^T = BT + AB \frac{T^2}{2} + A^2 B \frac{T^3}{3!}$$

Ora facciamo i calcoli con B:

$$B_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T^3}{3!} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove per il terzo addendo abbiamo fatto $A^2 B = A(AB)$ che risulta più semplice da calcolare avendo già calcolato AB. Vediamo che B_d ha una struttura particolare: ha i coefficienti $\frac{T^i}{i!}$. Se invece di 3 integratori avessi considerato n integratori la struttura era la stessa:

- A_d sarebbe stata una matrice di dimensione n con tutti 1 sulla diagonale principale e sopra questa delle diagonali con T poi con $T^2/2$ poi $T^3/3$ ecc. fino a $T^n - 1/n - 1!$
- Per la B avrei avuto la stessa cosa trovata qui, n vettori con T, poi $T^2/2, \dots$ fino a $T^n/n!$

Nota IMPORTANTE: Sul libro c'è la formula del caso generico ma nella B ci sono dei fattoriali che mancano. Inoltre c'è un altro errore: non è su n fattoriale ma su n-1 fattoriale.
CONTROLLA SUL LIBRO.

13 Facciamo un esempio:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Calcolare evoluzione libera in entrata (x_ℓ) e in uscita (y_ℓ) in $x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, fare l'analisi modale. Infine, scrivere il sistema discreto equivalente per T = 2 secondi.

Risposta: Gli autovalori e gli autovettori sono:

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{2,3} = 1 \rightarrow u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando T troviamo:

$$v'_1 = \left(\frac{1}{5} \ 0 \ 0 \right) \quad v'_2 = \left(\frac{1}{10} \ -\frac{1}{2} \ 1 \right) \quad v'_3 = \left(-\frac{3}{10} \ \frac{1}{2} \ 0 \right)$$

Calcolando i coefficienti per l'evoluzione libera troviamo:

- $c_1 = 1$
- $c_a = 1$
- $c_b = -1$

Adesso ci servono:

- $m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2} = \sqrt{2}$
- $\theta = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
- $\phi = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Con cui possiamo scrivere:

$$x_\ell(t) = e^t u_1 + e^{-t} \sqrt{2} ((\sin((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi)) u_a + (\cos((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi))) u_b)$$

Per la precisione, poiché c_b negativo (ascisse negative) e c_a positivo (ordinate positive), dobbiamo prendere per l'arcotangente di -1 quell'angolo nel quadrante II (appunto ascisse negative e ordinate positive) la cui tangente è -1, quindi sarebbe $\frac{3}{4}\pi$. Bene, adesso calcoliamo la risposta libera in uscita. Ricordiamoci che questa è:

$$y_\ell = C e^{At} x_0 = C x_\ell(t)$$

Vediamo che nel nostro caso y ha due uscite, infatti C è composta da due righe (canali):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

Quindi i due ingressi sono:

$$y_1 = (1 \ 0 \ 0) x \quad y_2 = (1 \ 0 \ -1) x$$

Facciamo i prodotti con e^{AT} calcolando separatamente i due canali di uscita, dopo ricompattiamo in un'unica matrice:

$$y_{\ell,1} = (1 \ 0 \ 0) \left[e^t u_1 + e^{-t} \sqrt{2} ((\sin((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi)) u_a + (\cos((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi))) u_b) \right]$$

Vediamo che svolgendo i prodotti tra $(1 \ 0 \ 0)$ e $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ solo u_1 è non negativo. Quindi vuol dire che nell'uscita tramite il primo canale comparirà solo il primo modo:

$$y_{\ell,1} = 5e^t$$

Ora occupiamoci del secondo canale.

$$y_{\ell,2} = (1 \ 0 \ -1) \left[e^t u_1 + e^{-t} \sqrt{2} ((\sin((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi)) u_a + (\cos((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi))) u_b) \right]$$

Vediamo che svolgendo i prodotti tra $(1 \ 0 \ -1)$ e gli autovettori sono tutti non nulli: nell'uscita tramite il secondo canale compariranno tutti i tre modi. Svolgendo tutti i calcoli:

$$y_{\ell,2} = 4e^t + e^{-t} \sqrt{2} ((\sin((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi))(-1) + (\cos((-\frac{\pi}{4} + k\pi)t + (-\frac{\pi}{4} + k\pi)))(-1))$$

Abbiamo separato i due canali, andrebbe in realtà scritto tutto insieme. Ok, abbiamo scritto evoluzione e risposta libera, adesso facciamo l'analisi modale:

$$\begin{aligned} v'_1 B &= 0 & v'_a B &\neq 0 & v'_b B &=\neq 0 \\ Cu_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0 & Cu_a &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 & Cu_b &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi:

- 1° modo: $\lambda_1 = 1 \implies$ aperiodico div. non eccitabile, osservabile tramite entrambe le uscite
 - 2° modo: $\lambda_{2,3} = -1 \pm j \implies$ pseudoperiodico conv. eccitabile, osservabile solo tramite la seconda uscita
- Adesso dobbiamo calcolare il **modello discreto equivalente** per $T = 2$ sec. Sappiamo che:

$$A_d = e^{AT} = e^T u_1 v'_1 + e^{-T} [\cos \omega T [u_a v'_a + u_b v'_b] + \sin \omega T [u_a v'_b - u_b v'_a]]$$

Dove abbiamo utilizzato la formula generale dell'esponenziale ma al posto di t si usa T . Bene, sappiamo che $T = 2$, quindi:

$$A_d = e^2 u_1 v'_1 + e^{-2} [\cos 2 [u_a v'_a + u_b v'_b] + \sin 2 [u_a v'_b - u_b v'_a]]$$

E calcolando prodotti, prodotti matriciali e somme si ottiene una matrice, la matrice A discreta appunto. Adesso dobbiamo calcolare la B discreta e abbiamo finito (C e D sono uguali). Per B ci ricordiamo che la formuletta, se non abbiamo autovalori in 0 e A è invertibile, è:

$$B_d = A^{-1} (e^{AT} - Id) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} (A_d - Id)$$

E poi svolgi i calcoli.

14 Esercizio dei Batteri:

2 specie di batteri. x_i numero batteri della specie i -esima. \dot{x}_i dipende linearmente da x_1 e x_2 , cresce col primo e decresce col secondo tramite i coefficienti $\alpha_{i,j}$. Questi coefficienti descrivono l'influenza che x_j ha su \dot{x}_i . Perciò si ha:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} x$$

Con $\alpha_{1,2} < 0$ e $\alpha_{2,2} < 0$. Abbiamo quindi il seguente polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})\lambda + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}$$

Da cui troviamo i seguenti casi:

- se $-(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})$ e $\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}$ sono entrambi positivi, per la *Regola di Cartesio*, non ci sono variazioni di segno ma due permanenze: due autovalori negativi cioè entrambe le specie si estinguono
- se uno tra $-(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})$ e $\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}$ è negativo e l'altro è positivo, per la *Regola di Cartesio*, ci sono due variazioni: due autovalori positivi cioè entrambe le specie proliferano all'infinito.
- se $-(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}) = 0$ e $\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2} > 0$ ho radici solo sull'asse immaginario. Due radici simmetriche sull'asse immaginario significa due autovalori complessi coniugati. Quindi si otterebbe:

$$\lambda^2 = (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})\lambda + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}$$

Dove il termine dopo l'uguale è negativo. Questo porta a due autovalori complessi coniugati nella forma:

$$\lambda = \pm \omega j$$

Quindi con $\alpha = 0$: questo è il caso in cui le due specie non si estinguono ma neanche proliferano, restano in numero costante e sopravvivono.

- Se $\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2} = 0$ avrò:

$$\lambda(\lambda - (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}) + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{1,2}) = 0$$

Cioè avremo una radice nell'origine ($\lambda = 0$) e una reale

E IL CASO IN CUI C'E' UNA SOLA SOLA VARIAZIONE E QUINDI UN AUTOVALORE E' NEGATIVO E UNO E' POSITIVO??? DOVREBBE ESSERCI UNA SPECIE CHE SI ESTINGUE E UNA CHE AUMENTA, MA FORSE NON L'ABBIAMO TRATTATO PERCHE' E' BANALE?.

Quindi oltre alla Regola di Cartesio (**da fare solo se ci sono tutti e tre gli addendi! Sennò fai direttamente col Discriminante!**) abbiamo usato il segno del Discriminante:

$$\Delta > 0 \rightarrow \text{Radici Reali}$$

$$\Delta < 0 \rightarrow \text{Radici Complesse e Coniugate}$$

$\Delta = 0 \rightarrow \text{Radici Coincidenti } \mathbf{ANCORA NON SAPPIAMO TRATTARE QUESTO CASO}$

Facciamo un esempio, se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

Poiché non ci sono variazioni si avranno due autovalori negativi, ma reali o complessi? Lo vediamo col discriminante:

$$\Delta = -3 \rightarrow \text{Si avranno due radici complesse coniugate negative}$$

Infatti si ha:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se veniva poi detto che il nostro sistema ammetteva un ingresso di batteri, ad esempio solo della prima specie, vuol dire che:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1$$

15 Quando la matrice è diagonalizzabile ($m_a = m_g$) ma la molteplicità è maggiore di uno:

Fino ad ora con i modi naturali abbiamo considerato il caso in cui gli autovalori fossero distinti tra di loro e con la possibilità di diagonalizzare la matrice. Come ci comportiamo nel caso in cui la matrice sempre è diagonalizzabile ma gli autovalori sono coincidenti, e il caso in cui la matrice non è diagonalizzabile. Limitiamoci al caso del tempo continuo tanto il caso discreto è uguale. Partiamo da un esempio:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 1 \ 1) x \end{aligned}$$

Vediamo che gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow ma = 1$$

$$\lambda_{2,3} = 0 \rightarrow ma = 2$$

Per λ_1 non ci sono problemi:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda_{2,3}$ invece:

$$[A - I]u_2 = 0$$

Cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow u_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice $[A - I]$ ha rango 1, devo trovare ∞^2 soluzioni, quindi due vettori u_1 e u_2 . Non trovo quindi un u che ci dà una direzione ma due u che ci danno un piano. **Quando io vado a studiare l'eccitabilità e l'osservabilità, potrei avere una scelta per cui tutto funziona bene oppure un'altra in cui non funziona nulla.** Quindi dobbiamo capire bene come funzionano eccitabilità e osservabilità in questo caso. Calcolando gli autovettori sinistri troviamo che:

$$v'_1 B = 1$$

$$v'_{2,1} B = 1$$

$$v'_{2,2} B = 0$$

Ora passiamo all'eccitabilità:

$$Cu_1 = 1$$

$$Cu_2 = 0$$

$$Cu_3 = 1$$

Quindi, cosa ne deduciamo? Il primo modo è sia eccitabile che osservabile, quindi se calcolo $W(t)$ mi aspetto di trovare e^{2t} . Mentre per i due moti associati al secondo autovalore:

- Se prendiamo $u_{2,1}$ vediamo che il che il moto è eccitabile ($v'_{2,1} B = 1$) ma non osservabile ($Cu_2 = 0$). Quindi non comparirà nella nostra $W(t)$)
- Se prendiamo $u_{2,2}$ vediamo che il che il moto non è eccitabile ($v'_{2,1} B = 0$) ma è osservabile ($Cu_2 = 1$). Quindi non comparirà nella nostra $W(t)$)

Quindi:

$$W(t) = e^{2t}(Cu_1 v'_1 B) = e^{2t}$$

Adesso facciamo un'altra scelta delle soluzioni relative al secondo e al terzo modo, prendendo i seguenti $u_{2,1}$ e $u_{2,2}$:

$$u_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mentre u_1 resta uguale. Calcolando i nuovi autovettori sinistri troviamo che:

$$v'_1 B = 1$$

$$v'_{2,1} B = 1$$

$$v'_{2,2} B = -1$$

$$Cu_1 = 1$$

$$Cu_2 = 1$$

$$Cu_3 = 1$$

Quindi secondo studio, tutti i modi sembrerebbero eccitabili e osservabili, diversamente dal caso precedente. Quindi nella $W(t)$ mi aspetterei anche la legge e^t stavolta, oltre a e^{2t} . In realtà non compare, infatti se andiamo a fare i calcoli:

$$W(t) = e^{-2t}(Cu_1 v'_1 B) + e^t(Cu_{2,1} v'_{2,1} B) + e^t(Cu_{2,2} v'_{2,2} B) = e^{2t} + e^t - e^t = e^{2t}$$

Quindi è come prima, ma allora che è successo? Perché sembra dai calcoli che i due modi siano osservabili e eccitabili? È come se io avessi scelto la base non in maniera corretta. Se io voglio essere in grado, nel caso di un autovalore con molteplicità algebrica superiore a uno e quando la matrice è diagonalizzabile, di sollecitare tutti i modi relativi a quel singolo valore numerico (in questo caso si tratta di due modi relativi al singolo valore numerico 1, che possiamo pensare essere relativo a due autovalori coincidenti), devo avere tanti ingressi quanto è la molteplicità algebrica di quell'autovalore. Questo per l'eccitabilità. Analogamente per l'osservabilità devo avere tante uscite quanta è la molteplicità algebrica di quell'autovalore. Queste sono condizione necessarie. In realtà ciò che ci dà una risposta certa è andare a vedere cosa succede nelle matrici $W(t)$, $H(t)$ e $\Psi(t)$.

16 Quando la matrice non è diagonalizzabile:

Prendiamo lo stesso esempio di sopra ma modificato:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 1 \ 1) x$$

Vediamo che gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 1 \quad ma = 3$$

Andando a calcolare gli autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi si trova un solo autovettore, poiché la matrice $[A - I]$ ha rango 2. Quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è $mg = 1$, cioè la matrice non è diagonalizzabile. Però è una matrice diagonalizzabile a blocchi, con una forma, in opportune coordinate, che chiameremo *di Jordan*. Vediamo come ottenerla: per trovare una base di autovettori devo trovare u_2 e u_3 , e li trovo così:

$$u_2 : [A - I]u_2 = u_1$$

Da cui troviamo:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andiamo a determinare u_3 nello stesso modo:

$$u_3 : [A - I]u_3 = u_2$$

Da cui troviamo:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bene ora abbiamo una base (u_1, u_2, u_3) con cui formare T^{-1} , e possiamo calcolare:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice diagonale a blocchi che stavamo cercando, *in forma di Jordan*. Vediamo che in questa forma viene messo l'autovalore sulla diagonale principale e poi vengono fatti dei blocchi con degli 1 sopra la diagonale. Potevamo senza fare i calcoli già trovare che questa fosse la matrice diagonalizzata in forma di Jordan perché la nostra matrice $[A - I]$ ha avuto una caduta di rango pari a 1 (avendo rango 2), quindi abbiamo un'unica catena, cioè un unico blocco che deve avere per forza rango tre, quindi l'autovalore sulla diagonale principale e tutti uno sopra la diagonale principale. Se questa è la nostra \tilde{A} , allora abbiamo che:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Questo perché, come abbiamo già detto in precedenza, alla forma di Jordan, oltre alla legge esponenziale, sono associate delle leggi temporali più complicate, precisamente leggi polinomiali. Bene, adesso proviamo un'altra cosa, cambiamo un po' la matrice A:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Vediamo che gli autovalori sono ovviamente gli stessi:

$$\lambda_1 = 1 \quad ma = 3$$

Ma quando vado a calcolare $[A - I]$, la caduta di rango è pari a 2 (cioè il rango è 1). Ciò significa che trovo due autovettori u_1 e u_2 . Questo significa due catene, cioè due blocchi. In generale io non so di che dimensione saranno questi due blocchi: in questo specifico caso, avendo una matrice 3×3 , per forza di cose un blocco dovrà essere da 2×2 e uno da 1×1 , ma se pensiamo a un caso in cui abbiamo una matrice 6×6 e un autovalore con molteplicità algebrica 6, allora le combinazioni possibili per questi due blocchi sono 5×5 e 1×1 , 4×4 e 2×2 , 3×3 e 3×3 . Come faccio allora a capire di che dimensione sono questi due blocchi? Prendo:

$$[A - \lambda I]u = 0$$

che ci dà, essendo $[A - \lambda I]$ di rango 1, due soluzioni, cioè due autovettori che hanno questa forma:

$$u_{1,2} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi due autovettori fatti così, ma non fissiamo né i loro a né i loro c . Procediamo con la catena, scegliamo uno dei due vettori di $u_{1,2}$, chiamiamolo $u_{1,1}$ (l'altro dopo lo sceglieremo a caso) e usiamolo nella catena per trovare $u_{1,2}$:

$$[A - \lambda I]u_{1,1} = u_{1,2} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Se $u_{1,2} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ otteniamo $r_2 = a$ ed $r_3 = c$; quindi $a = c$. **Per questo non abbiamo fissato i valori prima!** Se avessimo fissato a e c per i due vettori di u_1 prima, potevamo fissarli diversi tra loro e quindi non trovare nessuna soluzione in questa fase, quindi **fissarli sempre alla fine della catena!** Adesso, prendendo $a = c = 1$ ci troviamo subito i vettori $u_{1,1}$ e $u_{1,2}$, mentre di u_2 , l'altro vettore di $u_{1,2}$, scegliamo le componenti a e c a caso, l'importante è il vettore sia indipendente dagli altri due. Allora troviamo:

$$u_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dove abbiamo scelto come componenti di u_2 $a = 1$ e $c = 0$. Questi sono i nostri tre **Autovettori Generalizzati**. Da qui possiamo calcolare T per poi trovare \tilde{A} :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Che è la nostra matrice diagonale a blocchi in forma di Jordan. Vediamo che questa volta abbiamo due blocchi, uno da 2×2 e uno da 1×1 . Notare che abbiamo un blocco di dimensione 2×2 perché abbiamo avuto una catena di autovettori formata da due autovettori, e un blocco 1×1 per il rimanente vettore che abbiamo scelto a caso. Vediamo che nella matrice in forma di Jordan si presenta prima il blocco 2×2 e poi il blocco 1×1 perché nella T^{-1} si sono messi prima gli autovettori $u_{1,1}$ e $u_{1,2}$ e come ultima colonna l'autovettore u_2 . Se avessimo fatto il contrario avremmo avuto prima il blocco 1×1 e poi il blocco 2×2 . Bene, quando vado a calcolare:

$$e^{\tilde{A}t} = \left(\begin{array}{cc|c} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^t \end{array} \right)$$

Potendo poi ricavare e^{At} da qui:

$$e^{\tilde{A}t} = Te^{At}T^{-1}$$

Vediamo comunque che se l'autovalore ha parte reale positiva le leggi temporali sono crescenti nel tempo. Infatti:

$$\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} \rightarrow \infty$$

Nota che nei termini esponenziali di questo tipo nella matrice prima non si vede λ perché è uguale a 1, ma è presente!!!. Se invece l'autovalore ha parte reale negativa, si ha l'inviluppo di due curve: una legge polinomiale e una esponenziale, del tipo:

$$\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} \rightarrow 0$$

Questo perché la legge polinomiale è comunque crescente, ma quella esponenziale, **che è più veloce**, decresce (essendo la parte reale di λ negativa, sia nel caso di autovalori reali sia nel caso di complessi coniugati). Questo è vero anche nel caso di complessi coniugati perché la traiettoria sinusoidale è limitata, quindi è l'inviluppo tra esponenziale e polinomio che determina l'andamento.

Bisogna prestare attenzione a quando l'autovalore ha parte reale nulla, perché $e^{\lambda t} = 1$, quindi rimane il polinomiale, che cresce nel tempo. Questo significa che, *nel caso in cui la matrice A non sia diagonalizzabile*, e la parte reale dell'autovalore è $\alpha = 0$ (sia nel caso reale che in quello complesso in realtà), si ha che l'esponenziale fa 1, e quindi la traiettoria è determinata solo da:

$$\frac{t^k}{k!}$$

Ma questa è una traiettoria crescente!! Mentre noi avevamo visto che quando la parte reale dell'autovalore è uguale a 0 (quindi $\lambda = 0$ nel caso di autovalori reali e $\alpha = 0$ nel caso di autovalori complessi coniugati), nel caso di matrice diagonalizzabile, *si aveva una traiettoria limitata*. Quindi attenzione a questa differenza, *determinata dal fatto che la matrice A non sia diagonalizzabile*.

16.1 Costante di Tempo:

Sono dei parametri che vengono introdotti per definire il comportamento del nostro sistema. Prendiamo il caso semplice: autovalori distinti, 1 modo pseudo-periodico e 1 aperiodico.

$$\lambda_{reale} \implies \text{legge temporale è del tipo } e^{\lambda t}$$

Vediamo che se $\lambda < 0$ si ha una legge esponenziale decrescente verso 0, ed è chiaro che a seconda del valore di λ questa convergenza avviene in maniera più o meno veloce. Per caratterizzare questo comportamento si introduce la costante di tempo

$$\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}$$

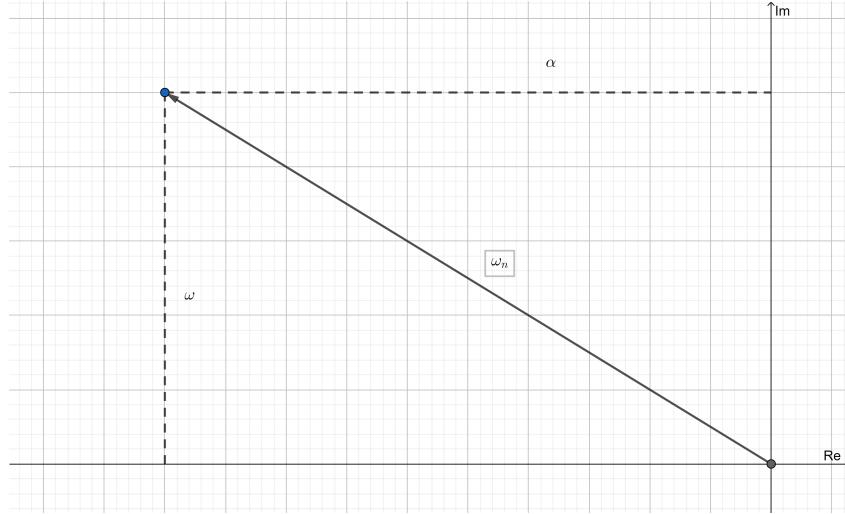
E si vede che quando $t = \tau_i$ si ha:

$$x_{\ell,i} = e^{-1} u_i c_i$$

Cioè la componente i-esima dell'evoluzione libera si è ridotta di un fattore $\frac{1}{e}$ rispetto al suo valore in 0 (cioè quando valeva $u_i c_i$). Questo mi dà la rapidità con il quale il mio sistema sta rispondendo a un disturbo, se vedo la condizione iniziale come appunto un disturbo. Facciamo un esempio: se io ho $\lambda = -1$ e $\lambda = -100$ chi avrà un tempo di risposta più rapido? Il sistema che ha $\lambda = -100$. Questo perché nel primo caso ($\lambda = -1$) mi riduco di $\frac{1}{e}$ rispetto al mio punto di inizio ($u_i c_i$) quando $t = \tau_i = 1$ secondi, nel secondo caso quando $t = \tau_i = \frac{1}{100}$ secondi. Perciò nel secondo caso passa meno tempo. Quindi più il mio autovalore è a sinistra dell'asse reale più rapida è la risposta. Questo quando gli autovalori sono reali, invece quando sono complessi coniugati:

$$\lambda = \alpha \pm j\omega$$

Graficamente abbiamo, prendendo x come asse reale e y come asse immaginario:



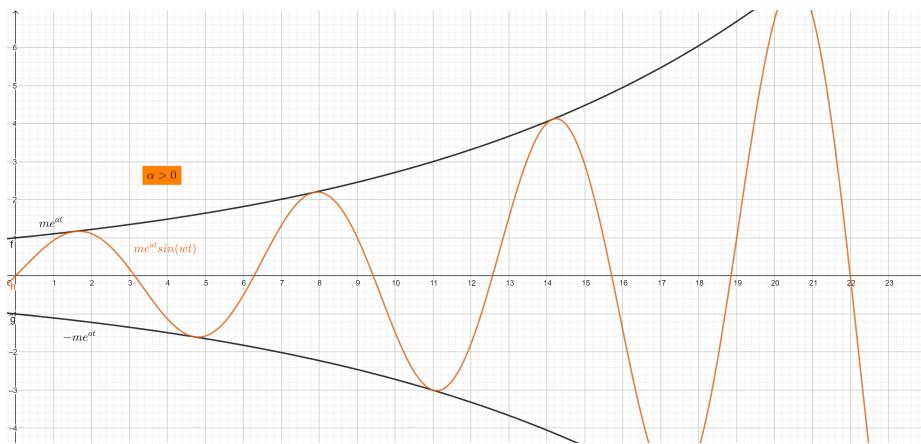
Possiamo introdurre due grandezze. La pulsazione naturale:

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

Cioè il modulo del numero complesso, graficamente la lunghezza del vettore che congiunge l'origine e il punto del numero complesso. Fissando omega, vediamo che $\omega_n \rightarrow \omega$ per $\alpha \rightarrow 0$. L'altra grandezza è lo smorzamento:

$$\xi = -\frac{\alpha}{\omega_n}$$

Che quindi è il rapporto tra l'ipotenusa e il cateto, che mi dà il seno dell'angolo θ tra il vettore e l'asse y. Vediamo che se $\alpha \rightarrow 0$ si ha che $\xi \rightarrow 0$, cioè lo smorzamento va a 0. Questo è sensato se pensiamo che in un modo pseudo-periodico, quando la parte reale è nulla (appunto $\alpha = 0$), il modo è un limitato, precisamente è un cerchio, e quindi non c'è smorzamento (né tantomeno un amplificazione, diciamo l'opposto dello smorzamento). Se invece $\alpha > 0$ non si ha uno smorzamento ma un amplificazione, quindi, poiché come detto il rapporto tra cateto e ipotenusa è il seno si ha il caso in cui $\alpha > 0$ è, in un modo-pseudoperiodico:



Se invece $\alpha < 0$ si ha uno smorzamento, e quindi l'inviluppo dell'esponenziale col seno converge col seno che si appiattisce sempre di più sullo 0.

Perciò per gli autovalori reali abbiamo la costante di tempo mentre per gli autovalori complessi coniugati abbiamo la pulsazione naturale e lo smorzamento, che ci dicono come si comporta il sistema. 2 esercizi per lunedì: massa molla smorzatore quando delta = 0, scegliere parametri per ottenere matrice non diagonalizzabile e due autovalori coincidenti. Secondo esercizio, smorzamento uguale a $+ \omega - 1$ a cosa corrisponde. Vuol dire che omega tende a zero, quindi ω_n tende a α e ho due radici reali coincidenti, positive o negative.

17 Stabilità

Proprietà che ci permette di capire se il nostro sistema ha tutte traiettorie convergenti o no. Se io penso ad x come posizione, \dot{x} è velocità, per certe condizioni iniziali. Se io perturbo queste condizioni, o applico un controllo, mi chiedo quale sia la capacità del sistema di ritornare nella situazione di partenza, cioè con la velocità uguale a 0, questa è la stabilità. Bene, iniziamo. Partiamo dall'evoluzione libera ($u = 0$):

$$\dot{x} = Ax$$

Quali sono gli stati per cui se sono in una certa posizione iniziale resto in quella posizione al variare del tempo? Sono quegli stati t.c.

$$Ax_e = 0$$

Cioè sono gli stati in cui la velocità \dot{x} è nulla. x_e è detto *punto di equilibrio*. Vediamo inoltre che $x_e = 0$ è sempre punto di equilibrio. Ok quindi abbiamo un sistema di equazioni lineari. Possiamo avere o solo la soluzione banale di tutti 0 (quando la matrice A ha rango pieno, in questo caso $x_e = 0$ è l'*unico* punto di equilibrio) oppure soluzioni infinite (quando la matrice A non ha rango pieno. In base alla caduta di rango si avranno ∞^{n-r} soluzioni).

Ok questo era per i sistemi lineari, ma questa cosa *si può generalizzare anche per i sistemi non lineari*. Quindi per i sistemi del tipo:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Quindi f dipende da x e u ma non in maniera lineare. Ed eventualmente:

$$y = h(x, u)$$

Con h che dipende da x e u ma non in maniera lineare. Ci concentriamo sui sistemi con un ingresso e un'uscita. Nel caso non lineare, posto $u = 0$, l'equilibrio sarà definito come quel punto t.c.

$$f(x_e, 0) = 0$$

La differenza coi sistemi lineari è che nel caso non lineare posso avere un numero finito di punti di equilibrio, mentre nel caso lineare ho 1 singolo punto di equilibrio, o ne ho infiniti, in base al rango della matrice. Facciamo un esempio: il pendolo, abbiamo visto a inizio corso che il suo comportamento è descritto da equazioni non lineari, e ha due punti di equilibrio:

- Situazione verticale inferiore: altero le condizioni iniziali, spostando la pallina di una certa quantità e lascio, dopo un po' ritorna in posizione verticale. Quello è un punto d'equilibrio stabile.
- Situazione verticale superiore: tocco la pallina perturbando le condizioni e non tornerà mai più indietro. Questo è quindi un punto di equilibrio instabile.

Il sistema quindi ammette due punti di equilibrio. Quindi *la stabilità rappresenta la capacità del nostro sistema di ritornare in situazione di equilibrio dopo piccole perturbazioni delle condizioni iniziali*. Diamo ora la definizione formale di Stabilità nel caso $u = 0$. Facciamolo nel caso di \mathbb{R}^2 : dato un sistema $\dot{x} = f(x)$ il mio sistema sarà stabile se comunque io fisso un intorno di raggio ϵ del punto di equilibrio x_e , esiste un altro intorno di raggio $\delta_\epsilon < \epsilon$ centrato in x_e t.c., se:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon$$

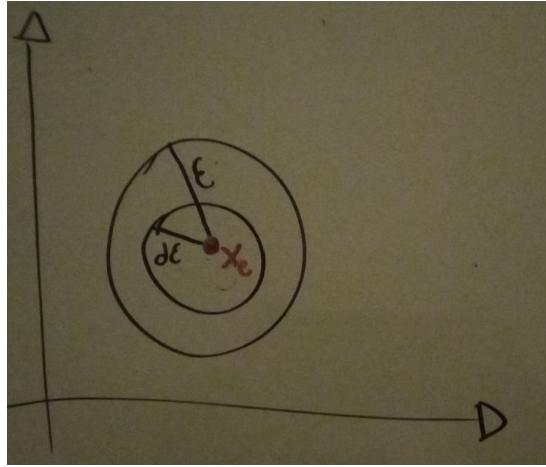
Allora per forza:

$$\|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

Questa è la *proprietà di stabilità*, e x_e si dice **punto di equilibrio stabile**. Compattamente:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon \implies \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Cioè: se la traiettoria ha la condizione iniziale dentro l'intorno della circonferenza di raggio δ_ϵ , la traiettoria risulta essere sempre all'interno dell'intorno di raggio ϵ . Se invece che in \mathbb{R}^2 lo facciamo in \mathbb{R}^3 i due intorni non saranno circonferenze ma sfere, \mathbb{R}^4 avremo le ipersfere e così via. Quindi se le condizioni iniziali sono limitate in un certo intorno, l'intera traiettoria sarà limitata nell'evoluzione



in un altro certo intorno, $\forall t > 0$. Vediamo dalla foto che più lascio libera la mia traiettoria (quindi più allargo l'intorno ϵ) più la mia condizione iniziale potrà essere lontano dal mio punto d'equilibrio (perché si allarga anche δ_ϵ). Invece, più restringo e limito la mia traiettoria, più anche x_0 viene limitato e quindi dovrò partire da un punto più vicino alla mia posizione di equilibrio x_e .

Posso poi richiedere addirittura che al tendere di t all'infinito $x(t)$ vada proprio in x_e , cioè:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Questa è invece la *proprietà di equiasintoticità*. La proprietà di stabilità semplice insieme a quella di equiasintoticità formano la proprietà di *stabilità asintotica*.

Nel caso di sistemi lineari a tempo continuo, la traiettoria è limitata (e quindi abbiamo la proprietà di stabilità) se gli autovalori hanno parte reale minore uguale di 0, perché se è maggiore di 0 una piccola perturbazione di x_0 mi porta a divergere. Quando invece è uguale a 0 dobbiamo assicurarsi che gli autovalori abbiano ordine geometrico ¹⁷, cioè quando vado a calcolare gli autovettori ci sono tanti autovettori quanta è la molteplicità algebrica. Se inoltre voglio la proprietà di equiasintoticità allora dovrò avere solo la parte reale minore strettamente di 0, perché convergono all'origine, mentre non potrò accettare autovalori con parte reale uguale a 0. Ok, ora quindi torniamo ai nostri sistemi lineari:

$$\dot{x} = Ax \quad u = 0$$

La nostra evoluzione libera è:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$$

WLOG possiamo porre $t_0 = 0$ e ottenere:

$$x(t) = \Phi(t)x_0$$

Abbiamo detto che per un sistema lineare sicuramente $x_e = 0$ è un punto d'equilibrio (poi ne posso avere altri ma sicuramente l'origine è sempre punto di equilibrio). Ora vediamo che possiamo scrivere:

$$\|x(t) - x_e\| = \|\Phi(t)(x_0 - x_e)\|$$

Perché? Bhe:

$$\|\Phi(t)(x_0 - x_e)\| = \|\Phi(t)x_0 - \Phi(t)x_e\| = \|x(t) - \Phi(t)x_e\| = \|x(t) - x_e\|$$

Dove l'ultima diseguaglianza discende dal fatto che se $x_0 = x_e$, cioè parto dal punto di equilibrio, è ovvio che resterò là, non mi muoverò perché resterò in equilibrio, quindi vale:

$$x_e = \Phi(t)x_e$$

¹⁷Se la molteplicità algebrica è maggiore di quella geometrica l'ordine geometrico è maggiore di 1

Cioè la mia traiettoria in evoluzione libera $x(t)$ vale $x_e \forall t \geq 0$ se parto dal punto di equilibrio, perché resto in equilibrio. Bene, dimostrato questo, andiamo avanti:

$$\|x(t) - x_e\| = \|\Phi(t)(x_0 - x_e)\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0 - x_e\|$$

Avendo usato la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Comunque, dalla definizione di stabilità si ha che:

$$\|x(t) - x_e\| = \|\Phi(t)(x_0 - x_e)\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0 - x_e\| \leq \|\Phi(t)\| \delta_\epsilon$$

Il mio obiettivo è dimostrare la stabilità per i sistemi lineari, quindi deve valere $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$:

$$\|x(t) - x_e\| = \|\Phi(t)(x_0 - x_e)\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0 - x_e\| \leq \|\Phi(t)\| \delta_\epsilon < \epsilon$$

Da cui:

$$\|\Phi(t)\| < k$$

Quindi la stabilità c'è se le traiettorie di $\Phi(t)$ sono limitate. Cioè se gli autovalori hanno parte reale ≤ 0 , con, nel caso di parte reale = 0, l'ordine geometrico¹⁸ sia uguale a 1. Questa condizione è **necessaria e sufficiente**: se $\|\Phi(t)\| < k$ non è verificato c'è almeno un autovalore a parte reale positiva. Quindi, riassumendo:

Stabilità Semplice: $\text{Re}(\lambda) < 0$ oppure $\text{Re}(\lambda) = 0$ e Ordine Geometrico = 1

Adesso voglio imporre la seconda condizione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Non mi basta più dire che:

$$\|x(t) - x_e\| \leq \|\Phi(t)\| \delta_\epsilon < \epsilon$$

Ma voglio proprio andare a zero, quindi:

$$\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$$

E questo va a zero solo se gli autovalori che determinano la sua traiettoria sono convergenti, cioè:

Stabilità Asintotica: $\text{Re}(\lambda) < 0$

E non mi va più bene il caso in cui la parte reale è uguale a 0. Ok quindi **per i sistemi lineari abbiamo due casi**:

- Se $x_e = 0$ è l'unico punto di equilibrio (rango matrice A massimo) e tutti gli autovalori hanno parte reale **strettamente** minore di 0, è garantito che posso scegliere l'intorno grande a piacere: è una proprietà globale (non locale come prima), perché ogni traiettoria convergerà all'origine, a prescindere da dove inizi, cioè da dove è la condizione iniziale, per tutto lo spazio. In \mathbb{R}^2 immaginiamoci il piano con un solo punto di equilibrio, l'origine, e che qualsiasi x_0 in qualsiasi parte del piano converga solo e soltanto e per forza all'origine, quindi vale globalmente.
- Se $x_e = 0$ non è unico punto di eq. (perché rango matrice A < massimo), abbiamo infinite soluzioni, quindi infiniti punti che sono punti di equilibrio. Ad esempio, se ci sono ∞^1 soluzioni, abbiamo una retta di soluzioni, che ovviamente passa per l'origine ($x_e = 0$ è sempre una soluzione). Ciò significa - pensiamo sempre a una retta in \mathbb{R}^2 passante per l'origine per visualizzare - che se prendo un intorno di $x_e = 0$ piccolo a piacere, troverò comunque sempre un'altro punto di equilibrio oltre all'origine: questo implica che $x_e = 0$ non è un punto asintoticamente stabile (questo perché se la mia traiettoria parte da questo altro punto di equilibrio oltre l'origine, resterà per sempre lì, quindi la mia traiettoria $x(t)$ non converge all'origine x_e per equiasintoticità) ma potrò avere soltanto stabilità semplice. Inoltre, se $x_e = 0$ non è l'unico punto di eq. vuol dire che ci sono altre soluzioni, quindi il rango di A non è massimo, quindi il suo determinante è 0, ma se **il determinante di A è 0 allora esiste un autovalore nell'origine**¹⁹, e quindi $\lambda = 0$ deve rispettare la condizione di ordine geometrico = 1.

