1.Introduction

Gödel 最早洞察到了使用模态逻辑$\mathbf{S4}$为可证性建模的可能性[Gödel,1933]，后来[S.N. Artemov,2001]中提出了第一个 justification 逻辑$\mathbf{LP}$将这一想法实现出来，$\mathbf{LP}$中的项多项式通过内化公理系统推理的过程来刻画存在证明，关于存在证明和可证性的讨论多在皮亚诺算数语义中。本文的出发点是用关系模型建模公理系统之间的关系（尤其是模态逻辑公理系统），刻画公理系统上证明具有的性质，这是直觉主义语义的一个特例，本文称之为证明语义。在证明语义中，一个可能世界是一个由语言、公理和规则定义的公理系统。一个系统能够通达另一个系统，称这个系统是另一个系统的子系统。系统语言中的公式被抽象为命题符号在我们的语言中表达，赋值函数将所有命题符号映射到一些系统中。自然的，假设一个系统上为真的命题符号所代表的公式要在这个系统的语言中，并且这些公式构成的集合是个一致集。称赋值满足一个系统，如果在这个赋值下系统中的所有定理在这个系统上都为真。称赋值满足一个框架，如果赋值满足这个框架中的所有系统。

当谈论一个公理系统的可证概念时，一般指的是从一个公式集合用这个系统上的公理和规则能够推出的公式（定理），特殊的当公式集合为空集时，指的是只用这个系统中的公理和规则能够推出的公式（真理）。当研究公理系统本身可证性的时候，主要关心的是后者，这时可以对赋值函数进行限制，取最小的赋值函数，即满足框架的所有赋值函数的交。在这样的赋值下，一个命题符号在一个系统上为真等价于等价于这个命题符号代表的公式是这个系统上的真理，从而一个可能世界也能解释为一个公理系统中所有真理的集合，通达关系解释为子集关系。从而公理系统上的真理都能用公理和规则给出证明，这个事实由下面的公式捕获

$$\text{(fact checker)} \qquad P \to \Box P$$

其中P是命题符号，解释为如果一个系统中的公式P在这个系统上为真，那么P在这个系统上可证。只有在专门研究系统的可证真理集时可以将fact checker公式作为公理，一般的只要求赋值满足框架即可不需要是最小赋值，这意味着一个系统上除真理以外存在一个更大的一致集。直觉主义语义和证明语义都使用标准的可能世界模型，但是直觉主义逻辑不是标准的模态逻辑。本文基于标准的模态逻辑来形式化证明语义，记公式构成为

$$F ::= P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F$$

其中P是命题符号，F是公式。如果F是命题符号，考虑公式$\Box P$，那么一个系统上可证P解释为使用这个系统中的公理和规则能够推出P。一般的，如果F是任意公式，那么在一个系统Γ上可证公式F解释为F在所有含有Γ的系统上都为真。$\Box F$可以看作$\Box P$中可证意义的抽象，抽象出了证明在公理系统间具有的一般性，从而谈论的对象不再只是公理系统中的定理，而可以是更复杂的模态公式。为公理系统间的证明关系建模，就是刻画证明的性质以及系统之间的关系。

直觉上，可证意味着一种永恒不会丢失的单调性，无论一个系统如何扩充，仍然保有原来可证的公式，接下来从$\mathbf{S4}$的公理系统出发，逐步形式化证明语义。K公理解释为，如果在一个系统上可证$F \to M$，并且可证F，那么这个系统上可证M。框架上，T公理表达自反性，即任何系统都是其自身的子系统，T公理解释为如果在一个系统上F可证，那么F在这个系统上为真。4公理表达传递性，即任何系统都含有其子系统的子系统，4公理解释为如果在一个系统上F可证，那么在含有这个系统的系统上F也可证。必然化规则NEC解释为，如果一个公式在模型中的所有系统上都为真，那么这个公式在任何系统上可证。$\mathbf{S4}$系统加上$\mathrm{fact\ checker}$公理构成的系统记为$\mathbf{S4_f}$，即定义

$$\mathbf{S4_f} = \mathbf{S4} + \text{fact checker}$$

任给命题符号P和系统Γ，附录[Example A.1]在系统$\mathbf{S4_f}$中证明，如果P在Γ中（P是Γ中的定理），那么对于任意公式F，在Γ上可证$F \to P$。在[S.N. Artemov, E. Nogina,2004]中，作者将 justification 逻辑与模态逻辑结合用$\mathbf{LPS4}$和$\mathbf{LPGL}$为存在证明和可证性同时建模，并给出它们的算数语义与关系模型。设t为项，在语言中加入公式$t : F$，表达t是F的证明。建立起存在证明和可证性之间关系的是$\mathrm{connection}$公理

$$(\text{connection}) \qquad t : F \to \Box F$$

$\mathrm{connection}$公理解释为在一个系统上，如果t是F的证明，那么在这个系统上可证F。对于公理系统而言，一个公理系统上如果可证F，那么就存在用公理和规则对F的证明，$\mathbf{LP}$和$\mathbf{S4}$之间的实现定理捕获了这一事实。$\mathbf{LPS4}$中可以同时表达存在证明和可证，但公式$\Box F \to t : F$不是公理，因为$\mathbf{LPS4}$的语言中没有量词无法表达闭项t的存在如何受到公式F的约束，但后文将证明这一事实是内化定理的推论。然而对于一般的知识概念而言可知并不意味着存在证据表明知道，在认知语义中，可以将模态算子解释为可知，将$t : F$解释为依据证据t知道F，提供证据是比断言可知更强的知识，所以不能用$\mathbf{LPS4}$刻画一般的知识概念。特殊的，用$\mathbf{LPS4}$能够刻画先验分析知识，这是将证明看作知识的一种抽象。

在[M. Fitting,2010]中，作者将混合算子引入 justification 逻辑给出hybrid-$\mathbf{T}$的实现对应（realization counterpart）hybrid-$\mathbf{JT}$，给出了关系模型并证明了内化定理与实现定理，但是缺乏对语义的充分讨论。混合算子将模型中的系统内化到当前语言中表达满足关系，或者同时表达多个系统上的事实。由于hybrid-$\mathbf{JT}$中没有模态算子，因此没有$\mathrm{dual\ back}$公理，不过作者引入$\mathrm{remote\ fact\ checker}$公理来发挥$\mathrm{dual\ back}$类似的功能。设$i$为任意系统，$P$为任意命题符号，那么存在常项$f_i$具有公理

$$\begin{array}{ll} (\text{dual back}) & @_i F \to \Box @_i F \\ (\text{remote fact checker}) & @_i P \to f_i : @_i P \\ & @_i \neg P \to f_i : @_i \neg P \end{array}$$

其中P为任意命题符号而不能是任意的公式，这意味这对于系统i中的任意定理P，具有统一的证据f_i证明P是i中的定理，赋值函数可以看作一个基础的证据来证明一个系统上为真的命题符号，也就是f_i可以看作赋值函数在一个系统上的赋值。如果语言中加入模态算子，那么自然应该考虑dual back公理的涵义，即对于任意的公式F和任意系统i，如果F在i上为真，那么$@_i F$可证。对于任意的$@_i F$，虽然没有统一的证据证明$@_i F$，但如果$@_i F$是定理，那么由内化定理，存在一个具体的证明闭项能够证明$@_i F$，附录[Example A.3,B.3]是对[Example A.2,B.2]应用内化定理的例子。[M. Fitting,2010]原文对remote fact checker公理的解释来自维特根斯坦”The facts in logical space are the world”，一个可能世界是一些事实的集合，构成一个可能世界的事实应该是可检验的。

当研究的问题是系统本身的可证真理时，类似fact checker公理，可以补充close fact checker公理

$$\begin{aligned}
&\text{(close fact checker)} \qquad @_i P \to @_i f_i : P \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad @_i \neg P \to @_i f_i : \neg P
\end{aligned}$$

其中P为任意命题符号，公理解释为，对于系统i中的任意定理P，在系统i上具有统一的证据f_i证明P，这时f_i解释为系统i上的最小赋值。由于命题符号抽象的表达系统中的定理，所以系统中的可证没法用具体的证明表达，而只能抽象的表达为f_i。如果要给出具体的证明，就要给逻辑分层，将证明语义作为上层语义，将命题符号具体的用模型中系统内的公式替换，去除符号f_i，补充公理和规则

If P is an axiom of $\mathcal{V}(i)$, then $@_i P$ is an axiom.
If P/Q is an inference rule of $\mathcal{V}(i)$, then $@_i P/@_i Q$ is an inference rule.

其中i是专名，函数$\mathcal{V}$将i映射到模型中的一个公理系统。经过分层将抽象的命题符号P具体展开为公式后就能具体的推理系统中的定理，参考附录[Example C.1,D.2]。

其次在$\mathbf{LPS4}$和bybrid-$\mathbf{JT}$中还有和4公理和5公理类似的一些公理，这些将在第二章具体解释。

$$\begin{aligned}
&\text{(explicit positive introspection/proof checker)} && t : F \to !t : t : F \\
&\text{(weak negative introspection)} && \neg t : F \to \Box \neg t : F \\
&\text{(remote positive justification checker)} && @_i t : F \to (!_i t) : @_i t : F \\
&\text{(remote negative justification checker)} && @_i \neg t : F \to (?_i t) : @_i \neg t : F
\end{aligned}$$

本文将$\mathbf{LPS4}$和hybrid-$\mathbf{JT}$的语言、公理和规则结合并加上dual back公理得到hybrid-$\mathbf{LPS4}$，在证明语义中模态算子$\Box$解释为可证，公式$t : F$解释为t是F的证明，混合算子内化满足关系。进一步加上fact checker,close fact checker公

理得到$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$，能够表达一个公式是系统中的定理，进而能够在$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$的公理系统中证明模型中系统上的定理。本文首先证明$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$上的内化定理

Theorem. (Internalization) If F is a theorem of $\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$, then there is a closed justification term t such that $t : F$ is also a theorem.

然后使用典范模型方法证明完全性，最后证明实现定理。实现定理大多数证明采用矢列构造证明，也有采用典范模型的非构造性证明，本文在希尔伯特公理系统中证明。证明的出发点是尝试将 justification logic (JSL) 还原到模态逻辑上来理解，建立其联系的中间逻辑是[M. Fitting, 2001]提出的 Term modal logic (TML)，有趣的是这和[S.N. Artemov,2001]是同一时期的结果，但是 Fitting 的工作后来并没有获得充分的重视和发展，很大可能是由于量化证明项违背了直觉主义的原则。不同于多模态逻辑语言中模态算子是确定的，TML中的模态算子是不定的，需要一个赋值来指派具体是哪个模态算子。本文在3.4节给出了命题情况下的实现定理的证明，其思路是将命题模态逻辑上的证明序列一般化为 TML 上的证明序列，然后利用 JSL 具有的内化定理，从 TML 上的证明序列构造出 JSL 上的证明序列。

暂时未看到有论文采用这种证明方法，这种证明表明了为何不能给一个模态公式就有一个固定的算法来生成对应的JSL中的公式，而给出这个模态公式的序列才行，因为从可证到给出证明对应着自动定理证明的困难。在证明过程中将表明application公理是如何内化MP规则的，还表明了内化定理具体是哪一步将可证转为具体的证明的。退而求其次，如果已经有公式可证的证明，那么存在一个算法来得到具体的证明结构。这似乎是在下水前学会游泳，在没有给出证明前先给出可证性。或者说这暗示着公理系统上的所有问题都是可证性问题，具体的证明交给一个算法来实现就够了。究竟哪些模态逻辑能够实现为对应的JSL是实现定理的边界问题，通过TML作为中间逻辑，或许能够提供一个清晰的框架来衡量这个边界。

在这篇文章中，首先在第二部分给出证明语义的严格定义，然后第三部分3.1中给出公理系统$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$并证明内化定理，3.2中证明完全性（未完善），3.3在认知语义和皮亚诺算数语义中解释（待补充），3.4给出借助 term modal logic 的基本的实现定理的证明，3.5给出$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$的模态对应$\text{hybrid-}\mathbf{S4^2}$并证明实现定理。第四部分总结全文并给出未来的研究。

