描述逻辑简介

1. 概念

论域必须是非空的，可以是无穷集合。
个体名称（individual name）：个体名，表示论域中的单个元素。
概念名称（concept name）：类名，外延是论域的有限子集，可以看作一元谓词。
作用名称（role name）：关系名，表示论域中的二元关系，可以看作二元谓词。
概念描述（concept description）：用概念名称和作用名称按照语法规则构成的句子，表示对一些实例的抽象描述/刻画。
概念定义（defined concept）：将概念描述定义为一个概念名称。
实例断言（instance assertion）：断言一个个体名称是一个概念名称的实例。
概念模型（concept patterns）：含有变量的概念描述。

2. 语法

定义 ($\mathcal{ALC}$语言)记$\mathbf{C}$为概念名称的集合，$\mathbf{R}$为作用名称的集合，$\mathbf{C}$与$\mathbf{R}$不相交。$\mathcal{ALC}$的概念描述集合递归定义如下：

- 所有的概念名称是$\mathcal{ALC}$概念描述。
- $\top$和$\bot$是$\mathcal{ALC}$概念描述。
- 如果C和D是$\mathcal{ALC}$概念描述，并且r是一个作用名称，那么下面的也是$\mathcal{ALC}$概念描述：
  $C \sqcap D$ (合取)，
  $C \sqcup D$ (析取)，
  $\neg C$ (非)，
  $\exists r.C$ (存在约束)，
  $\forall r.C$ (全称约束)。

3. 语义

定义 一个解释$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$是由一个非空集合论域$\Delta^{\mathcal{I}}$和一个映射$\cdot^{\mathcal{I}}$构成，其中映射定义如下：

- 每一个概念名称$A \in \mathbf{C}$都映射到一个集合$A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$。
- 每一个作用名称$r \in \mathbf{R}$都映射到一个二元关系$r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

$$
\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}}, \\
\bot^{\mathcal{I}} &= \emptyset, \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}, \\
(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}, \\
(\neg C)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}, \\
(\exists r.C)^{\mathcal{I}} &= \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} | \text{存在一个} e \in \Delta^{\mathcal{I}}\text{，使得}(d,e) \in r^{\mathcal{I}}\text{并且} e \in C^{\mathcal{I}}\}, \\
(\forall r.C)^{\mathcal{I}} &= \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} | \text{对于每一个} e \in \Delta^{\mathcal{I}}\text{，如果}(d,e) \in r^{\mathcal{I}}\text{那么} e \in C^{\mathcal{I}}\}\text{。}
\end{aligned}
$$

4. 模态

描述逻辑 $\mathcal{ALC}$ 是多模态逻辑 $\mathcal{K}_m$ 的变体是由 Schild 于 1991 发现的。概念名称看作命题，作用名称看作可通达关系。 $\mathcal{ALC}$ 的解释就是一个克里普克结构，其中 $\Delta^{\mathcal{I}}$ 是世界集，$\cdot^{\mathcal{I}}$ 既提供世界集上的可通达关系集又给出对命题的赋值。于是基于可通达关系 r ， 全称约束 $\forall r.C$ 成为 $\Box_r C$ ，存在约束 $\exists r.C$ 成为 $\Diamond_r C$ 。将 $\mathcal{ALC}$ 翻译到一阶逻辑（FOL）的通常方法也和模态逻辑的标准翻译一致。

5. $Tbox$

一个 $TBox$ $\mathcal{T}$ 是形如 $A \equiv C$ 的概念定义的有限集合，其中 A 是概念名称， C 是概念描述，并且同一个 A 在 $\mathcal{T}$ 中只出现一次。这时， A 称作 $\mathcal{T}$ 中的原始概念。如果概念名称 B 在 C 中出现，则称 A 直接使用 B ，将"使用"理解为"直接使用"的传递闭包。若 $\mathcal{T}$ 中存在一个原始概念使用了它本身，则称 $\mathcal{T}$ 含有循环（或一般的 $\mathcal{T}$），否则称为无环的 $\mathcal{T}$ 。

无环 $TBox$ 的模型：如果 $A^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}}$ 则解释 $\mathcal{I}$ 满足概念定义 $A \equiv C$ 。如果解释 $\mathcal{I}$ 满足 $TBox$ $\mathcal{T}$ 中的所有概念定义，则解释 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{T}$ 的模型。

一般的 $TBox$ 的模型：general concept inclusion axioms (GCIs)： GCI 是形如 $C \sqsubseteq D$ 的形式，其中 C, D 都是（复合）概念描述。如果 $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ 则解释 $\mathcal{I}$ 满足 $GCI\ \ C \sqsubseteq D$ 。如果解释 $\mathcal{I}$ 满足 $GCI\ \ A \sqsubseteq C,\ C \sqsubseteq A$ 则解释 $\mathcal{I}$ 满足概念定义 $A \equiv C$ 。有限个 GCI 构成的集合是 $\mathcal{T}$ 。如果解释 $\mathcal{I}$ 满足 $TBox$ $\mathcal{T}$ 中的所有概念定义，则解释 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{T}$ 的模型。

6. $Abox$

设有可数无穷个个体名称 a, b, c 等等， $ABox$ 是形如 $C(a),\ r(a,b)$ 的断言的有限集合，其中 C 是概念描述， r 是作用描述。对每个个体 a 解释为 $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ，通常遵守唯一名称假设（ $a \neq b\text{蕴含}a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$ ）。如果 $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ 则解释 $\mathcal{I}$ 满足概念断言 $C(a)$ 。如果 $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in r^{\mathcal{I}}$ 则解释 $\mathcal{I}$ 满足作用断言 $r(a,b)$ 。如果解释 $\mathcal{I}$ 满足 $ABox$ $\mathcal{A}$ 中的所有断言，则解释 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的模型。