¹⁸Se la molteplicità algebrica è maggiore di quella geometrica l'ordine geometrico è maggiore di 1

¹⁹Questo è vero perché se $\det(A) = 0$ significa che $\det(A - \lambda I) = 0$ sicuramente per $\lambda = 0$, altrimenti non vale che $\det(A) = 0$.

Questo però, sottolineiamo, vale solo per i sistemi lineari: per i sistemi non lineari si dovrà fare una distinzione tra proprietà locale e proprietà globale. Ok, quindi il discorso è che per capire se un sistema è stabile o meno ci servono gli autovalori, e per dimensioni contenute del polinomio caratteristico di A noi sappiamo calcolare gli autovalori calcolando le radici del suddetto polinomio. **Ma quando le dimensioni sono troppo grandi?** In questo caso facciamo questa cosa:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Dai coefficienti del polinomio capiamo, tramite algoritmi, se le radici sono a parte reale minore di 0 o no. Per farlo usiamo il **Criterio di Routh**.

17.0.1 Riassunto Stabilità:

- Sistema Non Lineare:

- x_e è localmente semplicemente stabile se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon \implies \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- x_e è asintoticamente localmente stabile se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon \implies \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

e inoltre:

$$\exists \delta_a > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_a \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

- x_e è asintoticamente globalmente stabile se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon : \|x_0 - x_e\| < \delta_\epsilon \implies \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

e inoltre:

$$\forall k > 0 \quad \|x_0 - x_e\| < k \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Quindi comunque sia grande la perturbazione k , la traiettoria converge sempre all'origine. Questo è diverso dal caso di stabilità locale asintotica perché là $\exists \delta_a$, cioè la traiettoria non deve convergere all'origine per ogni k grande arbitrariamente, ma solo entro un intorno di grandezza δ_a . Quindi pensando a \mathbb{R}^2 , la asintoticità è globale se è in tutto \mathbb{R}^2 , quindi per ogni k appunto, mentre è locale se è in una circonferenza di raggio δ_a . Nota che δ_a non c'entra nulla con δ_ϵ , sono due grandezze di intorni diversi.

Diversamente dal caso lineare qua possiamo avere un numero FINITO di punti di equilibrio superiore a 1 .

- Sistema Lineare:

- x_e è localmente semplicemente stabile se gli autovalori hanno parte reale non negativa quando hanno ordine geometrico pari a 1, e strettamente negativa quando hanno ordine geometrico maggiore di 1. In questo caso i punti di equilibrio sono solo l'origine o infiniti, non ce ne possono essere in numero finito maggiore di 1.
- x_e è globalmente asintoticamente stabile quando è l'unico punto di equilibrio ed è l'origine, oltre ad avere tutti gli autovalori a parte reale strettamente negativa.

Quindi nel caso lineare la stabilità asintotica è sempre globale ed ha senso solo quando $x_e = 0$ è l'unico punto di equilibrio. Notare che la stabilità si ricava in base agli autovalori di Φ : ciò significa che nel caso lineare la stabilità non dipende dal singolo punto di equilibrio x_e , e quindi studiandola si scopre se l'intero sistema (e quindi OGNI, TUTTI, suo punto di equilibrio) è stabile o meno (nessun punto di equilibrio è stabile). Non ci possono quindi essere dei punti di equilibrio che sono stabili e altri no. Diversa è la questione nel caso non lineare, dove ciasun punto di equilibrio ha le sue caratteristiche di stabilità e pertanto ogni x_e va studiato singolarmente. Infine notare che in un sistema lineare la **stabilità asintotica locale implica quella globale**, per quello abbiamo scritto direttamente la proprietà di stabilità globale asintotica senza nominare quella locale nel caso lineare.

17.1 Criterio di Routh:

Si tratta di una generalizzazione della Regola di Cartesio.

17.1.1 C.N. di egual segno:

Prendendo il nostro polinomio con n radici:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Sappiamo che esso si può fattorizzare nella forma:

$$a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Il nostro obiettivo con la stabilità è avere tutte radici a parte reale strettamente negativa, vediamo che succede nel polinomio se tutte le nostre radici sono appunto con parte reale strettamente negativa, ad esempio:

$$p(\lambda) = a_n (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Vediamo che, se andiamo a rimoltiplicare:

$$a_n [\lambda^2 + 3\lambda + 2]$$

All'interno delle parentesi i termini sono tutti positivi: è il segno di a_n che decide il segno di ogni addendo del polinomio $p(\lambda)$, polinomio che avrà quindi termini tutti con lo stesso segno. Questo nell'ipotesi di radici del polinomio tutte a parte reale strettamente negativa. Questo significa che: **per avere radici del polinomio tutte a parte reale strettamente negativa dobbiamo avere tutti gli addendi del polinomio dello stesso segno.** WLOG possiamo porre $a_n > 0$: lo posso fare perché quando cerco le radici sto ponendo uguale a 0 il mio polinomio. Quindi la **condizione necessaria di stabilità diventa**: le radici del polinomio sono tutte a parte reale strettamente negativa se gli addendi del polinomio hanno tutti segno positivo. Avessimo posto WLOG $a_n < 0$ avremmo dovuto avere tutti addendi di segno negativo. Se la C.N. di equal segno di ogni addendo non è rispettata possiamo stare sicuri che il sistema è instabile, cioè non è né stabile asintoticamente né stabile semplicemente, questo perché un addendo può avere segno diverso dagli altri (e quindi non far rispettare la C.N. in questione) solo se nella fattorizzazione del polinomio compaiono radici a parte reale positiva, quindi non tutte negative come abbiamo ipotizzato prima.

17.1.2 C.N. di presenza di ogni termine:

Per la stabilità asintotica è necessario che i coefficienti ci siano tutti, dall'n-esimo allo 0-esimo. Notare che un coefficiente può essere nullo solo se ci sono delle radici nel polinomio che sono a parte reale positiva (e in tal caso non ci possiamo fare nulla: c'è instabilità), o se ci sono radici nel polinomio che sono a parte reale nulla: in quest'ultimo caso anche se questa C.N non è rispettata possiamo comunque avere stabilità semplice, e vedremo dopo come verificarla. Intanto facciamo degli esempi:

$$p(\lambda) = 3x^2 - 3 = 3[(x - 1)(x + 1)]$$

Vediamo che la C.N. di avere tutti i termini di ogni grado del polinomio non è rispettata, e calcolando le radici ne troviamo una a parte reale negativa -1 (che ci va bene) e una a parte reale positiva +1, che non ci va bene e ci dice che non ci possiamo fare niente: il sistema è instabile. Quest'altro esempio è invece più interessante:

$$p(\lambda) = x^2 + x = x(x + 1) = 0$$

Vediamo che la C.N. di avere tutti i termini non è rispettata manco qui, ma calcolando le radici ne troviamo una a parte reale negativa -1 e una nulla 0. In questo caso c'è stabilità semplice. Quindi se questa C.N non è rispettata non è detto che il sistema è instabile, semplicemente non è stabile asintoticamente, ma potrebbe esserlo semplicemente.

17.1.3 Tabella di Routh:

Verificate queste due C.N, costruisco la **Tabella di Routh**.

- Le prime due righe della mia tabella sono formate inserendo i coefficienti, a partire da n . Il primo sull' n -esima riga, il secondo sull' $(n-1)$ -esima, il terzo di nuovo sull' n -esima, il quarto sull' $(n-1)$ -esima e così via, fino a a_0 :

$$\begin{array}{c|cccc} n & | & a_n & a_{(n-2)} & \dots \\ n-1 & | & a_{(n-1)} & a_{(n-3)} & \dots \end{array}$$

Se n è pari il nostro polinomio caratteristico avrà $n+1$ coefficienti, un numero dispari quindi. Avremo quindi una riga con un coefficiente in più dell'altra. Se n è dispari invece il nostro polinomio caratteristico avrà $n+1$ coefficienti, un numero pari quindi.

- Costruisco la riga n_2 con i determinanti b_i che ottengo in questo modo: b_{n-2} lo ottengo prendendo le righe n e $n-1$, e prendendo il determinante di 1° e 2° colonna e dividendolo per $-a_{n-1}$. Per b_{n-3} prendo il determinante di 1° e 3° colonna e lo divido per $-a_{n-1}$. In generale b_{n-i} lo ottengo prendendo le due righe n e $n-1$, e facendo il determinante di 1° e i° colonna e dividendolo per $-a_{n-1}$.

$$\begin{array}{c|cccc} n & | & a_n & a_{(n-2)} & \dots \\ n-1 & | & a_{(n-1)} & a_{(n-3)} & \dots \\ \hline n-2 & | & b_{(n-2)} & b_{(n-3)} & \dots \end{array}$$

Se ho n pari, ci sarà un caso in cui non troverò una matrice 2×2 , di cui posso calcolare il determinante facilmente, bensì una colonna con due componenti e una con una sola: in quel caso l'altra componente la metto a 0, solo ai fini della costruzione del determinante.

- Costruisco la riga $n-3$ con i determinanti c_i calcolati nella stessa maniera di come ho calcolato la riga $n-2$, stavolta però prendendo le righe $n-1$ e $n-2$ e dividendo per $-b_{n-2}$. Quindi in generale costruisco la riga $n-i$ con $i \geq 2$ prendendo le due righe sopra di questa riga e facendo i determinanti come spiegato al passo precedente. Termino alla riga 0.

Posso sempre costruire questa tabella? No! Non posso quando un coefficiente della prima colonna è pari a 0, perché quando vado a calcolare il determinante per i termini della riga sotto a questo coefficiente *dovrei dividere per 0*. Questo viene chiamato *caso critico*, posso distinguere due condizioni: sia annulla il 1° elemento della riga più eventualmente altri successivi della riga; secondo caso è che si annulla tutta la riga. Comunque se non ci imbattiamo in questa situazione abbiamo costruito la tabella. È come se per ogni riga che ho costruito della tabella io stessi facendo una divisione di polinomi, e per ogni riga stessi considerando un polinomio di grado inferiore di 1 rispetto alla riga precedente. Infatti, se andiamo a prendere la riga $(n-1)$ -esima e $(n-2)$ -esima e andiamo a calcolare il polinomio prendendo come termine massimo il primo sulla riga $n-1$, poi quello subito sotto, poi il secondo sulla riga $n-1$ e così via (insomma la procedura inversa rispetto a quella che abbiamo fatto quando abbiamo costruito per la prima volta la tabella di Routh), otteniamo effettivamente otteniamo un polinomio di grado inferiore a 1 rispetto a quello originale, cioè un polinomio di grado $n-1$. E questo vale per ogni due righe, fino a riga 1 e riga 0. Bene, detto questo il criterio dice che: *se non ci sono casi critici*, ci sono tante radici a parte reale *positiva*, quante sono le variazioni di segno nella prima colonna della tabella di Routh. Quindi **se non ci sono variazioni tutte le radici sono strettamente negative**, e quindi c'è la stabilità asintotica. Questa è la **condizione necessaria e sufficiente**. Facciamo un esempio:

$$\lambda^5 + 7\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Andiamo a costruire la tabella. Ci sono tutti i coefficienti e sono tutti positivi come a_n , quindi la condizione necessaria è rispettata. La tabella ci dà:

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & | & 5 & 3 & 2 \\ 4 & | & 7 & 1 & 1 \\ \hline 3 & | & 16/7 & 9/7 \\ 2 & | & -47/16 & 1 \\ 1 & | & a < 0 \\ 0 & | & 1 \end{array}$$

Vediamo che c'è una variazione di segno: se la mia domanda era se c'erano tutti autovalori a parte reale strettamente negativa per la stabilità asintotica la risposta è no, se la mia domanda era quanti autovalori positivi e negativi ci sono la risposta è che, dato che ci sono due variazioni di segno, ho due autovalori a parte reale positiva e il resto a parte reale negativa.

Semplificazione: possiamo semplificare i calcoli relativi alla tabella moltiplicando o dividendo tutta una riga per uno scalare positivo senza cambiare il risultato. Questo mi permette di eliminare delle frazioni dalle righe e soprattutto, quando calcolo i determinanti, di non dover avere a che fare con frazioni. Se per esempio ho:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{array}$$

Quando vado a calcolare i due determinanti ottengo:

$$\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{6}{4} \quad \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{8}{4}$$

Ottenendo la tabella:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 6/4 & 8/4 \end{array}$$

Ma se io avessi moltiplicato la mia prima riga per 4:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \times & 4 & 3 & \times & 4 & 2 & \times & 4 \\ & 4 & & & & 6 & & & \end{array}$$

Allora avrei avuto

$$\frac{\det \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 3 \cdot 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{4(6 - 12)}{-4} = 6 \quad \frac{\det \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 2 \cdot 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{8}{4} = 8$$

Ottenendo in fine la tabella semplificata, perché senza frazioni, ma equivalente:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 12 & 8 \\ 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{array}$$

Che è uguale a quella di partenza semplicemente con prima e ultima riga moltiplicate per quattro. Questo che significa? Che operativamente **quando calcolo una riga con i determinanti, se il numero per cui dovrei dividere poi il det è positivo (e quindi comparirà col segno -), posso non dividerlo per quel numero e inserire nella riga semplicemente il risultato del determinante, cambiato di segno. Se invece il numero per cui dovrei dividere il det è negativo, non devo neanche cambiare di segno il det prima di inserirlo nella riga.** Nota bene che questa cosa **va fatta per tutta la riga!!** Quindi se lo fai per un determinante di una riga lo devi fare per tutti i determinanti di quella riga, come abbiamo fatto nel nostro esempio.

Si può anche studiare se le mie radici si trovano a sinistra di una certa quantità α : il criterio di Routh mi dice se le radici sono a sinistra dell'asse immaginario ($\text{Re} = 0$); ma se io faccio una traslazione, e quindi ottengo un nuovo polinomio, posso verificare se le radici sono a sinistra di una certa retta verticale, quindi a sinistra di un certo valore. Facciamo un esempio: $p(\lambda) = \lambda + 2$. Con il criterio di Routh vedo che l'autovalore (che è $\lambda = -2$) è strettamente negativo, quindi a sinistra dell'asse immaginario. Ora voglio vedere se l'autovalore è a sinistra di -1 , come faccio? Faccio una traslazione: a λ sostituisco $\bar{\lambda} = \lambda - 1$. Adesso ho un nuovo polinomio $p(\bar{\lambda}) = \lambda + 1$. Adesso, facendo il criterio di Routh, non scoprirò più quante radici sono a sinistra dell'asse immaginario, ma quante radici sono a sinistra di -1 . In generale, se voglio vedere se gli autovalori sono a sinistra di α , sostituisco λ con $\lambda - \alpha$, e faccio il criterio di Routh. Ma perché mi interessa questa roba? Perché posso essere interessato a quanto velocemente il problema risponde, e quindi quanto sia caratterizzato da una certa costante di tempo (nel caso di autovalori reali) oppure da smorzamento e pulsazione naturale (autovalori complessi).

17.2 Casi Critici:

Abbiamo già detto che ce ne sono due.

Annullo dell'intera riga: prendiamo questo esempio:

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Vediamo la tabella di Routh:

5	1	3	2
4	1	3	2
3	0	0	0

Si è annullata tutta la terza riga. Notare che una riga nulla si può avere solo se le due righe precedenti hanno lo stesso numero di elementi e sono tra loro proporzionali (dipendenti). Per questo caso particolare è vera la proprietà per cui il polinomio di partenza è fattorizzabile in due polinomi:

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$$

- Il primo polinomio $p_1(\lambda)$, ha tante radici a parte reale positiva quante sono le variazioni di segno nella prima colonna della tabella che abbiamo costruito fino ad ora, fino alla riga di tutti 0. In questo caso c'è solo una permanenza, quindi abbiamo una radice a parte reale strettamente negativa.
- Il secondo polinomio invece è un polinomio di grado pari (precisamente il suo grado è uguale al numero di riga della riga prima della riga nulla, quindi in questo caso 4) che ha solo potenze di grado pari. Si tratta quindi del polinomio formato da penultima e ultima riga, nel nostro caso dalle righe 4 e 3. Il fatto che l'ultima riga è composta di tutti 0 ci dice che i termini di questa riga non compariranno nel polinomio, e spiega perché $p_2(\lambda)$ ha solo potenze pari. Il fatto che il polinomio abbia solo potenze pari ci dice che le radici del suddetto $p_2(\lambda)$ hanno *simmetria quadrangolare*: cioè se il polinomio ammette, nel piano dei complessi coniugati, le due radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$, ammetterà, per simmetria quadrangolare, anche le due radici complesse coniugate $\lambda_{2,3} = -\alpha \mp j\omega$, cioè quella ottenuta per simmetria rispetto all'asse y. Vedremo che, il fatto che ci sia simmetria quadrangolare, ci impedisce la stabilità asintotica: al più potremo ottenere la stabilità semplice.

Ok, quindi $p_1(\lambda)$ ci ha detto che esiste un autovalore a parte reale negativo, ora tocca analizzare bene $p_2(\lambda)$. Per ciò, dallo studio di $p(\lambda)$, ci siamo ridotti allo studio di $p_2(\lambda)$, che ha un grado in meno rispetto al polinomio originale. A volte, come in questo caso, è possibile calcolare direttamente le soluzioni di $p_2(\lambda)$, così da capire se gli autovalori sono a parte reale negativa o meno. Se lo facciamo, nel nostro caso otteniamo:

$$p_2(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2$$

Quindi, ponendo $x = \lambda^2$, otteniamo:

$$x^2 + 3x + 2$$

Se x è una radice, $\lambda = \pm x$, cioè per ogni radice che troverò di questo polinomio in x, il polinomio originare avrà la radice di x e il suo opposto -x come radici. Ecco qui che si manifesta la **simmetria quadrangolare** di $p_2(\lambda)$. Poiché per avere stabilità, per definizione di essa, non devo avere radici con parte reale positiva, l'unico caso di simmetria quadrangolare che mi sta bene è quello in cui le radici sono sull'asse immaginario (il caso di x_3 nella precedente foto): infatti in qualsiasi altro caso mi trovo una radice a sinistra dell'asse immaginario (che mi va bene per la stabilità) e la sua corrispettiva a destra dell'asse immaginario (che non mi permette la stabilità). Però questo non ci basta: oltre ad essere sull'asse immaginario le radici devono avere molteplicità algebrica 1 per poter concludere da qui che ho stabilità: altrimenti, se $m > 1$ devo verificare in qualche modo che l'ordine geometrico sia comunque 1 (cioè che $m = mg$)²⁰ prima di poter affermare che ci sia stabilità. Il discorso è quindi che, se non posso accettare radici a sinistra dell'asse immaginario ma solo sull'asse immaginario, che non potrò avere mai stabilità asintotica (parte reale < 0) ma solo stabilità semplice (parte reale ≤ 0 , nel nostro caso = 0). Vediamo se, nel nostro caso, abbiamo un

²⁰Se la molteplicità algebrica è maggiore di quella geometrica l'ordine geometrico è maggiore di 1

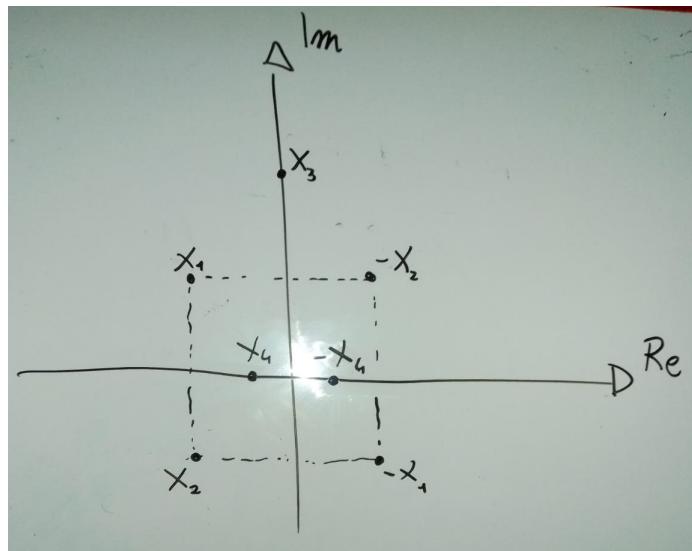


Figure 6: Esempi di simmetria quadrantale: x_1 e x_2 sono due radici complesse coniugate, con corrispettive radici simmetriche a destra dell'asse immaginario; x_3 è una radice immaginaria pura, quindi la sua radice simmetrica è sé stessa; x_4 è una radice reale, quindi la sua radice simmetrica è sull'asse reale, a destra dell'origine.

polinomio che ci dà radici sull'asse immaginario, così da avere stabilità semplice, oppure no, non avendo nessun tipo di stabilità. Vediamo che le radici del polinomio sono:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -1$$

Perciò, tornando alla variabile λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{2} \quad \lambda_{3,4} = \pm j$$

vediamo che la simmetria quadrantale non produce altre radici, poiché queste quattro radici sono numeri immaginari puri quindi le loro radici simmetriche sono loro stesse. Perciò, poiché $p_1(\lambda)$ ci dice che abbiamo un autovalore a parte reale negativa, mentre $p_2(\lambda)$ ha come radici 4 autovalori a parte reale nulla, non abbiamo stabilità asintotica, ma *abbiamo stabilità semplice*.

Nota: nel caso in cui non sia semplice calcolare le radici di $p_2(\lambda)$, o non lo si voglia fare, si può comunque capire se gli autovalori sono a parte reale negativa in questo modo:

- Prendo il mio polinomio $p_2(\lambda)$, e calcolo la sua derivata. Nel nostro caso:

$$\frac{dp_2(\lambda)}{d\lambda} = 4\lambda^3 + 6\lambda$$

- Sostituisco la riga nulla con una riga i cui termini sono i coefficienti del polinomio appena ottenuto. Nel nostro caso:

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}$$

- Prosegua nella costruzione della mia tabella con il criterio di Routh, come al solito:

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3/2 & 2 \\ 1 & 2/3 \\ 0 & 2 \end{array}$$

Vediamo che non ci sono permanenze, quindi possiamo concludere che il sistema ha stabilità semplice? Come semplice? Non dovrebbe essere asintotica? No! Perché mentire per $p_1(\lambda)$ abbiamo visto che si possono (come nel nostro caso) avere tranquillamente radici con parte reale strettamente negativa, per $p_2(\lambda)$ solo le radici a parte reale nulla sono accettabili, e per colpa di queste non possiamo avere stabilità asintotica. Quindi: **nel caso critico di riga tutta nulla, se la tabella completa non presenta variazioni, allora il sistema ha stabilità semplice, ma non asintotica come al solito.** Ovviamente, se il sistema ha variazioni, allora non è proprio stabile, come al solito.

Annnullamento di uno o più elementi nella riga ma non dell'intera riga: Per esempio:

$$\lambda^5 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2$$

Vediamo che in realtà non soddisfa le condizioni necessarie (quindi sappiamo già che non tutte le radici sono a parte reale minore di 0), ma andiamo a costruire la tabella di Routh lo stesso, per vedere quante radici a parte positiva e quante a parte negativa ho:

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Non posso costruire la riga 3. Sostituisco la riga con gli 0 con la seguente riga: prendo la riga e shifto verso sinistra i coefficienti fino ad ottenere il primo elemento non nullo, moltiplicando di $(-1)^{\text{numero di shift fatti}}$. Nel nostro caso:

$$0 \ 0 \ 2 \rightarrow (-1)^2 2 \ 0 \ 0$$

Dopodiché sommo questa nuova riga a quella vecchia. Quindi la tabella sarà:

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4' & 2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Adesso posso costruire la mia tabella:

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4' & 2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 3' & 3 & 1 \\ 2' & -1 & 3 \\ 1 & -10 \\ 0 & 3 \end{array}$$

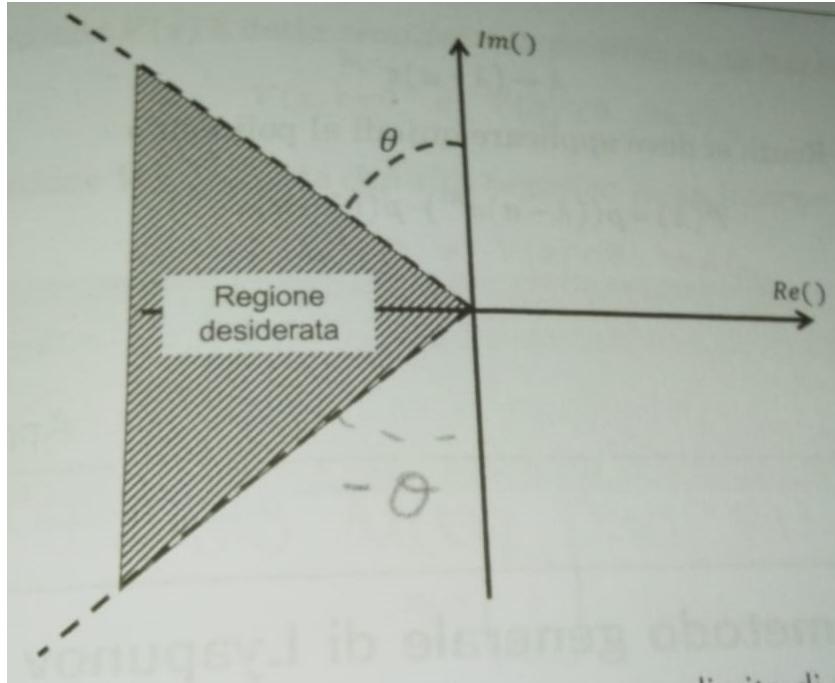
Dove abbiamo giocato diverse volte con le moltiplicazioni di una riga intera per ottenere una riga più semplice o non dover dividere il determinante. Nota che quando abbiamo sostituito una riga per qualche motivo (moltiplicazione per uno scalare positivo, risoluzione di un caso critico ecc.) abbiamo scritto il numero di riga con un ' davanti. Comunque il risultato: ho due variazioni di segno, quindi ho due radici a parte reale positiva.

Riassunto il criterio di Routh:

- Stabilità asintotica se e solo se entrambe le C.N. sono rispettate, non ci sono casi critici e non ci sono variazioni di segno in tabella.
- Stabilità semplice se:
 - La C.N. di presenza di ogni termine non è rispettata, ma studiando il polinomio, con Routh o in altro modo, escono solo autovalori $\text{Re } \lambda \leq 0$.
 - Entrambe le C.N. sono rispettate, ma compare UN SOLO caso critico, di uno qualunque dei due tipi. Nel caso in cui, risolvendo il caso critico, si costruisca una tabella senza variazioni.

- Entrambe le C.N. sono rispettate, ma compaiono DUE O PIÙ casi critici. Nel caso in cui, risolvendo tutti i casi critici, si riesca a costruire una tabella senza variazioni. Non basta: bisogna verificare scomponendo a mano il polinomio (es. ruffini), che i due o più autovalori con parte reale nulla (a cui corrispondono i due o più casi critici) abbiano ordine geometrico pari a uno (cioè molteplicità algebrica pari a quella geometrica).
- Instabilità in ogni altro caso.

Esercizio su trasformazione in regione conica: Voglio che i miei autovalori siano in questa regione: Il mio polinomio originario è $p(\lambda)$. Ciò che devo effettuare è una rotazione degli assi,



quindi costruisco il polinomio:

$$\bar{p}(\lambda) = p(\lambda e^{j\theta})p(\lambda e^{-j\theta})$$

Vediamo che questo polinomio avrà grado $2n$. La cosa importante è che appunto se $\bar{p}(\lambda)$ avrà tutte radici a parte reale negativa, significherà che tutte le radici di $p(\lambda)$ originario apparterranno al cono definito. Se invece ci sono delle variazioni di segno nella tabella di Routh: *queste variazioni di segno saranno il doppio di quelle presenti in $p(\lambda)$* . Quelle di $p(\lambda)$ corrisponderanno alle radici che cadono fuori dalla zona conica. Possiamo verificare che un'autovalore appartenga alla regione conica trasformandolo in questo modo poiché la trasformazione

$$\lambda \rightarrow \lambda e^{j\theta} \quad \lambda \rightarrow \lambda e^{-j\theta}$$

Corrisponde rispettivamente a una rotazione del sistema di riferimento di un angolo θ e a una rotazione degli assi di angolo $-\theta$. Questo problema con la regione conica si pone quando si vuole studiare *lo smorzamento delle radici autovalori complessi e coniugati* del polinomio caratteristico. Se l'angolo è pari a θ , allora se la coppia di autovalori complessi coniugati appartiene al cono significa che c'è uno smorzamento $\xi > \sin \theta$

Tronco di cono come combinazione di regione conica e semipiano di ascissa generale: Notiamo comunque che le considerazioni per il cono sono analoghe a quelle fatte per verificare se un'autovalore è nel semipiano a parte reale minore di una generica ascissa α , tanto che possiamo pensare di combinare le due e vedere se l'autovalore è in una regione conica traslata a sinistra rispetto all'asse immaginario²¹). Come fare? Se ci ricordiamo che la trasformazione per il semipiano era:

$$\lambda \rightarrow \lambda - \alpha$$

²¹Vediamo che, come nel caso del semipiano a parte reale minore di una generica ascissa, trasliamo sempre verso sinistra: questo per ragioni di stabilità, non avrebbe senso in questi termini traslare a destra dell'asse immaginario.

Mentre per il cono:

$$\lambda \rightarrow \lambda e^{\pm j\theta}$$

Allora troviamo la trasformazione che ci serve combinando questi due:

$$\lambda \rightarrow (\lambda - \alpha)e^{j\theta} \quad \lambda \rightarrow (\lambda - \alpha)e^{-j\theta}$$

Quindi è come se avessimo preso il cono raffigurato nell'immagine precedente, e lo avessimo traslato a sinistra dell'asse immaginario. Abbiamo fatto quindi due rototraslazioni. Il nuovo polinomio è quindi:

$$p(\lambda) = p((\lambda - \alpha)e^{j\theta})p((\lambda - \alpha)e^{-j\theta})$$

17.3 Nel caso discreto:

Per studiare la stabilità dei nostri sistemi discreti, di cui sappiamo che la discriminante per le traiettorie è il cerchio di raggio unitario, possiamo fare in due maniere. Prima maniera è quella di applicare un metodo per vedere se dato un polinomio le radici sono dentro il cerchio: il *Criterio di Jury*. Il secondo metodo, più conveniente, è quello di effettuare una trasformazione che trasformi il cerchio in una parte di piano a sinistra dell'asse immaginario, in modo che la parte all'esterno del cerchio sia invece la parte a destra dell'asse immaginario. Mentre la zona limite, cioè la circonferenza, è proprio l'asse immaginario. Se trovo questa trasformazione tra questi due piani (quello con la circonferenza e quello con i semipiani) posso trasformare un problema sulle radici di un polinomio di un sistema discreto ad un polinomio con criterio di Routh. La trasformazione in questione è:

$$\lambda = \frac{1 + W}{1 - W}$$

Con W punto sul piano complesso che dobbiamo raggiungere, mentre λ è invece sul piano complesso con la circonferenza. Vediamo che:

- Se W è sull'asse immaginario. Quindi $W = j\omega$. Quindi W percorre l'asse immaginario al variare di ω ; devo vedere se, in corrispondenza di questo percorso che fa W , λ percorre la circonferenza unitaria. Vediamo, quando $W = j\omega$ si ha che:

$$\lambda = \frac{1 + j\omega}{1 - j\omega}$$

Ok ragioniamo, se un numero complesso è sul centro di raggio unitario vuol dire che il suo modulo (che di fatto è la lunghezza del vettore che congiunge il punto con l'origine) deve essere 1. Quindi:

$$|\lambda| = \left| \frac{1 + j\omega}{1 - j\omega} \right| = \frac{|1 + j\omega|}{|1 - j\omega|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1$$

E quindi effettivamente il modulo è 1 sempre, quindi λ è sempre sulla circonferenza, per qualsiasi valore di W sull'asse immaginario.

- Se W è a sinistra dell'asse immaginario. Cioè $W = \alpha \pm j\omega$ con $\alpha < 0$. Quindi:

$$\lambda = \frac{1 + \alpha \pm j\omega}{1 - \alpha \mp j\omega}$$

Ora, noi sappiamo che, nel caso discreto, **se il modulo dell'autovalore $|\lambda|$ è minore di 1 sono all'interno del cerchio, altrimenti sono all'esterno** (notare che ha senso, perché abbiamo detto che il modulo è la lunghezza del vettore che congiunge il punto del numero complesso e l'origine. Se questa lunghezza è minore di 1 a partire dall'origine è ovvio che sia dentro al cerchio, al contrario è fuori dal cerchio). Ok torniamo a noi, noi vogliamo dimostrare che la trasformazione scelta permetta di passare dall'interno del cerchio nel piano di λ alla zona a sinistra dell'asse immaginario nel piano di W . Perciò andiamo a vedere se il modulo di λ è minore di 1 quando W è nella zona a sinistra dell'asse immaginario:

$$|\lambda| = \frac{|1 + \alpha \pm j\omega|}{|1 - \alpha \mp j\omega|} = \frac{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + \omega^2}}$$

Ma poiché $\alpha < 0$, si ha che $(1 + \alpha) < (1 - \alpha)$, cioè il nostro numeratore è più piccolo del nostro denominatore, quindi questa è una frazione non apparente:

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + \omega^2}} < 1$$

Quindi, $|\lambda| < 1$, cioè siamo dentro la circonferenza, per ogni W a sinistra dell'asse immaginario

- Se W è a destra dell'asse immaginario, vale il discorso speculare rispetto a quello in cui W è a sinistra dell'asse immaginario. Come nel punto precedente infatti ritroviamo:

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + \omega^2}}$$

Ma stavolta, poiché $\alpha > 0$, si ha che $(1 + \alpha) > (1 - \alpha)$, quindi:

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + \omega^2}} > 1$$

E quindi per ogni W a destra dell'asse immaginario siamo fuori dalla circonferenza unitaria.

Ok quindi questa trasformazione funziona perfettamente in tutti e tre i casi. Quindi la trasformazione è giusta. Così da un polinomio a tempo discreto ho ottenuto un nuovo polinomio sul quale **posso utilizzare il Criterio di Routh**. Facciamo un esempio in cui applichiamo questa trasformazione:

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Con la trasformazione otteniamo il polinomio:

$$p(W) = 2\left(\frac{1+W}{1-W}\right)^3 + 3\left(\frac{1+W}{1-W}\right)^2 + \left(\frac{1+W}{1-W}\right) + 1 = 0$$

Che, moltiplicando per $(1 - W)^3$ diventa:

$$p(W) = 2(1 + W)^3 + 3(1 + W)^2(1 - W) + (1 + W)(1 - W)^2 + (1 - W)^3 = 0$$

Svolgendo i prodotti notevoli:

$$p(W) = 2 + 2W^3 + 6W + 6W^2 + 3 - 3W^2 + 3W - 3W^3 + 1 - W - W^2 + W^3 + 1 - W^3 - 3W + 3W^2 = -W^3 + 5W^2 + 5W + 7$$

Vediamo che, poiché il polinomio non ha tutti i coefficienti con lo stesso segno, non tutte le radici avranno parte reale negativa, ma ci sarà almeno una radice con parte reale positiva. Poiché nel polinomio in W abbiamo almeno una radice a parte reale positiva, nel polinomio originale discreto in λ , abbiamo almeno una radice fuori dal cerchio unitario, per quanto abbiamo trovato prima sulla trasformazione. In questo modo siamo riusciti a studiare la nostra stabilità del nostro sistema discreto e a scoprire che: **Il nostro sistema discreto non è stabile**.