附录是一些例子，比较繁琐，不建议阅读。附录[Example A.4,B.4]是[Example A.3,B.3]应用内化定理的例子。在分层的逻辑中，考虑模型中某个系统i中的定理P，$@_i P$是$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$中的定理，内化定理断言$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$中存在$@_i P$的具体证明，附录[Example C.3]是[Example C.2]中应用内化定理的例子，[Example D.3]是[Example D.1]在$\mathbf{LPGL}$中应用内化定理的例子，[Example D.4]是[Example D.2]在$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$中应用内化定理的例子。在$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$中，内化定理表达了这样的直观，如果模型中每个公理系统中的定理都是存在证明的，那么在收纳了模型中的所有公理和规则后的$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$中，定理也都存在证明。

最后一个例子是借助 TML 得到模态公式$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$的例子，比较清晰。

最后是参考文献和文献中一些系统的列举，格式待修订。

2.证明语义

记号：Γ, Δ:公理系统，或公式集；P, Q:命题符号；$\mathbf{PR}$:命题符号的集合；$\mathbf{NOM}$:专名的集合；F, M:公式

$t ::= c \mid x \mid t \cdot t \mid t + t \mid !t \mid f_i \mid !_i t \mid ?_i t$

$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid @_i F \mid t : F$

Fitting model

证明语义是用关系模型对证明的建模，记关系模型 $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$, 其中$\mathcal{G}$是可能世界的集合，$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$是二元可通达关系，$\mathcal{V} : \mathbf{NOM} \cup \mathbf{PR} \to \mathcal{G} \cup \mathcal{P}(\mathcal{G})$是赋值函数，为专名指定公理系统，并将每个命题符号映射到一个$\mathcal{G}$的子集。一个可能世界是一个由语言、公理和规则定义的公理系统，简称为系统，命题符号是所有系统中的所有公式。系统Γ, Δ具有二元通达关系$\Gamma \mathcal{R} \Delta$解释为$\Gamma$是$\Delta$的子系统。$\mathcal{V}$将每个命题符号映射到一些系统上，称一个赋值满足一个系统Γ，如果Γ中的定理在这个系统上都为真，即$\text{If } \Gamma \vdash P, \text{ then } \Gamma \in \mathcal{V}(P)$（一个系统也是一个集合，$\text{If } P \in \Gamma, \text{ then } \Gamma \in \mathcal{V}(P)$），称一个赋值满足一个框架，如果赋值满足框架中的所有系统。专名相同的赋值$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$的交定义为赋值$\mathcal{V} : P \mapsto \mathcal{V}_1(P) \cap \mathcal{V}_2(P)$。满足框架的最小赋值就是所有满足框架的赋值的交，在这样的赋值下，在系统上为真的命题符号都是这个系统中的定理，即如果$\Gamma \in \mathcal{V}(P)$, then $\Gamma \vdash P$（如果$\Gamma \in \mathcal{V}(P)$, then $P \in \Gamma$），从而一个命题在一个系统上为真等价于这个命题是这个系统中的定理。$\mathcal{E}$是从项和公式的二元组到$\mathcal{G}$子集的证据函数，证据函数需要满足如下条件：

$\mathbf{Weakening} \quad \mathcal{E}(t, F) \cup \mathcal{E}(u, F) \subseteq \mathcal{E}(t + u, F)$

$\mathbf{Application} \quad \mathcal{E}(t, F \to M) \cap \mathcal{E}(u, F) \subseteq \mathcal{E}(t \cdot u, M)$

$\mathbf{Constant\ specification}$ 称$\mathcal{E}$满足常量指定CS当且仅当如果$c : F \in CS$, 那么 $\mathcal{E}(c, F) = \mathcal{G}$

因为任意系统是其自身的子系统，即对任意$\Gamma \in \mathcal{G}, \Gamma \mathcal{R} \Gamma$，根据单调性如果$\Gamma \vdash F, \Gamma \subseteq \Delta$，那么$\Delta \vdash F$，子系统关系还具有传递性，即对任意$\Gamma, \Delta, \Sigma \in \mathcal{G}$, If $\Gamma \mathcal{R} \Delta$ and $\Delta \mathcal{R} \Sigma$, then $\Gamma \mathcal{R} \Sigma$，所以框架是自反传递框架。

满足关系递归定义如下

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M},\Gamma\vDash i\Leftrightarrow V(i)=\Gamma\\
&\mathcal{M},\Gamma\vDash P\Leftrightarrow\Gamma\in\mathcal{V}(P)\\
&\mathcal{M},\Gamma\vDash\neg F\Leftrightarrow\mathcal{M},\Gamma\nvDash F\\
&\mathcal{M},\Gamma\vDash F\to M\Leftrightarrow\mathcal{M},\Gamma\nvDash F\text{ or }\mathcal{M},\Gamma\vDash M\\
&\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box F\Leftrightarrow\forall\Delta\in\mathcal{W},\text{ if }\Gamma\mathcal{R}\Delta\text{ then }\mathcal{M},\Delta\vDash F\\
&\mathcal{M},\Gamma\vDash t:F\Leftrightarrow\Gamma\in\mathcal{E}(t,F)\text{ and }\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box F\\
&\mathcal{M},\Gamma\vDash @_iF\Leftrightarrow\mathcal{M},\mathcal{V}(i)\vDash F
\end{aligned}$$

模态词$\Box$

$\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box F$定义为在含有$\Gamma$的系统上$F$为真，表达在$\Gamma$上可证$F$。

(1) $\mathcal{M},\Gamma\vDash F$表达$F$在$\Gamma$上为真。(2) $\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box P$表达$P$在$\Gamma$中可证，即含有$\Gamma$的系统中，都有$P$。
(3) $\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box P\to P$，表达在$\Gamma$上，如果$P$在$\Gamma$中可证，那么$P$在$\Gamma$中。由$T$公理$\Gamma$为任何系统都满足，即在任何系统中如果$P$在这个系统中可证，那么$P$在这个系统中。
(4) $\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box F\to\Box\Box F$表达如果$F$在$\Gamma$中可证，那么$F$在含有$\Gamma$的系统中可证。4公理。
(5) $\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box(\Box P\to P)$表达在$\Gamma$上可证，如果$P$在含有$\Gamma$的系统中可证，那么$P$在这个系统中。即在含有$\Gamma$的系统$\Delta$中，如果$P$在$\Delta$中可证，那么$P$在$\Delta$中。由(3)使用NEC规则立刻得到$\Gamma$为任何系统都满足，或者视为(3)的特殊情况。

模态词$\Diamond$

(6) $\mathcal{M},\Gamma\vDash\Diamond P$表达非$P$在$\Gamma$中不可证，即存在含有$\Gamma$的系统中有$P$。例如$P$是4公理，那么非$P$的确在$\mathbf{T}$中不可证，但是存在含有$\mathbf{T}$的系统比如$\mathbf{S4}$中有4公理。可能性表达的是一致性，可能性要求模型应该是丰富完整的，例如$\mathcal{M},\Gamma\vDash\Diamond P$意味着$\Gamma$中加入公式$P$就能得到一个新的系统，而不会引发矛盾。$\mathcal{M},\Gamma\nvDash\Diamond F\Leftrightarrow\mathcal{M},\Gamma\vDash\Box\neg F$，即表示非$F$在$\Gamma$中可证，也就是说$\Gamma$与$F$是不一致的。

问题：如果一致的就是可能，按照可能在模型上的定义，要求模型中真的存在一个这样可能的系统，那么这将是一个很难定义的模型，随意定义的模型就无法准确刻画可证性。比如定义一个只有系统$\mathbf{T}$的模型，记4公理为P_4，那么按照模型的定义有$\mathcal{M},\mathcal{V}(\mathbf{T})\nvDash\Diamond P_4$，而事实上，系统$\mathbf{T}$与4公理是一致的。为了使模型与证明语义一致，就必须要求模型中有$\mathbf{S4}$系统，并且$\mathcal{V}(\mathbf{T})\mathcal{R}\mathcal{V}(\mathbf{S4})$，这样$\mathcal{M},\mathcal{V}(\mathbf{T})\vDash\Diamond P_4$。

性质

(7) 需要注意，fact checker公理并不意味着$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \neg P \rightarrow \Box\neg P$。例如$\mathbf{4}$公理不在$\mathbf{T}$中，并且$\mathbf{4}$公理的否定也不在$\mathbf{T}$中可证，如若不然，$\mathbf{S4}$系统中将同时有$\mathbf{4}$公理和$\mathbf{4}$公理的否定，这是不可能的。另外fact checker公理意味着，$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \neg\Box P \rightarrow \neg P$，即如果$P$在$\Gamma$上不可证，那么$P$不在$\Gamma$中。

(8) 给定一个系统值得注意的问题是，哪些为真的公式是可证的，哪些为真的不是可证的。从关系模型上看就是，如果Γ是Δ的子系统，那么哪些Γ上成立的公式在Δ上也成立。即对于任意的Γ，哪些公式F满足$\mathcal{M}, \Gamma \vDash F \rightarrow \Box F$。根据(7)，$F$可以是所有$\Gamma$中的定理，也可以是这些定理的逻辑组合。$F$可以是可证的公式，即一个公式如果在$\Gamma$上可证，那么在$\Delta$上也可证，这用$\mathbf{4}$公理捕获。$F$是否可以是任何公式，即$\Gamma$上满足的公式是否都是$\Delta$上满足的公式？显然是否定的，例如记$\mathrm{T}$公理为命题符号$P_T$，则$\mathcal{M}, \mathcal{V}(\mathbf{K}) \vDash \Diamond P_T, \mathcal{V}(\mathbf{K})\mathcal{R}\mathcal{V}(\mathbf{GL})$，但是$\mathcal{M}, \mathcal{V}(\mathbf{GL}) \nvDash \Diamond P_T$。这里表达，存在含有$\mathbf{K}$的系统中有$\mathrm{T}$公理，但是不存在含有$\mathbf{GL}$的系统中有$\mathrm{T}$公理，原因是$\mathbf{L\ddot{o}b}$公理与$\mathrm{T}$公理不一致。直观上，一个系统不可证的公式，未必在更大的系统中不可证。总而言之，$F \rightarrow \Box F$不是证明语义的公理，这也意味着引入可证算子不是平凡的，并不会退化为命题逻辑。

分层

(9) 上层语言和下层语言使用不同的逻辑符号，设下层语言中的否定与蕴含记为$\hat{\neg}, \hat{\rightarrow}$。$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \neg P$不同于$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \hat{\neg} P$，前者$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \neg P \Leftrightarrow \mathcal{M}, \Gamma \nvDash P \Leftrightarrow \Gamma \notin \mathcal{V}(P)$。后者$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \hat{\neg} P \Leftrightarrow \Gamma \in \mathcal{V}(\hat{\neg} P)$。前者不能蕴含后者，即如果$P$不是$\Gamma$上的真理，并不蕴含$\hat{\neg} P$是$\Gamma$上的真理。而后者蕴含前者，即如果$\hat{\neg} P$是$\Gamma$上的真理，那么其否定$P$不是$\Gamma$上的真理。所以在分层的逻辑中$\hat{\neg} P \rightarrow \neg P$是公理。进一步$\mathcal{M}, \Gamma \vDash P \rightarrow Q$也不同于$\mathcal{M}, \Gamma \vDash P \hat{\rightarrow} Q$，前者$\mathcal{M}, \Gamma \vDash P \rightarrow Q \Leftrightarrow \mathcal{M}, \Gamma \nvDash P \text{ or } \mathcal{M}, \Gamma \vDash Q$，后者$\mathcal{M}, \Gamma \vDash P \hat{\rightarrow} Q \Leftrightarrow \Gamma \in \mathcal{V}(P \hat{\rightarrow} Q) \Leftrightarrow \Gamma \in \mathcal{V}(\hat{\neg} P) \text{ or } \Gamma \in \mathcal{V}(Q) \Leftrightarrow \mathcal{M}, \Gamma \vDash \hat{\neg} P \text{ or } \mathcal{M}, \Gamma \vDash Q$。由刚才的结论$\hat{\neg} P \rightarrow \neg P$，后者蕴含前者，即$(P \hat{\rightarrow} Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$是公理。 对于其它模态算子，例如下层语言中有$\mathrm{T}$公理，那么$\hat{\Box} P \rightarrow \Box P$是定理，因为$\hat{\Box} P \hat{\rightarrow} P, (\hat{\Box} P \hat{\rightarrow} P) \rightarrow (\hat{\Box} P \rightarrow P), \hat{\Box} P \rightarrow P, P \rightarrow \Box P, \hat{\Box} P \rightarrow \Box P$是一个证明。