Altra Trasformazione: trasformare il polinomio $p(\lambda)$ in un nuovo polinomio costruito con la seguente trasformazione:

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda}$$

Quindi si passa dal polinomio:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Al polinomio:

$$p(\bar{\lambda}) = a_n + a_{n-1} \bar{\lambda} + \dots + a_1 \bar{\lambda}^{n-1} + a_0 \bar{\lambda}^n$$

Avendo diviso per λ^n e poi applicato la sostituzione. I coefficienti sono quindi in ordine inverso rispetto a prima. Se prima da a_0 a a_n il grado cresceva, ora, poiché siamo passati ai reciproci, il grado da a_0 a a_n decresce. Pensiamo al nostro polinomio con $n = 3$, per semplicità (ovviamente vale per qualsiasi n). Sappiamo che possiamo scrivere questo polinomio nella forma:

$$a_3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$$

Ok adesso adottiamo la trasformazione, e sostituiamo a λ $\frac{1}{\lambda}$. Quindi otteniamo:

$$a_3 \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda_1 \right) \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda_2 \right) \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda_3 \right) = 0$$

Adesso moltiplicando tutto per λ^3 :

$$a_3 (1 - \lambda_1 \lambda) (1 - \lambda_2 \lambda) (1 - \lambda_3 \lambda) = 0$$

Adesso, mettiamo in evidenza per ogni parentesi il suo λ_i , ottenendo:

$$a_3 \lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \bar{\lambda} \right) \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \bar{\lambda} \right) \lambda_3 \left(\frac{1}{\lambda_3} - \bar{\lambda} \right) = 0$$

Avendo chiamato $\bar{\lambda}$ la nostra nuova incognita. Ecco il nostro nuovo polinomio. Siamo quindi partiti da:

$$\lambda = \lambda_i$$

E siamo arrivati al polinomio:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda_i}$$

Anche dopo aver trasformato, vediamo che se inizialmente le radici erano tutte a parte reale negativa, lo saranno ancora. Questo perché il passaggio al reciproco non cambia il segno dei termini. Questo significa che **io posso costruire la tabella di Routh scrivendo i coefficienti in ordine inverso, perché gli autovalori del polinomio che otterò, seppur diversi rispetto a quelli del polinomio con i termini non in ordine inverso, hanno lo stesso segno, e quindi il Criterio di Routh mi porta alle stesse quantità di radici a parte reale positiva e a parte reale negativa.** Quindi il polinomio che studio è diverso, gli autovalori sono diversi in termini di valori, ma i segni delle parti reali degli autovalori, che sono quelli che ci interessano per il Criterio di Routh, sono gli stessi, e quindi a questi fini posso studiare l'altro polinomio, che magari è più comodo.

18 Ma se $u \neq 0$?

In questo caso il nostro sistema non lineare è:

$$f(x_e, u_e) = 0$$

Quindi ho uno forzamento diverso da 0 ma comunque sono in uno stato e resto in quello stato.

19 Adesso possiamo studiare il sistema non lineare pendolo:

La cui equazione è:

$$m\ell\ddot{\theta} + mg \sin \theta + k\ell\dot{\theta} = u$$

Poiché c'è $\sin \theta$ questa è un'equazione differenziale non lineare. Il primo problema che ci poniamo è associare un modello a questo sistema. Poniamo:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

Quindi:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{u}{m\ell} - \frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

Quali sono i punti di equilibrio? Devo trovare quei punti t.c. $\dot{x} = 0$ cioè:

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0 \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{u}{m\ell} - \frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0$$

Per \dot{x}_2 , dato che $x_2 = 0$, per quanto trovato dalla prima componente, e per $u_e = 0$, prendendo quindi il caso di equilibrio del sistema quando non gli applichiamo proprio forza u, si trova:

$$-\frac{g}{\ell} \sin x_1 = 0 \implies x_1 = k\pi$$

Perciò abbiamo due punti (e gli infiniti multipli che ritornano nella stessa posizione quando rifaccio un altro giro della circonferenza goniometrica) le cui due prime componenti sono $x_{1e} = 0$ per un punto e $x_{1e} = \pi$ per l'altro. Quindi abbiamo due punti di equilibrio:

$$x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_e = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché abbiamo trovato prima che la seconda componente è $x_2 = 0$ in entrambi i casi.

Posso pensare di considerare l'approssimazione lineare di questo sistema nell'intorno del punto di equilibrio che sto considerando. Cioè

$$\dot{x} = f(x, u)$$

La scrivo, ponendo $u_e = 0$ come abbiamo fatto prima, come:

$$\dot{x} = f(x, u) = f(x_e, u_e) + \frac{df}{dx}_{(x_e, u_e)} (x - x_e) + \frac{df}{du}_{(x_e, u_e)} (u - u_e) + \dots$$

Dove ... sono i termini di ordine successivo che trascuriamo. Notiamo che $f(x_e, u_e)$ è 0, poiché è $\dot{x} = f(x, u)$ quando viene calcolata nel punto di equilibrio, cioè:

$$\dot{x}_{(x_e, u_e)} = f(x_e, u_e)$$

E abbiamo detto prima che un punto di equilibrio (come appunto (x_e, u_e)), ha $\dot{x} = 0$. Il secondo termine invece è uno Jacobiano²², che calcolato nel punto di equilibrio (x_e, u_e) ci dà una matrice A; anche il terzo termine è uno Jacobiano, e analogamente ci dà la matrice B. Perciò:

$$\dot{x} = A(x - x_e) + B(u - u_e)$$

Che è il nostro sistema in prima approssimazione. Adottando il seguente cambio di coordinate:

$$\tilde{u} = u - u_e \quad z = x - x_e$$

Vediamo quindi che:

$$\dot{z} = \dot{x} - o = \dot{x}$$

Quindi con il cambio di coordinate sia le matrici che la struttura rimane la stessa:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = Az + B\tilde{u}$$

Adesso dobbiamo trovare le matrici A e B. Iniziamo dalla matrice Jacobiana A:

$$A = \frac{df}{dx}_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \frac{df_{\dot{x}_1}}{dx_1} & \frac{df_{\dot{x}_1}}{dx_2} \\ \frac{df_{\dot{x}_2}}{dx_1} & \frac{df_{\dot{x}_2}}{dx_2} \end{pmatrix}_{(x_e, u_e)}$$

Ma f che è? f lo abbiamo visto prima, è:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Ed è quindi un vettore che contiene delle funzioni che dipendono da x e u, precisamente, se ci ricordiamo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\dot{x}_1}(x, u) \\ f_{\dot{x}_2}(x, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{u}{m\ell} - \frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

²²è la matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione

Bene, noi di questa f dobbiamo fare quattro derivate, le derivate parziali combinate con le componenti di f. Otteniamo:

$$\frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1}(\frac{u}{m\ell}) - \frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 & \frac{d}{dx_2}(\frac{u}{m\ell}) - \frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Ok, adesso passiamo alla matrice B. Non cambia molto, sempre una Jacobiana dobbiamo calcolare, ma stavolta non sarà 2x2 ma sarà un vettore colonna. Questo perché c'è un solo ingresso u, cioè u non è un vettore composto da più ingressi u_i :

$$\frac{df}{du} = \begin{pmatrix} \frac{df_{x_1}}{du} \\ \frac{df_{x_2}}{du} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{pmatrix}$$

Queste matrici ora vanno calcolate nel nostro punto (x_e, u_e) ; ma di punti (x_e, u_e) ne abbiamo due!

- Per il punto (0,0):

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}_{(0,0)} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{pmatrix}_{(0,0)} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{pmatrix} u$$

Come abbiamo visto tempo fa nell'esercizio sui conigli, quando incontriamo una matrice del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Che ha tutti 1 sulla diagonale sopra alla diagonale principale e una serie di coefficienti in ultima riga, possiamo subito trovare il polinomio caratteristico. Vediamo che la nostra matrice A è fatta così, e quindi il suo polinomio caratteristico associato è:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{\ell}$$

Per la Regola di Cartesio, poiché g, ℓ e m sono tutte positive e quindi non cambiano il segno del loro monomio, vediamo che le radici del polinomio saranno tutte a parte reale negativa. Se saranno due radici reali allora ci saranno due modi aperiodici convergenti; se invece saranno due complesse coniugate ci sarà un modo pseudo-periodico sempre convergente. Vediamo quindi, dato che i modi sono convergenti, se io perturbo il sistema poi i modi tendono a **convergere, cioè a tornare nella posizione di equilibrio**. Quindi effettivamente (0,0) è punto di equilibrio stabile.

- Per il punto $(\pi, 0)$, quello verticale:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}_{(\pi,0)} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{pmatrix}_{(\pi,0)} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{pmatrix} u$$

Quindi A, che è sempre nella stessa forma del punto precedente, avrà il seguente polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{\ell}$$

Perciò, sempre per la Regola di Cartesio vediamo che essendoci una variazione di segno c'è una radice a parte reale positiva e una a parte reale negativa. In effetti, diversamente dal punto (0,0), il punto $(\pi, 0)$ ha la proprietà che appena perturbo la massa questa tenderà ad **allontanarsi dalla posizione d'equilibrio, cioè a divergere**, cosa dovuta all'autovalore a parte reale positiva.

19.1 Che succede nel modello linearizzato se ho $\text{Re } \leq 0$?

Questo è un caso critico. Poiché non posso dedurre dal comportamento del sistema linearizzato il comportamento del sistema originale. In altre parole, **se il sistema linearizzato ci dà la stabilità semplice, non possiamo dire nulla sulla stabilità del sistema non lineare originario**. Abbiamo quindi tre casi:

- Sistema linearizzato è instabile \implies Sistema non lineare originario è instabile
- Sistema linearizzato è asintoticamente stabile \implies Sistema non lineare originario è asintoticamente stabile
- Sistema linearizzato è semplicemente stabile (cioè ci sono delle radici a parte reale nulla) \implies Non posso dedurre nulla sul sistema non lineare omogeneo: ho bisogno di metodi più complessi.

Quali sono questi metodi più complessi? Li accenniamo soltanto.

19.1.1 Nel caso continuo:

Nel caso continuo questi metodi si basano sulla **Funzione di Lyapunov** $V(x)$. Con questa studiamo l'energia di un sistema. Se un sistema è stabile asintoticamente l'energia decresce, avendo il punto di equilibrio in un punto di energia minima. Questo vuol dire che: un sistema $\dot{x} = f(x, u_e)$, fissata una funzione $V(x) > 0$, è stabile se e solo se:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \dot{x} < 0$$

Questo proprio perché l'energia decrescente è condizione di stabilità asintotica.

19.1.2 Nel caso discreto, Stabilità Interna e Stabilità Esterna:

Per i sistemi a tempo discreto dobbiamo prima definire il punto di equilibrio. Dato un sistema discreto:

$$x(k+1) = f(x(k), 0)$$

Di cui per semplicità poniamo $u = 0$, i punti di equilibrio sono tutti quei punti per cui se sono in quello stato non esco da quello stato, cioè tutti i punti che soddisfano:

$$x_e = f(x_e, 0)$$

Quindi, sempre per $u = 0$, partiamo dal nostro modello implicito:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Calcolando $x(k)$ nel punto di equilibrio x_e , per definizione di punto di equilibrio:

$$x_e = Ax_e$$

Quindi sia $x(k)$ che $x(k+1)$ valgono x_e , poiché per quanto detto un punto di equilibrio x_e è un punto in cui a qualsiasi tempo $k+i$ noi siamo si resta nel punto x_e . Quindi x sempre x_e vale a qualsiasi tempo $k+i$ sia. Ora, notiamo che, la precedente equazione viene sempre rispettata se $x_e = 0$:

$$0 = 0$$

Ciò significa che, anche nei sistemi a tempo discreto e non solo in quelli a tempo continuo, **l'origine è sempre un punto di equilibrio del sistema**. Questo per quanto riguarda quella che viene chiamata **Stabilità Interna** del sistema.

20 Stabilità Esterna:

Fino ad ora, da quando abbiamo iniziato a parlare di stabilità, abbiamo parlato di **stabilità interna**. Tuttavia noi potremmo avere la descrizione del sistema solo dal punto di vista Ingresso/Uscita, e non quella completa che abbiamo sempre avuto.

20.1 A tempo continuo:

La descrizione del sistema dal punto di vista Ingresso/Uscita è la seguente

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Ci chiediamo se possiamo solo da qua dare la definizione di stabilità: si può, ma è diversa. Si definisce in questo caso, per differenziarla rispetto alla stabilità interna, la **Stabilità Esterna**. Distinguiamo due casi di stabilità esterna:

- Stabilità esterna nello stato zero: $x_0 = 0$
- Stabilità esterna in ogni stato: x_0 generico qualsiasi

Bene, detto questo, come si calcola sta stabilità esterna? La stabilità esterna corrisponde a verificare che **in corrispondenza di un ingresso limitato l'uscita sia limitata**. Cioè:

$$\forall M > 0 \quad \exists N_{x_0, M} > 0 : \|u(t)\| < M \implies \|y(t)\| < N$$

20.1.1 Caso nello stato zero:

Vediamo che scompare l'evoluzione libera e rimane solo

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Abbiamo detto che, in corrispondenza di un ingresso u limitato, questa uscita deve essere limitata, cioè:

$$\|y(t)\| = \left\| \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|W(t-\tau)u(\tau)\|d\tau \leq \int_0^t \|W(t-\tau)\| \|u(\tau)\|d\tau$$

Avendo utilizzato prima questa proprietà:

$$\left\| \int_0^t f(\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(\tau)\|d\tau$$

E poi, per l'ultima diseguaglianza, questa proprietà:

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

Ora, ragioniamo, abbiamo detto che la stabilità esterna c'è se, dato un ingresso limitato, si ha un'uscita limitata. Quindi prendiamo la nostra tesi:

$$\|u(t)\| < M$$

Quindi la nostra uscita limitata si può scrivere come:

$$\|y(t)\| \leq \int_0^t \|W(t-\tau)\| \|u(\tau)\|d\tau < \int_0^t \|W(t-\tau)\| M d\tau < N$$

Vediamo quindi che la condizione di uscita limitata, data un'entrata limitata, si riduce alla condizione della limitatezza di un integrale (M è una costante che ovviamente è limitata e possiamo dividerla a N volendo). Quindi, **un sistema è stabile esternamente nello stato zero se e solo se** è verificata la condizione:

$$\int_0^t \|W(\tau)\|d\tau < k_1 \quad \forall t$$

Questo che significa? Che i termini di $W(t)$ devono essere convergenti. Ma i termini di $W(t)$ sono i modi del sistema che sono sia eccitabili che osservabili. Ciò significa che c'è stabilità esterna nello stato zero se i modi che sono sia eccitabili che osservabili sono convergenti, cioè gli autovalori associati hanno tutti parte reale strettamente minore di 0. Perché non parte reale uguale a 0? Perché quelli non hanno un integrale limitato! Infatti solo una funzione convergente ha un integrale limitato: una funzione che diverge ha chiaramente un integrale che

è una funzione illimitata, ma anche una funzione che resta costante ha un integrale che è una funzione illimitata, te lo dimostro in due modi. Primo modo: dato che l'integrale è l'area sotto la funzione, è ovvio che una funzione costante abbia un'area che non è limitata, poiché scorrendo a destra delle ascisse trovi sempre più area, e della stessa grandezza di prima; Secondo modo: prendo una qualsiasi funzione costante e ci faccio l'integrale:

$$\int 3 = 3x$$

Che non è una funzione limitata. **Quindi solo le funzioni convergenti hanno un integrale limitato** e perciò solo gli autovalori a parte reale **strettamente negativa** ci vanno bene. Quelli a parte reale minore o uguale a 0 no, perché i modi costanti non ci vanno bene. Ora ricordiamoci che se un sistema ha una stabilità interna asintotica se ha tutti gli autovalori a parte reale strettamente minore di 0. Ovviamente, se ha TUTTI gli autovalori a parte reale negativa, il sottoinsieme di questi autovalori formato dagli autovalori associati a modi sia osservabili che eccitabili ha tutti autovalori a parte reale negativa. Ciò significa che:

$$\text{Stabilità interna asintotica} \implies \text{Stabilità esterna nello stato 0}$$

20.1.2 Caso in ogni stato:

Se sono interessato alla stabilità esterna in ogni stato, la mia uscita ha due termini:

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Quindi:

$$\|y(t)\| \leq \|\Psi(t)x_0\| + M \int_0^t \|W(t-\tau)\|d\tau$$

Avendo utilizzato in più rispetto a prima, un'altra proprietà:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

Quindi, **un sistema è stabile esternamente in ogni stato se e solo se** sono verificate le condizioni:

$$\|\Psi(t)x_0\| < k_1 \quad \int_0^t \|W(\tau)\|d\tau < k_2 \quad \forall t$$

Vediamo che $W(t)$ è sotto il segno di integrale, quindi per quanto detto i modi sia osservabili che eccitabili devono per forza essere convergenti, mentre $\Psi(t)x_0$ non è sotto il segno di integrale: quindi possono esserci anche modi solo osservabili che sono LIMITATI (cioè con parte reale nulla, ma devono avere ordine geometrico pari a 1). Riassumendo, nel caso di ogni stato:

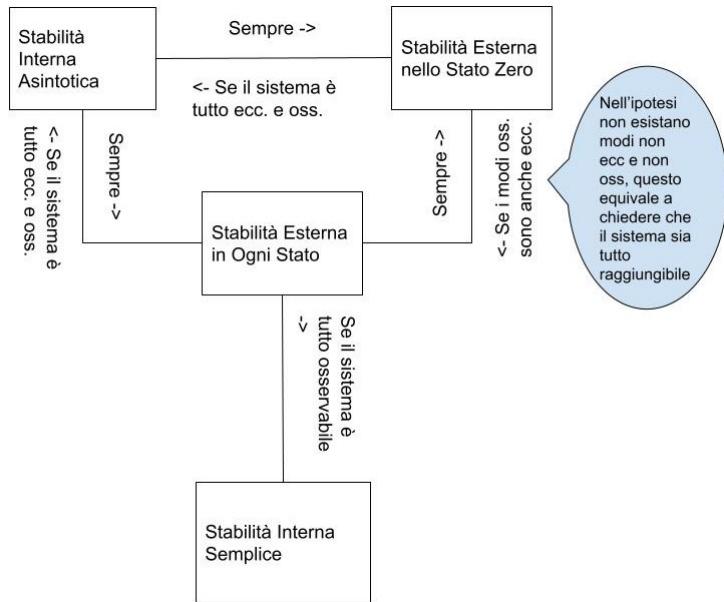
- I modi SOLO OSSERVABILI (quindi non eccitabili), che compaiono nella Ψ ma non nella W devono avere autovalori t.c. $\text{Re} \leq 0$, quindi con la possibilità di avere parte reale uguale a 0. Questo perché Ψ non è sotto il segno di integrale. Nota che se un autovalore è sia osservabile che eccitabile è vero che compare in Ψ , ma non può essere $\text{Re} \leq 0$ perché deve rispettare anche la condizione di W . Perciò solo il sottoinsieme dei modi di Ψ che sono solo osservabili e non eccitabili possono essere $\text{Re} \leq 0$, gli altri, che oltre che in Ψ compaiono anche in W devono essere $\text{Re} < 0$. Ovviamente i modi limitati (cioè con parte reale pari a 0) devono comunque avere ordine geometrico pari a 1, cioè molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica.
- I modi SIA osservabili che eccitabili, che compaiono nella W (e anche nella Ψ) devono avere autovalori t.c. $\text{Re} < 0$. Questo perché W è sotto integrale e quindi per questi modi non è accettabile la traiettoria costante.

Ovviamente:

$$\text{Stabilità esterna in ogni stato} \implies \text{Stabilità esterna nello Stato Zero}$$

Poiché lo zero è un particolare stato. Inoltre, analogamente a prima, vale:

$$\text{Stabilità interna asintotica} \implies \text{Stabilità esterna in ogni stato}$$



Perché nella stabilità interna asintotica tutti gli autovalori sono a parte reale strettamente negativa, quindi lo sono in particolare i modi osservabili e i modi osservabili ed eccitabili, che formano la stabilità esterna in ogni stato. Quindi abbiamo:

Stabilità interna asintotica \implies Stabilità esterna in ogni stato \implies Stabilità esterna nello Stato Zero

Infine, se tutti i modi del sistema sono sia eccitabili che osservabili, vale questa implicazione:

Stabilità esterna nello Stato Zero \implies Stabilità interna asintotica

Perché se tutti i modi sono sia eccitabili che osservabili, e tutti i modi ecc. e oss. hanno parte reale negativa allora tutti i modi del sistema sono a parte reale negativa, quindi c'è stabilità interna asintotica. Volendo riassumere tutte le implicazioni in un'immagine:

21 Esempio:

Facciamo un esempio:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + (2+k)\lambda + k = 0$$

Dobbiamo fare queste due cose:

- Trovare i k per cui $p(\lambda)$ ha tutti autovalori con $\operatorname{Re} \leq 0$. Innanzitutto vediamo le condizioni necessarie: i termini ci sono tutti, ma devono avere tutti lo stesso segno di a_n ; Quindi dobbiamo porre:

$$2 + k > 0 \implies k > -2 \quad k > 0$$

Vediamo che entrambe le condizioni sono soddisfatte quando $k > 0$. Perciò dalle C.N. esce il fatto che k debba essere maggiore di 0. Stiliamo la tabella di Routh:

3	1	2+k
2	2	k
1	4+k	
0	k	

Da cui vediamo che, rispettando il criterio di Routh, per avere $\operatorname{Re} < 0$ tutta la prima colonna deve essere positiva, quindi:

$$4 + k > 0 \implies k > -4 \quad k > 0$$

Quindi abbiamo tre condizioni:

$$k > 0 \quad k > -3 \quad k > 0$$

dove tutte e tre sono verificate per $k > 0$. Quindi $\text{Re} < 0$ per $k > 0$. **Adesso dobbiamo studiare il caso limite, cioè quello per $k = 0$.** Dobbiamo studiare questo caso per vedere se sul bordo della condizione per la stabilità asintotica abbiamo la possibilità di ottenere la stabilità semplice. Vediamo che per $k = 0$ il polinomio diventa:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

da cui vediamo che abbiamo una radice nulla ($\lambda = 0$), che appunto ci dà $\text{Re} \leq 0$, e due radici strettamente negative. Quindi, poiché stiamo cercando quelle k t.c. $\text{Re} \leq 0$, cioè i casi in cui abbiamo stabilità semplice, $k = 0$ è accettabile. Se avessimo voluto cercare i casi in cui $\text{Re} < 0$ allora k non era accettabile. Quindi $k \geq 0$

- Trovare i k per cui $p(\lambda)$ ha tutti autovalori con $\text{Re} \leq -1$: dobbiamo adottare la trasformazione $\lambda = \bar{\lambda} - 1$. Nel nostro caso:

$$\bar{p}(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} - 1)^3 + 2(\bar{\lambda} - 1)^2 + (2 + k)(\bar{\lambda} - 1) + k = 0$$

Svolgendo i vari calcoli:

$$\bar{p}(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}(\bar{\lambda}^2 + (k - 1))$$

Da cui vediamo che le due radici sono:

$$\bar{\lambda} = 0 \quad \bar{\lambda} = \pm\sqrt{1-k}$$

Vediamo che la prima radice di dà sempre un autovalore nullo, a prescindere dai valori di k . Per quanto riguarda invece la seconda radice:

- Se $k = 1$ abbiamo altri due autovalori nulli
- se $k < 1$ ciò che c'è sotto radice è positivo, perciò abbiamo due autovalori reali, uno positivo e uno negativo. Ciò vuol dire che c'è un autovalore a destra di -1 (quello positivo)
- se $k > 1$ ciò che c'è sotto radice è negativo, perciò abbiamo due autovalori complessi coniugati a parte reale nulla. Cioè sono due autovalori sull'asse di -1

Quindi si hanno autovalori con parte reale minore o uguale di -1 per $k \geq 0$

22 Trasformata di Laplace:

Riprenderemo Lyapunov per vedere come il criterio che è sufficiente per i sistemi non lineari diventi un criterio necessario e sufficiente per i sistemi lineari. Adesso invece ci dedichiamo al capitolo 4. Fino ad ora abbiamo effettuato un analisi nel dominio del tempo, abbiamo studiato i modi naturali e parlato di stabilità. La risposta di un sistema è libera e forzata (come conseguenza dell'ipotesi di linearità). Il calcolo dell'evoluzione libera è agevole, mentre il calcolo dell'evoluzione forzata è più complicato, perché va attraverso un integrale nel caso continuo, mentre va attraverso una somma nel caso discreto. Quindi per la risposta forzata riusciamo agevolmente solo a trovare quali modi sono eccitabili e quali osservabili, e quindi quali modi finiscono in H e W . Ma poi calcolare l'integrale o la somma di queste quantità non riusciamo a farlo. Allora ci viene in aiuto uno strumento:

- La Trasformata di Laplace per i tempi continui
- La Trasformata Zeta per i tempi discreti

Oggi ci concentriamo sui tempi continui quindi Trasformata di Laplace: data una funzione $f(t)$

$$L(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Questa è la trasformata di Laplace. Non esiste sempre ma sotto opportune ipotesi, noi supponiamo che esista sempre. La trasformata ci permette di operare notevoli semplificazioni nel calcolo delle evoluzioni forzate ma non solo. Ok, facciamoci questa domanda: quali sono le funzioni che compaiono di più nello studio a tempo continuo? Se pensiamo ai modi naturali abbiamo:

$$e^{\lambda t} \quad \sin\omega t \quad e^{\alpha t} \sin\omega t \quad \text{ecc.}$$

Invece tipo di ingressi abbiamo considerato? Le due categorie di ingressi sono gli ingressi periodici (funzioni sinusoidali e cosinusoidali) e quelli polinomiali (funzioni del tipo $\frac{t^k}{k!}$, dove per $k = 0$ abbiamo un gradino, per $k = 1$ abbiamo una rampa, per $k = 2$ una parabola ecc.).

Proprietà della trasformata: se io so che $L(f(t)) = F(s)$, allora è vero che:

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - F(0)$$

Inoltre è chiaro che se prendo una combinazione lineare di funzioni:

$$L(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$$

Bene, sapendo questo possiamo fare una cosa molto interessante: prendiamo il modello implicito del sistema a tempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Quindi è chiaro che $L(\dot{x}(t)) = L(Ax(t)) + L(Bu(t))$ e idem per l'uscita. Notiamo che essendo \dot{x} ovviamente un vettore, la trasformata agisce su ogni componente. Quindi, concentrandoci sulla prima equazione del modello implicito, se definiamo:

$$x(s) = L(x(t)) \quad u(s) = L(u(t))$$

Abbiamo che:

$$L(\dot{x}) = sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \implies x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

Avendo utilizzato per la prima uguaglianza la proprietà $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - F(0)$ e per la terza uguaglianza la proprietà per cui $L(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$ e le due definizioni date subito prima. Per l'espressione implicata abbiamo semplicemente isolato $x(s)$ con passaggi algebrici. Ok quindi abbiamo trovato:

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

Cioè la trasformata di $x(t)$ dipende solo da $x(0)$ e dall'ingresso. Proviamo a confrontarla con $x(t)$:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Vediamo che, dato che $x(s)$ è la trasformata di $x(t)$, vorrà dire che:

$$L(\Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

Questo è vero comunque io fissi x_0 e $u(t)$, a patto che $u(t)$ ammetta trasformata. Ok, prendiamo dei casi particolari. Primo caso: poniamo $u = 0$, quindi evoluzione libera:

$$x_\ell(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0$$

Mentre per la trasformata $x(s)$ Vediamo che anche lì, dato che siamo in evoluzione libera, $u(s) = 0$, perché la trasformata di $u = 0$ è 0. Quindi anche nella trasformata rimane solo il termine dipendente da x_0 :

$$x_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

Perciò:

$$L(x_\ell(t)) = (sI - A)^{-1}x_0$$

Per qualsiasi x_0 io fissi. Quindi posso far variare x_0 in modo da fargli coprire tutta la base in \mathbb{R}^n , facendogli assumere tutti i termini della base canonica. Quindi, poiché x_0 copre tutta la base, posso dire:

$$L(\Phi(t)) = L(e^{At}) = (sI - A)^{-1}$$

Notare che se il sistema è scalare, vale $\Phi(t) = e^{at}$, perciò si ha che:

$$L(e^{at}) = (s - a)^{-1} = \frac{1}{s - a}$$

Questa ci sarà molto utile: i modi naturali sono $e^{\lambda t}$, o anche il $\sin(\omega t)$ che si può scrivere in funzione di due esponenziali grazie alla Formula di Eulero; ancora: il gradino è un'esponenziale che ha $\lambda = 0$.

Dato che:

$$L(\Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

e abbiamo appena visto che:

$$L(x_\ell(t)) = (sI - A)^{-1}x_0$$

allora per forza di cose deve essere vero che:

$$L(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

E in questo modo vedo due cose: la prima è che ho eliminato il problema dell'integrale e la seconda è che, se ci ricordiamo che:

$$H(t) = e^{At}B$$

vediamo che:

$$H(s) = L(e^{At})B = (sI - A)^{-1}B$$

Perciò:

$$L(\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau) = (sI - A)^{-1}Bu(s) = H(s)u(s)$$

Quindi ho che l'integrale di convoluzione si trasforma nel prodotto delle trasformate. Il calcolo della risposta forzata diventa quindi semplice, perché conosco sia $H(s)$ sia $u(s)$. Quindi calcolo ste due, ne faccio il prodotto e **ho la risposta forzata, ma in s, cioè nel dominio delle trasformate. Mi dovrò poi porre il problema di tornare indietro, nel dominio del tempo.**

Ok questo era per lo stato, adesso lavoriamo sull'uscita y.

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Utilizzando le stesse proprietà della trasformata e facendo gli stessi passaggi trovo che, analogamente al calcolo dello stato $x(t)$:

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

Ma $x(s)$ ce la siamo calcolata prima:

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

E di nuovo confronto con il modello esplicito:

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

E applicando gli stessi ragionamenti e lo stesso procedimento di prima trovo:

$$\Psi(t) = Ce^{At} \implies \Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$$

Ciò vuol dire che:

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s) = \Psi(s)x(0) + C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

Ora, per sistemare $C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)$, vediamo che questo è la trasformata di $\int_0^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$, cioè:

$$L\left(\int_0^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau\right) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

E se ora ci ricordiamo l'espressione di $W(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

E proviamo a calcolarne la trasformata:

$$L(W(t)) = W(s) = L(Ce^{At}B) + L(D\delta(t)) = C\Phi(s)B + D$$

Dove $L(D\delta(t))$ fa D perché la trasformata con l'impulso fa 1, infatti:

$$L(D\delta(t)) = \int_0^\infty D\delta(t)e^{-st}dt =$$

Perciò ho trovato che:

$$W(s) = C\Phi(s)B + D = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Che è proprio la trasformata del nostro integrale, quindi abbiamo infine trovato che:

$$y(s) = \Psi(s)x(0) + W(s)u(s)$$

Poiché ha un significato importante su cui torneremo più avanti, $W(s)$ viene chiamata Matrice delle funzioni di trasferimento. Ovviamente se avrò una sola entrata e una sola uscita questa non sarà una matrice ma una singola funzione di trasferimento. Altra cosa importante da sottolineare qua è che la **risposta forzata, definita con un integrale, si trasforma nel dominio delle trasformate, in qualcosa che sappiamo calcolare facilmente**. Ricapitolando:

- $\Phi(t) = e^{At} \rightarrow \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$
- $H(t) = e^{At}B \rightarrow H(s) = (sI - A)^{-1}B$
- $\Psi(t) = Ce^{At} \rightarrow \Psi(s) = C(sI - A)^{-1}$
- $W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \rightarrow W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Ora, quando vado a calcolare

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}M$$

Vediamo che:

- al denominatore abbiamo $\det(sI - A)$, che corrisponde a $\det(A - \lambda I)$, al netto del cambio del segno. Ciò vuol dire che al denominatore abbiamo gli autovalori radici s del polinomio caratteristico, scritto in s invece che in λ , al netto del cambio di segno.
- al numeratore, per il modo in cui calcoliamo la matrice inversa, ho una matrice costruita a partire dai minori della matrice $(sI - A)$. Dovendo essere $(sI - A)$ una matrice invertibile, deve essere quadrata, poniamo $n \times n$. Ciò vuol dire che i suoi minori saranno di ordine $n - 1$. Cioè avrà una matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{1,1} & \dots & \bar{\phi}_{1,n} \\ \dots & & \dots \\ \bar{\phi}_{n,1} & \dots & \bar{\phi}_{n,n} \end{pmatrix}$$

E ognuno di questi $\bar{\phi}$ è il determinante di una matrice di ordine $n - 1$, quindi è un polinomio di grado al più $n - 1$.

Questo che significa? Significa che la matrice $\Phi(s)$ ha dei coefficienti in cui ogni termine è rapporto di due polinomi in cui il grado del polinomio al numeratore è strettamente minore del grado polinomio del denominatore, e al denominatore ho un polinomio le cui radici sono gli autovalori del sistema, magari non con la stessa molteplicità. Per $H(t)$ semplicemente prendiamo la matrice M e la moltiplichiamo per gli scalari di B, quindi anche l'abbiamo una matrice con dei coefficienti in cui ogni termine è rapporto di due polinomi in cui il grado del polinomio al numeratore è

strettamente minore del grado polinomio del denominatore. Stesso discorso per $\Psi(s)$. Invece non possiamo fare un discorso analogo per $W(s)$, infatti:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ma, mentre per $C(sI - A)^{-1}B$ vale un discorso analogo a $\Phi(s)$ $H(s)$ e $\Psi(s)$, io dopo moltiplico per D , quindi sto rimischiando con l'MCM numeratore e denominatore, potendo ottenere al numeratore un grado anche uguale del denominatore, cioè non per forza minore (certamente comunque non posso ottenerlo maggiore). facendo un esempio a caso per far capire:

$$\frac{2s+1}{3s^2+2} + 2 = \frac{6s^2+2s+5}{3s^2+2}$$

E vediamo che quindi il grado del numeratore può essere anche uguale a quello del denominatore. Perciò:

- Per $\Phi(s)$, $H(s)$ e $\Psi(s)$ abbiamo strettamente proprie.
- Per $W(s)$ il grado del numeratore può essere minore o anche uguale a quello del denominatore.

Questo può essere utile per identificare se davvero $W(s)$ rappresenta una Matrice delle funzioni di trasferimento: condizione necessaria affinché una matrice $W(s)$ sia una Matrice delle funzioni di trasferimento è che i suoi elementi devono essere polinomi con il grado del polinomio al numeratore minore o al più uguale al grado del polinomio al denominatore.

23 Un esempio in cui impariamo come tornare indietro al dominio del tempo t:

In generale non abbiamo ancora visto come tornare dal dominio di s al dominio di t , ma in questo caso che ora vediamo lo sappiamo già fare:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \quad -1)x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u \end{aligned}$$

Prendiamo in ingresso un gradino: $u(t) = \delta_{-1}(t)$. Se ci ricordiamo che:

$$L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s - \lambda}$$

Se $\lambda = 0$:

$$L(1) = L(\delta_{-1}(t)) = \frac{1}{s}$$

Quindi $u(s) = \frac{1}{s}$. Bene ora calcoliamo $x(t)$ e $y(t)$, con $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Lo facciamo proprio calcolando $x(s)$ e $y(s)$, e poi tornando indietro. Partiamo da $x(s)$:

$$x(s) = x_\ell(s) + x_f(s) = (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (sI - A)^{-1}B \frac{1}{s}$$

Calcolando l'inversa e con altri calcoli algebrici troviamo che:

$$x_\ell(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+2}$$

Basta notare che:

$$L(e^{2t}) = \frac{1}{s+2} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} L(e^{2t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+2} \implies L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{s+2}$$

Da cui quindi troviamo:

$$x_\ell(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Vediamo che in questo caso siamo stati in grado di trovare facilmente $x_\ell(t)$ tornando indietro dal dominio di s al dominio di t , ma ovviamente questo è un caso particolare, non abbiamo ancora visto come tornare indietro da s a t in generale. Facciamo questa considerazione: se avessimo preso la strada dell'analisi modale, avremmo visto che, la matrice A è diagonale quindi ha autovettori sulla diagonale, quindi vuol dire che il calcolo dell'evoluzione libera ci avrebbe portato a:

$$x_\ell(t) = e^{-t} u_1 c_1 + e^{-2t} u_2 c_2$$

Ma allora perché a noi prima compariva solo $x_\ell(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$? Bene, significa che $c_1 = v'_1 x_0 = 0$ (cioè x_0 è proprio sull'autovettore u_2), e quindi compare solo il secondo modo. Bene, andiamo a calcolare la risposta forzata:

$$x_f(s) = H(s)u(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+3 \\ s+1 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1)} \frac{1}{s}$$

Vediamo che, diversamente da prima, non ci sono semplificazioni: quindi entrambi i modi sono eccitabili. Ok, ora come torniamo al dominio del tempo t ? Il discorso è che non possiamo fare come prima perché non abbiamo termini con solo un $(s+i)$ al denominatore, ma c'è un solo termine con tre $(s+i)$ a prodotto. Però possiamo provarci a separare sti contributi, con lo *Sviluppo in Residui*:

$$x_f(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+3 \\ s+1 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1)} \frac{1}{s} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s+2}$$

Ora possiamo tornare indietro a t , come abbiamo fatto prima nel caso dell'evoluzione libera. Quindi;

$$x_f(t) = R_1 \delta_{-1}(t) + R_2 e^{-t} + R_3 e^{-2t}$$

Ora, piccola digressione ma importante: ci capiterà più avanti di considerare funzioni traslate (a destra o a sinistra dell'asse y si intende, non verso l'alto o il basso), cioè che sono vere a partire da un certo valore di t . Se vediamo la formula qua sopra, le funzioni:

$$\delta_{-1}(t) \quad e^{-t} \quad e^{-2t}$$

Sono tutte vere a partire da $t = 0$, la funzione gradino $\delta_{-1}(t)$ specialmente poiché è così per definizione, e in generale per tutte le altre funzioni, come gli esponenziali, è ovvio che non siano definite per $t < 0$ perché non può esistere un tempo negativo, quindi si parte da $t = 0$. Però vedremo in futuro funzioni traslate, che partono per esempio da $t = 1$. Allora, per distinguere le funzioni non traslate da quelle traslate scriviamo:

$$x_f(t) = (R_1 + R_2 e^{-t} + R_3 e^{-2t}) \delta_{-1}(t)$$

In questo modo sappiamo che queste tre funzioni sono vere a partire da $t = 0$. Nota che possiamo fare questo raccoglimento perché la funzione gradino $\delta_{-1}(t)$ vale 1 sempre tranne che in 0, e quindi gli esponenziali restano invariati anche se moltiplicati per 1. Questa scrittura ci aiuterà a tenere conto delle traslazioni. Ok, ora bisogna calcolare i tre residui:

- Per R_1 : prendiamo la nostra evoluzione forzata e moltiplichiamo ambo i membri per s :

$$\frac{\begin{pmatrix} s+3 \\ s+1 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1)} = R_1 + s \frac{R_2}{s+1} + s \frac{R_3}{s+2}$$

Bene, ora facciamo il limite per $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} s+3 \\ s+1 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} R_1 + s \frac{R_2}{s+1} + s \frac{R_3}{s+2} \implies \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \lim_{s \rightarrow 0} R_1 + 0 + 0 \implies R_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

- Per R_2 facciamo analogamente: prendiamo l'evoluzione forzata e moltiplichiamo ambo i membri per ciò che R_2 ha al denominatore, in modo da isolarlo. Cioè moltiplichiamo per $s+1$. Dopo facciamo il limite per $s+1 \rightarrow 0$ e abbiamo R_2 :

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)x_f(s) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Per R_3 facciamo analogamente, cioè moltiplichiamo per $s+2$ e facciamo il limite per $s+2 \rightarrow 0$:

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)x_f(s) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Perciò la nostra evoluzione forzata è:

$$x_f(t) = \left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} e^{-2t} \right) \delta_{-1}(t)$$

E finalmente siamo riusciti a scrivere l'evoluzione forzata completamente, e non solo la matrice $H(t)$. Questo non saremmo riusciti a farlo con l'integrale di convoluzione, mentre in questo modo è possibile. Vediamo quindi che la risposta forzata ha un termine che dipende dall'ingresso e gli altri due che sono legati ai modi eccitabili (quindi hanno l'esponenziale).

Vediamo una cosa, riprendiamo la nostra matrice:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n} \rightarrow \Phi(t) = R_1 e^{\lambda_1 t} + R_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + R_n e^{\lambda_n t}$$

Supponiamo A diagonalizzabile e autovalori reali. Adesso prendiamo la nostra matrice, come l'abbiamo sempre conosciuta prima della trasformata di Laplace:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i$$

Quindi, confrontando le due forme di $\Phi(t)$:

$$R_i = u_i v'_i$$

Questo vale solo se gli autovalori sono reali. Notiamo che la matrice R_i ha rango 1: per vederlo, basta pensare al prodotto tra il vettore u_i e il vettore trasposto v'_i come la costruzione di una matrice che ha come colonne le ripetizioni di u_i moltiplicato ogni volta per uno scalare diverso. In generale da questa relazione vedo che: **se ho un'autovalore REALE con molteplicità geometrica k, avrò R_i di rango k.**

Se invece gli autovalori sono complessi? In questo caso per ogni coppia di autovalori complessi coniugati si presentano i due residui. Poniamo ad esempio che λ_2 ci dia due autovalori complessi coniugati:

$$\frac{R_{2,a}}{s - \alpha - j\omega} + \frac{R_{2,b}}{s - \alpha + j\omega}$$

Dove ognuno dei due R_2 si può scomporre in un termine reale $r_{2,a}$ + un termine immaginario $j r_{2,c}$. Facendo il MCM otteniamo:

$$\frac{R_3 s + R_4}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

Un'altra osservazione, prendiamo $H(s)$:

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{R_1 B}{s - \lambda_1} + \frac{R_2 B}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{R_n B}{s - \lambda_n}$$

Ora, dato che $R_i = u_i v'_i$; se $R_i = 0$ il residuo non compare in $H(t)$, ed effettivamente, se $R_i = 0$ significa che $u_i v'_i = 0$, quindi il modo non è eccitabile, ed è giusto che non compaia nella matrice $H(t)$, come già sappiamo. Prendiamo ora $\Phi(s)$:

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = \sum_{i=1}^n \frac{C R_i}{s - \lambda_i}$$

Vediamo che, analogamente a quanto appena detto sui modi osservabili e i residui di $H(s)$, se $Cu_i = 0$, cioè i modi non sono osservabili, allora è anche vero che $Cu_i v'_i = 0$, il che significa che $CR_i = 0$, e quindi vediamo che il residuo non compare in $\Phi(s)$ se il modo non è osservabile.

Vediamo un'ultima cosa interessante:

$$L(\sin \omega t) = L\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) = \frac{1}{2j}L(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Avendo utilizzato per la prima uguaglianza la Formula di Eulero. Adesso utilizziamo la formula $L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-\lambda}$ e la linearità della trasformata di Laplace, ottenendo:

$$L(\sin \omega t) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Avendo fatto l'MCM. Facciamo anche la trasformata del coseno:

$$L(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Ora calcoliamo le trasformate relativa ai modi pseudo-periodici:

$$L(e^{\alpha t} \sin \omega t) = L(e^{\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}) = L\left(\frac{e^{(\alpha+j\omega)t} - e^{(\alpha-j\omega)t}}{2j}\right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{(s-\alpha)-j\omega} - \frac{1}{(s-\alpha)+j\omega} \right) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

e per il coseno abbiamo:

$$L(e^{\alpha t} \cos \omega t) = \frac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

Vediamo in entrambi i casi che la moltiplicazione per $e^{\alpha t}$ comporta una traslazione di s , infatti $L(e^{\alpha t} \sin \omega t)$ dà lo stesso risultato di $L(\sin \omega t)$ semplicemente con s traslato di α , idem per $L(e^{\alpha t} \cos \omega t)$.

24 Esempio:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (-1 \ 0 \ 1) x + (1 \ -1) u$$

Quindi ci sono due ingressi e un'uscita. Bene, ci chiede di calcolare: $\Phi(s)$, $H(s)$, $\Psi(s)$, $W(s)$ e $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$, $W(t)$; inoltre calcolare la risposta calcolata in uscita $y_f(t)$ per $u_1 = \delta_{-1}(t)$ e $u_2 = \sin t \delta_{-1}(t)$. Bene iniziamo con:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ -2 & -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1}$$

E da qui possiamo vedere, essendo questa una matrice diagonale, che gli autovalori della matrice sono:

$$\lambda_1 = -1 \quad ma = 2$$

$$\lambda_2 = -3 \quad ma = 1$$

Se poi andiamo a calcolare l'inversa:

$$\Phi(s) = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)(s+3) & 0 & -2(s+1) \\ 0 & (s+1)(s+3) & (s+1) \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}^T}{(s+1)^2(s+3)}$$

Vediamo che al denominatore troviamo gli autovalori, che sono quelli che avevamo già previsto. Cosa importante: ogni elemento della matrice è divisibile per $(s+1)$, se lo facciamo otteniamo:

$$\Phi(s) = \frac{\begin{pmatrix} (s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+3) & 0 \\ -2 & 1 & (s+1) \end{pmatrix}}{(s+1)(s+3)}$$

Questo siamo riusciti a farlo perché la matrice è diagonalizzabile. Quindi se la matrice è diagonalizzabile dobbiamo riuscire al denominatore a ottenere un polinomio formato solo da poli semplici (non elevati a qualche potenza diversa da 1). *Questo è chiamato polinomio minimo, ed ha solo fattori elevati alla potenza del loro ordine geometrico: se la matrice è diagonalizzabile ogni autovalore ha ordine geometrico 1 quindi se la matrice è diagonalizzabile il polinomio minimo deve avere solo fattori semplici e non elevati a potenza.* Quindi, utilizzando i residui otteniamo:

$$\Phi(s) = \frac{\begin{pmatrix} (s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+3) & 0 \\ -2 & 1 & (s+1) \end{pmatrix}}{(s+1)(s+3)} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+3)}$$

Con R_1 con rango 2 (poiché l'autovalore associato ha $\text{ma} = 2$) e R_2 con rango 1. Adesso troviamo i nostri residui:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)\Phi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)\Phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Vediamo che rispettano quanto detto sopra, cioè R_1 ha rango pari a 2 mentre R_2 ha rango pari a 1. E possiamo finalmente scrivere la nostra $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Quindi il discorso è che se la matrice è diagonalizzabile, anche se ho un autovalore con $\text{ma} > 1$, quando vado a calcolare il polinomio minimo escono solo radici semplici. Bene, ora passiamo a $H(s)$:

$$H(s) = \Phi(s)B = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+3 \\ s-1 & s+2 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+3)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+3} \rightarrow H(t) = R_1 e^{-1} + R_2 e^{-3}$$

Ricordiamoci che quando la molteplicità algebrica di un autovalore è maggiore di uno bisogna stare attenti con l'eccitabilità: se io voglio essere certo, nel caso in cui la molteplicità algebrica sia maggiore di 1 e la matrice sia diagonalizzabile, di sollecitare tutti i modi relativi a quel singolo valore numerico devo avere tanti ingressi quanto è la molteplicità algebrica di quell'autovalore. In questo caso abbiamo molteplicità 2 e 2 ingressi, quindi il modo è eccitabile (questa cosa teorica che ho spiegato sta nella sezione dopo l'esercizio dei batteri). Andiamo a calcolare $\Psi(s)$:

$$\Psi(s) = C\Phi(s) = \frac{(s+1 \ 1 \ s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+3)}$$

Qui invece, applicando la stessa regola di prima, non avendo tante uscite quant'è la molteplicità algebrica dell'autovalore, non è detto che il modo sia osservabile, e ci saranno dei particolari stati per cui il modo non è osservabile. Comunque, la nostra $\Phi(t)$ è:

$$\Psi(t) = R_1 e^{-t} + R_2 e^{-3t}$$

Ed ora tocca all'ultima matrice:

$$W(s) = \Psi(s)B + D = \left(\frac{2}{s+2} + 1 \quad \frac{1}{s+1} - 1 \right)$$

Ora, se io svolgessi questi due MCM otterrei due rapporti, ognuno con due polinomi di egual grado al numeratore e al denominatore (come $W(s)$ ci concede). Però, per poter tornare indietro al dominio del tempo t , non devo fare l'MCM ma devo usare queste due formule:

$$L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s - \lambda} \quad L(\delta(t)) = 1$$

Con $\delta(t)$ impulso matematico. Ciò quindi vuol dire che:

$$W(s) = L(W(t)) = (L(e^{-2t} + \delta(t)) \quad L(e^{-t} + \delta(t))) \rightarrow W(t) = (e^{-2t} + \delta(t) \quad e^{-t} + \delta(t))$$

Se io avessi fatto l'MCM non sarei riuscito a tornare al dominio del tempo t , quindi non devo fare l'MCM e devo ritrovarmi questi due termini, un rapporto tra costante e $s - \lambda$ e una costante che diventa l'impulso. Ok, ultima cosa che ci manca è la risposta forzata in uscita $y_f(t)$ per $u_1 = \delta_{-1}(t)$ e $u_2 = \sin t \delta_{-1}(t)$. Bene iniziamo con:

$$y_f(s) = W(s)u(s) = \left(\frac{2}{s+2} + 1 \quad \frac{1}{s+1} - 1 \right) u(s)$$

Dove $u(s)$ è un vettore che ha come due componenti le trasformate di $u_1 = \delta_{-1}(t)$ e $u_2 = \sin(1 \cdot t) \delta_{-1}(t)$. Quindi:

$$y_f(s) = W(s)u(s) = \left(\frac{2}{s+2} + 1 \quad \frac{1}{s+1} - 1 \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2+1} \end{pmatrix}$$

Ora, prendiamo la prima matrice e riscriviamola come la seguente somma matriciale:

$$y_f(s) = W(s)u(s) = \left[\left(\frac{2}{s+2} \quad \frac{1}{s+1} \right) + (1 \quad -1) \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2+1} \end{pmatrix}$$

Quindi, poiché $C(sI - A)^{-1}B + D$, ciò vuol dire che:

$$C(sI - A)^{-1}B = \left(\frac{2}{s+2} \quad \frac{1}{s+1} \right) \quad D = (1 \quad -1)$$

Quindi, moltiplicati rispettivamente per prima e seconda componente di $u(s)$, abbiamo che primo addendo che contiene i modi che sono sia eccitabili che osservabili, mentre il secondo addendo con D che riporta il segnale in uscita variato secondo dei guadagni. Bene, ora ricompattiamo in un'unica matrice le due, sommandole, e svolgiamo il prodotto matriciale con $u(s)$, ottenendo:

$$y_f(s) = \frac{2}{(s+2)s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

Ok, ora dobbiamo **antitrasformare**, da t a s . Non ci sono problemi nell'antitrasformare il primo, il secondo e il quarto addendo, ma come antitrasformiamo il terzo addendo? Possiamo riscrivere (s^2+1) in $(s+j)(s-j)$, poiché il polo vediamo ci darebbe la soluzione complessa $s = \sqrt{-1}$; oppure possiamo usare quest'altra tecnica: innanzitutto sviluppiamo i residui:

$$\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+1} + \frac{As+B}{s^2+1}$$

Dove A e B sono coefficienti, non matrici. Notiamo che abbiamo accorpato i termini che avevano gli stessi poli, mettendoli sotto lo stesso residuo. Vediamo che $As + B$ è un polinomio di primo grado: ce lo dovevamo aspettare dovendo essere il numeratore di grado minore del denominatore. Calcoliamo ora i residui:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} = 2 \quad R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)y_f(s) = -1 \quad R_3 = \frac{1}{2}$$

E poi ci mancherebbe l'ultimo residuo, quello con $As + B$, che ora andiamo a calcolare; prima però andiamo a sostituire questi che abbiamo già calcolato nell'espressione

$$\frac{2}{s} + \frac{-1}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{As+B}{s^2+1}$$

Concentriamoci su:

$$\frac{As+B}{s^2+1} \implies A \frac{s}{s^2+1} + B \frac{1}{s^2+1} \implies A \frac{s}{s^2+\omega^2} + B \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Con $\omega = 1$. Ci accorgiamo che quei coefficienti accanto ad A e B sono le trasformate rispettivamente del seno e del coseno. Ok, però prima di antitrasformare troviamo i valori dei coefficienti di A e B. Per farlo notiamo che la risposta forzata in uscita:

$$y_f(s) = \frac{2}{(s+2)s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{2}{s} + \frac{-1}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + A \frac{s}{s^2+1} + B \frac{1}{s^2+1}$$

è uguale a questa espressione per tutte le s che non annullano i denominatori. Prendiamo allora le due espressioni di $y_f(s)$ e calcoliamole in due valori di s:

- Per $s = 1$:

$$\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + A \frac{1}{2} + B \frac{1}{2} \implies -1 = A + B$$

- per $s = 2$:

$$2A + B = -\frac{3}{2}$$

Adesso abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto ci dà:

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo che la nostra risposta forzata in uscita è:

$$y_f(s) = \frac{2}{s} + \frac{-1}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

E adesso sappiamo come antitrasformare tutto:

$$y_f(t) = \left(2 - e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t \right) \delta_{-1}(t)$$

Il primo termine è connesso al primo ingresso $u_1 = \delta_{-1}(t)$, secondo e terzo termine sono connessi ai modi eccitabili e osservabili, e gli ultimi due termini sono connessi al secondo ingresso $u_2 = \sin(1 \cdot t) \delta_{-1}(t)$. Notiamo che se i modi naturali che caratterizzano l'uscita forzata sono convergenti, come in questo caso, al crescere di t scompariranno e non caratterizzeranno più l'uscita forzata, e rimarranno solo i termini connessi agli ingressi. Quindi i modi eccitabili ed osservabili caratterizzano solo l'andamento iniziale dell'uscita, dato che per t sufficientemente grande, se sono convergenti, essi scompaiono. Altra cosa da notare:

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{si può riscrivere come: } M \sin(t + \phi)$$

Dimostriamolo con la formula goniometrica di addizione del seno:

$$M \sin(t + \phi) = M(\sin(t) \cos(\phi) + \cos(t) \sin(\phi)) = M \cos(t) \sin(\phi) + M \sin(t) \cos(\phi)$$

E se poniamo $A = M \sin(\phi)$ e $B = M \cos(\phi)$ ritroviamo la nostra formula. Ok, quindi se è vero questo, è vero anche che:

$$M = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Ed è vero anche che:

$$\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$$

Possiamo inserci i valori di A e B per verificare queste ultime due relazioni: devono uscire due identità ovviamente.

24.1 Vediamo un'ulteriore proprietà:

Se:

$$L(f(t)) = F(s)$$

Allora:

$$L(tf(t)) = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Bene, questo significa che se prendiamo ingressi del tipo:

$$\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$$

Sappiamo che:

per $k = 0$ abbiamo il gradino: $\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata è: $\frac{1}{s}$

per $k = 1$ abbiamo la rampa: $t\delta_{-1}(t)$ la cui trasformata è: $-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$

Adesso vogliamo dimostrare per induzione che:

$$L\left(\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)\right) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Dobbiamo vedere se la base di induzione è vera, cioè se, per $k = 0$:

$$L(\delta_{-1}(t)) = \frac{1}{s}$$

E questo è vero. Adesso dobbiamo dimostrare che è vero il passo induttivo, cioè: supponiamo vera la relazione al passo $k - 1$

$$L\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t)\right) = \frac{1}{s^k}$$

dobbiamo dimostrare che la seguente implicazione

$$L\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t)\right) = \frac{1}{s^k} \implies L\left(\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)\right) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

avendo supposto che la relazione al passo $k - 1$ sia vera. Bene dimostriamolo, scriviamo:

$$\frac{t^k}{k!} = \frac{t}{k} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

Quindi, applicando la trasformata sia a destra che a sinistra dell'uguale:

$$L\left(\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{1}{k} L\left(t \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \frac{1}{k} \left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^k}\right)\right) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Come volevasi dimostrare \square

Quindi questo risultato ci permette di calcolare queste due trasformate:

$$L(te^{\alpha t}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s-\alpha)} \right) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

Per la proprietà data all'inizio. Mentre per la seconda proprietà, appena dimostrata, ci permette di calcolare:

$$L\left(\frac{t^k}{k!} e^{\alpha t}\right) = \frac{1}{(s-\alpha)^{k+1}}$$

Questo perché? Perché $L\left(\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{1}{s^{k+1}}$ e, come abbiamo già visto, il prodotto per l'esponenziale nella trasformata non fa nient'altro che traslare s , che diventa $s - \alpha$.

Ma a che serve ste due trasformate? Beh, nel caso in cui la matrice A non è diagonalizzabile, non avrà più dei poli semplici, ma avrà delle radici multiple al denominatore. Riprendiamo l'esempio di prima, leggermente cambiato:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Calcoliamo le nostre matrici, in s e poi in t. Iniziamo:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)(s+2) & s+2 & 1 \\ 0 & (s+1)(s+2) & s+1 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}}{(s+1)^2(s+2)}$$

Vediamo che non tutti gli elementi della matrice sono moltiplicati per $(s+1)$, quindi non ho più la semplificazione che avevo prima che mi permetteva di ottenere solo poli semplici al denominatore. Questo significa che la matrice non è diagonalizzabile. Comunque, per calcolare la $\Phi(t)$, sempre uso lo sviluppo in frazioni parziali, solo che per $(s+1)^2$ abbiamo due residui (in generale per $(s-\lambda)^k$ abbiamo k residui). Quindi abbiamo:

$$\Phi(s) = \frac{R_1}{(s+2)} + \frac{R_2}{(s+1)^2} + \frac{R_3}{(s+1)}$$

Quindi abbiamo due residui che vanno con le potenze decrescenti, in questo caso 2 perché parti da 2 e arrivi a 1. Prima di calcolare i tre residui, vediamo la forma di $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = R_1 e^{-2t} + R_2 t e^{-t} + R_3 e^{-t}$$

Dove per primo e terzo residuo abbiamo fatto come al solito, mentre per il secondo residuo abbiamo usato la trasformata che abbiamo visto prima: $L(te^{\alpha t}) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$. Adesso calcolando i tre residui:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo per il primo residuo non c'è problema, per il secondo neanche: per i residui con poli semplici infatti riusciamo a calcolare il residuo senza problemi, per i residui con poli multipli invece occorre fare una distinzione: i residuo con il polo al termine massimo, nel nostro caso $(s+1)^2$ (in generale $(s+1)^k$), si riesce a calcolare senza problemi (nel modo solito), mentre questa cosa non funziona con i poli non al termine massimo, nel nostro caso $(s+1)$. Vediamo infatti che R_3 se proviamo a calcolarlo come al solito ci dà:

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\begin{pmatrix} (-1+1)(-1+2) & -1+2 & 1 \\ 0 & (-1+1)(-1+2) & -1+1 \\ 0 & 0 & (-1+1)^2 \end{pmatrix}}{0}$$

E ovviamente, essendo una divisione per 0, non si può fare. Questo succede perché moltiplichiamo per $(s+1)$, che non è abbastanza per eliminare del tutto $(s+1)^2$ al denominatore, e quindi questo, al limite, ci dà una divisione per zero. La soluzione in questi casi - cioè in tutti i casi in cui abbiamo un polo multiplo e non consideriamo la sua potenza massima - è **calcolare il limite della derivata del residuo del polo di grado massimo**, nel nostro caso R_2 :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} ((s+1)^2 \Phi(s)) &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} ((s+1)^2 \frac{R_1}{(s+2)} + R_2 + (s+1)R_3) = R_3 = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s+1)^2 \Phi(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{\begin{pmatrix} (s+1)(s+2) & s+2 & 1 \\ 0 & (s+1)(s+2) & s+1 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}}{(s+2)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{(s+2)^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{(s+2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{s^2+4s+3}{(s+2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attenzione: dal terzo termine in poi (in questo caso non c'è, dato che la potenza massima è 2), si deve dividere per 2 quando si fa la derivata, poi per $3!$, poi per $4!$ ecc. Questo per eliminare l'esponente della potenza precedente che, derivando, è diventato un coefficiente che moltiplica l'espressione.

24.2 Altro esercizio:

Sia $W(s)$ la seguente *funzione di trasferimento*:

$$W(s) = \frac{s^2 + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si vuole calcolare la risposta forzata in uscita al gradino, poi alla funzione $\sin t$ e poi alla funzione $\sin 2t$. Andiamo a prendere la risposta forzata:

$$y_f(s) = W(s)u(s)$$

Calcoliamo le trasformate delle tre uscite:

$$u_1(s) = L(\delta_{-1}(t)) = \frac{1}{s} \quad u_2(s) = L(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad u_3(s) = L(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

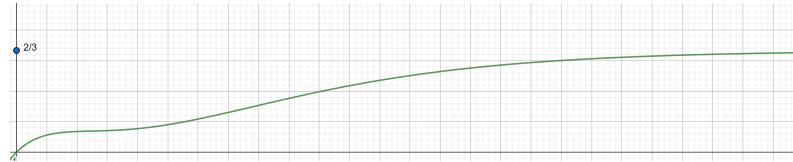
Ora calcoliamo le tre uscite forzate:

$$y_{1,f}(s) = \frac{s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+1)} + \frac{R_3}{(s+2)} + \frac{R_4}{(s+3)}$$

E calcolando i residui nella solita maniera:

$$y_{1,f}(s) = \frac{2}{3s} - \frac{5}{2(s+1)} + \frac{4}{(s+2)} - \frac{13}{6(s+3)} \implies y_{1,f}(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{13}{6}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Come ci aspettavamo, abbiamo un termine (il primo) legato all'ingresso, e gli altri tre legati ai modi eccitabili e osservabili di W . Vediamo che questi modi sono convergenti, quindi caratterizzeranno l'uscita forzata solo all'inizio, poi per t abbastanza grande scompariranno. Quindi l'andamento dell'uscita forzata è questa: Poiché per t abbastanza grande rimane solo il termine costante (perché



moltiplicato dal gradino) $\frac{2}{3}$. Una cosa interessante da vedere è questa:

$$\frac{2}{3} = R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sy_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{1}{s} = W(0)$$

Cioè il termine costante che rimane è uguale a $W(0)$, la funzione di trasferimento calcolata in 0. Questa era la prima uscita, andiamo con la seconda:

$$y_{2,f}(s) = \frac{s^2 + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s^2 + 1)} = \frac{5}{4(s+1)} - \frac{8}{5(s+2)} + \frac{13}{20(s+3)} + \frac{As + B}{(s^2 + 1)}$$

Il modo di trovare A e B è sempre lo stesso: bisogna trovare due s che non annullano i denominatori e calcolare la risposta forzata lì, prendiamo $s = 0$ (se non annulla i denominatori è sempre comodo prenderlo) e $s = 1$, e, risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite troviamo:

$$A = -\frac{3}{10} \quad B = 0$$

E quindi la nostra risposta forzata in uscita nel dominio del tempo è, antitrasformando:

$$y_{2,f}(s) = \left(\frac{5}{4}e^{-t} - \frac{8}{5}e^{-2t} + \frac{13}{20}e^{-3t} - \frac{3}{10}\cos t\right)\delta_{-1}(t)$$

Ricordiamo che in generale al posto del coseno abbiamo $M \sin(t + \phi)$. Dove M e ϕ sono determinate dalla funzione di trasferimento $W(s)$: M e ϕ sono modulo e fase della funzione di trasferimento $W(s)$ per $s = j\omega$, ma questo lo vedremo bene più avanti. Poiché gli altri termini sono determinati dai modi eccitabili e osservabili, e sono tutti convergenti, tolta una prima parte iniziale, per t abbastanza grande l'uscita forzata è determinata solo da $M \sin(t + \phi)$. Cioè è determinata solo

dall'ingresso (perché l'ingresso era un seno) ma modificata dalle regole della funzione di trasferimento (precisamente, modificato in ampiezza grazie a M e sfasato grazie a ϕ).

Vediamo ora con l'ultima uscita, la terza:

$$y_{2,f}(s) = \frac{s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Vediamo che questa volta c'è una semplificazione importante: si dice che **l'ingresso viene filtrato dal sistema**; quindi non si vede più in uscita. Quindi in generale: se al numeratore di $W(s)$ ho $s^2 + \omega^2$ e $u(s)$ al denominatore ha $s^2 + \omega^2$, quindi con lo stesso omega, l'ingresso viene filtrato dal sistema e non si vede più in uscita: in uscita compaiono solo i modi che sono sia eccitabili che osservabili.

24.3 Altro Esercizio:

Sia data la seguente funzione di transizione:

$$W(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)^3}$$

Prendiamo un ingresso a gradino. Calcolare la risposta forzata in uscita.

$$y_f(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)^3} \frac{1}{s} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)} + \frac{R_3}{(s+1)^3} + \frac{R_4}{(s+1)^2} + \frac{R_5}{(s+1)}$$

Ed adesso calcoliamo i residui:

$$y_f(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{R_4}{(s+1)^2} + \frac{R_5}{(s+1)}$$

Per R_4 e R_5 dobbiamo fare, rispettivamente, prima e seconda derivata del limite che abbiamo fatto per calcolare R_3 , dividendo per il calcolo di R_5 per una costante che aggiusti i coefficienti al numeratore. Iniziamo con R_4 :

$$R_4 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s+2)s} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2s+2}{(s+2)^2 s^2} = 0$$

E adesso deriviamo di nuovo per il calcolo di R_5 , ma attenzione, se facciamo solo la derivata otteniamo:

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 y_f(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 \frac{R_1}{s} + (s+1)^3 \frac{R_2}{(s+2)} + R_3 + (s+1)R_4 + (s+1)^2 R_5 = 2R_5$$

Che a noi non va bene, perché vogliamo R_5 , quindi dobbiamo fare il limite della derivata seconda e poi **dividere per 2 fattoriale, cioè 2**. In generale quindi che dovremo fare? **Dovremo fare:**

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} f(s)$$

Fattoriale perché derivando diverse volte i coefficienti che scendono dall'esponente si moltiplicano tra loro, quindi diventa un fattoriale. Quindi, finalmente, calcoliamo l'ultimo residuo:

$$R_5 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\frac{d}{ds} \frac{2s+2}{(s+2)^2 s^2}}{2} = -1$$

E quindi ecco la nostra risposta forzata in uscita nel dominio del tempo t, ottenuta antitrasformando, ora che abbiamo i residui:

$$y_f(s) = \frac{1}{2} \delta_{-1}(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{t^2}{2!} e^{-t} - e^{-t}$$

Notiamo che il termine con residuo R_4 , se ci fosse stato, avrebbe avuto antitrasformata $t e^{-t}$.

24.4 Alcune Considerazioni sulla Trasformata di Laplace:

24.4.1 Prima Considerazione:

Volendo rappresentare matricialmente, come abbiamo già fatto, la nostra uscita:

$$y_1(s) = \begin{pmatrix} W_{1,1}(s) & W_{1,2}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} = W_{1,2}(s)u_1(s) + W_{1,1}(s)u_2(s)$$

Vediamo quindi che l'uscita totale è la somma delle uscite dei singoli sistemi, in questo caso, in cui abbiamo 1 uscita e 2 ingressi, questi sottosistemi hanno uscite:

$$y_{1,1}(s) = W_{1,1}(s)u_1(s) \quad y_{1,2}(s) = W_{1,2}(s)u_2(s)$$

Parliamo di questo perché noi da qui possiamo *identificare la matrice/funzione di trasferimento che identifica il sistema*; facciamo degli esempi:

- Nel caso di 1 ingresso e 1 uscita. La nostra uscita totale è:

$$y(s) = W(s)u(s) \implies W(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Quindi per trovare $W(s)$ qua è molto semplice: basta conoscere la trasformata dell'ingresso e dell'uscita, così da poter applicare il primo, calcolare il secondo e ricavarsi così la trasformata.

- Nel caso di n ingressi e 1 uscita. La nostra uscita totale è, ad esempio per 2 ingressi:

$$y(s) = W_1(s)u_1(s) + W_2(s)u_2(s)$$

In questo caso per trovare tutti i $W_i(s)$ metto a 0 tutti gli ingressi tranne 1, così da poter ricadere nel caso precedente, e trovare un rapporto tra uscita e ingresso che mi identifichi $W_i(s)$. Faccio così per ogni addendo della risposta e ho trovato $W(s)$

- Nel caso di n ingressi e p uscite. La nostra uscita totale è, ad esempio per 2 ingressi e 3 uscite:

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{pmatrix} = W_1(s)u_1(s) + W_2(s)u_2(s)$$

Facciamo come prima: mettiamo tutti gli ingressi a 0 tranne 1 e otteniamo un W_i . La differenza è che questa volta questo W_i sarà il rapporto tra un vettore di uscite e un ingresso, quindi W_i sarà una serie di funzioni di trasferimento e non una sola.

24.4.2 Seconda Considerazione:

Prendiamo la nostra risposta in uscita:

$$y(s) = \Psi(s)x_o + W(s)u(s)$$

Abbiamo visto che $y_\ell(s) = \Psi(s)x_o$ mentre il secondo termine, che è la trasformata della risposta forzata in uscita, si scrive come la somma di termini dipendenti dalla funzione di trasferimento e dei termini dipendenti dall'ingresso, cioè la possiamo scrivere così:

$$y_f(s) = y_{f,W}(s) + y_{f,u}(s)$$

Abbiamo visto che tutta $y_\ell(s)$ e per la risposta forzata solo $y_{f,W}(s)$ contengono i modi osservabili (il secondo precisamente contiene i modi sia osservabili che eccitabili). Quindi, come abbiamo già detto, se tutti i modi osservabili hanno parte reale strettamente negativa sono convergenti, e quindi tendono a scomparire al crescere di t. Ciò significa che l'uscita totale tenderà ad avere un comportamento legato all'ingresso che sto applicando al mio sistema, cioè per t abbastanza grande possiamo dire:

$$y(s) = y_{f,u}(s)$$

In particolare possiamo distinguere due categorie di ingressi: polinomiali e periodici. Concentriamoci su quelli più semplici: polinomiale a gradino.

24.4.3 Ingresso a gradino:

Conoscendo la trasformata del gradino, otteniamo:

$$y_f(s) = W(s) \frac{1}{s}$$

Quindi avremo dei residui legati agli autovalori del sistema che sono sia osservabili che eccitabili e un termine legato all'ingresso a gradino. In formule:

$$y_f(s) = \sum_i \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \frac{R_0}{s}$$

Il nostro R_0 è:

$$R_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s y_f(s) = W(0)$$

Quindi, antitrasformando:

$$y_f(t) = \sum_i R_i e^{\lambda_i t} + W(0) \delta_{-1}(t)$$

Se tutti gli autovalori λ_i sia osservabili che eccitabili sono convergenti allora per t abbastanza grande l'uscita forzata avrà la forma di un gradino con l'ampiezza di $W(0)$. **Quindi, nel caso di autovalori oss. ed ecc. convergenti, ad un ingresso a gradino corrisponde un uscita che tende ad appiattirsi su $W(0)$, e lo può fare da sotto oppure oscillando.** Questa è chiamata **Risposta indiciale**, cioè la risposta forzata a gradino. Questa risposta indiciale graficamente può avere innumerevoli forme, come abbiamo detto si appiattisce su $W(0)$, o oscillando o da sotto, ma questo lascia aperte una buona varietà di grafici, ad esempio possiamo avere un grafico oscillante che va altissimo all'inizio e poi scende vertiginosamente, oppure un grafico che si appiattisce su $W(0)$ da sotto molto lentamente... l'importante è che tutti si appiattiscano su $W(0)$ e **che al tempo 0 siano nell'origine**, e questo viene introdotto quando utilizziamo la funzione gradino, infatti, riprendendo un esempio fatto precedentemente:

$$y_{1,f}(s) = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{13}{6}e^{-3t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Vediamo che avendo raggruppato la funzione gradino questo ci permette di far partire tutta $y_{1,f}(s)$ dall'origine al tempo 0, perché per $t = 0$ il gradino vale 0. Comunque torniamo a noi: ok abbiamo questa grande possibilità di grafici, ma per gli strumenti che abbiamo ora non siamo in grado di capire qual è il grafico che rappresenta il comportamento del nostro sistema, siamo solo in grado di dire che si appiattisce su $W(0)$, non come lo fa e con che rapidità!! Allora, per quantificare queste cose, si definiscono questi parametri.

- **Tempo di Salita:** tempo che la risposta impiega per passare da 0 a $W(0)$, il **valore di regime**. Questo ovviamente vale per i grafici che oscillano, per quelli che crescono da sotto io non andrò mai al valore $W(0)$, cioè ci andrò asintoticamente. Ma comunque anche per questi che non toccano mai $W(0)$ definisco il tempo di salita, e lo definisco come il tempo per passare dal 10% al 90% del valore di regime.
- **Sovraelongazione:** di quanto io mi sposto rispetto al valore di regime, superandolo. Definito solo nei casi in cui il grafico va sopra e sotto
- **Tempo di Assestamento:** tempo che impiego perché la funzione assuma un valore che commette un errore percentualmente tollerabile rispetto al valore che si è fissato (i valori tipici vanno dal 2 al 5%). Cioè è l'istante di tempo t_a in cui entro in una fascia, attorno al valore di regime, la cui ampiezza dipende dal valore di errore che si è fissato.