混合算子

$\mathcal{M}, \Gamma \vDash @_i F$表达在系统$\mathcal{V}(i)$上$F$为真。
$\mathcal{M}, \Gamma \vDash i$表达当前系统$\Gamma$的名字是$i$。
$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \Box i$表达含有$\Gamma$的系统只有一个并且名字是$i$。
$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \Diamond i$表达存在一个含有$\Gamma$的系统名字是$i$。
$\mathcal{M}, \Gamma \vDash @_i P$表达$P$是系统$\mathcal{V}(i)$的定理。
$\mathcal{M}, \Gamma \vDash @_i \Box F$表达在系统$\mathcal{V}(i)$上$F$可证。
$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \Box @_i F$表达在系统$\Gamma$上可证$F$在系统$\mathcal{V}(i)$上为真。

证明项

$\mathcal{M},\Gamma \vDash t : F$表达在系统$\Gamma$上，$t$是$F$的证明。
$\mathcal{M},\Gamma \vDash t : i$表达$\Gamma$上的证据$t$表明，含有$\Gamma$的系统只有一个并且名字是$i$。
$\mathcal{M},\Gamma \vDash t : \Box F$表达在系统$\Gamma$上，$t$是$F$可证的证明。
$\mathcal{M},\Gamma \vDash t : @_i F$表达在系统$\Gamma$上，$t$是$F$在系统$\mathcal{V}(i)$上为真的证明。
$\mathcal{M},\Gamma \vDash \Box(t : F)$表达在系统$\Gamma$上，$t$是$F$的证明是可证的。
$\mathcal{M},\Gamma \vDash @_i t : F$表达在系统$\mathcal{V}(i)$上，$t$是$F$的证明。

3.1 公理系统hybrid-$\mathbf{LPS4}$

3.1.1 定义

Language: $t ::= c \mid x \mid t \cdot t \mid t + t \mid !t \mid f_i \mid !_i t \mid ?_i t$

$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid @_i F \mid t : F$

Axioms:

$(TAUT)$
$(K, dual, T, 4)$
$(K_@, self-dual, introduction)$
$(ref, sym, norm, agree)$
$(\cdot, +, Factivity)$
$(back)$ $\Diamond @_i F \to @_i F$
(explicit positive introspection) $t : F \to !t : t : F$
(connection) $t : F \to \Box F$
$^+$(weak negative introspection) $\neg t : F \to \Box \neg t : F$
*(dual back) $@_i F \to \Box @_i F$
(remote fact checker) $@_i P \to f_i : @_i P$
$@_i \neg P \to f_i : @_i \neg P$
(remote positive justification checker) $@_i t : F \to (!_i t) : @_i t : F$
(remote negative justification checker) $@_i \neg t : F \to (?_i t) : @_i \neg t : F$

Rules:

(MP) Modus Ponens
(NEC) $F/\Box F$
$(@NEC)$ $F/@F$
(Iterated axiom necessitation) If X is an axiom and $c_1, c_2, \cdots, c_n$ are constants, then $c_1 : c_2 : \cdots : c_n : X$
(Iterated remote axiom necessitation) Let i be any nominal. If X is an axiom and $c_1, c_2, \cdots, c_n$ are constants, then $c_1 : c_2 : \cdots : c_n : @_i X$

hybrid-$\mathbf{LPS4_f}$ = hybrid-$\mathbf{LPS4}$ + fact checker + close fact checker

$$
\begin{aligned}
&\text{(fact checker)} && P \to \Box P \\
&\text{(close fact checker)} && @_i P \to @_i f_i : P \\
& && @_i \neg P \to @_i f_i : \neg P
\end{aligned}
$$

hybrid-$\mathbf{LPS4_f}$ 中 $\Box @_i P \leftrightarrow @_i P \leftrightarrow @_i \Box P$
hybrid-$\mathbf{LPS4_f}$ 中 $f_i : @_i P \leftrightarrow @_i f_i : P$.
Proof.
$(\to)$ $f_i : @_i P \to @_i P, @_i P \to @_i f_i : P, f_i : @_i P \to @_i f_i : P$
$(\leftarrow)$ $f_i : P \to P, @_i f_i : P \to @_i P, @_i P \to f_i : @_i P, @_i f_i : P \to f_i : @_i P$

Extend the defination of $\mathcal{E}$

f_i remote fact checker. For a propositional letter P and a nominal i, if $\mathcal{V}(i) \in \mathcal{V}(P)$ then $\mathcal{E}(f_i, @_i P) = \mathcal{G}$, and if $\mathcal{V}(i) \notin \mathcal{V}(P)$ then $\mathcal{E}(f_i, @_i P) = \emptyset$.

$!_i$ remote positive justification checker. If $\mathcal{V}(i) \in \mathcal{E}(t, X)$ then $\mathcal{E}(!_i t, @_i t : X) = \mathcal{G}$.

$?_i$ remote negative justification checker. If $\mathcal{V}(i) \notin \mathcal{E}(t, X)$ then $\mathcal{E}(?_i t, @_i t : X) = \mathcal{G}$.

3.1.2 内化定理

Lemma 3.1 For any formula F there are proof polynomials $f_F(x)$ such that $\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$ proves $x : F \to f_F(x) : \Box F$, where $f_F(x) = t!x$ with $t : (x : F \to \Box F)$.
Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ t : (x : F \to \Box F) \quad \text{connection}\\
&(2)\ x : F \to !x : x : F \quad \text{explicit positive introspection}\\
&(3)\ !x : x : F \to t!x : \Box F \quad \textit{application}\\
&(4)\ x : F \to t!x : \Box F
\end{aligned}
$$

Lemma 3.2 For any formula F and any nominal i, there are proof polynomials $\mathbf{po}^i_F(x)$ and $\mathbf{ne}^i_F(x)$ such that $\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$ proves $@_i x : F \to \mathbf{po}^i_F(x) : @_i F$ and $@_i x : \neg F \to \mathbf{ne}^i_F(x) : @_i \neg F$, where $\mathbf{po}^i_F(x) = dc!_i x$ with $d : (@_i(x : F \to F) \to (@_i x : F \to @_i F)), c : @_i(x : F \to F)$ and $\mathbf{ne}^i_F(x) = d'c'?_i x$ with $d' : (@_i(x : \neg F \to \neg F) \to (@_i x : \neg F \to @_i \neg F)), c' : @_i(x : \neg F \to \neg F)$.
Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ @_i x : F \to !_i x : @_i x : F \quad \text{remote positive justification checker}\\
&(2)\ c : @_i(x : F \to F) \quad \text{Factivity}\\
&(3)\ d : (@_i(x : F \to F) \to (@_i x : F \to @_i F)) \quad K_@\\
&(4)\ dc : (@_i x : F \to @_i F) \quad 2, 3, \textit{application}\\
&(5)\ !_i x : @_i x : F \to dc!_i x : @_i F \quad 1, 4, \textit{application}\\
&(6)\ @_i x : F \to dc!_i x : @_i F
\end{aligned}
$$

Theorem 3.3 (Internalization) If F is a theorem of $\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$, then there is a closed justification term t such that $t : F$ is also a theorem.

Proof. Let $F_1, F_2, \cdots, F_n = F$ be the proof of F in the $\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$. We induction on k to show that for each $k \leq n$ there is some closed justification term t_k such that $t_k : F_k$ is provable. Assume that the result is hold for all $m \leq k$, we show it holds for k as well. There are several cases to consider.
Case:Axiom Suppose that F_k is an axiom, then use constant specification rule, $c : F_k$ is provable for any constant c.
Case:Modus Ponens Suppose that F_k is obtained from F_m and $F_n = F_m \to F_k$ by modus ponens. Then by induction hypothesis there are

closed justification terms t_m and t_n such that $t_m : F_m$ and $t_n : F_n$ are provable. Then using the $\cdot$ axiom and modus ponens, $t_n t_m : F_k$ is also provable.
Case:Necessitation Suppose that $F_k = \Box F_m$ is obtained from F_m by necessitation. Then by induction hypothesis there is a closed justification term t_m such that $t_m : F_m$ is provable. Using Lemma 3.1, there are closed justification terms $f_{F_m}(t_m)$ such that $f_{F_m}(t_m) : \Box F_m$ is provable.
Case:@Necessitation Suppose that $F_k = @_i F_m$ is obtained from F_m by @necessitation. Then by induction hypothesis there is a closed justification term t_m such that $t_m : F_m$ is provable. By @necessitation, for any nominal i, $@_i t_m : F_m$ is provable. Using Lemma 3.2, there are closed justification terms $\mathbf{po}^i_{F_m}(t_m)$ such that $\mathbf{po}^i_{F_m}(t_m) : @_i F_m$ is provable or $\mathbf{ne}^i_{F_m}(t_m)$ such that $\mathbf{ne}^i_{F_m}(t_m) : @_i F_m$ is provable.
Csae:Iterated Axiom Necessitation Suppose that $F_k = c_1 : c_2 : \cdots : c_n : M$ where M is an axiom. Then by iterated axiom necessitation, we also have $c_0 : c_1 : c_2 : \cdots : c_n : M$ is provable for any constant c_0, thus $c_0 : F_k$.
Csae:Iterated Remote Axiom Necessitation Similar to the previous case.

Corollary 3.4 (explicit proof) If $\Box F$ is a theorem of $\mathrm{hybrid}\text{-}\mathbf{LPS4}$, then there is a closed justification term t such that $t : F$ is also a theorem.
Proof. Suppose that $\Box F$ is a theorem of $\mathrm{hybrid}\text{-}\mathbf{LPS4}$. Let $u : \Box F$ is a theorem according to internalization theorem and let $c : (\Box F \to F)$ by T axiom，then $cu : F$ is also a theorem by $application$ axiom $c : (\Box F \to F) \to (u : \Box F \to cu : F)$.

在[M. Fitting, 2010] 中 Proposition 4.2，作者在证明内化定理前证明了一个比本文内化定理证明中Case:@Necessitation更强的结论

Proposition 4.2 For every formula F and for every nominal i, there are closed justification term t and u such that both $@_i F \to t : @_i F$ and $@_i \neg F \to u : @_i \neg F$ are provable in $\mathrm{hybrid}\text{-}\mathbf{JT}$.

这个命题相当于$\mathrm{dual\ back}$公理的 justification 实现。在证明语义中解读为：总是存在对句子在世界上真假情况的证明。因为一个世界上为真的句子是个极大一致集，任何句子要么在这个世界上为真，要么为假，如果为真则存在为真的证明，如果为假则存在为假的证明，所以说这个命题是很强的。不幸的是在语言中加入模态算子后，$\mathrm{hybrid}\text{-}\mathbf{LPS4}$中将不再能证明这个命题。这个命题的证明依赖于对公式复杂性的归纳，原子命题、蕴含式、$@_i F$混合公式和$t : F$证明式都没有变化，主要的阻碍是模态公式的归纳环节。

假设要证明存在证明t使得$@_i \Box F \to t : @_i \Box F$，根据归纳假设，对于任意的专名$j$，都存在证明$u$使得$@_j F \to u : @_j F$是$\mathrm{hybrid}\text{-}\mathbf{LPS4}$的定理。归纳的思路是将世界$i$所能通达的世界（严格来说这里需要设定模型）上的所有证明u合并起来构成我们想要的证明t，然而这将面临两个困难。第一是世界i所能通达的世界未必是有名字的，而这种合并只能收纳有名字的世界上的证明，第二是如果世界i所

能通达的世界是无限的，那么合并起来的证明t将无限长，不是一个合法的证明项。在有名字的有限模型中，这个思路可以行得通，并可以严格的表示出来。记$i_1, i_2, \cdots, i_n$是所有i能通达的世界，那么$@_i \Box F \leftrightarrow (@_{i_1} F \wedge @_{i_2} F \wedge \cdots @_{i_n} F)$，根据归纳假设存在证明$u_1, u_2, \cdots, u_n$使得$@_{i_k} F \rightarrow u_k : @_{i_k} F$对任意$1 \leq k \leq n$是可证的。由 weaking 公理，$@_{i_k} F \rightarrow (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) : @_{i_k} F$对任意$1 \leq k \leq n$是可证的，所以$(@_{i_1} F \wedge @_{i_2} F \wedge \cdots @_{i_n} F) \rightarrow (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) : (@_{i_1} F \wedge @_{i_2} F \wedge \cdots @_{i_n} F)$是可证的，即$@_i \Box F \rightarrow (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) : @_i \Box F$，归纳出证明项$t = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$。但hybrid-$\mathbf{LPS4}$中仍然有dual back公理保证了世界上的真假情况总是可证的。

3.2 完全性

Stage 1. Let $\mathcal{G}_1$ be the collection of all MCS of formulas. For each $\Gamma \in \mathcal{G}_1$, let $\Gamma^{\#} = \{F \mid \Box F \in \Gamma\}$. Let $\Gamma \mathcal{R}_1 \Delta$ if $\Gamma^{\#} \subseteq \Delta$. The valuation satisfy the frame, that is for each propositional letter P(including nominals), set $\mathcal{V}_1(P) = \{\Gamma \in \mathcal{G}_1 \mid P \in \Gamma\}$. And finally, set $\mathcal{E}_1(t, F) = \{\Gamma \in \mathcal{G}_1 \mid t : F \in \Gamma\}$. Thus let $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{G}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$.

Stage 2. Suppose that we have a maximally consistent set Σ entend a consistet set S. For each nominal i, let $\Delta_i = \{F \mid @_i F \in \Sigma\}$. Let $\mathcal{M}_2$ be the submodel of $\mathcal{M}_1$ generated by $\{\Sigma\} \cup \{\Delta_i \mid i \in \mathbf{NOM}\}$.

Truth Lemma 3.5 For any $\Gamma \in \mathcal{G}_2$ and any formula F, we have $\mathcal{M}_2, \Gamma \vDash F$ if and only if $F \in \Gamma$.

Proof. We proof by induction on the complexity of F.

Propositional Case. By defination of valuation and the property of MCS.
@ Case. $\mathcal{M}_2, \Gamma \vDash @_i F \Leftrightarrow \mathcal{M}_2, \Delta_i \vDash F$. By the induction hypothesis, this is equivalent to $F \in \Delta_i$ equivalent to $@_i F \in \Gamma$.
Modal Case. Similar to normal modal logic.
Justification term Case. Suppose that $t : F \in \Gamma$, then by defination of $\mathcal{E}_2$, $\Gamma \in \mathcal{E}_2(t, F)$.

$$
\begin{aligned}
t : F \in \Gamma \Rightarrow \Box F \in \Gamma \quad & (\text{connection}) \\
\Rightarrow \forall \Delta(\Gamma \mathcal{R}_2 \Delta \to F \in \Delta) \quad & (\text{Definition } \mathcal{R}_2) \\
\Leftrightarrow \forall \Delta(\Gamma \mathcal{R}_2 \Delta \to \mathcal{M}_2, \Delta \vDash F) \quad & (\text{Induction Hypothesis})
\end{aligned}
$$

Thus $\forall \Delta(\Gamma \mathcal{R}_2 \Delta \to \mathcal{M}_2, \Delta \vDash F)$ and $\Gamma \in \mathcal{E}_2(t, F)$ is the defination of $\mathcal{M}_2, \Gamma \vDash t : F$. In the other direction, If $t : F \notin \Gamma$, then $\Gamma \notin \mathcal{E}_2(t, F)$ and $\mathcal{M}_2, \Gamma \nvDash t : F$.

3.3 认知语义

基于[S.N. Artemov, Justified common knowledge, 2006]

$K_jF, t : F$ and $@_iF$
Language:
$t ::= c \mid x \mid t \cdot t \mid t + t \mid !t \mid f_i \mid !_it \mid ?_it$
$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid K_jF \mid @_iF \mid t : F$

模型$\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_n, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$。一个认知状态是一些知识和证据的集合，证据指向的知识由证据函数$\mathcal{E}$给定。一个主体j在知识上不能区分的认知状态是一个二元关系$\mathcal{R}_j$，证据不分主体，一个证据的不可区分状态是一个二元关系$\mathcal{R}$。知识用命题符号表示，赋值函数$\mathcal{V}$确定了一个认知状态上为真的知识。

$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \Box F$表达在认知状态$\Gamma$中$F$可知。 $\mathcal{M}, \Gamma \vDash t : F$定义为与$\Gamma$证据不可区分的认知状态中$F$都为真，表达$t$在$\Gamma$上是$F$的证据。

算数语义

算数语义有些复杂，有待思考。

3.4 实现定理

[M. Fitting, 2001]中提出的 term modal logic 是谓词形式，本节只需要使用到命题形式，接下来定义逻辑Ω。

3.4.1 Sign and Language on Ω

$x, x_1, x_2, \cdots$: variable
$\mathbf{Var}$: set of variable
$t, t_1, t_2, \cdots$: term
$\mathbf{Term}$: each variable in $\mathbf{Var}$ is a term. Term is closed under the operators $\cdot, +$ and have the following properties

$$
\begin{aligned}
&t \cdot t = t \\
&t + t = t \\
&t_1 + t_2 = t_2 + t_1
\end{aligned}
$$

For each term t in $\mathbf{Term}$, there is a corresponding unary modal operator $\Box_t$. The formula is recursively defined as following

$$F ::= P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box_t F$$

$c, c_1, c_2, \cdots$: constant
$\mathbf{Cons}$: set of constant
A Kripk modal is $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{\mathcal{R}_c\}_{c \in \mathbf{Cons}}, \mathcal{V})$.

ν, μ: $\mathcal{M}{-}assignment$, a function from $\mathbf{Var}$ to $\mathbf{Cons}$ of modal $\mathcal{M}$.

The satisfy relation recursively defined as following

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}, \omega, \nu \models P \Leftrightarrow P \in \mathcal{V}(P) \\
&\mathcal{M}, \omega, \nu \models \neg F \Leftrightarrow \mathcal{M}, \omega, \nu \not\models F \\
&\mathcal{M}, \omega, \nu \models F \to G \Leftrightarrow \mathcal{M}, \omega, \nu \not\models F \vee \mathcal{M}, \omega, \nu \models G \\
&\mathcal{M}, \omega, \nu \models \Box_t F \Leftrightarrow \mathcal{M}, \omega, \nu \models \Box_{\nu(t)} F \\
&\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \forall \omega' \in \mathcal{G}, \text{if } \omega \mathcal{R}_{\nu(t)} \omega' \text{ then } \mathcal{M}, \omega', \nu \models F
\end{aligned}
$$

Axiom. for any term t_1, t_2

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{TAUT} & \\
\text{(identity)} & \Box_{t_1} F \to \Box_{t_2} F \\
\text{(application)} & \Box_{t_1}(F \to M) \to (\Box_{t_2} F \to \Box_{t_1 \cdot t_2} M) \\
\text{(weaking)} & \Box_{t_1} F \to \Box_{t_1+t_2} F
\end{array}
$$

The formula schema $\Box_{t_1} F \leftrightarrow \Box_{t_2} F$ defined the frame which have the same accessibility relation. Axiom application is the generalization of K Axiom , Let $t_1 = t_2 = t$ and $t \cdot t = t$, we have $\Box_t(F \to M) \to (\Box_t F \to \Box_t M)$. Since the identity Axiom, the application Axiom is soundness. Axiom weaking is a special case of $TAUT$: $\Box_{t_1} F \to (\Box_{t_1} F \vee \Box_{t_2} F)$, $\Box_{t_1+t_2}$ is a new accessibility relation extened from $\Box_{t_1}$ and $\Box_{t_2}$ such that $\Box_{t_1+t_2} F$ defined by $\Box_{t_1} F \vee \Box_{t_2} F$.

Rule. $(1) MP$, $(2) TNEC$, for each term t, inferring $\Box_t F$ from F.

justification logic 只能有一个通达关系，证据不能单独成为关系，证据只能依附在点上存在。如果证据成为单独的关系，application公理将不可靠，会受到赋值的印象，无法定义框架。所以只能用identity公理定义关系全同的框架，从而让一般化的applicaiton公理可靠。identity公理让这个逻辑退化为基本的命题模态逻辑，也正因此，K中的公式才能被抽象为Ω中的公式。

而Ω这个语言中的公式可以一般的定义通达关系之间的关系，这相当于多模态算子的一个具体工具。完全可以有更多的结构来定义通达关系之间的关系。去除identity公理，我们考虑更多公理的例子

Example. $\Box_{x_{i+1}} F \to \Box_{x_i} F$ 定义了一个逐渐加强的关系序列，例如<了解，知道，理解，掌握>，能够刻画关系强度。

Example. 设x, y, z为三组不同的变元，公式$\Box_x F \wedge \Box_y F \to \Box_z F$定义了关系之间的运算，例如，相信并且有证据就是知道。

Example. 有些公式因为使用了函数引入了新的通达关系，意味着模型中将到达新的点，这样的公式不能定义框架类，只能定义模型类。$\Box_{t_i} F \wedge \Box_{t_j} M \to \Box_{t_i \times t_j}(F \wedge M)$ 更强的合并，将证据连在一起。

Example. 使用公理$\Box_{t_i} F \leftrightarrow \Diamond_{t_i} F$ and $\Box_{t_i} \Box_{t_j} F \to \Box_{t_j \circ t_i} F$能够定义一个范畴框架。

Substitution. Suppose a substitution on proposition letter in normal modal logic K is

$\sigma(P_1, P_2, \cdots, P_n) = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$,

我们将这个替换在Ω上实现。将一个公式或一个公式序列中出现的$\Box$依次实现为$\Box_t$，设F_i中出现了m个$\Box$，记$F_i(t_1, t_2, \cdots, t_m)$为将$F_i$中的$m$个$\Box$依次实现为$\Box_{t_1}, \Box_{t_2}, \cdots, \Box_{t_m}$所得到的公式。同样的，设$(F_1, F_2, \cdots, F_n)$中共出现了$s$个

$\Box$，记$(F_1, F_2, \cdots, F_n)(t_1, t_2, \cdots, t_s)$为将$(F_1, F_2, \cdots, F_n)$中的$s$个$\Box$依次实现为$\Box_{t_1}, \Box_{t_2}, \cdots, \Box_{t_s}$所得到的公式。由$\sigma$在$\Omega$上实现的替换为

$$\sigma'(P_1, P_2, \cdots, P_n) = (F_1, F_2, \cdots, F_n)(t_1, t_2, \cdots, t_s)$$

Defination. A forget function $(\cdot)^\circ : \Omega \to K$ defined by replacing all $\Box_t$ to $\Box$ for any term t

3.4.2 From modal K to Ω

Theorem 3.6 如果公式F是K中的命题重言式，那么存在Ω中的替换σ'使得$F\sigma'$可证并且$(F\sigma')^\circ = F$

Proof. Let $F_1, F_2, \cdots, F_n$ be a proof of F in K, we try to prove for each $k \leq n$ there is a substitution σ'_k in Ω such that $F_k\sigma'_k$ is provable and $(F_k\sigma'_k)^\circ = F_k$. We proof by induction on k, suppose that for all $m \leq k$, there is a substitution σ'_m in Ω such that $F_m\sigma'_m$ is provable and $(F_m\sigma'_m)^\circ = F_m$.
Axiom Case Suppose that F_k is an instance of axiom A in $\mathbf{PL}$, then there is a substitution σ in K such that $A\sigma = F_k$, then σ' is a substitution such that $A\sigma'$ also is an instance of axiom A and $(A\sigma')^\circ = F_k$
Modus Ponens Case Suppose that F_k is obtained from F_m and $F_n = F_m \to F_k$ by modus ponens. Then by induction hypothesis there are substitution σ'_m, σ'_n such that $F_m\sigma'_m, F_n\sigma'_n$ are provable and $(F_m\sigma'_m)^\circ = F_m, (F_n\sigma'_n)^\circ = F_n$. A new substitution σ'_k could be obtained by σ'_n limitted on F_k such that $(F_k\sigma'_k)^\circ = F_k$, we need to prove taht $F_k\sigma'_k$ is provable. Suppose that $F_n\sigma'_n = M \to F_k\sigma'_k$. For the purpose of using MP, we consider how to make sure the formule M is equal to $F_m\sigma'_m$. Since $M^\circ = (F_m\sigma'_m)^\circ = F_m$, the modal operators in the two formulas are completely one-to-one corresponding. Let the terms of each corresponding modal operator be equal, which does not cause any contradictions in the $\mathbf{Var}$. Thus we can safety let $M = F_m\sigma'_m$ such that $F_k\sigma'_k$ is provable by MP.

如果没有建立方程的情况下，赋值是任意的，并不能使用MP，例如前提分别为$\Box_{x_1}F \to \Box_{x_1}F, \Box_{x_1}F \to \Box_{x_2}F$，遗忘后相同，但是变元约束不同。在任意赋值下是不同的，只有令对应的项相同得到一组变元方程，才能使方程约束下的赋值中可以使用MP。这并不是说证明依赖于赋值，而是应该看作一些变元符号变少了。造成这个问题的原因在于证明中并没有考虑后面的步骤，只能先用尽量多的变元，然后再在需要时建立等式，并没有让可用的变元减少。另一方面，相等也不会引起混乱，只要每次引入变元时都引入当前证明中没有用过的变元。

Theorem 3.7 Suppose that modal formula F is provable in K, then there is a modal formula J provable in Ω such that $J^\circ = F$.

Proof. Let $F_1, F_2, \cdots, F_n$ be a proof of F in K, we try to prove for each $k \leq n$ there is a modal formula J_k provable in Ω such that $J_k^\circ = F_k$.

we proof by induction on k. For $k = 1$, F_k is an instance of axiom in K. If F_k is a tautology, then by theorem 3.6 there is a substitution σ' such that $F_k\sigma'$ is a modal formula and is provable in Ω and $(F_k\sigma')^\circ = F_k$. If F_k is an instance of K axiom, suppose that $F_k = \Box(F \to M) \to (\Box F \to \Box M)$ and that there are s, l number $\Box$ in F, M. Let $i, j \geq s, l$ and $i \neq j$ then

$$\Delta = \Box_{x_i}(F(x_1, x_2, \cdots, x_s) \to M(x_1, x_2, \cdots, x_l)) \to (\Box_{x_j} F(x_1, x_2, \cdots, x_s) \to \Box_{x_i \cdot x_j} M(x_1, x_2, \cdots, x_s))$$

is an instance of $\mathrm{application}$ axiom and $\Delta^\circ = F_k$

For $k \geq 1$, By induction hypothesis, suppose that for each $m \leq k$ there is a modal formula J_m provable in Ω such that $J_m^\circ = F_m$.
Case:Modus Ponens Suppose that F_k is obtained from F_m and $F_n = F_m \to F_k$ by modus ponens. Then by induction hypothesis there are modal formula J_m, J_n provable in Ω such that $J_m^\circ = F_m, J_n^\circ = F_n$. Suppose that $J_n = M \to J_k$ and let $M = J_m$, thus J_k is provable by MP and $J_k^\circ = F_k$.
Case:Necessitation Suppose that F_k is obtained from F_m by necessitation. Then by induction hypothesis there is a modal formula J_m provable in Ω such that $J_m^\circ = F_m$. Let x_i be a variable term not used in the proof, then $\Box_{x_i} J_m$is a modal formula and is provable by $TNEC$ in Ω and $(\Box_{x_i} J_m)^\circ = F_k$.

3.4.3 From modal Ω to J

Defination. A realization function $(\cdot)^r : \Omega \to$ J defined by replacing $\Box_t F$ to $t : F$ for any term in Ω.

Defination. A box function $(\cdot)^\Box :$ J $\to \Omega$ defined by replacing all $t : F$ to $\Box_t F$ for any justification term t. The box function is the reverse of realization function.

Theorem. 3.8 Suppose that modal formula F is provable in Ω, then there is a justification formula J provable in J such that $J^\Box = F$.

Proof. Let $F_1, F_2, \cdots, F_n$ be a proof of F in Ω, we try to prove for each $k \leq n$ there is a justification formula J_k provable in J such that $J_k^\Box = F_k$.

we proof by induction on k. For $k = 1$, F_k is an instance of axiom in Ω, then F_k^r is also an instance of axiom in J and $(F_k^r)^\Box = F_k$. For $k \geq 1$, By induction hypothesis, suppose that for each $m \leq k$ there is a justification formula J_m provable in J such that $J_m^\Box = F_m$.

Case:Modus Ponens Suppose that F_k is obtained from F_m and $F_n = F_m \to F_k$ by modus ponens. Then by induction hypothesis there are justification formulas J_m, J_n provable in J such that $J_m^\Box = F_m, J_n^\Box = F_n$. Since $F_n^r = (F_m \to F_k)^r = F_m^r \to F_k^r$ and $J_m = (J_m^\Box)^r = F_m^r$,$J_n = (J_n^\Box)^r = F_n^r$, thus $J_n = J_m \to F_k^r$, thus F_k^r is provable by MP in J and $(F_k^r)^\Box = F_k$.

Case:Necessitation Suppose that F_k is obtained from F_m by $TNEC$. Then by induction hypothesis there is a justification formula J_m provable in J such that $J_m^\Box = F_m$. By the internalization theorem, there is a closed justification term t such that $t : J_m$ is provable in J. Since there term t is closed justification, there is no variable term in t. Suppose that $F_k = \Box_x F_m$, there is no constant in term x. Let $x = t$, thus $(t : J_m)^\Box = F_k$.

3.5 hybrid-$\mathbf{S4}^2$

证明语义：$\Box F$表达F是可证的，$\blacksquare F$表达存在F的证明。
认知语义：$\Box F$表达主体知道F，$\blacksquare F$表达主体有理有据的知道F。

Language:
$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid @_i F \mid \blacksquare F$

Axioms:

$$
\begin{array}{ll}
(TAUT) & \\
(K, dual, T, 4) & \\
(K_@, self-dual, introduction) & \\
(ref, sym, norm, agree) & \\
(K_\blacksquare, T_\blacksquare, 4_\blacksquare) & \\
(back) & \Diamond @_i F \to @_i F \\
(\text{connection}) & \blacksquare F \to \Box F \\
{}^+(\text{weak negative introspection}) & \neg\blacksquare F \to \Box\neg\blacksquare F \\
{}^*(\text{dual back}) & @_i F \to \Box @_i F \\
(\text{fact checker}) & P \to \Box P \\
(\text{close fact checker}) & @_i P \to @_i \blacksquare P \\
(\text{remote fact checker}) & @_i P \to \blacksquare @_i P \\
 & @_i \neg P \to \blacksquare @_i \neg P \\
(\text{remote positive justification checker}) & @_i \blacksquare F \to \blacksquare @_i \blacksquare F \\
(\text{remote negative justification checker}) & @_i \neg\blacksquare F \to \blacksquare @_i \neg\blacksquare F
\end{array}
$$

Rules:

$$
\begin{array}{ll}
(MP) & \text{Modus Ponens} \\
(NEC) & F/\Box F \\
(@NEC) & F/@F \\
(\blacksquare NEC) & F/\blacksquare F
\end{array}
$$

添加 $\Box F \to \blacksquare F$？简化为一个算子?

4. 结论

扩展

现在语言的语义只能表达公理系统没法表达模型，所以不能表达完备性等涉及到语义的性质。混合算子表达的是自身系统内的满足关系，而不是对象系统中的满足关系。现在在模型中加入一个框架类的集合$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$，其中的元素记为$\mathcal{F}_j$，一个模型是$\mathcal{M}=(\mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{E},\mathcal{V},\mathcal{F}_{\mathcal{I}},\mathcal{W})$，其中$\mathcal{W}$将每个系统映射到一个框架类上。

Language:
$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid @_i F \mid t : F \mid \mathcal{F}_j P$
$\mathcal{M} \vDash \mathcal{F}_i P \leftrightarrow @_i \Box P$ 表达在一个框架类上为真的都是可证的，这在有些系统中未必成立，所以这个公式能够区分完备的系统和不完备的系统。

量化证明结构 Language:
x 是项，表达证明结构
$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid @_i F \mid t : F \mid (\exists x) x : F$
$\mathcal{M} \vDash @_i \Box P \leftrightarrow @_i (\exists x) x : P$ 表达可证的都是有证明的，问题在于有什么样的证明，直接证明还是反证，要分析存在的这个证明，是什么结构。

量化公理系统
Language:
x 是专名，表达公理系统
$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid @_i F \mid t : F \mid \mathcal{F}_j P \mid (\exists x) @_x F$
$(\exists x)(\mathcal{F}_j P \leftrightarrow @_x \Box P)$ 表达在当前语义下，一个框架类是否可以公理化为完备的系统

附录

内部证明(close)

Example A.1

任给命题符号P和系统Γ，在系统$\mathbf{S4_f}$中证明，如果P在Γ中（P是Γ中的定理），那么对于任意公式F，在Γ上可证$F \to P$。语言不能表达这个命题，但是能够从语义上用模型上的满足关系来表达，即证明，如果$\mathcal{M}, \Gamma \vDash P$，那么$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \Box(F \to P)$，从而能够用公理系统给出证明。 **Proof.**

$(1)\ P \to \Box P \quad \text{fact checker}$

$(2)\ P \to (F \to P) \quad TAUT$

$(3)\ \Box(P \to (F \to P)) \quad 2, NEC$

$(4)\ \Box(P \to (F \to P)) \to (\Box P \to \Box(F \to P)) \quad K$

$(5)\ \Box P \to \Box(F \to P) \quad 3，4, MP$

$(6)\ (P \to \Box P) \to ((\Box P \to \Box(F \to P)) \to (P \to \Box(F \to P))) \quad TAUT$

$(7)\ (\Box P \to \Box(F \to P)) \to (P \to \Box(F \to P)) \quad 1, 6, MP$

$(8)\ P \to \Box(F \to P) \quad 5, 7, MP$

Example A.2

任给命题符号P和系统Γ，在系统$\text{hybrid-}\mathbf{S4_f}$中证明，如果$P$在$\Gamma$中（$P$是$\Gamma$中的定理），那么对于任意公式$F$，在$\Gamma$上可证$F \to P$。通过用混合算子表达满足关系，可以直接表达这一命题，并在公理系统上给出证明。Let $\mathcal{V}(i) = \Gamma$, We try to proof $@_i P \to @_i \Box(F \to P)$ is a theorem.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \cdots \\
&\ \vdots \qquad \vdots \\
&(8)\ P \to \Box(F \to P) \\
&(9)\ @_i(P \to \Box(F \to P)) \quad 8, @NEC \\
&(10)\ @_i(P \to \Box(F \to P)) \to (@_i P \to @_i \Box(F \to P)) \quad K_@ \\
&(11)\ @_i P \to @_i \Box(F \to P) \quad 9, 10, MP
\end{aligned}
$$

Example A.3

任给命题符号P和系统Γ，在系统$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$中证明，如果$P$在$\Gamma$中（$P$是$\Gamma$中的定理），那么对于任意公式$F$，在$\Gamma$上给出$F \rightarrow P$的证明。加入项后，能够将可证具体化为给出证明。Let $\mathcal{V}(i) = \Gamma$, We try to proof $@_i P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)$ is a theorem, where $c : (P \rightarrow (F \rightarrow P)), f_i : P$.

Proof.