Bene, prendiamo dei casi e andiamo a calcolare queste grandezze.

Primo caso: vediamo un primo esempio che ci fa vedere la prima casistica:

$$W(s) = \frac{1}{s + P} \quad \text{Con } P > 0$$

dobbiamo calcolare la risposta forzata, che ovviamente, dato che parliamo di risposta indiciale quindi di ingresso a gradino, sarà:

$$y_f(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{1}{(s + P)s}$$

Facendo lo sviluppo in residui:

$$y_f(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+P}$$

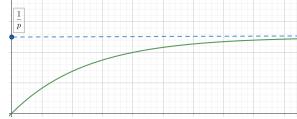
Come abbiamo detto R_0 è $W(0)$, mentre R_1 lo calcoliamo al solito con il limite, quindi:

$$y_f(s) = \frac{1}{Ps} - \frac{1}{(s+P)P}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P}e^{-Pt}\right)\delta_{-1}(t)$$

Quindi, volendo graficare questa risposta forzata: Vediamo che si tratta di una risposta che non



oscilla sopra e sotto, ma si appiattisce sul valore di regime $W(0) = \frac{1}{p}$ da sotto. Ok vogliamo vedere il nostro primo parametro, il tempo di salita? Bhe, poiché la funzione tende asintoticamente al valore di regime non abbiamo intersezioni con questo valore, ma il tempo di salita è definito come il tempo per passare dal 10% al 90% del valore di regime. Proviamo a calcolarlo, poniamo che al tempo t_1 si raggiunga il 10% del valore di regime, e al tempo t_2 il 90%. Allora abbiamo che:

$$y_f(t_1) = \frac{1}{p} - \frac{1}{P}e^{-Pt_1} = 10\% \frac{1}{P}$$

$$y_f(t_2) = \frac{1}{p} - \frac{1}{P}e^{-Pt_2} = 90\% \frac{1}{P}$$

Abbiamo che il nostro tempo di salita è $t_s = t_2 - t_1$ giusto? Bene, troviamoci quanto vale isolando da entrambe le equazioni l'esponenziale, poi dividendo la prima equazione per la seconda, e infine eliminando l'esponenziale e isolando $t_2 - t_1$, ottenendo:

$$t_s = t_2 - t_1 = \frac{\ln 9}{P}$$

Questa è la formula generale per calcolare il tempo di salita. Prendiamo diversi casi di P. Pensiamo $P = 1$ e $P = 100$. Ricordiamoci che:

$$W(s) = \frac{1}{s+P}$$

Quindi se $P = 1$ dall'espressione di $W(s)$ vediamo che l'autovalore è $\lambda = -1$, mentre se $P = 100$ $\lambda = -100$ (perché l'espressione di $W(s)$ sarebbe $\frac{1}{s-(-100)}$). Vediamo che per $P = 1$ il tempo di salita $t_s = t_2 - t_1$ è $\ln 9$, mentre per $P = 100$ il tempo di salita $t_s = t_2 - t_1$ è $\frac{\ln 9}{100}$. Cioè nel secondo caso è molto meno il tempo necessario per passare dal 10% al 90%. Quindi tanto più il mio autovalore si sposta verso sinistra (sul piano immaginario, cioè tanto più è negativo), tanto più piccolo sarà il tempo di salita, quindi tanto più rapidamente risponde il mio sistema.

La sovraelongazione invece vale 0, perché il grafico non va mai sopra il valore di regime

Passiamo ora al tempo di assestamento. Dobbiamo trovare quel t_a a partire da cui si è nella fascia orizzontale attorno al valore di regime. Questa fascia ha ampiezza determinata dalla percentuale di errore tollerabile che fissiamo, per ora lasciamo m%. Ok iniziamo calcolando quanto vale la funzione in t_a . Abbiamo che vale:

$$y_f(t) = \frac{1}{P} - \frac{1}{P}e^{-Pt}$$

Ok, adesso costruiamo questa fascia orizzontale attorno al valore di regime y_r :

$$|y_r - y_f(t_a)| = \left| \frac{1}{P} - \frac{1}{P} + \frac{1}{p}e^{-Pt} \right| = \frac{1}{p}e^{-Pt} \leq \frac{m}{100} \frac{1}{p}$$

Dove l'ultima diseguaglianza è proprio il vincolo che dobbiamo imporre per trovare il tempo di assestamento. Svolgendo i calcoli algebrici troviamo:

$$t \leq \frac{\ln \frac{100}{m}}{P}$$

Vediamo che per $m = 5$, ad esempio, otteniamo $t \leq \frac{\ln 20}{P}$.

Secondo caso: questo caso è più complicato.

$$W(s) = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Stavolta la funzione di trasferimento ha due poli (sempre reali). Supponiamo $p_1 \gg p_2 > 0$, quindi p_1 molto maggiore di p_2 . Ricordando che stiamo parlando di risposta indiciale, quindi in ingresso abbiamo un gradino, la nostra risposta forzata in uscita è:

$$y_f(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s + p_1} + \frac{R_2}{s + p_2}$$

Calcoliamo i residui, antitrasformiamo e otteniamo:

$$y_f(t) = \frac{1}{p_1 p_2} \delta_{-1}(t) + \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} e^{-p_1 t} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t}$$

Ora, vediamo che questi modi sono tutti convergenti, quindi per t abbastanza grande compare solo il termine dipendente dal gradino, cioè abbiamo che la funzione tende a un valore che è un gradino di ampiezza $\frac{1}{p_1 p_2}$. Anche in questo secondo caso quindi l'andamento porta la funzione ad appiattirsi da sotto al valore di regime. In questo caso questo valore di regime è $\frac{1}{p_1 p_2}$. Però abbiamo una differenza rispetto al primo caso: abbiamo un polo che è molto maggiore dell'altro, cioè $p_1 \gg p_2$. Questo vuol dire che $e^{-p_1 t}$ tende a 0 molto più velocemente di $e^{-p_2 t}$. Bene, ora calcoliamo $t_s = t_2 - t_1$. Prendiamo per questo la risposta forzata calcolata in t_1 e t_2 :

$$\begin{aligned} y_f(t_1) &= \frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} e^{-p_1 t_1} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_1} = \frac{1}{10} \frac{1}{p_1 p_2} \\ y_f(t_2) &= \frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} e^{-p_1 t_2} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_2} = \frac{9}{10} \frac{1}{p_1 p_2} \end{aligned}$$

Ora, poiché sappiamo che $p_1 \gg p_2$, cioè il primo converge molto più velocemente a 0 del secondo, possiamo trascurare $e^{-p_1 t}$, ritrovandoci quindi:

$$\begin{aligned} y_f(t_1) &= \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_1} = \frac{1}{10} \frac{1}{p_1 p_2} \implies \frac{1}{(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_1} = \frac{9}{10 p_1} \\ y_f(t_2) &= \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_2} = \frac{9}{10} \frac{1}{p_1 p_2} \implies \frac{1}{(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_2} = \frac{1}{10 p_1} \end{aligned}$$

E adesso dividiamo la prima espressione per la seconda, ottenendo:

$$\frac{e^{-p_2 t_1}}{e^{-p_2 t_2}} = 9 \implies t_2 - t_1 \approx \frac{\ln 9}{p_2}$$

Dove mettiamo "circa uguale" perché abbiamo fatto un'approssimazione trascurando il termine con $e^{-p_1 t}$. Comunque, il nostro tempo di salita è quindi:

$$t_s = t_2 - t_1 \approx \frac{\ln 9}{p_2}$$

vediamo che la dinamica più lenta, quella di p_2 , ci determina il tempo di salita, mentre quella più veloce, cioè quella di p_1 , no.

Anche in questo caso ovviamente la sovraelongazione è uguale a 0. In ultimo, calcoliamo il tempo di assestamento. Anche per calcolare il tempo di assestamento dovremo fare un'approssimazione.

$$|y_r - y_f(t_a)| = \left| \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} e^{-p_1 t_a} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_a} \right| \leq \frac{m}{100} \frac{1}{p_1 p_2}$$

Come prima, approssimiamo trascurando $e^{-p_1 t_a}$:

$$|y_r - y_f(t_a)| = \left| -\frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_a} \right| \leq \frac{m}{100} \frac{1}{p_1 p_2}$$

Poiché i poli e l'esponenziale sono sempre positivi, e poiché $p_1 \gg p_2$, leviamo il modulo levando il segno, ottenendo:

$$|y_r - y_f(t_a)| = \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} e^{-p_2 t_a} \leq \frac{m}{100} \frac{1}{p_1 p_2} \implies t_a \geq \frac{\ln(\frac{100}{m} \frac{p_1}{(p_1 - p_2)})}{p_2}$$

Ovviamente anche qui questa diseguaglianza sarebbe col circa, perché abbiamo fatto un approssimazione.

24.5 Facciamo un altro esercizio importante:

La nostra funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+10)}$$

Per quanto riguarda l'ingresso, invece di applicare un gradino applico un gradino traslato di una quantità a verso destra nel grafico. Cioè invece di $\delta_{-1}(t)$ prendiamo $\delta_{-1}(t-a)$, che vale 0 finché $t \leq a$ e poi vale sempre 1. Abbiamo due modi di operare:

- Sappiamo che il sistema è stazionario. Cioè possiede la proprietà di stazionarietà (quella di inizio corso) che ricordiamo ci dice che:

$$u(t) \rightarrow y(t) \implies u(t-a) \rightarrow y(t-a)$$

A parità di condizioni iniziali e ingresso applicato, quindi in pratica deve essere uguale ma traslato. A parole: prendo il mio sistema e calcolo l'uscita $y(t)$ sul gradino classico $\delta_{-1}(t)$, poi semplicemente traslo di a la mia uscita e ottengo $y(t-a)$. Quindi ora calcoliamo l'uscita sull'ingresso $\delta_{-1}(t)$ con la funzione di trasferimento che abbiamo dato, e poi trasliamo. Abbiamo quindi, per $\bar{u}(t) = \delta_{-1}(t)$:

$$\bar{y}_f(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+10)} \frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{(s+2)} + \frac{R_2}{(s+10)} \implies \bar{y}_f(t) = (R_0 + R_1 e^{-2t} + R_2 e^{-10t}) \delta_{-1}(t)$$

E adesso semplicemente trasliamo:

$$y_f(t-a) = (R_0 + R_1 e^{-2(t-a)} + R_2 e^{-10(t-a)}) \delta_{-1}(t-a)$$

Questo metodo conviene rispetto al secondo che stiamo per vedere perché in quest'ultimo metodo l'ingresso presenta un esponenziale, e quando vado a fare lo sviluppo in residui devo mantenere l'esponenziale fuori e sviluppare solo $W(s) \frac{1}{s}$.

- Secondo metodo:

$$u(t) = \delta_{-1}(t-a) \rightarrow u(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta_{-1}(t-a) dt$$

Per risolverlo utilizziamo la seguente proprietà della trasformata di Laplace:

$$L(f(t)) = F(s) \implies L(f(t-a) \delta_{-1}(t-a)) = e^{-as} F(s)$$

Che si può facilmente dimostrare così:

$$L(f(t-a)) = \int_0^\infty f(t-a) \delta_{-1}(t-a) e^{-st} dt = \int_a^\infty f(t-a) e^{-st} dt$$

Dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che $\delta_{-1}(t-a)$ è 0 fino a quanto t non è maggiore di a , quindi, essendo 1 da a in poi, eliminiamo il gradino. Adesso facciamo un cambio di coordinate $\xi = t - a$:

$$\int_0^\infty f(\xi) e^{-s(\xi+a)} d\xi = e^{-as} \int_0^\infty f(\xi) e^{-s\xi} d\xi$$

Dove all'esponente abbiamo usato la formula inversa $t = \xi + s$. Notiamo che:

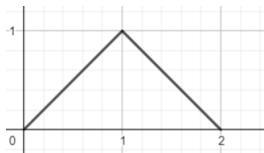
$$\int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi}d\xi = F(s)$$

Quindi abbiamo che:

$$L(f(t - a)) = e^{-as}F(s)$$

Come volevasi dimostrare. Quindi nel nostro specifico caso possiamo fare la trasformata del gradino classico ma dobbiamo tenere fuori dalla trasformata e portarc appresso questo esponenziale. Lo devo tenere fuori dalla trasformata perché sennò non ottengo una funzione razionale propria, e quindi poi non posso sviluppare in residui. Per questa scomodità conviene usare il primo metodo.

Prendiamo un altro segnale: Questo ingresso ha la seguente espressione:



$$u(t) = t\delta_{-1}(t) - 2(t-1)\delta_{-1}(t-1) + (t-2)\delta_{-1}(t-2)$$

Perché? Perché da 0 a 1 abbiamo la rampa $t\delta_{-1}(t)$, poi da qui per forza di cose dobbiamo sottrargli $2(t-1)\delta_{-1}(t-1)$, perché se non lo facessimo la rampa continuerebbe, invece noi vogliamo scendere. Nota che non sottraiamo $(t-1)\delta_{-1}(t-1)$ perché $t - t + 1 = 1$ quindi rimarrebbe il gradino che va costante, noi vogliamo invece scendere, infatti $t - 2t + 2 = 2 - t$. E quindi si scende da 1 a 2, poi vogliamo rimanere costanti su $y = 0$, come fare? Dobbiamo sommare $(t-2)\delta_{-1}(t-2)$ così da fare il gradino. Infatti per $t > 2$ tutti e tre i δ sono 1, cioè tutti e tre i termini non sono nulli e abbiamo $t - 2t + 2 + t - 2 = 0$, che è proprio la funzione costante che ci serve.

Ok calcoliamo la risposta. Per ogni t che consideriamo, questo ingresso $u(t)$ con somme e sottrazioni si semplifica sempre in una rampa t (con qualche coefficiente), e noi sappiamo che la trasformata di una rampa è:

$$L(t) = \frac{1}{s^2}$$

In effetti il nostro ingresso

$$u(t) = t\delta_{-1}(t) - 2(t-1)\delta_{-1}(t-1) + (t-2)\delta_{-1}(t-2)$$

Presenta tre rampe anche così, e dato che sappiamo che la trasformata della rampa è sempre $\frac{1}{s^2}$, possiamo dire che la risposta calcolata per la prima rampa (che possiamo chiamare $y_{f_1}(t)$, che è calcolata per $t\delta_{-1}(t)$, è uguale anche per gli altri due termini dell'ingresso, cioè per $-2(t-1)\delta_{-1}(t-1)$ e per $(t-2)\delta_{-1}(t-2)$. Unica cosa che cambia è il tempo in cui la calcolo: mentre la prima la calcolo al tempo t , la seconda a partire da t dopo 1 e la terza da t dopo 2, quindi:

$$y_f(t) = y_{f_1}(t) - 2y_{f_1}(t-1) + y_{f_1}(t-2)$$

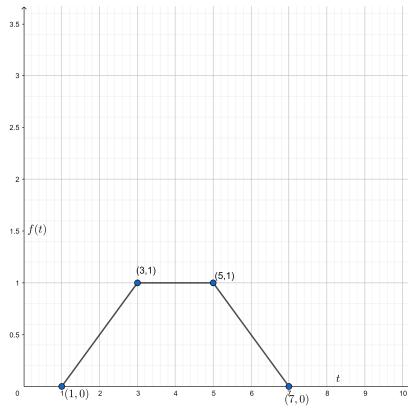
25 Esercizio Ingresso a Trapezio:

Questa è la funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{s + 10}$$

Calcolare la risposta forzata in uscita nel dominio del tempo. L'ingresso è il seguente: Concentriamoci sul primo pezzo, che va, per le ascisse, da 1 a 3. Ho segnato i punti esplicitamente perché usiamo stessa tattica. Per trovare il segmento tra due punti consideriamo che si tratta di una rampa traslata, quindi la sua espressione sarà del tipo:

$$f(t) = xt + y$$



E per calcolarci il suo valore prendiamo due punti e ci calcoliamo il sistema lineare di due equazioni in due incognite. Nel nostro caso, per la rampa traslata che va da $t = 1$ a $t = 3$:

$$\begin{cases} \text{per } t = 1 \text{ si ha } f(t) = 0 \implies x + y = 0 \\ \text{per } t = 3 \text{ si ha } f(t) = 1 \implies 3x + y = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$. Quindi per t che va da 1 a 3 l'espressione dell'ingresso è:

$$u(t) = \frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}t(t-1)$$

Ok, adesso secondo pezzo: da $t = 3$ a $t = 5$ c'è il gradino, quindi vuol dire che il nostro ingresso precedente deve essere modificato per diventare un gradino, quindi:

$$u(t) = \frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}(t-1) + m = 1$$

Dove m è la quantità che dobbiamo trovare. Svolgendo i calcoli:

$$m = \frac{1}{2}(3-t)$$

Così che da 3 a 5 la nostra espressione diventi 1. Abbiamo costruito un ulteriore pezzo della nostra funzione:

$$u(t) = \frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}t(t-1) - \frac{1}{2}(t-3)\delta_{-1}(t-3)$$

Ora andiamo a vedere il pezzo da 5 a 7. Prima vediamo qual è la rampa che vogliamo ottenere, poi vedremo qual è la quantità che dobbiamo aggiungere (o sottrarre) all'uscita che già conosciamo per ottenere questa rampa. La rampa che vogliamo ottenere passa per i due punti $(5,1)$ e $(7,0)$, quindi:

$$\begin{cases} \text{per } t = 5 \text{ si ha } f(t) = 1 \implies 5x + y = 1 \\ \text{per } t = 7 \text{ si ha } f(t) = 0 \implies 7x + y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{7}{2}$. Quindi per t che va da 5 a 7 l'espressione che vogliamo ottenere è:

$$-\frac{1}{2}(t-7)$$

Perciò per ottenere questo valore per l'ingresso dovremo aggiungere/togliere la quantità m t.c.:

$$u(t) + m = \frac{1}{2}(t-1) - \frac{1}{2}(t-3) + m = -\frac{1}{2}(t-7)$$

Da cui esce che $m = -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}$. Quindi il nostro ingresso, composto per ora da tre segnali è:

$$u(t) = \frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}t(t-1) - \frac{1}{2}(t-3)\delta_{-1}(t-3) - \frac{1}{2}(t-5)\delta_{-1}(t-5)$$

Ok, andiamo a vedere l'ultimo pezzo: se non modifichiamo ulteriormente il nostro ingresso la rampa continua a scendere, noi invece vogliamo che si formi un trapezio, quindi adesso la nostra funzione deve andare a 0, e per farlo dobbiamo sempre aggiungere/sottrarre una certa quantità m :

$$u(t) + m = \frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}t(t-1) - \frac{1}{2}(t-3)\delta_{-1}(t-3) - \frac{1}{2}(t-5)\delta_{-1}(t-5) + m = 0$$

Che ci porta a $m = \frac{1}{2}(t - 7)$. Perciò, finalmente, abbiamo trovato il nostro ingresso totale:

$$u(t) = \frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}(t-1) - \frac{1}{2}(t-3)\delta_{-1}(t-3) - \frac{1}{2}(t-5)\delta_{-1}(t-5) + \frac{1}{2}(t-7)\delta_{-1}(t-7)$$

Ecco i quattro segnali che compongono il mio ingresso. Quindi adesso siamo in grado di calcolare la trasformata di questo ingresso:

$$\begin{aligned} u(s) &= L(u(t)) = L\left(\frac{1}{2}(t-1)\delta_{-1}(t-1)\right) - L\left(\frac{1}{2}(t-3)\delta_{-1}(t-3)\right) - L\left(\frac{1}{2}(t-5)\delta_{-1}(t-5)\right) + L\left(\frac{1}{2}(t-7)\delta_{-1}(t-7)\right) \\ &= L\left(\frac{1}{2}(t-1)\right) - L\left(\frac{1}{2}(t-3)\right) - L\left(\frac{1}{2}(t-5)\right) + L\left(\frac{1}{2}(t-7)\right) = \frac{1}{2}(L(t-1) - L(t-3) - L(t-5) + L(t-7)) \end{aligned}$$

Adesso, per quanto dimostrato prima su $L(f(t-a))$ che è uguale a $e^{-as}F(s)$ si ha:

$$u(s) = \frac{1}{2}\left(e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-3s}\frac{1}{s^2} - e^{-5s}\frac{1}{s^2} + e^{-7s}\frac{1}{s^2}\right)$$

Da qui abbiamo due strade:

- Prendiamo l'ingresso così come lo abbiamo calcolato e ci calcoliamo la risposta forzata.
- Ci accorgiamo che $u(s)$ ha ogni termine con $\frac{1}{2}$ e con $\frac{1}{s^2}$. Quindi possiamo dire che il segnale di base è proprio questo $\bar{u}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$. Allora possiamo pensare di calcolare l'uscita su questo segnale di base e poi considerare i segnali traslati solo dopo.

Seguiamo prima la seconda strada e vediamo che è molto facile poi proviamo la prima per vedere che è più difficile. Ok, quindi per la seconda strada prendiamo il nostro segnale base $\bar{u}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$ e calcoliamo la risposta forzata su questo segnale:

$$\bar{y}_f(s) = W(s)\bar{u} = \frac{1}{200(s+10)} + \frac{1}{20s^2} + \frac{1}{200s}$$

Avendo sviluppato in residui e calcolato questi ultimi (ricorda che per il terzo residuo, quello con s , bisogna fare la derivata del calcolo fatto al residuo precedente, quello con s^2). Nota che possiamo fare il minimo comun denominatore di questi tre residui per controllare che sia corretto, dato che deve uscire la stessa frazione da cui siamo partiti prima dello sviluppo in residui, cioè $W(s)\bar{u}(s)$. Ok ora antitrasformiamo:

$$\bar{y}_f(t) = \left(\frac{1}{200}e^{-10t} + \frac{1}{20}t + \frac{1}{200}\right)\delta_{-1}(t)$$

Ma questa è la risposta per l'ingresso $\bar{u}(s)$, il nostro ingresso $u(s)$ era in realtà composto da una somma di termini che avevano questo ingresso ma traslato ognuno per una quantità diversa. Precisamente abbiamo:

$$u(s) = \frac{1}{2s^2}e^{-s} - \frac{1}{2s^2}e^{-3s} - \frac{1}{2s^2}e^{-5s} + \frac{1}{2s^2}e^{-7s}$$

Se ci ricordiamo come abbiamo ottenuto gli esponenziali e^{-as} - e cioè dalla trasformazione di $t - a$ - capiamo che essi corrispondono a una traslazione di a - perché $t - a$ è una traslazione della rampa di a . Questo significa che con $\bar{u}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$ abbiamo calcolato il segnale base, e $u(s)$ è semplicemente la somma di vari $\bar{u}(s)$ ognuno traslato di una certa quantità grazie al prodotto con il rispettivo esponenziale. E quindi la nostra uscita, essendo il prodotto dell'ingresso con la funzione di trasferimento è semplicemente la somma di vari $\bar{y}_f(t)$ ognuno traslato di una certa quantità. Precisamente:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \bar{y}_f(t-1) - \bar{y}_f(t-3) - \bar{y}_f(t-5) + \bar{y}_f(t-7) = \\ &= \left(\frac{1}{200}e^{-10(t-1)} + \frac{1}{20}(t-1) + \frac{1}{200}\right)\delta_{-1}(t-1) - \left(\frac{1}{200}e^{-10(t-3)} + \frac{1}{20}(t-3) + \frac{1}{200}\right)\delta_{-1}(t-3) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{200}e^{-10(t-5)} + \frac{1}{20}(t-5) + \frac{1}{200}\right)\delta_{-1}(t-5) + \left(\frac{1}{200}e^{-10(t-7)} + \frac{1}{20}(t-7) + \frac{1}{200}\right)\delta_{-1}(t-7) \end{aligned}$$

Avendo considerato correttamente i segni, provenienti dagli ingressi. Notiamo una cosa, noi abbiamo usato come segnale base $\frac{1}{s+10}\frac{1}{2s^2}$, ma potevamo sviluppare anche senza $\frac{1}{2}$ e poi usarlo dopo. Questo è utile perché se la combinazione di segnali è fatta sempre e solo di rampe ma di pendenze diverse, allora tu studi il segnale base senza coefficienti e poi dopo ce li metti. Qui abbiamo potuto

aggiungere il coefficiente moltiplicativo perché ogni termine della combinazione lineare aveva lo stesso coefficiente, cioè $\frac{1}{2}$. Ok comunque, risultato trovato nella seconda maniera. Vediamo che è stato facile. Adesso proviamo a vedere nella prima maniera, quindi calcolando direttamente la risposta da $u(s)$ senza sfruttare il segnale di base:

$$y_f(s) = W(s)u(s) = \frac{1}{s+10} \left(\frac{1}{2s^2} e^{-s} - \frac{1}{2s^2} e^{-3s} - \frac{1}{2s^2} e^{-5s} + \frac{1}{2s^2} e^{-7s} \right)$$

Abbiamo già detto che quando andiamo a fare i residui dobbiamo tirare fuori l'esponenziale e non svilupparlo, quindi riscriviamo la risposta forzata come:

$$y_f(s) = \frac{1}{(s+10)2s^2} e^{-s} - \frac{1}{(s+10)} \frac{1}{2s^2} e^{-3s} - \frac{1}{(s+10)} \frac{1}{2s^2} e^{-5s} + \frac{1}{(s+10)} \frac{1}{2s^2} e^{-7s}$$

E adesso possiamo sviluppare in residui:

$$y_f(s) = \left(\frac{R}{(s+10)} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s} \right) e^{-s} - \left(\frac{R}{(s+10)} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s} \right) e^{-3s} - \left(\frac{R}{(s+10)} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s} \right) e^{-5s} + \left(\frac{R}{(s+10)} + \frac{R_2}{s^2} + \frac{R_3}{s} \right) e^{-7s}$$

E adesso possiamo antitrasformare ogni termine, ricordando che il prodotto per un esponenziale equivale a una traslazione:

$$y_f(t) = \left[R_1 e^{-10(t-1)} + R_2(t-1) + R_3 \right] \delta_{-1}(t-1) - \left[R_1 e^{-10(t-3)} + R_2(t-3) + R_3 \right] \delta_{-1}(t-3) - \left[R_1 e^{-10(t-5)} + R_2(t-5) + R_3 \right] \delta_{-1}(t-5) + \left[R_1 e^{-10(t-7)} + R_2(t-7) + R_3 \right] \delta_{-1}(t-7)$$

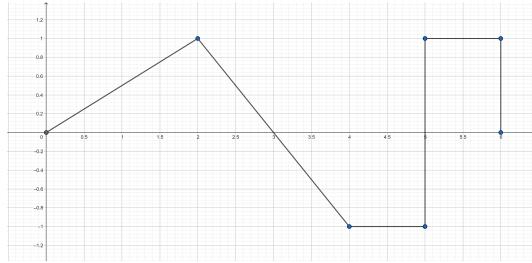
E vediamo che esce lo stesso risultato di prima, ottenuto però, in questa prima maniera, con una procedura più lenta. Quindi la seconda maniera è da preferire. Notiamo che in entrambe le maniere - al netto delle traslazioni - in ingresso avevamo una rampa e in uscita otteniamo la somma di una rampa e di un gradino.

26 Altro esercizio:

Prendiamo la funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

Prendiamo l'ingresso: Come prima, dividiamo in pezzi il segnale e studiamolo.



- Da 0 a 2. Abbiamo una rampa, cioè una retta, quindi avrà equazione $y = u(t) = kt + q$. Passa per i punti $(0,0)$ e $(2,1)$, quindi:

$$u(t) = \frac{1}{2}t\delta_{-1}(t)$$

- Da 2 a 4. Sempre una rampa, che passa per i punti $(2,1)$ e $(4,-1)$, quindi:

$$y = -t + 3$$

Per ottenere questa rampa dobbiamo aggiungere/sottrarre m a $u_1(t)$ t.c.:

$$\frac{1}{2}t + m = -t + 3 \implies m = -\frac{3}{2}(t-2)$$

Quindi abbiamo che il segnale è:

$$u(t) = \frac{1}{2}t\delta_{-1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\delta_{-1}(t-2)$$

- Da 4 a 5 dobbiamo ottenere il gradino, trovando la giusta m si trova che:

$$u(t) = \frac{1}{2}t\delta_{-1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-4)\delta_{-1}(t-4)$$

- Da 5 a 6 abbiamo un gradino, semplicemente traslato in su di 2, quindi possiamo svolgere il calcolo con m o semplicemente sommare $+2\delta_{-1}(t-5)$

- Da 5 a 5 dobbiamo riscendere a 0, quindi dobbiamo sottrarre $-1\delta_{-1}(t-6)$

In questo modo abbiamo trovato l'ingresso, che è:

$$u(t) = \frac{1}{2}t\delta_{-1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-4)\delta_{-1}(t-4) + 2\delta_{-1}(t-5) - \delta_{-1}(t-6)$$

Ok, vediamo che c'è una sostanziale differenza rispetto all'esercizio di prima: qui come segnale base non abbiamo solo la rampa, ma anche il gradino, e ogni è - come prima - traslato, ma moltiplicato stavolta per dei coefficienti diversi in ogni termine. Quindi che si fa? Innanzitutto prendiamo i nostri due segnali base e calcoliamoci la risposta. Partiamo col primo segnale base, la rampa:

$$\text{per } u_1(t) = t\delta_{-1}(t) \implies u_1(s) = \frac{1}{s^2} \quad y_{f_1}(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \implies y_{f_1}(t) = (e^{-t} + t - 1)\delta_{-1}(t)$$

Adesso prendiamo l'altro segnale base, il gradino:

$$\text{per } u_2(t) = \delta_{-1}(t) \implies u_2(s) = \frac{1}{s} \quad y_{f_2}(s) = \frac{1}{s(s+1)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} \implies y_{f_2}(t) = (-e^{-t} - 1)\delta_{-1}(t)$$

Adesso riprendiamo un attimo il nostro ingresso:

$$u(t) = \frac{1}{2}t\delta_{-1}(t) - \frac{3}{2}(t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-4)\delta_{-1}(t-4) + 2\delta_{-1}(t-5) - \delta_{-1}(t-6)$$

Vediamo che ogni termine è composto o da una rampa, cioè da $u_1(t) = t\delta_{-1}(t)$, o da un gradino $\delta_{-1}(t)$, ma traslato e moltiplicato per un coefficiente. Possiamo quindi riscrivere l'ingresso totale come:

$$u(t) = \frac{1}{2}u_1(t) - \frac{3}{2}u_1(t-2) + u_1(t-4) + 2u_2(t-5) - u_2(t-6)$$

E quindi il nostro ingresso è combinazione lineare di segnali base traslati e moltiplicati per certi coefficienti. Perciò l'uscita in corrispondenza di questo ingresso sarà combinazione lineare delle uscite relative ai segnali base, traslate e moltiplicate per certi coefficienti. Precisamente:

$$y_f(t) = \frac{1}{2}y_{f_1}(t) - \frac{3}{2}y_{f_1}(t-2) + y_{f_1}(t-4) + 2y_{f_2}(t-5) - y_{f_2}(t-6)$$

Cioè che abbiamo fatto: abbiamo preso il primo addendo della combinazione lineare di $u(t)$, cioè $\frac{1}{2}u_1(t)$ e abbiamo detto: ok sappiamo che se in input c'è $u_1(t)$ in uscita ottengo $y_{f_1}(t)$, quindi per $\frac{1}{2}u_1(t)$ come input in output ho $y_{f_1}(t)$ semplicemente moltiplicato per $\frac{1}{2}$, quindi $\frac{1}{2}y_{f_1}(t)$. Facciamo questo ragionamento per ogni addendo della nostra combinazione lineare di ingressi e otteniamo la risposta forzata in uscita totale, che quindi è anch'essa una combinazione lineare, di risposte forzate in uscita relative agli ingressi segnali base. Quindi ok, adesso se vogliamo calcolare $y_f(t)$ basta inserire i valori delle uscite forzate per gli ingressi base (calcolate in t - a traslato) e abbiamo fatto.

27 Torniamo al calcolo del tempo di salita, della sovrae-longazione e del tempo di assestamento:

Abbiamo visto due casi, quello con un solo polo e quello con due poli con uno dei due molto più grande dell'altro. Ci rimane un terzo caso: due poli complessi coniugati.

$$\frac{1}{(s-\alpha-j\omega)(s-\alpha+j\omega)} = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

e al tempo avevamo detto che piuttosto che studiare parte reale e parte immaginaria introduciamo due coefficienti: smorzamento e pulsazione naturale. Sul piano dei numeri complessi lo

smorzamento $\xi = \frac{-\alpha}{\omega_n}$ ²³ coincideva con l'angolo rispetto all'asse y, mentre la pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ coincideva con il modulo (lunghezza vettore). Date queste quantità, possiamo riscrivere la nostra funzione come:

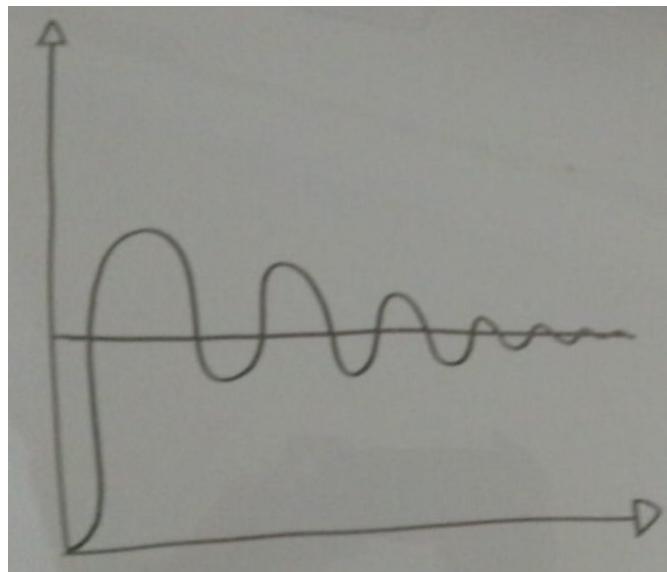
$$\frac{1}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} = \frac{1}{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

La rappresentazione con smorzamento e pulsazione naturale la useremo di più rispetto a quella con parte reale e parte immaginaria, perché questi due parametri sono più eloquenti rispetto a parte reale e parte immaginaria.

Ok, quindi se prendiamo come funzione di trasferimento proprio:

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

e prendiamo in ingresso un gradino ($u(t) = \delta_{-1}(t)$), mentre nei due casi precedenti avevamo in uscita una curva che da sotto si appiattiva asintoticamente a un gradino, questa volta in uscita troviamo questo andamento periodico: Dovuto ovviamente alla *presenza dei poli complessi coniugati*.



Vediamo che comunque si appiattisce asintoticamente su un certo gradino. Quindi asintoticamente tendo a un gradino - se la parte reale dell'autovalore è negativa - ma con delle oscillazioni. Ok, c'è da calcolare tempo di salita, sovraelongazione e tempo di assestamento. Ok, iniziamo con il tempo di salita; calcoliamo l'uscita forzata con ingresso un gradino

$$y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{As + B}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Dove il secondo termine è così perché inizialmente era $(s - \alpha)^2 + \omega^2$, e ricordiamo che per questi termini complessi coniugati sopra ci va $As + B$. Ora calcoliamo i residui, per R_0 ci ricordiamo che è uguale a $W(0)$, mentre per A e B scegliamo $s = 1$ e $s = -1$ per calcolare A e B nella solita maniera. Ci viene fuori il seguente sistema di due equazioni:

$$A + B = -\frac{1 + 2\xi\omega_n}{\omega_n^2}$$

$$B - A = \frac{1 - 2\xi\omega_n}{\omega_n^2}$$

²³Nota che se gli autovalori sono a parte reale positiva sono divergenti, e infatti lo smorzamento è negativo, cioè è l'opposto di uno smorzamento: un'amplificazione, proprio perché i modi divergono.

O lo risolviamo per sostituzione, come sempre, oppure lo risolviamo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \\ \frac{1-2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \end{pmatrix}$$

Adesso, invertendo la matrice troviamo:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \\ \frac{1-2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \left(-\frac{1+2\xi\omega_n}{\omega_n^2} - \frac{1-2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \right) = -\frac{1}{\omega_n^2}$$

$$B = \frac{1}{2} \left(-\frac{1+2\xi\omega_n}{\omega_n^2} + \frac{1-2\xi\omega_n}{\omega_n^2} \right) = -\frac{2\xi}{\omega_n}$$

Ora però notiamo una cosa:

$$\frac{As+B}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

E fino a qui ci siamo. Il discorso ora è che io al numeratore quindi non posso avere s , ma devo avere $s - \alpha$, questo perché io devo trasformare:

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Per ottenere il coseno, dove nel nostro caso s è uguale a $s - \alpha$ (quindi avremo nell'anttrasformazione un termine esponenziale $e^{\alpha t}$ per questa traslazione). Questo perché questa è la trasformata del coseno, non $\frac{s}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$. Perciò mi tocca sottrarre e aggiungere α ad s , ottenendo:

$$y_f(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{A(s-\alpha+\alpha)+B}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Adesso dividiamo in due frazioni e moltiplichiamo e dividiamo la seconda per ω , cioè:

$$y_f(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{A(s-\alpha)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{(A\alpha+B)\frac{\omega}{\omega}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Bene, ora siamo in grado di anttrasformare, ricordandoci che $R_0 = W(0)$:

$$y_f(t) = \frac{1}{\omega_n^2} \delta_{-1}(t) - \frac{1}{\omega_n^2} e^{\alpha t} \cos \omega t - \left(\frac{\alpha}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \right) \frac{1}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t$$

Ricordandoci che potremmo roscrivere quel seno e quel coseno in un unico seno, in questa maniera:

$$M_1 \sin \omega t + M_2 \cos \omega t = M \sin(\omega t + \phi)$$

Avendo utilizzato la formula di addizione del seno, poiché $M_1 = \cos \phi$ e $M_2 = \sin \phi$, e con $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$ e $\phi = \arctan \frac{M_2}{M_1}$. Ok calcoliamo:

- Il tempo di salita t_s : qual è l'istante in cui tocchiamo per la prima volta il valore di regime? Consideriamo la nostra uscita forzata $y_f(t)$.

$$y_f(t) = \left(\frac{1}{\omega_n^2} \delta_{-1}(t) \right) - \left(\frac{1}{\omega_n^2} e^{\alpha t} \cos \omega t - \left(\frac{\alpha}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \right) \frac{1}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t \right)$$

Dove con queste parentesi abbiamo evidenziato che, per quanto detto sopra, l'uscita forzata è la somma di un gradino e una funzione che è l'inviluppo di una funzione esponenziale con una funzione sinusoidale (ricorda che infatti possiamo scrivere la funzione nella seconda parentesi nella forma $M \sin(\omega t + \phi)$). Vediamo che il nostro valore di regime $W(0)$ è proprio l'ampiezza del primo gradino (come sempre d'altronde), cioè $\frac{1}{\omega_n^2}$. Ciò vuol dire che la nostra uscita forzata è in valore di regime quando il secondo termine è nullo, e cioè quando il seno è nullo. Sappiamo che il seno è nullo quando è nullo il suo argomento, e poiché il seno è $\sin(\omega t + \phi)$ abbiamo che siamo in valore di regime quando $\omega t + \phi = 0$ (o anche π , ma per il tempo di salita ci serve il PRIMO valore per cui è 0 il seno, cioè π).

- Adesso occupiamoci del tempo di assestamento. Il tempo di assestamento preciso non lo riesco a calcolare, ma lo posso fare con buona approssimazione con una disegualanza

$$|y_f(t_a) - y_r| \leq \frac{m}{100} y_r$$

Che si calcola facilmente se maggioriamo il seno con 1, in modo che la disegualanza diventi una condizione su M.

- Infine occupiamoci della sovraelongazione: stavolta è definita. Si tratta del valore massimo rispetto al valore di regime. Quindi per calcolarla facciamo la derivata e vediamo per quale valore di t si annulla. Quindi calcoliamo la funzione in quel punto e facciamo la differenza con il valore di regime e poi lo normalizziamo rispetto al valore di regime, cioè semplicemente divido per il valore di regime la differenza tra il valore massimo e il valore di regime.

28 Forma di Bode:

Abbiamo tre rappresentazioni per la funzione/matrice di trasferimento:

- $W(s)$ come rapporto di polinomi $\frac{N(s)}{D(s)}$. Se $W(s)$ è una matrice $N(s)$ sarà una matrice di polinomi.
- Dalla rappresentazione precedente, mettendo in evidenza le radici al numeratore e al denominatore, otteniamo:

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

con $m \leq n$, perché al denominatore il grado deve essere più alto ricordiamo. Le radici al numeratore sono chiamate zeri, mentre quelle al denominatore sono poli. Questo è per un ingresso e un'uscita, ma poi si generalizza per più ingressi più uscite, quindi nel caso matriciale. Ricordiamo che zeri e poli possono essere sia reali che complessi coniugati.

- Mettendo in evidenza la costante di tempo, lo smorzamento e la pulsazione naturale, cioè non scrivendo direttamente i poli e gli zeri come sopra ma definendo:

$$s - z_i = -z_i(1 + \tau_i s)$$

Quindi deve essere che $\tau_i = -\frac{1}{z_i}$. E questo ci basta per le radici reali. Per le radici complesse coniugate invece dobbiamo fare in altra maniera: innanzitutto consideriamo il prodotto di queste radici complesse coniugate e lo scriviamo con smorzamento e pulsazione naturale. Così:

$$(s - \alpha - j\omega)(s - \alpha + j\omega) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2 \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)$$

Quindi abbiamo il modo di riscrivere i poli e le radici con la costante di tempo (se sono reali) o con lo smorzamento e la pulsazione naturale (se sono complessi coniugati). Il coefficiente $-z_i$ per la riscrittura dei poli reali con la costante di tempo e il coefficiente ω_n^2 per la riscrittura dei poli complessi coniugati con smorzamento e pulsazione naturale in $W(s)$ sarebbero in un rapporto, che possiamo riscrivere con la costante k, che chiamiamo **guadagno**. Quindi riscriviamo la nostra $W(s)$ in questa maniera:

$$W(s) = k \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_j (1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2})}{s^r \prod_i (1 + \bar{\tau}_i s) \prod_j (1 + 2\bar{\xi} \frac{s}{\bar{\omega}_n} + \frac{\bar{\omega}_n^2}{\bar{\omega}_n^2})}$$

Dove, ripetiamo, $k = \frac{-z_i}{\omega_n^2}$. Invece s^r , l'eccesso²⁴ di poli in zero, cioè *differenza poli-zeri in 0*, deriva da questa considerazione: avremo dei casi in cui sia i poli sia gli zeri sono nulli, cioè abbiamo radici in 0. Precisamente avremo un prodotto di un certo numero di queste radici in 0 al numeratore e un certo numero al denominatore. Allora, dato che al denominatore sono

²⁴Ovviamente si parla di eccesso di poli perché i poli, che stanno al denominatore, sono in numero uguale (e in tal caso non c'è eccesso) o maggiore degli zeri al numeratore, perché la funzione di trasferimento ha un polinomio al denominatore necessariamente di grado maggiore o almeno uguale a quello del numeratore. Quindi, se l'eccesso c'è, è per forza di poli al denominatore, non può essere di zeri al numeratore.

di più perché il grado del polinomio al denominatore è maggiore, semplicemente avremo un prodotto di s tot. volte al numeratore, e lo portiamo giù al numeratore, dove ci sarà un altro prodotto di un tot. di s che sono però di più. Ora ovviamente prodotto di due potenze con stessa base da una potenza con stessa base e esponente somma (in questo caso sottrazione) delle due, che nel nostro caso chiamiamo con un generico r. Nota che al denominatore abbiamo barrato costante di tempo, smorzamento e pulsazione naturale per distinguerli dagli stessi parametri al numeratore, che sono diversi ovviamente. Possiamo definire il guadagno k come il valore che assume la funzione di trasferimento W(s) in s = 0 una volta eliminato l'eventuale eccesso di poli in zero s^r , e questo è verificabile direttamente dalla formula, ponendo s = 0. Proprio perché K = W(0) eliminati l'eccesso di poli in zero, si può dire che il guadagno è l'ampiezza del gradino che ottengo nella risposta indiciale quando si è in un tempo t sufficientemente grande da far rimanere solo l'ingresso gradino a influenzare l'uscita, cioè è il valore di regime a cui si appiattisce la funzione.

Questa ultima rappresentazione è chiamata **Forma di Bode**. In questa forma, chiamiamo nei seguenti modi le seguenti quantità:

- $1 + \tau_i s$ è il *fattore binomio*
- s^r è il *fattore monomio*
- $\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1$ è il *fattore trinomio*

Vediamo che queste tre, che sono tutte le quantità della rappresentazione oltre a k, hanno tutte termine noto pari a 1 (quando s = 0 per primo e terzo, quando r = 0, cioè non c'è eccesso, per il secondo fattore): ciò significa che è vero che k, il guadagno, sia W(0) se non consideriamo l'eccesso di poli in zero. Tutto ciò che riguarda i termini noti nella forma di Bode è quindi contenuto nel guadagno k.

29 La Trasformata Z per i sistemi a tempo discreto:

Il modello implicito è:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Invece il modello esplicito, supponendo come istante iniziale $k_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} Bu(\tau) = x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau)u(\tau) \\ y(k) &= CA^k x(0) + \sum_{\tau=0}^{k-1} CA^{k-1-\tau} Bu(\tau) + Du(\tau) = \Psi(k)x(0) + \sum_{\tau=0}^k W(k-\tau)u(\tau) \end{aligned}$$

Dove la matrice W possiamo scriverla così perché per definizione vale:

$$W(k) = \begin{cases} CA^{k-1}B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases}$$

L'elemento centrale per capire come evolve il nostro stato è:

$$\Phi(k) = A^k$$

Nel caso in cui A sia diagonalizzabile \tilde{A} è una matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale, e \tilde{A}^k ha gli autovalori alla k sulla diagonale. Con questo possiamo scrivere nelle coordinate di partenza:

$$\Phi(k) = \sum \lambda_i^k u_i v_i' + \sum |\lambda_j|^k (\cos(\theta_j k)(u_{j,a} v_{j,a}' + u_{j,b} v_{j,b}') + \sin(\theta_j k)(u_{j,a} v_{j,b}' + u_{j,b} v_{j,a}'))$$

Il primo termine per gli autovalori reali, il secondo per gli autovalori complessi coniugati. Con θ_j che è l'argomento del numero complesso, cioè dell'autovalore. Comunque, abbiamo che:

- Se $|\lambda| < 1$ traiettoria convergente.

- Se $|\lambda| > 1$ traiettoria divergente.
- Se $|\lambda| = 1$ dipende dall'ordine geometrico: se è pari a 1 la matrice è diagonalizzabile e si ha convergenza, se invece è maggiore di uno avrà dei termini polinomiali e quindi il modo diverge.

Come nel caso del tempo continuo comunque, abbiamo il problema di calcolare la risposta forzata: infatti anche qui tranquillamente calcoliamo le tre matrici, ma poi non sappiamo calcolare le somme di convoluzione. Anche qui, invece che operare nel tempo, preferiamo utilizzare l'operatore chiamato **Trasformata Z**, che mi permette di semplificare le operazioni passando in un sistema nel dominio complesso. Data una funzione:

$$f(k) \quad \text{def } k \geq 0$$

La trasformata Z di questa funzione è:

$$Z(f(k)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{z^i} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} \dots = F(z)$$

Ora, abbiamo la trasformata di $f(k)$, ma a noi ci serve la trasformata di $f(k+1)$, perché quella compare nel modello discreto, oltre che la trasformata di $x(k)$ e $u(k)$. Per trovarla ragioniamo così:

$$L(f(k+1)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i+1)}{z^i} = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \dots$$

e ora moltiplico e divido per z trovo gli stessi termini di $L(f(k))$, ma c'è ancora una differenza: manca $f(0)$. Quindi sommo e sottraggo $f(0)$:

$$L(f(k+1)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i+1)}{z^i} = \frac{z}{z}(f(0) - f(0) + f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \dots) = zF(z) - zf(0)$$

Per completezza, abbiamo anche lo shift in direzione opposta:

$$L(f(k-1)) = f(-1) + \frac{f(0)}{z} + \dots$$

ma f è definita per $k \geq 0$ quindi $f(-1) = 0$, quindi:

$$L(f(k-1)) = \frac{F(z)}{z}$$

Se prendiamo il gradino, cioè $f(k) = \delta_{-1}(t) \forall k$, la serie:

$$Z(\delta_{-1}(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{z^i} = \sum_{i=0}^{\infty} (z^{-1})^i = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Avendo utilizzato la serie geometrica. Notiamo che, diversamente dal caso a tempo continuo, *non abbiamo il numeratore con grado strettamente minore del denominatore, ma hanno lo stesso grado*. Questa sarà una differenza importante quando dovremo trasformare.

Invece:

$$Z(\lambda^k) = 1 + \frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda^2}{z^2} + \dots$$

Se definisco:

$$\bar{z} = \frac{z}{\lambda}$$

Allora riscriviamo:

$$Z(\lambda^k) = 1 + \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^2} + \dots$$

E sempre utilizzando la serie geometrica:

$$Z(\lambda^k) = \sum (\bar{z}^{-1})^i = \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1} = \frac{z}{z-\lambda}$$

Altra trasformata da ricordarsi è quella del seno:

$$Z(\sin(\theta k)) = Z\left(\frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}\right)$$

Avendo utilizzato la Formula di Eulero. Ora facciamo i seguenti passi:

$$Z(\sin(\theta k)) = \frac{1}{2j} Z(e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}) = \frac{1}{2j} [Z[(e^{j\theta})^k] - Z[(e^{-j\theta})^k]] = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}} \right]$$

Avendo utilizzato la trasformata trovata al punto precedente, cioè $Z(\lambda^k)$. Adesso, facendo l'MCM:

$$Z(\sin(\theta k)) = \frac{1}{2j} \left[\frac{z(z - e^{-j\theta}) - z(z - e^{j\theta})}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{-ze^{-j\theta} + ze^{j\theta}}{z^2 - ze^{-j\theta} - ze^{j\theta} + e^{j\theta} - e^{-j\theta}} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{-ze^{-j\theta} + ze^{j\theta}}{z^2 - z(e^{-j\theta} + e^{j\theta}) + 1} \right]$$

Adesso al secondo termine del denominatore moltiplico e divido per 2:

$$Z(\sin(\theta k)) = \frac{1}{2j} \left[\frac{z(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{z^2 - \frac{2z(e^{-j\theta} + e^{j\theta})}{2} + 1} \right]$$

Noto che ora ho la possibilità di scrivere un coseno e un seno, utilizzando le due Formule di Eulero. La mia trasformata diventa quindi:

$$Z(\sin(\theta k)) = \left[\frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} \right]$$

Possiamo calcolare la trasformata di $\cos \theta k$ nella stessa maniera, semplicemente la Formula di Eulero per il coseno ha un + invece che un -.

$$Z(\cos \theta k)$$

Troviamo infine la trasformata della rampa (che ritroveremo e fare bene più avanti):

$$Z(k) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

Trovi qui la dimostrazione con la sequenza (??): https://people.unica.it/alessandropisano/files/2020/04/CD_04_Ztrasf.pdf (non metterlo come url che non funziona ma su google)

Ritorniamo al nostro modello implicito:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Se chiamiamo $x(z)$ la trasformata di $x(k)$ e $u(z)$ la trasformata di $u(k)$; prendendo la prima equazione, se andiamo ad applicare la trasformata:

$$Z(x(k+1)) = zx(z) - zx(0) = AZ(x(k)) + BZ(u(k)) = Ax(z) + Bu(z) \implies zx(z) - zx(0) = Ax(z) + Bu(z)$$

Dove la prima diseguaglianza discende dalla trasformata di $x(k)$ shiftato, trasformata che abbiamo calcolato prima. Bene, ora isolo $x(z)$:

$$(zI - A)x(z) = zx(0) + Bu(z) \implies x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}Bu(z)$$

E abbiamo trovato x nel dominio complesso, ora occupiamoci della seconda equazione del modello, cioè di trovare y nel dominio complesso.

$$Z(y(k)) = CZ(x(k)) + DZ(u(k)) = Cx(z) + Du(z)$$

Ma noi conosciamo $x(z)$, lo abbiamo appena trovato. Quindi otteniamo:

$$y(z) = C(zI - A)^{-1}zx(0) + (C(zI - A)^{-1}B + D)u(z)$$

Sto quindi ripetendo lo stesso procedimento fatto per i sistemi a tempo continuo. Quindi se pongo $u = 0$ ho che la trasformata dell'evoluzione libera deve essere:

$$x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0)$$

Per ogni $x(0)$ e questo mi porta a dire, poiché $x(k) = A^k x(0)$, quindi $Z(x(k)) = x(z) = Z(A^k x(0)) = Z(A^k)x(0)$:

$$Z(A^k) = \frac{x(z)}{x_0} = (zI - A)^{-1}z$$

Molto simile all'analogia ricavata a tempo continuo, ma compare quella z in più. I coefficienti quindi non sono più rapporto di polinomi con grado del poli al num strettamente minore, ma possono essere uguali i gradi. Quindi non necessariamente si parla di funzioni razionali strettamente proprie, possono essere proprie e basta (cioè grado uguale). Questo porterà a una differenza nel momento in cui dovremo antitrasformare e tornare nel dominio del tempo. Adesso occupiamoci della trasformata della matrice $H(k)$:

$$Z(H(k)) = Z(A^{k-1}B) = Z(A^{k-1})B$$

Dove abbiamo tirato fuori B perché, a differenza di A^{k-1} , è una matrice costante. Adesso, per trovare la trasformata di A^{k-1} , usiamo questa relazione trovata all'inizio:

$$L(f(k-1)) = \frac{F(z)}{z}$$

Che nel nostro caso ci porta a:

$$Z(H(k)) = \frac{Z(A^k)}{z}B = (zI - A)^{-1}B$$

Perciò nella nostra $x(z)$ abbiamo:

$$x(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + H(z)u(z)$$

Quindi una somma di convoluzione nel dominio del tempo si è trasformata nel prodotto di due trasformate nel dominio z , come nel caso continuo. Ok, adesso calcolo della $\Psi(z)$:

$$Z(\Psi(z)) = Z(CA^k) = CZ(A^k) = C(zI - A)^{-1}z$$

Infine trasformata di $W(k)$:

$$Z(W(k)) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Con cui possiamo scrivere la nostra seconda equazione del modello:

$$y(z) = C(zI - A)^{-1}zx(0) + W(z)u(z)$$

E quindi anche qui vediamo che la somma di convoluzione nel dominio del tempo si è trasformata nel prodotto di due trasformate nel dominio complesso.

29.1 Facciamo un esercizio (così impariamo ad antitrasformare):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(k) &= (1 \ 0) x(k) \end{aligned}$$

Vediamo che abbiamo un ingresso (B è composta da una sola colonna) e un'uscita (C è composta da una sola riga). Abbiamo due stati, cioè due componenti di x , quindi $\phi(k)$ avrà dimensioni 2×2 . Calcoliamo $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 1 & z-0.5 \end{pmatrix}^{-1}z = \frac{\begin{pmatrix} z-0.5 & 0 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix} z}{(z-1)(z-0.5)} = \begin{pmatrix} \frac{(z-0.5)z}{(z-1)(z-0.5)} & 0 \\ \frac{-z}{(z-1)(z-0.5)} & \frac{z(z-1)}{(z-1)(z-0.5)} \end{pmatrix}$$

Vediamo che, al di là delle semplificazioni, ogni termine può essere una frazione con polinomio al numeratore di grado PARI al grado del polinomio al denominatore, e non deve per forza essere

strettamente minore. Io per antitrasformare devo trovare termini del tipo $\frac{z}{z-\lambda}$, dove il grado del numeratore è uguale al denominatore, quindi mi andrebbe bene. Il problema è che non posso avere il grado del numeratore uguale a quello del denominatore per sviluppare in residui: per sviluppare in residui il grado del numeratore deve essere minore di quello del denominatore. Risolvo considerando $\frac{\Phi(z)}{z}$, in modo che il numeratore abbia sempre grado minore del denominatore; in questo modo riesco a sviluppare in residui. Nel nostro esempio:

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-0.5} \implies \Phi(z) = R_1 \frac{z}{z-1} + R_2 \frac{z}{z-0.5}$$

Calcoliamo ora i residui:

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\Phi(z)}{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow 0.5} (z-0.5) \frac{\Phi(z)}{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolati i residui, è chiaro che è facile passare dal rapporto di $\Phi(z)$ con z all'espressione della matrice $\Phi(z)$, in questa maniera:

$$\frac{\Phi(z)}{z} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-0.5} \implies \Phi(z) = R_1 \frac{z}{z-1} + R_2 \frac{z}{z-0.5}$$

Adesso, antitrasformando secondo la relazione con $\frac{z}{z-\lambda}$, troviamo che:

$$\frac{\Phi(z)}{z} = R_1(1)^k + R_2(0.5)^k$$

E abbiamo fatto. Notare che noi $\Phi(k)$ la sapevamo calcolare direttamente nel dominio del tempo, come abbiamo sempre fatto. Se avessimo fatto così avremmo ottenuto:

$$\Phi(k) = (\lambda_1)^k u_1 v'_1 + (\lambda_2)^k u_2 v'_2$$

Che confrontata con la $\Phi(k)$ che abbiamo ottenuto ora antitrasformando dal dominio z , ci mostra che:

$$R_1 = u_1 v'_1 \quad R_2 = u_2 v'_2$$

E ovviamente mi ritrovo anche su tutto il discorso dei ranghi che abbiamo fatto quando eravamo nella situazione analoga nel caso di sistemi a tempo continuo.

Se io invece ora devo calcolare la funzione di trasferimento:

$$W(z) = C(z - A)^{-1} B + D$$

Con D che nel nostro caso è 0. Abbiamo:

$$W(z) = (1 \ 0) \frac{\begin{pmatrix} z-0.5 & 0 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-0.5)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vediamo che $B = (1 \ 0)$ ci fa prendere la prima riga della matrice, dopodiché $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lascia invariata questa riga (che da matrice diventa però polinomio). Quindi otteniamo:

$$W(z) = \frac{z-0.5+0}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{1}{z-1}$$

Dove il grado del numeratore è minore del grado del denominatore come mi aspettavo. Vediamo che il modo associato a $(z-1)$, quindi all'autovalore $\lambda = 1$ è sia osservabile che eccitabile, mentre si è avuta la cancellazione di $(z-0.5)$. Che significa? Che la funzione di trasferimento è caratterizzata da un unico polo, mentre io mi aspettavo due poli avendo due autovalori. Quindi significa che il modo associato al polo $(z-0.5)$ è o non osservabile o non eccitabile, poiché in W ci vanno solo i modi che sono sia osservabili che eccitabili. Allora che faccio per vedere se non compare perché è non osservabile o perché è non eccitabile? Di sicuro non mi metto a fare tutto lo studio del tempo: vado a vedere in quale delle due matrici, se H o se Φ , non è contenuto $(z-0.5)$.

- In $H(z) = (zI - A)^{-1}B$ troviamo:

$$\frac{\begin{pmatrix} z-0.5 \\ z-2 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-0.5)}$$

Vediamo che $(z - 0.5)$ non è presente in tutti gli elementi della matrice, quindi non ho una cancellazione e $(z - 0.5)$ non si può eliminare. Quindi $(z - 0.5)$ è in H e il modo associato all'autovalore $\lambda = 0.5$ è eccitabile. Allora il problema per forza di cose deve essere la non osservabilità, e quindi il modo non deve essere presente nella matrice $\Psi(z)$.

$$\Psi(z) = C(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} z-0.5 & 0 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix} z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{\begin{pmatrix} z-0.5 & 0 \end{pmatrix} z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{\begin{pmatrix} z & 0 \end{pmatrix}}{(z-1)}$$

Vediamo che il polo $z - 0.5$ in questo caso si è cancellato, quindi non compare nella matrice $\Psi(z)$, e per questo il modo non è osservabile: ecco perché non compare nella $W(z)$. Riprendiamo ora la nostra funzione di trasferimento:

$$W(z) = \frac{1}{(z-1)}$$

Innanzitutto notiamo che $z-1$ significa che stiamo parlando di un autovalore $\lambda = 1$, cioè un modo che non è convergente, oltre che osservabile ed eccitabile. Il fatto che non sia convergente implica che nella risposta forzata per t abbastanza grande continuerà a comparire, e non scomparirà mai come nel caso in cui fosse stato convergente. Se il mio ingresso è un gradino sappiamo che la sua trasformata è:

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

Quindi calcolando la risposta forzata:

$$y_f(z) = W(z)u(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

E, come vedremo bene più avanti, *questa è la trasformata della rampa*. Quindi, antitrasformando, otteniamo:

$$y_f(t) = k\delta_{-1}(k)$$

Vediamo che proprio perché il polo associato all'unico modo della funzione di trasferimento non è convergente, mettiamo in ingresso un gradino e ci ritorna in uscita una rampa, quindi qualcosa che cresce al crescere del tempo.

Se invece nell'esercizio metto in ingresso $u(k) = \cos \theta k$, facciamo con $\theta = 1$, calcoliamo la risposta forzata in uscita. Innanzitutto calcoliamo la trasformata dell'ingresso:

$$\begin{aligned} Z(\cos k) = u(z) &= Z\left(\frac{(e^j)^k + (e^{-j})^k}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^j} + \frac{z}{z - e^{-j}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2z^2 - z(e^j + e^{-j})}{z^2 - ze^{-j} - ze^j + 1} \right] = \\ &= \left[\frac{z^2 - z \cos 1}{z^2 - z(e^j + e^{-j}) + 1} \right] = \left[\frac{z^2 - z \cos 1}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} \right] \end{aligned}$$

Avendo utilizzato la trasformata $Z(\lambda^k)$ e avendo diviso e moltiplicato per due al terzo termine del denominatore nell'ultima uguaglianza. Noi l'abbiamo fatta con $\theta = 1$, ma per θ generale abbiamo:

$$Z(\cos \theta k) = \left[\frac{z^2 - z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} \right]$$

Comunque, noi in questo esercizio lo facciamo con $\theta = 1$, questa era solo una generalizzazione. Adesso andiamo a calcolare la risposta forzata in uscita con questo ingresso:

$$y_f(z) = W(z)u(z) = \frac{1}{z-1} \left[\frac{z^2 - z \cos 1}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} \right]$$

Adesso, come abbiamo fatto prima con Φ , andiamo a dividere $y_f(z)$ per calcolare i residui:

$$\frac{y_f(z)}{z} = \frac{1}{z-1} \left[\frac{z - \cos 1}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} \right] = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2 z + R_3}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} = \frac{\frac{1-\cos 1}{2-2\cos 1}}{z-1} + \frac{R_2 z + R_3}{z^2 - 2z \cos 1 + 1}$$

Avendo sviluppato in residui e calcolato i suddetti. Per calcolare R_2 e R_3 abbiamo preso $z = 0$ e $z = \cos 1$. Bene, ora possiamo calcolare la risposta forzata in uscita:

$$y_f(z) = \frac{1 - \cos 1}{2 - 2 \cos 1} \frac{z}{z - 1} + \frac{R_2 z^2 + R_3 z}{z^2 - 2z \cos 1 + 1}$$

Per il primo addendo non ci sono problemi: sappiamo bene la trasformata di $\frac{z}{z-1}$. Il secondo addendo invece non è così semplice, bisogna un attimo lavorarci: sappiamo che ci deve restituire, nel dominio del tempo k , un seno e un coseno, perché si tratta di una coppia di autovalori complessi coniugati, quindi prendiamo le relazioni del seno e del coseno che abbiamo e proviamo a lavorare il nostro addendo per conformarlo ad esse:

$$\begin{aligned} Z(\cos \theta k) &= \frac{z^2 - z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} \\ Z(\sin \theta k) &= \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} \end{aligned}$$

Nel nostro caso con $\theta = 1$. Vediamo che il nostro secondo addendo il denominatore ce l'ha giusto, mentre è il numeratore il problema: dobbiamo riscrivere il numeratore $R_2 z^2 + R_3 z$ in modo da ottenere i due termini $z^2 - z \cos \theta$ e $z \sin \theta$. Manipoliamolo:

$$R_2 z^2 + R_3 z = R_2(z^2 - z \cos \theta) + (R_2 z \cos \theta + R_3 z) = R_2(z^2 - z \cos \theta) + (R_2 z \cos \theta + R_3 z) \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$$

Così, adesso, riunendo il numeratore col denominatore:

$$y_f(z) = \frac{1 - \cos 1}{2 - 2 \cos 1} \frac{z}{z - 1} + \frac{R_2(z^2 - z \cos \theta)}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} + \frac{(R_2 \cos \theta + R_3)z \frac{\sin \theta}{\sin \theta}}{z^2 - 2z \cos 1 + 1}$$

E quindi, antitrasformando:

$$y_f(t) = \frac{1 - \cos 1}{2 - 2 \cos 1} \delta_{-1}(t) + R_2 \cos \theta k + \frac{R_2 \cos \theta + R_3}{\sin \theta k} \sin \theta k$$

Ok abbiamo visto anche le trasformate del seno e del coseno, ci mancano le trasformate dei termini polinomiali. A tempo discreto non consideriamo i polinomi $\frac{k^j}{j!}$, ma si considerano i *polinomi fattoriali* del tipo:

$$\frac{k^{[j]}}{j!} = \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Notiamo che quando $j = 0$ ho il gradino; per $j = 1$ ho la rampa discreta k ma per $j = 2$ NON ho una parabola ma ho $\frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}$, quindi una combinazione di parabola e rampa, questo significa che la trasformata di $\frac{k^2}{2}$ non sarà la stessa di $\frac{k^{[2]}}{2}$, e questo per ogni potenza superiore o uguale a 2. Ovviamente ricordati di considerare k come una variabile discreta, non continua. Vediamo subito la trasformata di:

$$Z\left(\frac{k^{[j]}}{j!}\right) = \frac{z}{(z-1)^{j+1}}$$

come si ricava?? Tramite questa regola:

$$\text{se } Z(f(k)) = F(z) \implies Z(k(f(k))) = -z \frac{dF(z)}{dz}$$

Per $j = 0$ abbiamo il gradino, quindi la trasformata è:

$$Z(\delta_{-1}(k)) = \frac{z}{(z-1)}$$

per $j = 1$ abbiamo la rampa, e possiamo trovare la sua trasformata con la regoletta della derivata trovata qua sopra. Facciamo questo:

$$Z(\delta_{-1}(k)) = \frac{z}{(z-1)} \implies Z(k\delta_{-1}(k)) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)} \right) = -z \frac{(z-1-z)}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

E con questo abbiamo dimostrato quanto vale la trasformata della rampa discreta, che prima ci mancava. Ora facciamo la trasformata di:

$$Z\left(\frac{k^{[2]}}{2!}\right) = Z\left(\frac{k(k-1)}{2!}\right) = Z\left(k\frac{k^{[1]}}{2} - \frac{k}{2}\delta_{-1}(k)\right) = Z\left(k\frac{k^{[1]}}{2}\right) - Z\left(\frac{k}{2}\delta_{-1}(k)\right) = Z\left(k\frac{k^{[1]}}{2}\right) - \frac{z}{2(z-1)^2}$$

e ora per trasformare il primo termine devo usare la regoletta della derivata:

$$Z\left(k\frac{k^{[1]}}{2}\right) = -\frac{z}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = -\frac{z}{2} \left(\frac{-z-1}{(z-1)^3}\right)$$

con cui ora possiamo calcolare la trasformata che ci interessa:

$$Z\left(\frac{k^{[2]}}{2!}\right) = -\frac{z}{2} \left(\frac{-z-1}{(z-1)^3}\right) - \frac{z}{2(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Ecco trovata la nostra trasformata.

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO: la seguente trasformata (che è poi quello che abbiamo visto all'inizio)

$$\text{se } Z\left(\frac{k^{[j-1]}}{(z-1)^j}\right) = \frac{z}{(z-1)^j} \implies Z\left(\frac{k^j}{j!}\right) = \frac{z}{(z-1)^{j+1}}$$

29.2 Sistemi discretizzati e Trasformata Z:

Una categoria particolare di sistemi a tempo discreto sono quelli ottenuti mediante discretizzazione di sistemi a tempo continuo. Se ci ricordiamo tutto il discorso fatto per trovare A_d e B_d , allora ci

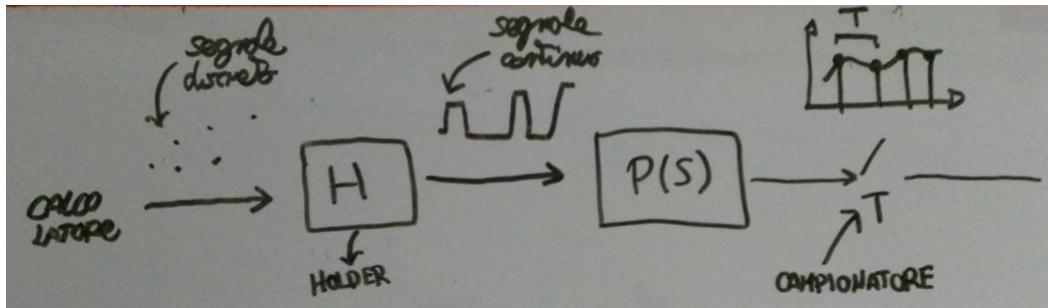


Figure 7: Da sinistra a destra: un calcolatore produce un segnale discreto, che viene preso da un Holder (organo di tenuta) che lo trasforma in un segnale continuo, tenendolo costante. Questo segnale continuo in ingresso alla funzione di trasferimento produce in output un altro segnale continuo, che viene poi campionato ad istanti di tempo discreti, equidistanziato con passo T , tempo di campionamento. Supponiamo holder e campionatore sincronizzati, quindi senza ritardi.

ricordiamo che il modello discretizzato è il seguente:

$$x[(k+1)T] = A_d x(kT) + B_d u(kT)$$

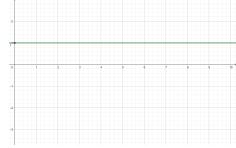
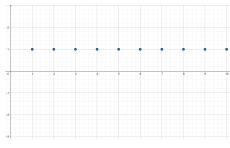
$$y[kT] = C x(kT) + D u(kT)$$

Quindi avevamo trovato il modo di passare dal sistema continuo a quello discretizzato; ora possiamo trovare una relazione con la funzione di trasferimento per fare la stessa cosa? Vediamo: se io prendo l'ingresso a gradino e uso l'organo di tenuta di ordine 0, il gradino discreto diventa un gradino continuo con stessa ampiezza: Quindi il nostro sistema a tempo continuo produce un'uscita $y_f(t)$ continua. Adesso la campiono:

$$y_f(t) \Big|_{t=KT} = \tilde{y}_f(kT)$$

In questo modo otteniamo un gradino continuo campionato a istanti di tempo discreti, cioè riotteneviamo il gradino discreto. Questo mi permette partendo dalla funzione di trasferimento associata al tempo continuo:

$$P(s)$$



calcolando la risposta forzata, cioè il prodotto della funzione di trasferimento con l'ingresso (tutto nel dominio s, quindi l'ingresso essendo un gradino sarà $\frac{1}{s}$):

$$P(s) \rightarrow y_f(s) = P(s) \frac{1}{s}$$

da cui antitrasformo nel dominio del tempo ottenendo una risposta forzata in uscita in t, e la campiono:

$$P(s) \rightarrow y_f(s) = P(s) \frac{1}{s} \rightarrow y_f(t) \Big|_{t=KT}$$

E questa risposta campionata è (come ogni risposta forzata in uscita) il prodotto della funzione di trasferimento per l'ingresso, ma stavolta nel dominio del tempo. Cioè è la trasformata dello stesso prodotto ma nel dominio complesso.

$$P(s) \rightarrow y_f(s) = P(s) \frac{1}{s} \rightarrow y_f(t) \Big|_{t=KT} = P(k) \delta_{-1}(k) = Z \left(P(z) \frac{z}{z-1} \right)$$

Facciamo un esempio, prendiamo come funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s+0.5}$$

e T = 2 come tempo di campionamento. Prendendo in ingresso un gradino otteniamo come risposta forzata in uscita:

$$y_f(s) = \frac{1}{s(s+0.5)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+\frac{1}{2}}$$

Avendo sviluppato in residui. Adesso antitrasformiamo nel dominio del tempo:

$$y_f(t) = (2 - 2e^{-\frac{1}{2}t}) \delta_{-1}(t)$$

E ancora siamo nel sistema a tempo continuo. Adesso discretizziamo, cioè calcoliamo $y_f(t)$ in $t = kT$, con $T = 2$ sec.:

$$y_f(2k) = (2 - 2e^{-k}) \delta_{-1}(k)$$

Quindi è una funzione dipendente solo da k: mettiamo nell'argomento di y k al posto di 2k (stiamo applicando una semplice sostituzione, giusto per leggibilità):

$$y_f(k) = (2 - 2e^{-k}) \delta_{-1}(k)$$

Ora possiamo calcolare la nostra $y_f(z)$, trasformando questa relazione sovrastante:

$$y_f(z) = Z(y_f(k)) = (2 \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-e^{-1}})$$

E sappiamo, per quanto detto sopra, che questa quantità deve essere uguale a:

$$y_f(z) = P(z)u(z) = P(z) \frac{z}{z-1} \implies P(z) = (2 \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-e^{-1}}) \frac{z-1}{z} = \frac{2-2e^{-1}}{z-e^{-1}}$$

Che è la nostra funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente al sistema continuo dato ottenuto con campionamento con tempo di campionamento $T = 2$ sec.