$(1)\ @_i P \rightarrow @_i f_i : P \quad \text{close fact checker}$

$(2)\ P \rightarrow (F \rightarrow P) \quad TAUT$

$(3)\ c : (P \rightarrow (F \rightarrow P)) \quad 2, \text{Iterated axiom necessitation}$

$(4)\ c : (P \rightarrow (F \rightarrow P)) \rightarrow (f_i : P \rightarrow (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \quad application$

$(5)\ f_i : P \rightarrow (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P) \quad 3, 4, MP$

$(6)\ @_i (f_i : P \rightarrow (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \quad @NEC$

$(7)\ @_i (f_i : P \rightarrow (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \rightarrow (@_i f_i : P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \quad K_@$

$(8)\ @_i f_i : P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P) \quad 6, 7, MP$

$(9)\ (@_i P \rightarrow @_i f_i : P) \rightarrow$
$\quad ((@_i f_i : P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \rightarrow (@_i P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P))) \quad TAUT$

$(10)\ (@_i f_i : P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \rightarrow (@_i P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P)) \quad 1, 9, MP$

$(11)\ @_i P \rightarrow @_i (c \cdot f_i) : (F \rightarrow P) \quad 8, 10, MP$

Example A.4

Theorem. (Internalization) If F is a theorem of $\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$, then there is a closed justification term t such that $t : F$ is also a theorem. 根据内化定理，既然 Example A.3 中的结论是$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4_f}$上的定理，那么存在一个封闭项$t$使得$t : F$也是定理。我们现在就依据 Example A.3 中的证明给出一个这样的闭项。

Proof.

$$(1)\ d : (@_iP \to @_if_i : P) \quad \text{close fact checker, Iterated axiom necessitation}$$

$$(2)\ c : @_i(P \to (F \to P)) \quad TAUT, \text{Iterated remote axiom necessitation}$$

$$(3)\ @_ic : @_i(P \to (F \to P)) \quad 2, @NEC$$

$$(4)\ !_ic : @_ic : @_i(P \to (F \to P)) \quad 3, \text{remote positive justification checker}$$

$$(5)\ e : @_i\Big(c : (P \to (F \to P)) \to \big(f_i : P \to (c \cdot f_i) : (F \to P)\big)\Big)$$

$$application, \text{Iterated remote axiom necessitation}$$

$$(6)\ h : \bigg(@_i\Big(c : (P \to (F \to P)) \to \big(f_i : P \to (c \cdot f_i) : (F \to P)\big)\Big) \to$$

$$\Big(@_ic : (P \to (F \to P)) \to @_i\big(f_i : P \to (c \cdot f_i) : (F \to P)\big)\Big)\bigg)$$

$$K_@, \text{Iterated axiom necessitation}$$

$$(7)\ he!_ic : @_i\big(f_i : P \to (c \cdot f_i) : (F \to P)\big) \quad 6, 5, 4, application$$

$$(8)\ j : \Big(@_i\big(f_i : P \to (c \cdot f_i) : (F \to P)\big) \to \big(@_if_i : P \to @_i(c \cdot f_i) : (F \to P)\big)\Big)$$

$$K_@, \text{Iterated axiom necessitation}$$

$$(9)\ j(he!_ic) : \big(@_if_i : P \to @_i(c \cdot f_i) : (F \to P)\big) \quad 8, 7, application$$

$$(10)\ k : \Big((@_iP \to @_if_i : P) \to$$

$$\Big(\big(@_if_i : P \to @_i(c \cdot f_i) : (F \to P)\big) \to \big(@_iP \to @_i(c \cdot f_i) : (F \to P)\big)\Big)\Big)$$

$$TAUT, \text{Iterated axiom necessitation}$$

$$(11)\ kd\big(j(he!_ic)\big) : @_iP \to @_i(c \cdot f_i) : (F \to P) \quad 10, 1, 9, application$$

外部证明(remote)

Example B.1

任给命题符号P和系统Γ，在系统$\mathbf{S4}$中证明，如果P在Γ中（P是Γ中的定理），那么对于任意公式F，可证$F \to P$在Γ上为真。语言不能表达这个命题，但是从模型上的满足关系来看这是显然的，即证明，如果$\mathcal{M}, \Gamma \vDash P$，那么可证$\mathcal{M}, \Gamma \vDash F \to P$，根据满足关系的定义立刻得到可证。

Example B.2

任给命题符号P和系统Γ，在系统$\text{hybrid-}\mathbf{S4}$中证明，如果$P$在$\Gamma$中（$P$是$\Gamma$中的定理），那么对于任意公式$F$，可证$F \to P$在$\Gamma$上为真。通过用混合算子表达满足关系，可以直接表达这一命题，并在公理系统上给出证明。Let $\mathcal{V}(i) = \Gamma$, we try to proof $@_i P \to \Box @_i (F \to P)$ is a theorem.

Proof.

$$\begin{aligned}
&(1)\ P \to (F \to P) \quad TAUT \\
&(2)\ @_i P \to @_i (F \to P) \quad 1, @NEC, K_@ \\
&(3)\ @_i (F \to P) \to \Box @_i (F \to P) \quad dual - back \\
&(4)\ @_i P \to \Box @_i (F \to P) \quad 2, 3
\end{aligned}$$

Example B.3

任给命题符号P和系统Γ，在系统$\text{hybrid-}\mathbf{LPS4}$中证明，如果$P$在$\Gamma$中（$P$是$\Gamma$中的定理），那么对于任意公式$F$，可证$F \to P$在$\Gamma$上为真。Let $\mathcal{V}(i) = \Gamma$, we try to proof $@_i P \to dcf_i : @_i (F \to P)$ is a theorem where $d : (@_i (P \to (F \to P)) \to (@_i P \to @_i (F \to P))), c : @_i (P \to (F \to P)), f_i : @_i P$.

Proof.

(1) $@_i P \to f_i : @_i P \quad$ remote fact checker

(2) $c : @_i(P \to (F \to P)) \quad TAUT, @NEC,$ Iterated remote axiom necessitation

(3) $d : (@_i(P \to (F \to P)) \to (@_i P \to @_i(F \to P))) \quad K_@,$ Iterated axiom necessitat

(4) $dc : (@_i P \to @_i(F \to P)) \quad 2, 3, application$

(5) $dc : (@_i P \to @_i(F \to P)) \to$
$(f_i : @_i P \to dcf_i : @_i(F \to P)) \quad application$

(6) $f_i : @_i P \to dcf_i : @_i(F \to P) \quad 9, 10, MP$

(7) $(@_i P \to f_i : @_i P) \to$
$((f_i : @_i P \to dcf_i : @_i(F \to P)) \to (@_i P \to dcf_i : @_i(F \to P))) \quad TAUT$

(8) $@_i P \to dcf_i : @_i(F \to P) \quad 12, 1, 11, MP$

Example B.4

同样的，根据内化定理，依据 Example B.3 中的证明给出一个闭项。

Proof.

(1) $e : (@_i P \to f_i : @_i P) \quad$ remote fact checker, Iterated axiom necessitation

(2) $(!c) : c : @_i(P \to (F \to P))$
$TAUT,$ Iterated remote axiom necessitation, proof checker

(3) $(!d) : d : (@_i(P \to (F \to P)) \to (@_i P \to @_i(F \to P)))$
$K_@,$ Iterated axiom necessitation, proof checker

(4) $h : \Big(d : \big(@_i(P \to (F \to P)) \to (@_i P \to @_i(F \to P))\big) \to$
$\big(c : @_i(P \to (F \to P)) \to dc : (@_i P \to @_i(F \to P))\big)\Big)$
$application,$ Iterated axiom necessitation

(5) $h!d!c : dc : (@_i P \to @_i(F \to P)) \quad 4, 3, 2, application$

(6) $j : \big(dc : (@_i P \to @_i(F \to P)) \to (f_i : @_i P \to dcf_i : @_i(F \to P))\big)$
$application,$ Iterated axiom necessitation

(8) $k : \big((@_i P \to f_i : @_i P) \to$
$((f_i : @_i P \to dcf_i : @_i(F \to P)) \to (@_i P \to dcf_i : @_i(F \to P)))\big)$
$TAUT,$ Iterated axiom necessitation

(9) $ke\big(j(h!d!c)\big) : (@_i P \to dcf_i : @_i(F \to P)) \quad 12, 1, 6, 5, application$

具体公式

Example C.1

记命题逻辑公理系统$\mathbf{LP}$公式构成为

$$P ::= p \mid \hat{\neg} P \mid P \hat{\rightarrow} P$$

公理系统hybrid-$\mathbf{S4_f}$的公式构成为

$$F ::= P \mid \neg F \mid F \rightarrow F \mid \Box F$$

外化公理：$\hat{\neg} P \rightarrow \neg P, (P \hat{\rightarrow} Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

(1) 任给$\mathbf{LP}$语言中的公式P，在系统hybrid-$\mathbf{S4_f}$中证明，如果P在$\mathbf{LP}$中（P是$\mathbf{LP}$中的定理），那么对于任意$\mathbf{LP}$语言中的公式Q，在$\mathbf{LP}$中可证$Q \hat{\rightarrow} P$。这个陈述的正确性使用命题逻辑上的导出引理立即得到，即已知$\mathbf{LP} \vdash P, \mathbf{LP} \vdash P \hat{\rightarrow} (Q \hat{\rightarrow} P)$，由导出引理，得$\mathbf{LP} \vdash Q \hat{\rightarrow} P$。现在将用hybrid-$\mathbf{S4_f}$的公理系统证明这个陈述，Let $@_i$ be $@_{\mathbf{LP}}$, we try to proof $@_i P \rightarrow @_i \Box (Q \hat{\rightarrow} P)$ is a theorem.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ @_i\big(P \hat{\rightarrow} (Q \hat{\rightarrow} P)\big) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LP} \\
&(2)\ (P \hat{\rightarrow} (Q \hat{\rightarrow} P)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \hat{\rightarrow} P)) \quad (*) \\
&(3)\ @_i(P \hat{\rightarrow} (Q \hat{\rightarrow} P)) \rightarrow @_i(P \rightarrow (Q \hat{\rightarrow} P)) \quad 2, @NEC, K_@ \\
&(4)\ @_i P \rightarrow @_i(Q \hat{\rightarrow} P) \quad 1, 3, MP \\
&(5)\ (Q \hat{\rightarrow} P) \rightarrow \Box (Q \hat{\rightarrow} P) \quad \text{fact checker} \\
&(6)\ @_i(Q \hat{\rightarrow} P) \rightarrow @_i \Box (Q \hat{\rightarrow} P) \quad 5, @NEC, K_@ \\
&(7)\ @_i P \rightarrow @_i \Box (Q \hat{\rightarrow} P) \quad 4, 6
\end{aligned}
$$

(2) 任给$\mathbf{LP}$语言中的公式P，在系统hybrid-$\mathbf{S4_f}$中证明，如果P在$\mathbf{LP}$中（P是$\mathbf{LP}$中的定理），那么对于任意$\mathbf{LP}$语言中的公式Q，可证$Q \hat{\rightarrow} P$在$\mathbf{LP}$中。Let $@_i$ be $@_{\mathbf{LP}}$, we try to proof $@_i P \rightarrow \Box @_i (Q \hat{\rightarrow} P)$ is a theorem.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ @_i P \to \Box @_i P \quad \text{dual back}\\
&(2)\ @_i(P \hat{\to} (Q \hat{\to} P)) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LP}\\
&(3)\ (P \hat{\to} (Q \hat{\to} P)) \to (P \to (Q \hat{\to} P)) \quad (*)\\
&(4)\ @_i P \to @_i(Q \hat{\to} P) \quad 3, @NEC, K_@, 2, MP\\
&(5)\ \Box @_i P \to \Box @_i(Q \hat{\to} P) \quad 4, NEC, K\\
&(6)\ @_i P \to \Box @_i(Q \hat{\to} P) \quad 1, 5
\end{aligned}
$$

Example C.2

在hybrid-$\mathbf{S4_f}$上用公理系统证明$\mathbf{LP}$的导出引理的简化版。即证任给$\mathbf{LP}$语言中的公式P, Q，如果$P, P \hat{\to} Q$是$\mathbf{LP}$中的定理，那么Q也是$\mathbf{LP}$中的定理。注意到下面三种表达是等价的

$$
\begin{aligned}
&(1)\ @_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to \Box @_i Q)\\
&(2)\ @_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\\
&(3)\ @_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i \Box Q)
\end{aligned}
$$

Let $@_i$ be $@_{\mathbf{LP}}$, we try to proof $@_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)$ is a theorem.

Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ @_i\big(P \hat{\to} ((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LP}\\
&(2)\ \big(P \hat{\to} ((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \to \big(P \to ((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \quad (*)\\
&(3)\ @_i P \to @_i((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q) \quad 2, @NEC, K_@, 1, MP\\
&(4)\ ((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q) \to ((P \hat{\to} Q) \to Q) \quad (*)\\
&(5)\ @_i((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q) \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q) \quad 4, @NEC, K_@\\
&(6)\ @_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q) \quad 3, 5
\end{aligned}
$$

Example C.3

在证明之前先引入项上的函数来简化证明。设$F \to M$为公理，在hybrid-$\mathbf{LPS4_f}$中，我们有如下推理

$$
\begin{aligned}
&(1)\ c : @_i(F \to M) \quad \text{Iterated remote axiom necessitation}\\
&(2)\ d : \big(@_i(F \to M) \to (@_i F \to @_i M)\big) \quad K_@, \text{Iterated axiom necessitation}\\
&(3)\ d : \big(@_i(F \to M) \to (@_i F \to @_i M)\big) \to\\
&\qquad \big(c : @_i(F \to M) \to dc : (@_i F \to @_i M)\big) \quad application\\
&(4)\ c : @_i(F \to M) \to dc : (@_i F \to @_i M) \quad 3, 2, MP\\
&(5)\ dc : (@_i F \to @_i M) \quad 4, 1, MP
\end{aligned}
$$

根据推理规则，常项c, d的选择是任意的，特殊的引入函数$f_k(c) = cc$，将推理简化为

$$(1)\ c : @_i(F \to M)$$
$$(2)\ f_k(c) : (@_i F \to @_i M) \quad 1, f_k$$

像 Example A.4 and B.4 中一样，每次对公理实例引入常项证明时都使用了 $\text{Iterated axiom necessitation } \textit{and} \text{ Iterated remote axiom necessitation}$ 规则，为了简化书写在下述证明过程中省略了标注。

Let $@_i$ be $@_{\mathbf{LP}}$, we try to proof $h\big(f_k(d)c\big)f_k(e) : \big(@_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\big)$ is a theorem where c, d, e, h defined as follow.

Proof.

$(1)\ c : @_i\big(P \hat{\to}((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LP}$

$(2)\ d : @_i\Big(\big(P \hat{\to}((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \to \big(P \to ((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big)\Big) \quad (*)$

$(3)\ f_k(d)c : \big(@_i P \to @_i((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \quad 2, f_k, 1, MP$

$(4)\ e : @_i\big(((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q) \to ((P \hat{\to} Q) \to Q)\big) \quad (*)$

$(5)\ h : \Big(\big(@_i P \to @_i((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q)\big) \to \qquad TAUT$
$\quad \Big(\big(@_i((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q) \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\big) \to \big(@_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\big)\Big)\Big)$

$(6)\ h\big(f_k(d)c\big) : \Big(\big(@_i((P \hat{\to} Q) \hat{\to} Q) \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\big) \to$
$\quad \big(@_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\big)\Big) \quad 5, 3, application$

$(7)\ h\big(f_k(d)c\big)f_k(e) : \big(@_i P \to (@_i(P \hat{\to} Q) \to @_i Q)\big) \quad 6, 4, f_k, application$

Example D.1

记公理系统$\mathbf{LPGL}$的公式构成为

$$
\begin{aligned}
&u ::= c \mid x \mid (u \cdot u) \mid (u + u) \mid !u \\
&P ::= p \mid \neg P \mid P \to P \mid \Box P \mid u : P
\end{aligned}
$$

we try to proof $\mathbf{LPGL} \vdash u : \Box P \to P$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ u : \Box P \to \Box P \quad Factivity \\
&(2)\ \neg \Box P \to \neg u : \Box P \quad 1 \\
&(3)\ \neg u : \Box P \to \Box(\neg u : \Box P) \quad \text{weak negative introspection} \\
&(4)\ \Box(\neg u : \Box P) \to \Box(u : \Box P \to P) \quad TAUT, NEC, K \\
&(5)\ \neg \Box P \to \Box(u : \Box P \to P) \quad 2, 3, 4 \\
&(6)\ \Box P \to \Box(u : \Box P \to P) \quad TAUT, NEC, K \\
&(7)\ \Box(u : \Box P \to P) \quad 5, 6 \\
&(8)\ u : \Box P \to P \quad 7, \text{reflexivity rule}
\end{aligned}
$$

Example D.2

设下层逻辑$\mathbf{LPGL}$采用Example D.1的记号，记上层逻辑hybrid-$\mathbf{S4}$的公式构成为

$$F ::= i \mid P \mid \hat{\neg} F \mid F \hat{\to} F \mid \hat{\Box} F \mid @_i F$$

外化公理：$\neg P \to \hat{\neg} P, (P \to Q) \hat{\to} (P \hat{\to} Q)$ 用符号$(*)$在推理行结尾标记。
Let $@_i$ be $@_{\mathbf{LPGL}}$, we try to proof $@_i(u:PP) $ is a theorem.

Proof.

(1) $@_i(u:\Box P\rightarrow\Box P)\quad Factivity\ on\ \mathbf{LPGL}$

(2) $@_i((u:\Box P\rightarrow\Box P)\rightarrow(\neg\Box P\rightarrow\neg u:\Box P))\quad TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(3) $@_i(u:\Box P\rightarrow\Box P)\hat{\rightarrow}@_i(\neg\Box P\rightarrow\neg u:\Box P)\quad 2,(*),K_@$

(4) $@_i(\neg\Box P\rightarrow\neg u:\Box P)\quad 1,3,MP$

(5) $@_i(\neg u:\Box P\rightarrow\Box(\neg u:\Box P))\quad \text{weak negative introspection}\ on\ \mathbf{LPGL}$

(6) $@_i(\neg u:\Box P\rightarrow(u:\Box P\rightarrow P))\quad TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(7) $@_i(\Box(\neg u:\Box P)\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\quad 6,NEC,K\ on\ \mathbf{LPGL}$

(8) $@_i\Bigg((\neg\Box P\rightarrow\neg u:\Box P)\rightarrow\Bigg((\neg u:\Box P\rightarrow\Box(\neg u:\Box P))\rightarrow$

$\Big((\Box(\neg u:\Box P)\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\rightarrow(\neg\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\Big)\Bigg)\Bigg)$

$TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(9) $@_i(\neg\Box P\rightarrow\neg u:\Box P)\hat{\rightarrow}\Big(@_i(\neg u:\Box P\rightarrow\Box(\neg u:\Box P))\hat{\rightarrow}$

$\Big(@_i(\Box(\neg u:\Box P)\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\hat{\rightarrow}@_i(\neg\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\Big)\Big)$

$8,(*),K_@$

(10) $@_i(\neg\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\quad 9,4,7,8,MP$

(11) $@_i(P\rightarrow(u:\Box P\rightarrow P))\quad TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(12) $@_i(\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\quad 11,NEC,K\ on\ \mathbf{LPGL}$

(13) $@_i\Big((\neg\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\rightarrow$

$\big((\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P)\big)\Big) TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(14) $@_i(\neg\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\hat{\rightarrow}$

$\big(@_i(\Box P\rightarrow\Box(u:\Box P\rightarrow P))\hat{\rightarrow}@_i\Box(u:\Box P\rightarrow P)\big)\quad 13,(*),K_@$

(15) $@_i\Box(u:\Box P\rightarrow P)\quad 14,10,12,MP$

(16) $@_i(u:\Box P\rightarrow P)\quad \text{reflexivity rule}\ on\ \mathbf{LPGL}$

Example D.3

设上层逻辑hybrid-$\mathbf{S4}$采用Example D.2的记号，记下层逻辑$\mathbf{LPGL}$公式构成为：

$\hat{u}::=c\mid x\mid(u\cdot u)\mid(u+u)\mid !u$

$P::=p\mid\neg P\mid P\rightarrow P\mid\Box P\mid\hat{u}:P$

函数：（函数符号的使用方法见附录[Example C.3]）

$ f_{nec}(t)$ 对应$\mathbf{LPGL}$中的NEC规则；

$ f_{r}(t)$ 对应$\mathbf{LPGL}$中的reflexivity rule规则；

$ f_{k}(t)$ 对应$\mathbf{LPGL}$中的K规则；

(1) $c : (\hat{u} : \Box P \to \Box P) \quad Factivity$
(2) $d : ((\hat{u} : \Box P \to \Box P) \to (\neg \Box P \to \neg \hat{u} : \Box P)) \quad TAUT$
(3) $dc : (\neg \Box P \to \neg \hat{u} : \Box P) \quad 2, 1, Application$
(4) $h : (\neg \hat{u} : \Box P \to \Box(\neg \hat{u} : \Box P)) \quad$ weak negative introspection
(5) $j : (\neg \hat{u} : \Box P \to (\hat{u} : \Box P \to P)) \quad TAUT$
(6) $f_k f_{nec}(j) : (\Box(\neg \hat{u} : \Box P) \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P))$
(7) $m : \Big((\neg \Box P \to \neg \hat{u} : \Box P) \to \Big((\neg \hat{u} : \Box P \to \Box(\neg \hat{u} : \Box P)) \to$
$\big((\Box(\neg \hat{u} : \Box P) \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \to (\neg \Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P))\big)\Big)\Big)$
$TAUT$
(8) $m(dc)h(f_k f_{nec}(j)) : (\neg \Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \quad 7, 3, 4, 6, Application$
(9) $n : (P \to (\hat{u} : \Box P \to P)) \quad TAUT$
(10) $o : \Big((\neg \Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \to$
$\big((\Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)\big)\Big) \quad TAUT$
(11) $o\big(m(dc)h(f_k f_{nec}(j))\big)(f_k f_{nec}(n)) : \Box(\hat{u} : \Box P \to P) \quad 10, 8, 9, application$
(12) $f_r\Big(o\big(m(dc)h(f_k f_{nec}(j))\big)(f_k f_{nec}(n))\Big) : (\hat{u} : \Box P \to P) \quad 11,$ reflexivity rule

Example D.4

上层逻辑hybrid-$\mathbf{LPS4}$：
$t ::= c \mid x \mid t \cdot t \mid t + t \mid !t \mid !_i t \mid ?_i t \mid f_{nec}(t) \mid f_r(t)$
$F ::= i \mid P \mid \hat{\neg} F \mid F \hat{\to} F \mid \hat{\Box} F \mid @_i F \mid t : F$
并使用函数$ g_{nec}(t), g_{k}(t)$简化证明过程：
$ g_{k}(t)$ 对应hybrid-$\mathbf{LPS4}$中的$K_@$规则；

同时为了书写的紧凑，使用符号$\underline{t}$表示函数$g_k(t)$，符号$\tilde{t}$表示函数$f_k f_{nec}(t)$

Proof. Let $@_i$ be $@_{\mathbf{LPGL}}$

(1) $c : @_i(\hat{u} : \Box P \to \Box P) \quad Factivity\ on\ \mathbf{LPGL}$

(2) $d : @_i((\hat{u} : \Box P \to \Box P) \to (\neg\Box P \to \neg\hat{u} : \Box P)) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(3) $\underline{d}c : @_i(\neg\Box P \to \neg\hat{u} : \Box P) \quad 2, (*), g_k, 1, Application$

(4) $h : @_i(\neg\hat{u} : \Box P \to \Box(\neg\hat{u} : \Box P)) \quad$ weak negative introspection $on\ \mathbf{LPGL}$

(5) $j : @_i(\neg\hat{u} : \Box P \to (\hat{u} : \Box P \to P)) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(6) $\tilde{j} : @_i(\Box(\neg\hat{u} : \Box P) \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P))$

(7) $$m : @_i\Big((\neg\Box P \to \neg\hat{u} : \Box P) \to \Big((\neg\hat{u} : \Box P \to \Box(\neg\hat{u} : \Box P)) \to \Big((\Box(\neg\hat{u} : \Box P) \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \to (\neg\Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P))\Big)\Big)\Big)$$ $TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(8) $\underline{\underline{\underline{\underline{m}}\,\underline{d}c}\,h}\tilde{j} : @_i(\neg\Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P))$

$7, (*), g_k, 3, g_k, 4, g_k, 6, g_k, Application$

(9) $n : @_i(P \to (\hat{u} : \Box P \to P)) \quad TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(10) $$o : @_i\Big((\neg\Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \to \Big((\Box P \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)) \to \Box(\hat{u} : \Box P \to P)\Big)\Big)$$ $TAUT\ on\ \mathbf{LPGL}$

(11) $\underline{\underline{o}\,\underline{\underline{\underline{\underline{m}}\,\underline{d}c}\,h}\tilde{j}}\tilde{n} : @_i\Box(\hat{u} : \Box P \to P) \quad 10, (*), g_k, 8, g_k, 9, application$

(12) $f_r\left(\underline{\underline{o}\,\underline{\underline{\underline{\underline{m}}\,\underline{d}c}\,h}\tilde{j}}\tilde{n}\right) : @_i(\hat{u} : \Box P \to P) \quad 11,$ reflexivity rule

实现定理的例子

a proof of $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ in K

(0) $(p \wedge q) \rightarrow p \quad (\mathrm{TAUT})$
(1) $\Box((p \wedge q) \rightarrow p) \quad (\mathrm{NEC}, 0)$
(2) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \quad (\mathrm{Axiom, K})$
(3) $\Box((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \quad (\mathrm{S, s1, 2})$
(4) $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p \quad (\mathrm{MP}, 1, 3)$
(5) $(p \wedge q) \rightarrow q \quad (\mathrm{TAUT})$
(6) $\Box((p \wedge q) \rightarrow q) \quad (\mathrm{NEC}, 5)$
(7) $\Box((p \wedge q) \rightarrow q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \quad (\mathrm{S, s2, 2})$
(8) $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q \quad (\mathrm{MP}, 6, 7)$
(9) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))) \quad (\mathrm{TAUT})$
(10) $(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \rightarrow ((\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))) \quad (\mathrm{S, s3, 9})$
(11) $(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)) \quad (\mathrm{MP}, 4, 10)$
(12) $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q) \quad (\mathrm{MP}, 8, 11)$

a proof in Ω

(0) $((p \wedge q) \rightarrow p) \quad (TAUT)$
(1) $\Box_{x_1}((p \wedge q) \rightarrow p) \quad (T_Necessitation, 0)$
(2) $(\Box_{x_2}(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box_{x_3} p \rightarrow \Box_{(x_2 \cdot x_3)} q)) \quad (Axiom)$
(3) $(\Box_{x_4}((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (\Box_{x_5}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{(x_4 \cdot x_5)} p)) \quad (Substitution, s1, 2)$
(4) $(\Box_{x_5}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{(x_4 \cdot x_5)} p) \quad (ModusPonens, 1, 3)$
(5) $((p \wedge q) \rightarrow q) \quad (TAUT)$
(6) $\Box_{x_6}((p \wedge q) \rightarrow q) \quad (T_Necessitation, 5)$
(7) $(\Box_{x_7}((p \wedge q) \rightarrow q) \rightarrow (\Box_{x_8}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{(x_7 \cdot x_8)} q)) \quad (Substitution, s2, 2)$
(8) $(\Box_{x_8}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{(x_7 \cdot x_8)} q) \quad (ModusPonens, 6, 7)$
(9) $((p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)))) \quad (TAUT)$
(10) $((\Box_{x_9}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{x_{10}} p) \rightarrow ((\Box_{x_9}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{x_{11}} q) \rightarrow (\Box_{x_9}(p \wedge q) \rightarrow (\Box_{x_{10}} p \wedge \Box_{x_{11}} q)))) \quad (Subst$
(11) $((\Box_{x_9}(p \wedge q) \rightarrow \Box_{x_{11}} q) \rightarrow (\Box_{x_9}(p \wedge q) \rightarrow (\Box_{x_{10}} p \wedge \Box_{x_{11}} q))) \quad (ModusPonens, 4, 10)$
(12) $(\Box_{x_9}(p \wedge q) \rightarrow (\Box_{x_{10}} p \wedge \Box_{x_{11}} q)) \quad (ModusPonens, 8, 11)$

where

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_4 \\
x_6 &= x_7 \\
(x_4 \cdot x_5) &= x_{10} \\
x_5 &= x_9 \\
x_8 &= x_9 \\
(x_7 \cdot x_8) &= x_{11}
\end{aligned}
$$

so

$$\Box_{x_1}(p \wedge q) \to p$$
$$\Box_{x_6}(p \wedge q) \to q$$
$$\Box_{x_9}(p \wedge q) \to (\Box_{x_1 \cdot x_9} p \wedge \Box_{x_6 \cdot x_9} q)$$

参考文献

[M. Fitting, 2001] M. Fitting, Lars Thalmann, Andrei Voronkov, Term-Modal Logics, 2001

[S.N. Artemov, 2001] S.N. Artemov, EXPLICIT PROVABILITY AND CONSTRUCTIVE SEMANTICS, 2001

[S.N. Artemov, 2006] S.N. Artemov, Justified common knowledge, 2006

[M. Fitting, 2010] M. Fitting, Justification logics and hybrid logics, 2010

[M. Fitting, 2016] M. Fitting, Modal logics, justification logics, and realization, 2016

[Sergei N. Artemov and Lev Beklemishev, Provability Logic. in: Dov M. Gabbay, Franzw Guenthner_Handbook of philosophical logics, vol. 13,2nd ed,pp. 189-360.Springer, 2005]

[Sergei Artemov, Melvin Fitting, Justification Logic Reasoning with Reasons, Cambridge Tracts in Mathematics, 2019]

参考文献中的公理系统

The basic hybrid language $\mathcal{H}(@)$

Language: $F ::= i \mid p \mid \bot \mid \neg F \mid F \wedge F \mid \Box F \mid @_i F$ Axioms:

$$
\begin{array}{lr}
(TAUT) & \text{classical tautologies} \\
(K) & \Box(F \to M) \to (\Box F \to \Box M) \\
(dual) & \Diamond F \leftrightarrow \neg\Box\neg F \\
(K_@) & @_i(F \to M) \to (@_i F \to @_i M) \\
(self-dual) & @_i F \leftrightarrow \neg @_i \neg F \\
(introduction) & (i \wedge F) \to @_i F \\
(ref) & @_i i \\
(sym) & @_i j \leftrightarrow @_j i \\
(norm) & @_i j \wedge @_j F \to @_i F \\
(agree) & @_j @_i F \leftrightarrow @_i F \\
(back) & \Diamond @_i F \to @_i F \\
^*\text{(dual back)} & @_i F \to \Box @_i F
\end{array}
$$

Rules:

$$
\begin{array}{ll}
(MP) & \text{Modus Ponens} \\
(NEC) & F/\Box F \\
(@NEC) & F/@F
\end{array}
$$

$\mathcal{JH}(@)$ with $t : F$ and $@_i$

[Melvin Fitting, Justification logics and hybrid logics, 2010] [Rui Zhu, Xinwen Liu, The Minimal System of Justification Logic with names, 2015]
Language:
$t ::= c \mid x \mid t \cdot t \mid t + t \mid f_i \mid !_i t \mid ?_i t$

$F ::= i \mid P \mid \neg F \mid F \to F \mid @_i F \mid t : F$

Axioms:

$(TAUT)$

$(K_@, self-dual, introduction)$

$(ref, sym, norm, agree)$

$(\cdot/application)$ $\quad t : (F \to M) \to (u : F \to (t \cdot u) : M)$

$(+/weakening)$ $\quad t : F \to (t + u) : F$

$u : F \to (t + u) : F$

$^+$(Factivity) $\quad t : F \to F$

(remote fact checker) $\quad @_i P \to f_i : @_i P$

$@_i \neg P \to f_i : @_i \neg P$

(remote positive justification checker) $\quad @_i t : F \to (!_i t) : @_i t : F$

(remote negative justification checker) $\quad @_i \neg t : F \to (?_i \neg t) : @_i \neg t : F$

Rules:

(MP) Modus Ponens

$(@NEC)$ $\quad F/@F$

(Iterated axiom necessitation) If X is an axiom and $c_1, c_2, \cdots, c_n$ are constants, then $c_1 : c_2 : \cdots : c_n : X$

(Iterated remote axiom necessitation) Let i be any nominal. If X is an axiom and $c_1, c_2, \cdots, c_n$ are constants, then $c_1 : c_2 : \cdots : c_n : @_i X$

$\Box F$ and $t : F$

[Sergei Artemov, Elena Nogina, Logic of knowledge with justifications from the provability perspective., 2004]
[Sergei Artemov, Elena Nogina, Introducing Justification into Epistemic, 2005]
Language:
$t ::= c \mid x \mid (t \cdot t) \mid (t + t) \mid !t$
$F ::= i \mid p \mid \neg F \mid F \to F \mid \Box F \mid t : F$
$\mathbf{LPGL}$:
直觉：$\Box F$表达F可证，$t : F$表达t是F的证明
Axioms:

$$\begin{array}{ll}
(TAUT) & \\
(K, dual, 4/\text{implicit proof checker}) & \\
(\text{Lob schema}) & \Box(\Box F \to F) \to \Box F \\
(\cdot, +, \text{Factivity}) & \\
(\text{proof checker}) & t : F \to !t : t : F \\
(\text{connection}) & t : F \to \Box F \\
(\text{weak negative introspection}) & \neg t : F \to \Box \neg t : F \\
(\text{weak reflexivity}) & t : \Box F \to F
\end{array}$$

Rules: $(\text{MP, NEC, Iterated axiom necessitation})$
$\quad {}^*(\text{reflexivity rule}) \qquad \Box F / F$
Lob schema公理与T公理是不一致的，因为对于任意的F有证明序列$\Box F \to F, \Box(\Box F \to F), \Box(\Box F \to F) \to \Box F, \Box F, F$，但是$\mathbf{LPGL}$中可以具有$\text{reflexivity rule}$。

算数语义：

PA $\vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ \text{for some } n \in \omega \quad Prf(n, \ulcorner \varphi \urcorner)\text{holds.} \quad \ulcorner \varphi \urcorner \text{ is the Gödel number of } \varphi.$

存在可计算函数$\mathsf{m}(x, y), \mathsf{a}(x, y), \mathsf{c}(x)$使得

$$Prf(k,\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner)\wedge Prf(n,\ulcorner\varphi\urcorner)\to Prf(\mathsf{m}(k,n),\ulcorner\psi\urcorner)$$
$$Prf(k,\ulcorner\varphi\urcorner)\to Prf(\mathsf{a}(k,n),\ulcorner\varphi\urcorner)$$
$$Prf(n,\ulcorner\varphi\urcorner)\to Prf(\mathsf{a}(k,n),\ulcorner\varphi\urcorner)$$
$$Prf(k,\ulcorner\varphi\urcorner)\to Prf(\mathsf{c}(k),\ulcorner Prf(k,\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$$

翻译F^*

$$(t\cdot s)^*=\mathsf{m}(t^*,s^*),\ (t+s)^*=\mathsf{a}(t^*,s^*),\ (!t)^*=\mathsf{c}(t^*),$$
$$(t:F)^*=Prf(t^*,\ulcorner F^*\urcorner),\ (\Box F)^*=\exists xPrf(x,\ulcorner F^*\urcorner).$$

$\mathbf{LPS4}$ and $\mathbf{LPS4}^-$:
直觉：$\Box F$表达潜在的（大概的，直觉上）知道（相信）F，$t:F$表达因为证据（推理）t（实际的，具体过程的，有理有据的）知道（相信）F
Axioms:

$$\begin{aligned}
&(TAUT)\\
&(K, dual, T, 4/\text{positive introspection})\\
&(\cdot,+,\text{Factivity})\\
&(\text{explicit positive introspection}) && t:F\to !t:t:F\\
&(\text{connection}) && t:F\to\Box F\\
&^+(\text{weak negative introspection}) && \neg t:F\to\Box\neg t:F
\end{aligned}$$

Rules: $\text{MP, NEC, Iterated axiom necessitation}$
$\mathbf{LPS4}$不包含$\text{weak negative introspection}$公理，$\mathbf{LPS4}$加入证据可判定原则$\Box t:F\vee\Box\neg(t:F)$可以得到$\text{weak negative introspection}$公理，即构成$\mathbf{LPS4}^-$。

K_jF and $t:F$

[Sergei Artemov, Justified common knowledge, 2006]
Language:

$t::=c\mid x\mid t\cdot t\mid t+t$
$F::=P\mid\neg F\mid F\to F\mid K_jF\mid t:F$ $\mathbf{S4_nLP}$
Axioms: $TAUT, K_j, dual, T,$
$\cdot,+,\text{Factivity, explicit positive introspection, connection}$
Rules: $\text{MP, NEC, Iterated axiom necessitation}$