Ritorniamo alla nostra funzione di trasferimento in s:

$$P(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

Ora prendiamo il sistema a tempo continuo associato a questa $P(s)$, che sarà il sistema di partenza da poi discretizzare:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{2}x + u \\ y &= x\end{aligned}$$

Cosa dobbiamo fare:

- verificare che la $P(s)$ scritta sia effettivamente quella associata al sistema
- calcolare A_d B_d C_d e D_d per $T = 2$ e
- calcolare $P(z)$ e verificare che sia uguale a quella calcolata prima

Ok, iniziamo, verificando che la $P(s)$ sia quella giusta:

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 1 \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

Che è effettivamente la funzione di trasferimento che abbiamo scritto prima. Ok adesso calcoliamo le 4 matrici discrete, sappiamo che D e C discrete sono uguali a D e C continue, quindi dobbiamo solo trovare A e B . Le loro espressioni erano:

$$A_d = e^{AT} \quad B_d = A^{-1}[e^{AT} - Id]B$$

Che nel nostro caso diventano:

$$A_d = e^{-1} \quad B_d = 2[1 - e^{-1}]$$

Ok, abbiamo calcolato le matrici discrete per $T = 2$ secondi. Bene ora calcoliamo la funzione di ripartizione ma nel dominio z :

$$P(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d = \frac{1}{z - e^{-1}}2(1 - e^{-1})$$

Che è proprio la $P(z)$ che abbiamo visto all'inizio, quindi abbiamo verificato che è la funzione di trasferimento appartenente al sistema. Abbiamo fatto tutto.

Torniamo un attimo su una questione, riprendiamo la nostra rappresentazione con numeratore e denominatore della funzione di transizione, nel caso di un sistema a tempo continuo:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con m (grado numeratore) $\leq n$ (grado denominatore). La differenza $n - m$ tra numero di poli e numero di zeri assume una certa rilevanza. Rappresenta l'ordine di derivazione dell'uscita da raggiungere perché la derivata venga influenzata dall'ingresso, e viene chiamato *grado relativo*. Riprendendo il nostro modello隐式的:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Se $D \neq 0$ il grado relativo è zero, perché l'ordine di derivazione dell'uscita da raggiungere perché la derivata venga influenzata dall'ingresso è zero, dato che D è accompagnato dall'ingresso. Ciò vuol dire che $D \neq 0$ impone che la funzione di trasferimento abbia grado del numeratore uguale al grado del denominatore. Supponiamo allora che $D = 0$, in modo che il grado relativo sia diverso da 0. Allora abbiamo:

$$y = Cx \implies \dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$$

Vediamo che \dot{y} è influenzata dall'ingresso se $CB \neq 0$. Quindi il grado relativo è 1 se $CB \neq 0$. Se invece $CB = 0$ procedo nel calcolo di:

$$\ddot{y} = CA\dot{x} = CA^2x + CABu$$

E se $CAB \neq 0$ allora il grado relativo è uguale a 2. Così via con le altre derivate per trovare gradi relativi più alti. Quindi possiamo dire che *il grado relativo è il primo intero tale che:*

$$CA^j B = 0 \quad \forall j < r - 1 \quad \text{e} \quad CA^{r-1} B \neq 0$$

Quindi ad esempio se abbiamo grado relativo uguale a 3 abbiamo D , CAB e CA^2B nulli e CA^3B non nullo (quelli dopo CA^3B possono essere nulli o meno, non importa). Questo grado relativo ci servirà più avanti perché metterà in evidenza alcune proprietà del sistema.

Altra proprietà importante: prendiamo un sistema continuo con un certo grado relativo (cioè una certa differenza poli-zeri) e campioniamolo, così che diventi discreto. A meno di punti singolari per il tempo di campionamento (che poi vediamo), il grado relativo del sistema discretizzato è sempre pari a 1. Definiremo il grado relativo a tempo discreto come il numero di ritardi che devo aspettare per vedere l'uscita influenzata dall'ingresso. Facciamo un esempio, prendiamo come funzione di transizione:

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

vediamo che il grado relativo è pari a 2. Facciamo il procedimento che abbiamo imparato prima per calcolare $P(z)$. Vedremo che $P(z)$ avrà grado relativo pari a 1, cioè ci compare uno zero. Se ci ricordiamo che se λ è autovalore del sistema a tempo continuo il sistema discretizzato equivalente avrà $e^{\lambda T}$ come autovalore. Quindi, nel nostro caso specifico, avendo due poli in $s = 0$ per $P(s)$, mi aspetto che a tempo discreto io abbia due poli in $z = e^0 = 1$, e sarà effettivamente così. In più però, in $P(z)$ comparirà uno zero (mentre in $P(s)$ non li ho proprio), per quello che abbiamo detto sopra. Ok, allora ora andiamo a calcolare l'uscita forzata:

$$y_f(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}$$

che antitrasformato, ricordandosi che $L(\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)) = \frac{1}{s^{k+1}}$ dà:

$$y_f(t) = \frac{t^2}{2}$$

Andando a campionare:

$$y_f(kT) = \frac{k^2 T^2}{2}$$

Ora ci serve la trasformata di $\frac{k^2}{2}$. Ricordiamoci che non conosciamo direttamente la trasformata della parabola nel caso discreto, ma conosciamo la trasformata di una combinazione lineare tra la parabola e la rampa. Precisamente sappiamo che:

$$Z(k) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

e che:

$$\begin{aligned} Z\left(\frac{k(k-1)}{2}\right) &= Z\left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}\right) = \frac{z}{(z-1)^3} \implies Z\left(\frac{k^2}{2}\right) = \frac{1}{2}Z(k) + \frac{z}{(z-1)^3} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^3} (2 + (z-1)) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} \end{aligned}$$

E abbiamo trovato la trasformata della parabola, che ci serviva per la risposta forzata in uscita nel dominio z . Adesso possiamo calcolarla:

$$Z(y_f(kT)) = Z\left(\frac{k^2}{2}\right) T^2 = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} T^2 = P(z)u(z) = P(z) \frac{z}{z-1}$$

Dove $\frac{z}{z-1}$ perché in ingresso avevamo messo un gradino. Da qui possiamo ricavare la nostra funzione di trasferimento nel dominio z :

$$P(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2} \frac{T^2}{2}$$

Vediamo che i poli si sono trasformati, e da due poli in $s = 0$ sono diventati due poli in $z = e^0 = 1$, come avevamo previsto e detto prima. Inoltre, sempre come abbiamo detto prima, ci troviamo uno

zero al numeratore, precisamente uno zero in $z = -1$. A che cosa è dovuto questo? Lo vediamo dopo.

Prima, l'interpretazione di grado relativo nel caso di un sistema discreto. Prendiamo il modello implicito:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Dobbiamo porre $D = 0$ sennò il grado relativo è uno. Quindi abbiamo:

$$y(k+1) = Cx(k+1) = CAx(k) + CBu(k)$$

Se il grado relativo non è 1 allora $CB = 0$ e quindi dobbiamo calcolare:

$$y(k+2) = Cx(k+2) = CAx(k+1) = CA^2x(k) + CABu(k)$$

Dove per $x(k+2)$ abbiamo utilizzato l'espressione di $x(k+1)$ incrementando di 1 la variabile. In questo caso il grado relativo è 2. Così via per $y(k+3)$ poi 4 ecc., nel caso in cui i termini CA^jB fossero nulli, determinando quindi un aumento del grado relativo. Questo che significa? Significa che nel caso discreto il grado relativo indica il numero di ritardi da considerare per la comparsa dell'ingresso nell'uscita (ha senso effettivamente, dato che il grado relativo è il primo intero per cui CA^jB non è nullo, dato che è proprio questo termine l'unico a portare l'ingresso nell'uscita y).

Inoltre come sempre il grado relativo rappresenta la differenza tra poli e zeri. Quindi vediamo: $P(z)$ ha grado relativo pari a 1, ma perché? Rispondiamo a questa domanda che ci eravamo posti prima. Notiamo che per avere grado relativo pari a 1 significa che D deve essere nullo e CB deve essere non nullo, anzi, poiché stavamo parlando di un sistema discretizzato: C_dB_d deve essere non nullo. L'espressione di C_dB_d è la seguente:

$$C_dB_d = C \int_0^T (Id + A\xi + A^2 \frac{\xi^2}{2} + \dots) B d\xi$$

Ora, ragioniamo, se il sistema a tempo continuo di partenza, che abbiamo discretizzato, aveva grado relativo pari a r , significa che:

$$CA^jB = 0 \quad \forall j < r - 1$$

e che

$$CA^{r-1}B \neq 0$$

Quindi, se il sistema a tempo continuo ha grado relativo pari a r , oltre a D , sono nulli tutti i termini $CAB, CA^2B, CA^3B \dots$ e così via fino a $CA^{r-1}B$: questo deve essere non nullo (poi quelli dopo possono fare come vogliono). Quindi se il grado relativo è pari a r il nostro integrale, essendo composto da somme di prodotti CAB (con costanti e variabili ξ nel mezzo) si riscrive come:

$$C_dB_d = \int_0^T (CA^{r-1}B \frac{\xi^{r-1}}{(r-1)!} + CA^{r-1}B \frac{\xi^r}{r!} + \dots) d\xi$$

Perché sicuro i termini prima di $r-1$ sono nulli, quelli dopo non si sa, quindi nel dubbio li lasciamo. Adesso integriamo:

$$C_dB_d = CA^{r-1}B \frac{T^r}{r!} + CA^r B \frac{T^{r+1}}{(r+1)!} + \dots$$

e siccome per quanto detto il termine $CA^{r-1}B$ è non nullo, a meno di valori particolari di T ($T = 0$), $CA^{r-1}B \frac{T^r}{r!}$ è non nullo, e quindi C_dB_d ha almeno un termine non nullo, e quindi non è nullo. Poiché C_dB_d è non nullo (ma $D_d = D$ sì, altrimenti il sistema continuo doveva avere grado relativo pari a 0 e quindi tutto sto discorso non aveva senso) il **sistema discretizzato (non quello continuo eh) ha SEMPRE grado relativo pari a 1**, a prescindere da quant'è il valore $r-1$ del grado relativo del sistema continuo. Questo significa che nel mio processo di campionamento, che mi fa passare dal sistema a tempo continuo a quello discretizzato, sto aggiungendo degli zeri

(cioè le radici al numeratore), in un numero tale che mi farà ottenere un grado relativo, cioè una differenza poli-zeri, pari a 1.

Torniamo un attimo al nostro:

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

Che ci aspettiamo? Innanzitutto che la matrice A abbia due autovalori in 0, e inoltre che non sia diagonalizzabile. Quest'ultima cosa perché il polo non è semplice (molteplicità algebrica 2), quindi l'ordine geometrico è sicuramente maggiore di 1. Possiamo infatti verificare che il sistema associato a questa funzione di trasferimento sia questo²⁵:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 0) x\end{aligned}$$

E infatti la matrice A ha come autovalori:

$$\lambda_{2,3} = 0 \quad m_a = 2$$

Ma quando andiamo a calcolare gli autovettori ce ne esce solo 1: la matrice A non è diagonalizzabile, come ci aspettavamo. Ora ultima cosa da verificare è che la P(s) associata a questo sistema sia effettivamente quella data inizialmente:

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2}$$

e quindi sì: la funzione di trasferimento associata al sistema è quella scritta inizialmente.

Nota: notare che la matrice A di questo sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è nella forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

e ricordiamo (dall'esercizio dei conigli) che in tal caso si ha sempre che il polinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Nel nostro caso:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 0 \cdot \lambda + 0 = 0$$

Quindi bastava notare questo per trovare subito il polinomio caratteristico e quindi gli autovalori.

30 Facciamo un esercizio riepilogativo (che contiene un trucchetto con x_0 per $\Psi(t)$):

Sia dato il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad -1) x\end{aligned}$$

Con ingresso:

$$u(t) = \delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-1) + 2\delta_{-1}(t-2) - 2\delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-4)$$

²⁵Arrivati ai capitoli 7/8 del manuale sapremo effettivamente come ricavarci il sistema associato a una certa P(s).

1. Analisi Modale:

- $\lambda_1 = -1$ con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Modo aperiodico convergente osservabile e eccitabile
- $\lambda_2 = -20$ con $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \end{pmatrix}$. Modo aperiodico convergente non osservabile ma non eccitabile

2. Calcolare l'uscita $y(t)$ con $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \end{pmatrix}$:

- Calcoliamo l'uscita libera nel dominio del tempo:

$$y_\ell(t) = \Psi(t)x_0 = C\Phi(t)x_0 = C(e^{-t}u_1v'_1 + e^{-20t}u_2v'_2)x_0$$

ATTENZIONE, NOTIAMO UNA COSA: ecco il trick, noi sappiamo che in generale:

$$x_0 = c_1u_1 + c_2u_2$$

Ma nel nostro caso x_0 e un autovettore sono uguali, quindi i modi relativi a tutti gli altri autovettori non compariranno! Precisamente x_0 e u_2 . Questo perché:

$$x_0 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$$

Cioè $c_1 = v'_1x_0 = 0$ e $c_2 = v'_2x_0 = 1$, perciò non dobbiamo svolgere i calcoli e possiamo subito scrivere:

$$y_\ell(t) = Ce^{-20t}u_2 = 20e^{-20t}$$

- Per l'uscita forzata dobbiamo necessariamente passare al dominio s e poi antitrasformare. Ricordiamo che:

$$y_f(s) = W(s)u(s)$$

Per $W(s)$ non ci sono problemi: senza andare a calcolare $C(sI - A)^{-1}B + D$, basta trasformare la $W(t)$, che troviamo in un istante: solo il primo modo ($\lambda = -1$) è sia osservabile che eccitabile, quindi:

$$W(t) = Ce^{-t}u_1v'_1B = 1 \cdot e^{-t} \cdot 1 \implies W(s) = \frac{1}{s+1}$$

Che ci torna, poiché $s + 1$ è l'unica radice sia osservabile che eccitabile. Inoltre tutti i poli sono semplici quindi verifichiamo che A è diagonalizzabile. Ok, ora l'ingresso $u(s)$. Come al solito, invece di usare tutto $u(t)$ trasformato, prendiamo solo i segnali base presenti in $u(t)$, calcoliamo l'uscita forzata su questi segnali e poi applichiamo le traslazioni e i coefficienti che compaiono in $u(t)$. In questo caso c'è un solo segnale base: il gradino.

$$\tilde{y}_f(s) = W(s)\tilde{u}(s) = W(s)\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \implies \tilde{y}_f(t) = \delta_{-1}(t) - e^{-t} = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Poiché il nostro ingresso è:

$$u(t) = \delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-1) + 2\delta_{-1}(t-2) - 2\delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-4)$$

Si ha che:

$$y_f(t) = \tilde{y}_f(t) - 2\tilde{y}_f(t-1) + 2\tilde{y}_f(t-2) - 2\tilde{y}_f(t-3) + \tilde{y}_f(t-4)$$

Si ha quindi che l'uscita del sistema è:

$$y(t) = 20e^{-20t} + y_f(t)$$

3. Modello a tempo discreto equivalente per $T = 1$ sec.: Dobbiamo calcolare le 4 matrici discrete:

$$A_d = e^{AT} \quad B_d = A^{-1}(A_d - Id)B \quad C_d = C \quad D_d = D$$

4. Risposta Indiciale e relativi parametri: Conosciamo già la risposta indiciale, cioè l'uscita forzata con in ingresso un gradino:

$$y_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \implies y_f(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Dobbiamo però ancora vedere i tre parametri:

- Tempo di salita: la nostra funzione non tocca mai il valore di regime $W(0) = 1$ (che è il guadagno di $W(s)$), ma lo raggiunge asintoticamente, quindi per calcolare il tempo di salita dobbiamo fare così:

$$y_f(t_1) = (1 - e^{-t_1}) = \frac{1}{10} \implies -t_1 = \ln \frac{9}{10}$$

$$y_f(t_2) = (1 - e^{-t_2}) = \frac{9}{10} \implies t_2 = \ln 10$$

Da cui:

$$t_s = t_2 - t_1 = \ln 9$$

E questo è il tempo di salita. Nota che potevamo semplicemente ricordarci che la formula generale per calcolare il tempo di salita è:

$$t_s = \frac{\ln 9}{P}$$

Dove P è il valore di regime

- Sovraelongazione: siccome la mia funzione di trasferimento $W(s)$ ha tutti poli reali l'uscita forzata non è oscillante, quindi la sovraelongazione è pari a 0
- Tempo di Assestamento: ovvero

$$|errore| = e^{-t_a} \leq \frac{m}{100} \implies t_a \approx \ln \frac{100}{m}$$

Dove al posto di $|errore|$ ci andrebbe $|e|$, ma non lo scrivo così sennò si confonde con l'esponenziale dopo.

31 La Risposta a Regime Permanente e il Comportamento in Frequenza:

Abbiamo visto che utilizzando la trasformata di Laplace è possibile rappresentare il comportamento ingresso-uscita dei sistemi continui con $W(s)$, e dei sistemi discreti con $W(z)$. Nel caso continuo abbiamo visto che la risposta forzata vale:

$$y_f(s) = W(s)u(s)$$

Nell'ipotesi che i poli siano a sinistra dell'asse immaginario - nel caso continuo - o che siano all'interno del cerchio unitario - nel caso discreto -, i termini legati ai poli in $W(s)$ e $W(z)$ tendono ad estinguersi al crescere di t . Oltre a questi temini in $W(s)$ abbiamo dei termini legati al particolare ingresso che stiamo applicando. Questo significa che, se i primi a crescere di t scompaiono, la risposta forzata al crescere di t assume un andamento connesso al tipo di ingresso.

Quando abbiamo studiato la stabilità interna invece, questa era connessa allo studio degli autovalori di A e poteva essere semplice o asintotica. Poi avevamo la stabilità esterna, che poteva essere:

- Nello stato 0 quando i modi simultaneamente eccitabili e osservabili - cioè quelli di $W(t)$ - erano tutti convergenti. Notare la corrispondenza tra stabilità esterna nello stato 0 e risposta forzata che ha un andamento che tende al tipo dell'ingresso.
- In ogni stato quando i modi osservabili (sia eccitabili che non) - cioè quelli in $W(t)$ e $\Psi(t)$ - erano tutti convergenti (quelli osservabili ma non eccitabili in realtà potevano anche avere parte reale nulla, non per forza minore di 0). La stabilità esterna in ogni stato imponeva che le traiettorie fossero limitate dallo stato iniziale, in modo da garantire che l'uscita fosse

limitata. Però un attimo, ragioniamo, prendiamo la nostra espressione esplicita dell'uscita del sistema:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Se tutti i modi osservabili sono convergenti, significa che tutti i modi di $\Psi(t)$ tendono a 0 al crescere di t , quindi la nostra uscita libera $y_\ell(t)$ tende a 0 al crescere di t ! Per quanto riguarda l'uscita forzata invece, poiché i termini legati a $W(t)$ tendono tutti a 0, essa dipende solo dall'ingresso. Quindi possiamo concludere che, **nel caso di stabilità esterna in ogni stato, l'uscita diventa indipendente dalle condizioni iniziali, e dipendente soltanto dall'ingresso applicato.** In questo caso si parla di **Risposta a Regime Permanente**.

Bene, concentriamoci allora sulla risposta a regime permanente. Ci ricordiamo che noi abbiamo determinato due tipi di ingressi: gli ingressi polinomiali - in particolare ci siamo ridotti alla risposta indiciale, cioè all'ingresso a gradino - e gli ingressi periodici - in particolare ci siamo ridotti ad ingressi seno e coseno -. Vediamo che:

- Per quanto riguarda gli ingressi polinomiali, in particolare la risposta indiciale: la nostra risposta sarà caratterizzata da un andamento connesso all'andamento dell'ingresso, cioè ad un gradino. L'ampiezza di questo gradino è dettata dal guadagno di $W(s)$, cioè $W(0)$. Quindi, dato un sistema che ammette risposta a regime permanente, mettendo in ingresso un gradino, per un tempo sufficientemente grande la risposta tende ad un gradino di ampiezza pari al guadagno della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.
- Per quanto riguarda gli ingressi periodici, in particolare seno e coseno: quando abbiamo calcolato la risposta forzata con ingresso $\sin \omega t$, in uscita trovavamo termini legati ai modi che, essendo convergenti, si estinguivano; e poi un termine con il seno e un termine con il coseno, entrambi con la stessa pulsazione del segnale seno in ingresso. Grazie al fatto che avevamo stessa pulsazione del segnale in ingresso, siamo riusciti a riscrivere, con un opportuno modulo e uno sfasamento, i due termini seno e coseno come un'unica funzione seno $M \sin(\omega t + \phi)$. Noi fino ad ora abbiamo calcolato M e ϕ in base ai residui R_i , ma oggi vedremo che anche questi due termini sono legati alla funzione di trasferimento, e alla pulsazione del segnale che sto dando in ingresso.

Partiamo proprio dal secondo punto: gli ingressi periodici.

31.1 Ingressi Periodici:

La risposta a regime permanente è la funzione a cui tende $y(t)$ per t sufficientemente grande, quindi lo posso vedere sia come errore che come limite. Nel caso del limite:

$$y_R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} (\Psi(t)x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau)$$

Dove l'uguaglianza discende dal fatto che far tendere t a infinito corrisponde a far tendere t_0 a meno infinito. Come detto la nostra uscita libera al limite scompare, nel caso in cui tutti i modi osservabili siano convergenti. Quindi la nostra risposta a regime permanente diventa:

$$y_R(t) = \int_{-\infty}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Adesso, abbiamo detto che come ingresso prendiamo il seno, quindi:

$$u(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Quindi:

$$y_R(t) = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^t W(t-\tau)(e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})d\tau$$

Vediamo che, tirando fuori $\frac{1}{2j}$, otteniamo due ingressi $u_1 = e^{j\omega\tau}$ e $u_2 = -e^{-j\omega\tau}$. Questi due ingressi sono in realtà lo stesso ingresso, una volta che sostituisco ω a $-\omega$. Questo significa che basta studiarne uno per capire entrambi come funzionano. Prendiamo allora u_1 :

$$y_{R_1}(t) = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^t W(t-\tau)e^{j\omega\tau}d\tau$$

Adesso adottiamo la sostituzione $\xi = t - \tau$, ottenendo:

$$y_{R_1}(t) = \frac{1}{2j} \int_0^\infty W(\xi) e^{j\omega(t-\xi)} d\xi = \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} \int_0^\infty W(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi$$

Se nell'ultima espressione vediamo ξ come t e $j\omega$ come s ritroviamo la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento, calcolata in $s = j\omega$, cioè:

$$y_{R_1}(t) = \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} \int_0^\infty W(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi = W(s) \Big|_{s=j\omega} e^{j\omega t}$$

Ok, e questo per il primo ingresso, per il secondo ingresso è uguale, basta che a ω sostituisco $-\omega$. Quindi:

$$y_{R_2}(t) = W(s) \Big|_{s=-j\omega} e^{-j\omega t}$$

Ok, prendiamo un attimo la nostra funzione $W(j\omega)$, e scriviamola con la rappresentazione modulo-fase:

$$W(j\omega) = M(j\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

Mentre per $W(-j\omega)$:

$$W(-j\omega) = M(j\omega) e^{-j\phi(\omega)}$$

Vediamo che la fase ha cambiato segno mentre il modulo no, perché il modulo - essendo la radice quadrata della somma di due quadrati - è una funzione pari. Tutto questo significa che:

$$\begin{aligned} u(t) = \sin \omega t &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \rightarrow y_R(t) = \frac{1}{2j} (y_{R_1} - y_{R_2}) = \frac{1}{2j} (M(j\omega) e^{j\phi(\omega)} e^{j\omega t} - M(j\omega) e^{-j\phi(\omega)} e^{-j\omega t}) = \\ &= M(j\omega) \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} = M(j\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) \end{aligned}$$

Ora ricordiamoci prima cosa abbiamo detto che sono M e ϕ :

- M è il modulo della funzione di trasferimento calcolata in $j\omega$, con ω pulsazione dell'ingresso:

$$M = |W(j\omega)|$$

- ϕ è la fase della funzione di trasferimento sempre in $j\omega$:

$$\phi = \angle W(j\omega)$$

Questo ci spiega perché $W(j\omega)$, ovvero la **risposta armonica**, descrive il comportamento in **frequenza**: la frequenza di un seno o di un coseno è il suo ω , e noi andiamo a studiare la funzione di trasferimento per $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Questo ovviamente sempre nell'ipotesi che esista la risposta a regime permanente, cioè nell'ipotesi che tutti i modi osservabili (eccitabili o meno) siano convergenti. Inoltre però ci deve essere stabilità interna, per poter garantire che la risposta in uscita esista. Quindi i requisiti per avere questo appena trovato sono:

Stabilità Interna + Modi Osservabili tutti convergenti

Le condizioni adesso le abbiamo trovate per i sistemi a tempo continuo, ma sono facilmente generalizzabili al caso dei sistemi a tempo discreto.

Fatto questo quindi, abbiamo trovato un altro modo per partizionare la risposta in uscita. Fino ad ora è stata la somma di uscita libera e uscita forzata, ora abbiamo capito che si può dividere in altri due termini: risposta transitoria e a regime.

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = y_t(t) + y_R(t)$$

Possiamo dire che:

- $y_t \subset$ termini di y_ℓ . Perché la risposta transitoria contiene tutti i modi osservabili (quindi sia quelli di $\Psi(t)$ che quelli di $W(t)$), e perciò è data dai termini dell'evoluzione libera (modi osservabili in $\Psi(t)$) più i termini dell'evoluzione forzata che sono legati alla funzione di trasferimento (modi osservabili e eccitabili in $W(t)$).

- $y_R \supset$ termini di y_f . Perché la risposta forzata è caratterizzata dai termini della funzione di trasferimento più i termini dell'ingresso che abbiamo considerato, mentre i termini della risposta a regime permanente y_R sono solo quelli legati all'ingresso che consideriamo.

Quindi per capire come si comporterà il nostro sistema ci interessa studiare modulo e fase della funzione di trasferimento per $s = j\omega$. Riprendiamo la funzione di trasferimento in *forma di Bode*:

$$W(s) = k \frac{\Pi(1 + \tau_i s) \Pi(1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2})}{s^r \Pi(1 + \bar{\tau}_i s) \Pi(1 + 2\bar{\xi} \frac{s}{\bar{\omega}_n} + \frac{s^2}{\bar{\omega}_n^2})}$$

Ora però va calcolata in $j\omega$. Notiamo che, sostituendo $j\omega$ a s ogni termine avrà sia una parte reale che una parte immaginaria, quindi possiamo riscriverla con un modulo e una fase, proprio come un qualsiasi numero complesso in forma esponenziale. Quindi:

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^r} \frac{\Pi_i(M_i e^{j\phi_i})}{\Pi_n(\bar{M}_n e^{j\bar{\phi}_n})}$$

Nota che anche k e $(j\omega)^r$ potevano essere inclusi nel prodotto, scrivendoli come prodotti dei loro moduli per le loro fasi. Anzi troviamo subito il loro modulo e la loro fase che tanto dopo ci servono:

$$|jw| = \sqrt{\omega^2} = |\omega| \quad \phi = \arctan \frac{\omega}{0} = \pm \frac{\pi}{2}$$

Un altro modo di trovare la fase al volo era pensare che, dato che $j\omega$ è un numero complesso immaginario puro, è situato sull'asse immaginario, quindi l'angolo che forma con l'asse x - ovvero proprio la fase - è $\frac{\pi}{2}$. Nota che mettiamo $\pm \frac{\pi}{2}$ perché ω può essere positivo - e l'angolo è $\frac{\pi}{2}$ oppure può essere negativo - e l'angolo allora è $-\frac{\pi}{2}$. Ok adesso modulo e fase di k :

$$|k| \quad \phi = \arctan \frac{0}{1} = 0 \text{ oppure } \pi$$

Anche qui, per trovare subito la fase si può notare che k è un numero reale, quindi è sull'asse reale, e perciò l'angolo che forma con l'asse x è 0 - se è positivo - o π - se è negativo. Ora, attenzione, abbiamo i moduli dei singoli termini, ma se io volessi il modulo di tutto $W(j\omega)$? Bhe, il modulo di $W(j\omega)$ è il prodotto di tutti i moduli dei singoli termini:

$$M(j\omega) = \frac{|k|}{|\omega|^r} \frac{\Pi_i(M_i)}{\Pi_n(\bar{M}_n)}$$

Per la fase di $W(j\omega)$ dobbiamo fare la somma algebrica delle fasi di ogni singolo termine, questo perché la fase è all'esponente di un esponenziale, quindi per trovare la fase di $W(j\omega)$ partì da un esponenziale che ha come esponente la fase di $W(j\omega)$, che è uguale al prodotto di tanti esponenziali (a destra dell'uguale), e il prodotto di esponenziali dà un singolo esponenziale con esponente pari alla somma delle fasi. Applicando poi il logaritmo per eliminare l'esponenziale ad entrambi i membri ottieni a sinistra dell'uguale la fase di $W(j\omega)$, e a destra dell'uguale la somma delle fasi di ogni singolo termine dell'espressione. Quindi:

$$\phi = \begin{cases} 0 - r\frac{\pi}{2} + \sum_i \phi_i - \sum_j \bar{\phi}_j & \text{se } k > 0 \\ \pi - r\frac{\pi}{2} + \sum_i \phi_i - \sum_j \bar{\phi}_j & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Dove i segni + o - dipendono da dove si trovava l'esponenziale, se al numeratore o al denominatore.

Vediamo che la fase è molto comoda da calcolare, quindi io posso far variare ω e calcolarmi la fase della funzione di trasferimento calcolandomi $W(j\omega) \forall \omega$. Al contrario per il modulo la cosa è complicata perché $\forall \omega$ io devo calcolarmi ogni singolo modulo e poi fare il prodotto di tutti. Posso semplificare il modulo rappresentandolo non in scala lineare come ora ma in scala logaritmica:

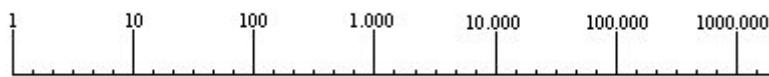
$$M_{dB} = 20 \log_{10}(M(j\omega)) = 20 \log_{10}(|k|) - 20 \log_{10}(|w|^r) + 20 \sum_i \log_{10}(M_i) - 20 \sum_n \log_{10}(\bar{M}_n)$$

E qui io al variare di ω ho solo una somma algebrica, come nel caso della fase, che è più semplice dei prodotti da fare in scala lineare. M_{dB} viene chiamato Modulo in Decibel. Un'altro vantaggio

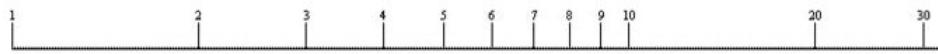
della scala logaritmica è il seguente: se io ho un sistema con una certa funzione di trasferimento $W(s)$, e voglio modificare il mio sistema attraverso un controllore, sto aggiungendo dei poli e degli zeri. Aggiungere poli e zeri significa modificare $W(s)$ con nuovi termini, nuovi termini che possono essere scritti con rappresentazione modulo-fase, e che quindi nella scala lineare diventano prodotti, mentre nella scala logaritmica diventano semplici somme algebriche, sia per il modulo che per la fase.

Quindi il nostro obiettivo è capire l'andamento dei singoli termini così poi da poterli semplicemente sommare algebricamente per ottenere l'andamento totale. Lo facciamo in scala logaritmica perché altrimenti il modulo totale non è la somma algebrica dei singoli termini (ma il prodotto) ma non solo: usiamo la scala logaritmica anche perché le scale vengono compresse e quindi riusciamo a rappresentare un maggior numero di frequenze. Ok ma, cos'è una scala logaritmica?

Scala logaritmica: una scala logaritmica è una rappresentazione grafica in cui le potenze di 10 sono equidistanti: Non solo questo: se prendiamo la scala sovrastante e facciamo uno zoom,



concentrandoci sul primo blocco circa (cioè da 1 a 10, anche se poi ci servono i valori fino a 30 per spiegare sta cosa), vediamo che l'intervallo tra 1 e 2 è lungo quanto l'intervallo tra 10 e 20, idem per gli intervalli 1-3 e 10-30 e per qualsiasi altro intervallo di questo tipo.

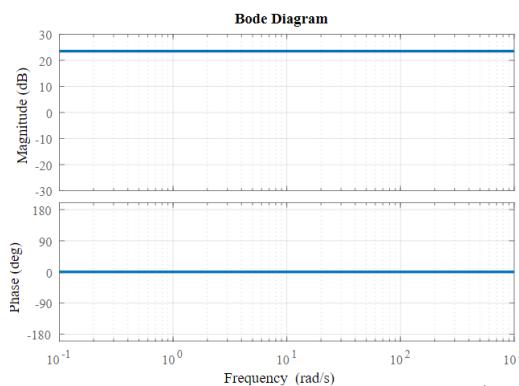


31.2 Diagramma di Bode per una Costante:

Partiamo quindi dal guadagno k . Abbiamo due grafici. Su entrambi sulle ascisse abbiamo ω , mentre sulle ordinate M_{dB} in Decibel nel primo grafico e ϕ in gradi o radianti nel secondo.

- Iniziamo dal modulo: $k_{dB} = 20 \log_{10} |k|$. Se $|k| > 1$ il logaritmo è un numero positivo, quindi mi ritrovo al di sopra dell'asse delle ascisse, se invece $|k| < 1$ allora mi ritrovo al di sotto dell'asse delle ascisse. L'asse delle ascisse si ha per $k = 1$.
- Per quanto riguarda la fase: se $k > 0$ la fase abbiamo detto prima che è 0; se $k < 0$ la fase possiamo metterla sia a π che a $-\pi$, perché sono lo stesso punto.

Quindi, se per esempio, $k = 15$ si ha:

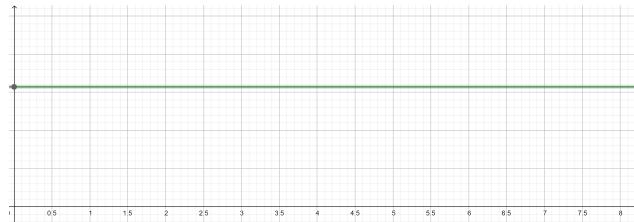
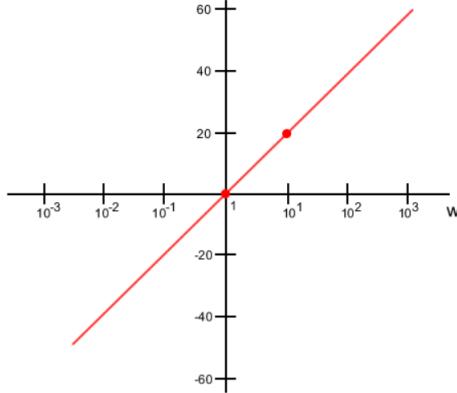


31.3 Diagramma di Bode per il termine monomio:

Cioè per $j\omega$. Se $\omega > 0$ qui abbiamo che:

- Il modulo è $M_{dB} = 20 \log_{10} \omega$. Si tratta di una retta passante per 1.
- La fase è, come abbiamo già detto, sempre $\frac{\pi}{2}$ se ω è positivo

Quindi abbiamo: Questo se abbiamo $j\omega$, cioè se il mio termine si trova al numeratore. Nel caso



il termine si trovi al denominatore, quindi è $\frac{1}{j\omega}$, significa che ho:

$$\frac{1}{Me^{j\phi}}$$

Quindi per il modulo abbiamo:

$$M_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{Me^{j\phi}} \right) = 20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} (Me^{j\phi}) = -20 \log_{10} (Me^{j\phi})$$

Cioè è lo stesso modulo ma ribaltato! Quindi è la stessa retta ma ribaltata. Per la fase facciamo la fase del numeratore meno fase del denominatore, quindi $0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. Quindi anche qui il grafico viene ribaltato.

Nota che in realtà le inclinazioni delle rette dei moduli e le posizioni su un multiplo di $\frac{\pi}{2}$ della retta orizzontale delle fasi dipendono dal numero di zeri e dal numero di poli.

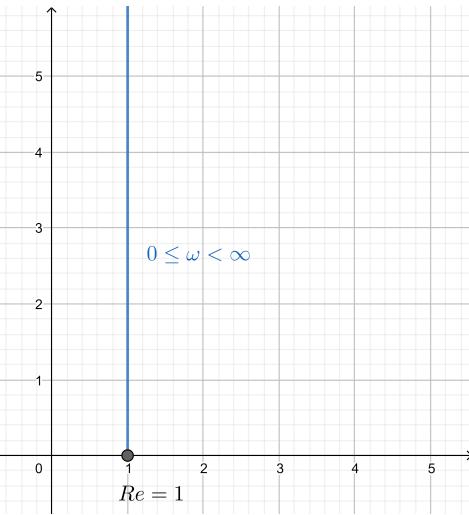
31.4 Diagramma di Bode per il termine binomio:

Cioè per $1 + \tau j\omega$. Supponiamo $\omega, \tau > 0$. Quindi abbiamo una parte reale sempre pari a 1 e una immaginaria che vale $\tau\omega$. τ è una costante, che poniamo positiva per comodità, mentre ω è una variabile, anch'essa positiva, che quindi va da 0 a ∞ . Quindi nel piano dei numeri complessi ho: Nota che abbiamo solo la semiretta verticale positiva perché sia ω sia τ sono positivi. Troviamo ora la fase e il modulo del termine binomio:

$$M_{dB} = 20 \log_{10} (\sqrt{1^2 + (\omega\tau)^2})$$

Facciamo un'approssimazione: $\omega\tau \gg 1$. È ovvio allora che 1, parte reale del numero complesso, può essere trascurato, e quindi possiamo scrivere:

$$M_{dB} = 20 \log_{10} (\omega\tau)$$



Analogamente possiamo fare l'approssimazione $\omega\tau \ll 1$, così da poter trascurare $\omega\tau$ e poter scrivere:

$$M_{dB} = 20 \log_{10}(1) = 0$$

Quindi nel nostro diagramma di Bode - dove come asse delle ascisse metto $\omega\tau$ e non ω però - approssimato prima di 1 metto una retta a 0 dB e dopo ho un'approssimazione con una retta con pendenza $20 \frac{db}{decade}$. Ma, in realtà, l'andamento della funzione sul diagramma di Bode sarebbe questo (quello tratteggiato in nero): e allora mi chiedo: qual è l'errore che commetto? È ragionevole

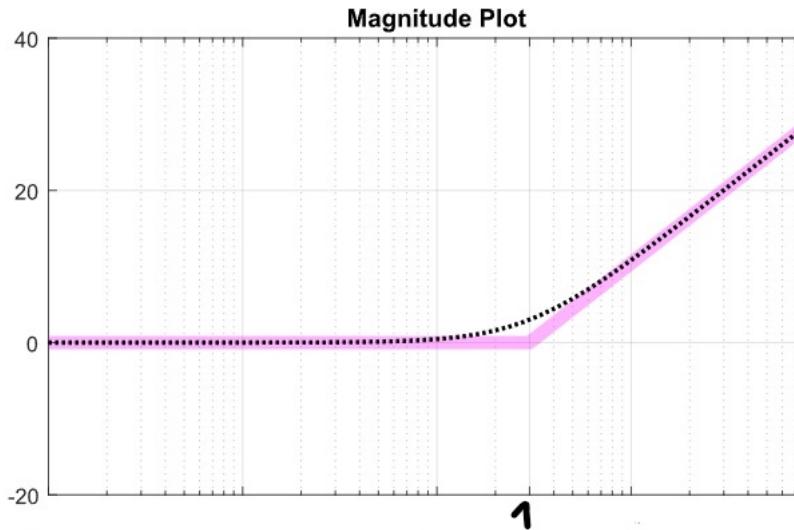


Figure 8: In rosa il diagramma approssimato, in nero tratteggiato l'andamento reale. Nota che sulle ascisse c'è $\omega\tau$ e non ω

pensare che l'errore massimo io ce l'abbia per $\omega\tau = 1$, dato che approssimo con 0 quel valore, ma 0 è il valore che ho dato ai punti $\omega\tau \ll 1$. Calcolando il modulo per $\omega\tau = 1$ ci esce 3 dB, ciò significa che l'errore massimo è 3 dB, perché in 1 il modulo dovrebbe valere 0 dB e invece ne vale 3.

Notare che, se $\omega\tau = 1$, allora $\omega = \frac{1}{\tau}$. Quindi sulle ascisse posso anche riportare solo ω , scrivendo $\frac{0.1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{10}{\tau} \dots$

Per quanto riguarda il calcolo del modulo abbiamo supposto τ positivo, perché non perdiamo di generalità, infatti τ viene elevato alla seconda e quindi non conta se è positivo o negativo tanto il

segno lo perde. Per quanto riguarda il calcolo della fase invece è importante sapere se τ è positivo o negativo. Vediamo perché:

$$\phi = \arctan \frac{\omega}{\alpha} = \arctan \frac{\omega\tau}{1}$$

Questo è il valore della fase. Ora, se $\omega\tau \ll 1$, la fase è circa 0 (ricordati che ω va massimo fino a 0, non può essere negativo), se invece $\omega\tau \gg 1$ la fase va a $\frac{\pi}{2}$. Per tutti i valori intermedi possiamo approssimare l'andamento dell'argotangente con una retta. Quindi il grafico approssimato sarà una spezzata a tre lati. Ma questo, come prima, è un andamento approssimato, vediamo quello reale:

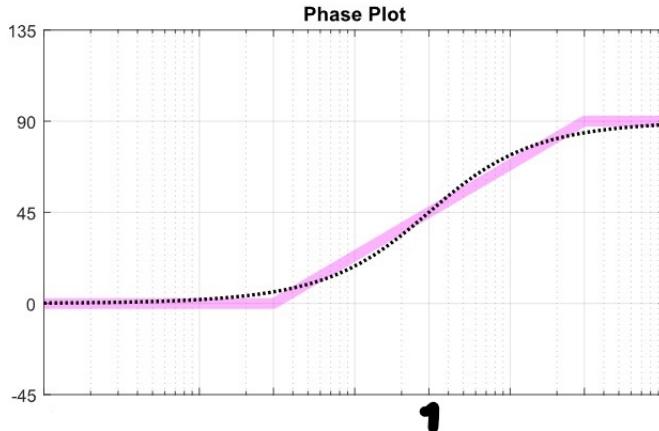


Figure 9: In rosa il diagramma approssimato, in nero tratteggiato l'andamento reale. Sulle ascisse abbiamo i gradi,, quindi 90 sta per $\frac{\pi}{2}$.

Quindi vediamo che l'andamento è una curva, con un punto di flesso proprio in $\omega\tau = 1$ (o equivalentemente, in $\omega = \frac{1}{\tau}$). La fase in questo punto vale 45, cioè $\frac{\pi}{4}$. Dicevamo, nel calcolo della fase il segno di τ è determinante: questo era il caso in cui $\tau > 0$, ma se $\tau < 0$ la fase non va da 0 a $\frac{\pi}{2}$ ma da 0 a $-\frac{\pi}{2}$. Quindi semplicemente nel grafico invece di salire a 90 scende a -90. Quindi

Ma se il termine binomio si trova al denominatore? Identico al caso del temine monomio: grafico del modulo e della fase ribaltati. Quindi attenzione che se il termine binomio è al denominatore il grafico della fase si legge al contrario: la curva per $\tau > 0$ è quella sotto che va a $-\frac{\pi}{2}$ mentre la curva per $\tau < 0$ è quella sopra che va a $\frac{\pi}{2}$.

Quindi, ricapitolando per lo studio del termine binomio: il grafico approssimato del modulo si alza da 0 precisamente nel punto $\frac{1}{\tau}$ (cioè ha centramento in $\frac{1}{\tau}$), mentre per il grafico approssimato della fase si alza da 0 precisamente nel punto $\frac{0.1}{\tau}$, poi ha un punto di flesso in $\frac{1}{\tau}$ e poi viene approssimata a $\pm\frac{\pi}{2}$ a partire da $\frac{10}{\tau}$.

31.5 Facciamo un semplice esercizio:

Prendiamo la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$$

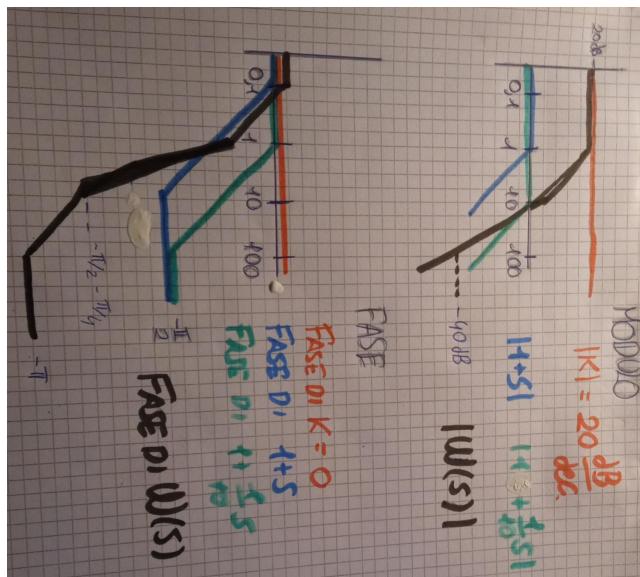
Vogliamo studiare i diagrammi di Bode al variare di ω . Prima cosa da fare è riscrivere $W(s)$ in forma di Bode: **dobbiamo scrivere ogni termine con termine noto normalizzato, cioè pari a 1**. Questo serve per poter centrare bene il diagramma. Nel nostro caso quindi $(s+10)$ non è in forma corretta: dobbiamo avere parte nota pari a 1, quindi scriviamo:

$$W(s) = \frac{1}{10} \frac{100}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)} = 10 \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

e quindi ho un guadagno $k = 10$ e due termini binomi $(s+1)$ e $(\frac{s}{10}+1)$. Troviamo moduli e fasi dei singoli termini:

- Per il guadagno ho modulo costante $20 \log_{10}(10) = 20 \frac{dB}{decade}$ e fase costante 0.
- Per il termine binomio $(1 + s)$, che ha quindi $\tau = 1$, se consideriamo la funzione approssimata abbiamo modulo che vale 0 fino a $\frac{1}{\tau} = 1$ e poi, essendo questo termine al denominatore, la curva tende a $-\infty$. Per quanto riguarda la fase invece essa è 0 fino a $\frac{0.1}{\tau} = 0.1$, poi scende (perché siamo al denominatore e τ è positivo) come una retta fino a $\frac{10}{\tau} = 10$ e poi resta costante su $-\frac{\pi}{2}$
- Per il termine binomio $(1 + \frac{s}{10})$, che ha quindi $\tau = \frac{1}{10}$, se consideriamo la funzione approssimata abbiamo modulo che vale 0 fino a $\frac{1}{\tau} = 10$ e poi, essendo questo termine al denominatore, la curva tende a $-\infty$. Per quanto riguarda la fase invece essa è 0 fino a $\frac{0.1}{\tau} = 1$, poi scende (perché siamo al denominatore e τ è positivo) come una retta fino a $\frac{10}{\tau} = 100$ e poi resta costante su $-\frac{\pi}{2}$

Tracciamo il modulo e la fase totale della nostra funzione di trasferimento (in nero), basandosi su modulo e fase di ogni singolo termine: Per calcolare e tracciare le due funzioni relative a modulo e



fase della funzione di trasferimento totale ricordiamo che dobbiamo semplicemente fare la somma algebrica di tutte le funzioni relativi ai singoli termini (questo perché siamo in scala logaritmica). Spieghiamo prima il modulo:

- da 0 a 1 l'unica funzione attiva è il modulo di k , quindi la funzione totale segue il suo stesso identico andamento.
- a partire da 1 e fino a 10 oltre al modulo di k c'è anche la retta relativa a $|1 + s|$: dalla composizione di queste due funzioni otteniamo una retta decrescente di pendenza $20 \frac{dB}{decade}$. Avendo questa pendenza, significa che dopo una decade, cioè quando arriviamo a 10, da 20dB siamo scesi a 0.
- da 10 in poi abbiamo attive tre funzioni: il modulo di k , il modulo di $s + 1$ e la retta relativa a $|1 + \frac{1}{10}s|$. avendo le rette di $s + 1$ e di $|1 + \frac{1}{10}s|$ stessa pendenza, ottengo una retta che ha il doppio della pendenza di prima, quindi $20 \cdot 2 = 40dB$. Avendo 40dB di pendenza, quando siamo a $\omega = 100$ il modulo vale -40 db, perché è passata una decade e prima eravamo a 0 dB

Ok, ora spieghiamo la fase:

- da 0 a 0.1 andiamo come k , cioè costanti su 0
- da 0.1 a 1 componiamo k e $1 + s$, che è una retta con pendenza $-\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$ ²⁶, quindi otteniamo una retta con pendenza $-\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$. In pratica andiamo come $s + 1$, e quindi in 1 siamo a $-\frac{\pi}{4}$
- da 1 a 10 componiamo k , $1 + s$ e $\frac{s}{10+1}$, che è un'altra retta con pendenza $-\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$, quindi otteniamo una retta con pendenza $-\frac{\pi}{2} \frac{rad}{decade}$, fino a 10. Quindi invece di arrivare a $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, arriviamo a $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

²⁶Cioè vuol dire che ogni decade scendiamo di $\frac{\pi}{4}$

- da 1 a 10 componiamo k , $1 + s$ e $\frac{s}{10+1}$, ma stavolta $1 + s$ non è più una retta: si stabilizza sul valore $-\frac{\pi}{2}$, quindi ha pendenza 0 e non influenza. Questo significa che la nostra funzione totale torna a pendenza $-\frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{decade}}$, e perciò arriva a 10 con il valore di fase: $-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\pi$
- da 1 a 100 tutte e tre le funzioni sono costanti, quindi abbiamo pendenza 0 e perciò ci stabilizziamo su $-\pi$ fino all'infinito.

Vediamo che essendo incolonnati posso vedere per un certo valore di omega contemporaneamente quanto vale la fase quando vale il modulo (seppur sono sempre delle funzioni approssimate rispetto agli andamenti reali, ma più o meno si capisce).

Quindi, se io prendo il mio termine $M \sin \omega t + \phi$:

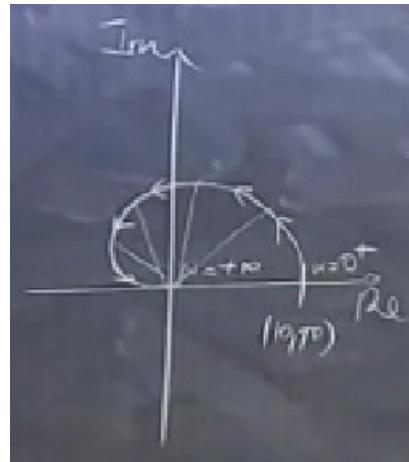
- Per $\omega < 0.1$ abbiamo $\phi = 0$, mentre per trovare M posso fare la formula inversa da M_{dB} :

$$20 = 20 \log_{10}(M) \implies \log_{10}(M) = \frac{20}{20} = 1$$

Quindi il modulo è $M = 10$ (ovviamente è un valore approssimato, quello reale magari è 10,1 oppure 9,9).

- Mano mano che andiamo avanti il modulo si attenua, idem per la fase. Ragioniamo prima sul modulo: prendiamo, ad esempio, $\omega = 100$. Per $\omega = 100$ abbiamo un M_{dB} negativo, quindi il nostro argomento del logaritmo sarà un valore positivo ma molto piccolo. Questo significa che mettendo in ingresso un seno la nostra uscita $M \sin(\omega t + \phi)$ avrà un modulo molto piccolo. Ora pensiamo alla fase, anch'essa in scala logaritmica diminuisce: quindi avrò uno sfasamento di un angolo negativo, nel nostro caso $-\pi$.

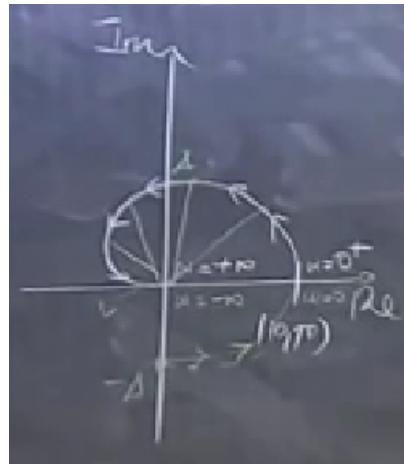
Quindi riusciamo a capire l'uscita come si comporterà in base alla pulsazione ω del seno o del coseno che mettiamo in ingresso. Cioè se noi mettiamo in ingresso un seno con $\omega < 0.1$ il segnale non verrà attutito e in uscita avrà un guadagno, se invece metto un ingresso seno con una pulsazione più grande in uscita avrà un segnale attenuato. Questa rappresentazione - ricordando che rappresenta il modulo e la fase di $W(j\omega)$ - mi permette di rappresentare anche la $W(j\omega)$ in coordinate polari. Questo grafico è solo per ω positivo. Essendo la rappresentazione polare, ogni



punto è determinato dal modulo (la lunghezza del vettore che congiunge il punto e l'origine) e la fase (l'angolo che questo vettore forma con l'asse delle ascisse, cioè quello reale). Vediamo dal diagramma di Bode che:

- per ω che va a 0 il modulo è 20 dB, quindi in scala lineare (cioè questa qua della rappresentazione polare) sarà 10, come già calcolato. Notare che infatti se mettiamo $s = j\omega = 0$ nella espressione della funzione di trasferimento esce fuori 10. Sempre per ω che va a 0 la fase tende a 0, cioè il punto tende ad appiattirsi sull'asse delle ascisse. Per questo abbiamo segnato il punto (10,0) sull'asse reale.
- per ω che va a ∞ dai diagrammi di Bode vediamo e sappiamo che il modulo in scala logaritmica tende a $-\infty$, quindi in scala lineare tende a 0 (perché $-\infty = 20 \log_{10}(M)$ dà $M = 0$), quindi graficamente ci dobbiamo avvicinare all'origine. Ma come ci avviciniamo all'origine? Lo decide la fase: vediamo che per $\omega \rightarrow \infty$ la fase tende a $-\pi$. Quindi dobbiamo avvicinarci all'origine formando un angolo di π con l'asse delle ascisse.

E se io avessi voluto tracciare il grafico anche per $\omega < 0$? Il modulo è uguale perché è una funzione pari, mentre la fase è ribaltata nel diagramma di Bode. Questo significa che nella rappresentazione polare abbiamo una traiettoria uguale ma opposta. Quindi:



Nota che in ogni caso, si tratta sempre di diagrammi qualitativi, ma che mi danno l'idea di come varia $W(j\omega)$.

31.6 Facciamo un altro semplice esercizio:

Prendiamo la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{100}{(s+1)(s-10)}$$

molto simile alla prima: è cambiato solo $s + 10$ in $s - 10$. Vediamo che scrivendolo in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{-10}{(s+1)\left(1 - \frac{s}{10}\right)}$$

Vediamo che c'è un polo a parte reale positiva, quindi non convergente: non posso quindi ancora parlare di risposta a regime permanente. In ogni caso però scrivere la funzione di trasferimento in forma di Bode è fondamentale per poter poi scrivere la risposta a regime permanente. Vabbé comunque, vediamo che informazioni qualitative sulla funzione di trasferimento riusciamo a tirare fuori adesso.

- Per quanto riguarda il modulo: esso è uguale all'esercizio precedente. Infatti il guadagno -10 ha comunque modulo 10; $1 + s$ è uguale a prima; $1 - \frac{s}{10}$ ha il meno dove prima c'era più, ma tanto il segno non conta col modulo poiché c'è il quadrato. Quindi modulo tale e quale a esercizio precedente. Una cosa che possiamo fare è **traslare l'asse da 0 a 20 dB**, così, giusto per partire dal termine costante $k = 20$ dB. Quindi è come se la nostra origine fosse 20.
- Per quanto riguarda la fase: la fase di una costante negativa è $\phi = -\pi$ (potevamo mettere anche $+\pi$, tanto è lo stesso punto), quindi abbiamo una componente costante a $-\pi$. La fase per $1 + s$ è la stessa dell'esercizio precedente. Invece per $1 - \frac{s}{10}$ dobbiamo fare questo discorso: essendo τ negativo, e essendo il termine binomio al denominatore, la fase di $1 - \frac{s}{10}$ parte da 0 e va a $\frac{\pi}{2}$. Quindi la fase un po' fase rispetto all'esercizio di prima. Anche qui possiamo pensare di traslare il nostro asse che fa da origine, e lo mettiamo a $-\pi$, dove si trova la fase del nostro guadagno. Quindi prima calcoliamo la somma dei due termini $s + 1$ e $1 - \frac{s}{10}$ e poi trasliamo questa somma ad altezza $-\pi$.

32 Lezione del 3-11:

C'è un errore nel libro, a pagina 240, vediamolo insieme. La funzione di trasferimento è:

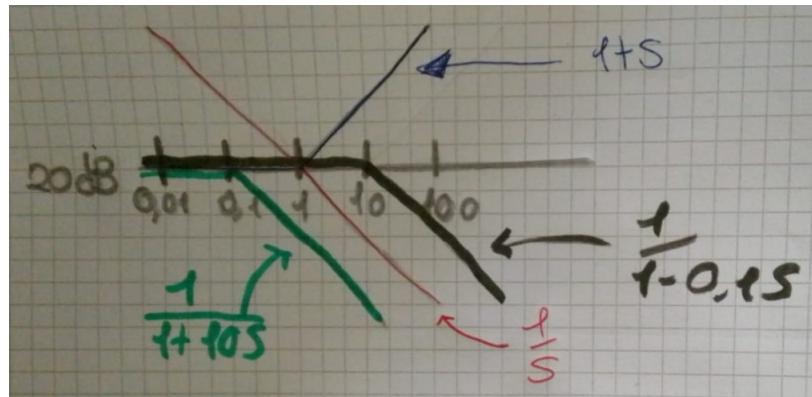
$$W(s) = -10 \frac{1+s}{s(1-0.1s)(1+10s)}$$

Quando si hanno tanti termini, come in questo caso, la prima cosa che si fa è andare a calcolare le costanti di tempo, perché sono queste che determinano il centramento del termine binomio. Vediamo, al numeratore abbiamo solo $\tau_1 = 1 \rightarrow \frac{1}{\tau_1} = 1$, per il denominatore, in ordine da sinistra a destra abbiamo:

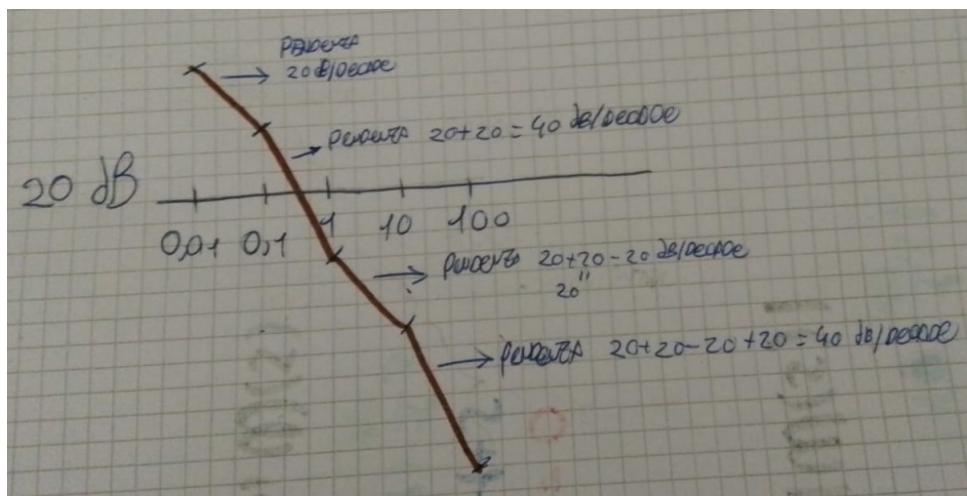
- $\tau_3 = -0.1 \rightarrow |\frac{1}{\tau_1}| = 10$

- $\tau_4 = 10 \rightarrow \frac{1}{\tau_1} = 0.1$

Avendo considerato solo i termini binomi ovviamente. Nota che facendo il reciproco di tau abbiamo fatto il modulo tanto come sappiamo se consideriamo τ positivo non perdiamo di generalità (solo quando facciamo il modulo!!!) poiché tanto viene elevato alla seconda. Vediamo che il valore più piccolo è 0.1, quindi parto da una decade prima di 0.1 nel disegnare il mio diagramma, mentre il valore più grande è 10, quindi finisco il grafico una decade dopo, a 100. Prendiamo i singoli grafici del termine costante guadagno, del termine monomio e del termine binomio: Notare che ho metto



l'asse direttamente a 20 dB, che posso fare ogni volta che ho il guadagno costante a un certo valore, in questo caso proprio 20 dB. Quindi, sommando le pendenze, ecco il grafico del modulo di questa funzione di trasferimento: Che abbiamo fatto per ottenerlo? Abbiamo fatto i seguenti passi:



- da 0.01 a 0.1 abbiamo solo il termine $\frac{1}{s}$, quindi scendiamo con pendenza 20 dB per decade
- da 0.1 a 1 abbiamo $\frac{1}{s}$ e $\frac{1}{1+10s}$, quindi scendiamo con pendenza 40 dB per decade
- da 1 a 10 abbiamo $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{1+10s}$ e $1+s$, quindi scendiamo con pendenza 20 dB per decade

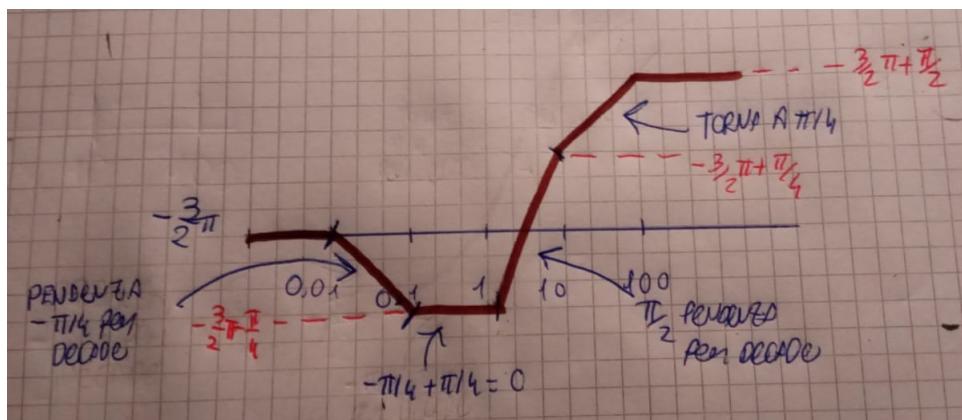
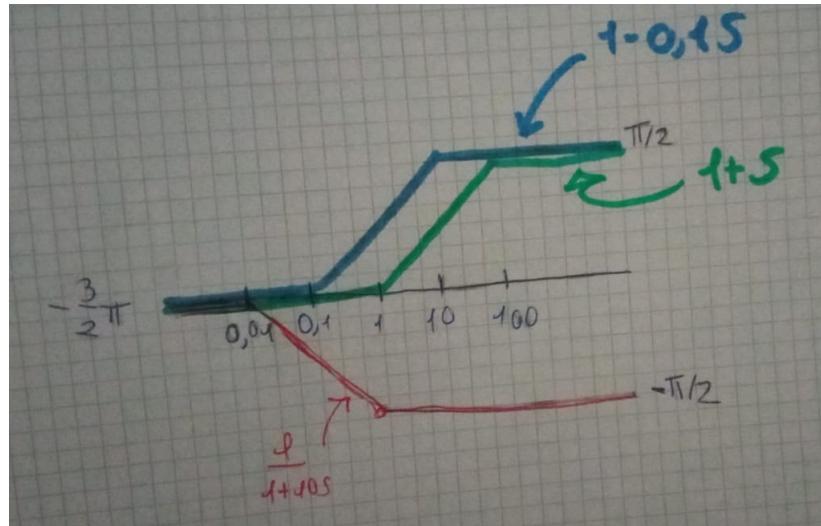
- da 10 a 100 abbiamo $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{1+10s}$, $1 + s$ e $\frac{1}{1-0.1s}$, quindi scendiamo con pendenza 40dB per decade

Quindi come al solito abbiamo semplicemente sommato le pendenze, che partivano da 20dB poiché avevamo il termine guadagno costante a 20dB di modulo.

Andiamo ora a vedere la fase:

- Sappiamo che sia il guadagno (che dà un contributo costante di $-\pi$), sia il termine monomio s (che sappiamo ha fase al denominatore pari a $-\frac{\pi}{2}$) danno contributi costanti per tutto il grafico. E sommandoli otteniamo il contributo costante $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$. Quindi senza andare a segnare questi termini, semplicemente scriviamo l'asse a $-\frac{3}{2}\pi$. Quindi abbiamo capito che la regola generale è: **non segnare i contributi costanti, ma trasla direttamente l'asse sul valore che ti esce sommando tutti i loro valori.**
- Poi abbiamo $1 + s$ al numeratore, con τ positivo, e il cui tempo di rottura è 1.
- Ora $1 - 0.1s$ il tau è negativo, ma è anche al denominatore, quindi anche questo contributo sale, il punto di rottura è 10, quindi sale tra 1 e 100
- Infine $1 + 10s$ il punto di rottura è 0.1, siamo al den e tau positivo quindi scendo tra 0.01 e 1

Quindi graficamente abbiamo: e la fase totale è: Nota che potevamo partire dalla fine e tracciare al

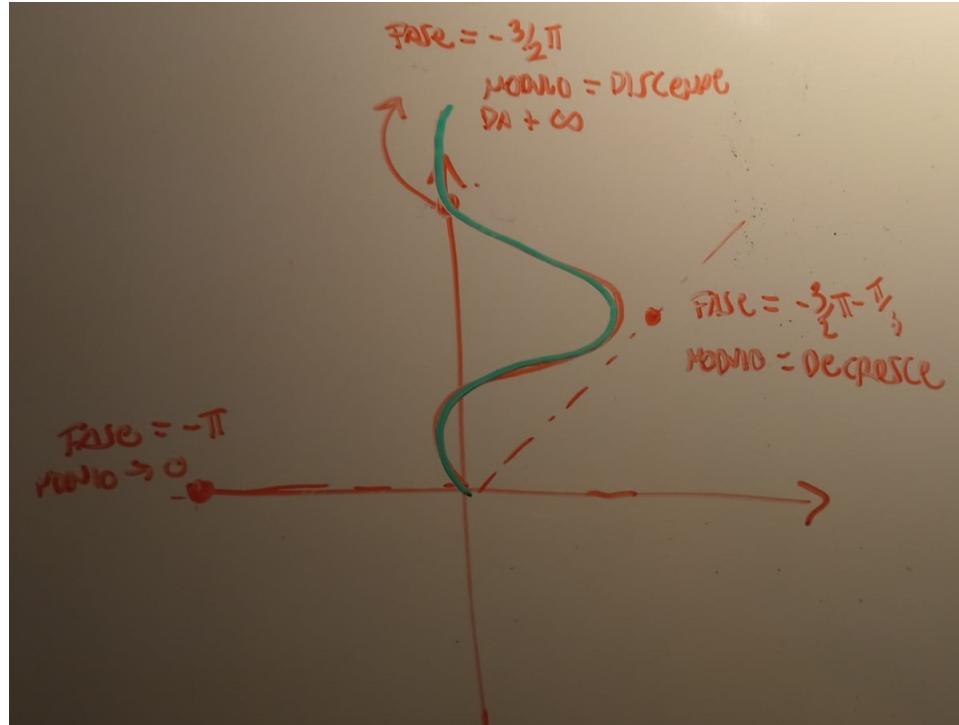


contrario il grafico della fase. Nel nostro caso avremmo detto che avevamo inizialmente tre funzioni costanti la cui somma fa $\frac{\pi}{2}$, poi una esse diventava decrescente, e così via.

Adesso siamo in grado di disegnare il diagramma polare:

- Vediamo che quando ω va a 0, il modulo va a $+\infty$. Lo vediamo dal grafico del modulo che abbiamo tracciato precedentemente. Siamo in scala logaritmica, ma se il logaritmo va a più infinito anche il suo argomento ci va. La fase invece, quando ω va a 0, va a $-\frac{3}{2}\pi$.
- Quando ω va a ∞ il modulo decresce sempre di più, in scala logaritmica (quindi in scala lineare tende a 0). La fase, per $\omega \rightarrow \infty$, prima va a $-\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{4}$, poi va a $-\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = -\pi$. Per questo è fondamentale segnare i valori a cui arriviamo con la fase quando tracciamo il grafico, come abbiamo fatto prima.

Quindi qualitativamente il nostro grafico è il seguente: Questo per $\omega > 0$. Aggiungendo il grafico



per $\omega < 0$, che sappiamo essere ribaltato rispetto a quello sovrastante, abbiamo: Vediamo che il

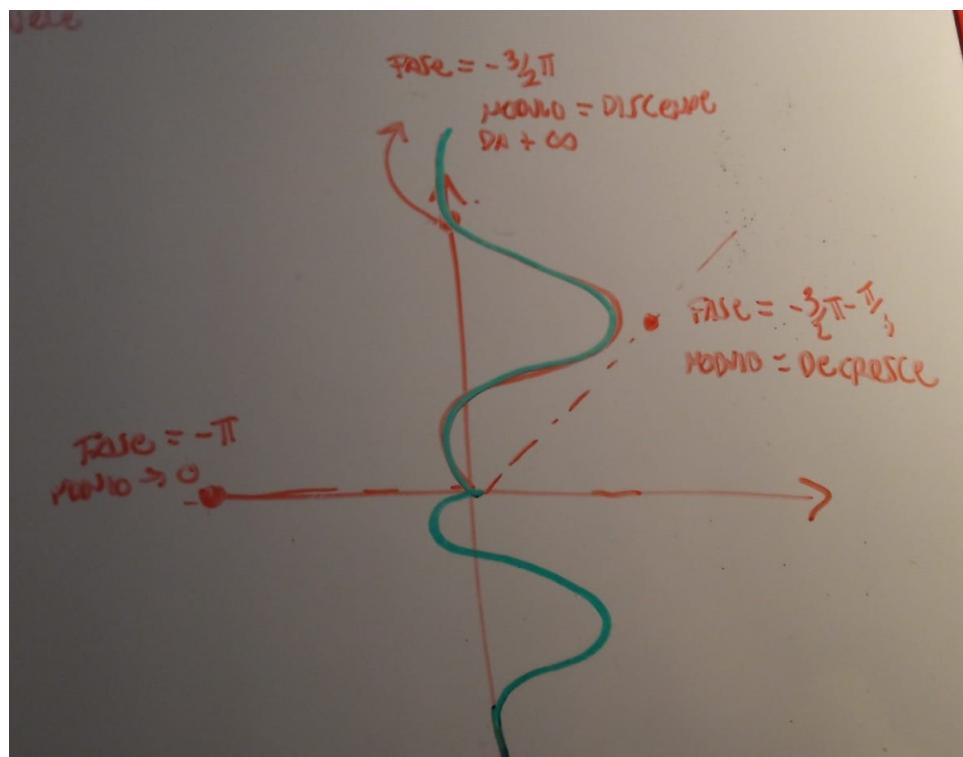


diagramma non si è chiuso stavolta, differentemente dall'esercizio prima. Questo succede perché ho una singolarità, una variazione di fase da $\omega = 0^-$ a $\omega = 0^+$ di π . Cioè abbiamo che il punto a cui tende il grafico quando siamo in $\omega = 0^+$ (che è il primo che abbiamo trovato, cioè quando $\omega \rightarrow 0$ ed è positivo) è a distanza di un angolo di π rispetto al punto a cui tende il grafico quando siamo in $\omega = 0^-$ (che è punto in cui $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega < 0$). Questo avviene perché c'è questa regola (che poi vediamo meglio), che dice che devo andare dal punto in cui $\omega = 0^-$ al punto in cui $\omega = 0^+$ compiendo tanti mezzigiri in verso orario, quanti sono i poli in $s = 0$. In questo caso ho solo un polo in $s = 0$, quindi ho un solo mezzogiro, e quindi ho una chiusura all'infinito. In questo modo:

