En relación a los argumentos dados en la clase y soportados en el texto, veremos con detalle la forma como la ecuación del calor, bien conocida en Física Matemática, permite deducir una fórmula precisa para calcular el valor de una opción europea tipo call, cuyos parámetros son **E** para el precio strike y **T** para su vencimiento. El modelo matemático que hay que resolver, al cual hemos llegado con argumentos de cálculo estocástico, es el siguiente: encontrar la función *C(S,t)* que resuelve la ecuación diferencial parcial, también llamada de Black-Scholes, planteada como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

La cual está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$C(S,T) = \max(S-E,0)\,, \quad cuando\ t = T.$$

$$C(0,t) = 0, \quad cuando\ S = 0.$$

$$C(S,t) \to \mathrm{S}, \quad cuando\ S \to \infty.$$

Abordamos este problema con un cambio de variables que simplifica su presentación:

$$C = Ev(x,\tau), \qquad S = Ee^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\left(\sigma^2/_2\right)}$$

para luego suponer que $v(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$ donde α y β son parámetros escogidos para simplificar el problema como: $\alpha = \frac{1-k}{2}$, $\beta = \frac{-1}{4}(1+k)^2$ donde el parámetro k vincula con los parámetros financieros del caso como: $k = \frac{r}{\left(\sigma^2/_2\right)}$, donde r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad asociada con la ecuación diferencial estocástica (también llamada de Black-Scholes) que rige la evolución del valor del activo subyacente *S(t)* como un proceso estocástico.

Con estas transformaciones y suposiciones, es fácil ver que la función $u(x,\tau)$ tiene que resolver el siguiente problema de valor inicial basado en la ecuación del calor (o difusión):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad bajo\ la\ condición\ \ u(x,0) = g(x) = \begin{cases} e^{-(\alpha-1)x} - e^{-\alpha x} & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases},$$

$para\ x \in R\ y\ \tau \geq 0$. Con argumentos propios de la Física Matemática, debidamente expuestos en clase, encontramos que la solución de este problema de valor inicial, se puede dar con expresiones propias de la probabilidad en la siguiente forma:

$$u(x,\tau) = E_{N(x,\sqrt{2\tau})}(g) \quad cuando \quad \tau > 0$$

donde E se refiere al operador valor esperado y $N\left(x,\sqrt{2\tau}\right)$ se refiere a la distribución normal que tiene media x y varianza 2τ. Lo que mostraremos ahora es que $u(x,\tau)$ se puede calcular explícitamente utilizando de forma auxiliar la función de distribución de probabilidad acumulada F_Z y en los cálculos intermedios, la función de densidad de probabilidad f_Z de una variable aleatoria con distribución normal estándar a la cual llamaremos Z.

$u(x,\tau)=g(x)*\tilde{u}(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,\tilde{u}(s-x)\,ds=\int g(s)\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)^2}=\int g(s)\frac{1}{\sqrt{2\tau}}f_Z\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)$

Procediendo exclusivamente con herramientas de cálculo y de probabilidad, tenemos que:

$$u(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\frac{1}{\sqrt{2\tau}}f_Z\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)ds=\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} g\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)f_Z(y)dy$$

$-\infty$ pero g se anula

donde hemos utilizado la sustitución $y=\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$. Por la naturaleza de la función *g(x)* que da lugar a las condiciones iniciales en el problema físico, pero que proviene de las condiciones de frontera en el problema financiero, llegamos a:

$$u(x,\tau)=e^{-(\alpha-1)x}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-(\alpha-1)\sqrt{2\tau}y}f_Z(y)dy-e^{-\alpha x}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y}f_Z(y)dy.$$

En este punto observamos que las integrales que se restan tienen una forma muy parecida, análoga en realidad, por lo tanto, podemos estudiarlas las dos a la vez como la integral:

$$I(\alpha)=\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y}f_Z(y)dy=\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\frac{e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y}\times e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy$$

observando que la expresión aparece en términos de α y que luego en su primera aparición, el resultado es igual pero evaluado en $\alpha-1$. Aunque pueda parecer un poco complicada, esta integral se hace muy fácilmente si sumamos los exponentes de los exponenciales que se multiplican en su integrando, estos son:

$$\frac{-y^2}{2}-\alpha\sqrt{2\tau}y=\frac{-1}{2}\left\{\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2-2\tau\alpha^2\right\}=\frac{-\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}+\tau\alpha^2.$$

Así que la integral que buscamos es:

$$I(\alpha)=e^{\tau\alpha^2}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy=e^{\tau\alpha^2}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\infty} f_Z(w)dw=e^{\tau\alpha^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\alpha\sqrt{2\tau}\right)$$

donde hemos empleado la sustitución $w=y+\alpha\sqrt{2\tau}$ y la simetría en la función de distribución de probabilidad acumulada : $F_Z(-\zeta)=1-F_Z(\zeta)$. Ahora las integrales que parecían un poco largas y complejas se reducen a:

$$u(x,\tau)=e^{-(\alpha-1)x+\tau(\alpha-1)^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-e^{-\alpha x+\tau\alpha^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\alpha\sqrt{2\tau}\right).$$

Esta es esencialmente la solución para la función $u(x,\tau)$ que, acorde a la teoría, resuelve el problema de valor inicial, planteado con la ecuación del calor y la función *g(x)* propia del ámbito financiero. Pero la solución que nos interesa es poder calcular explícitamente los valores de la función de valoración *C(S,t)* de la opción call, en función de las variables de valor *S* y de tiempo *t* originales. Para ello tenemos que revertir las sustituciones y cambios de variable utilizados.

Tendremos en cuenta que:

$$C(S,t) = Ev(x(S),\tau(t)) = Ee^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$
$$= Ee^{\alpha x+\beta\tau}\left\{e^{-(\alpha-1)x+\tau(\alpha-1)^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-e^{-\alpha x+\tau\alpha^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}$$

$$= Ee^{\beta\tau}\left\{e^{x+\tau(\alpha-1)^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-e^{\tau\alpha^2}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}$$
$$= E\left\{e^{x+\tau\{\beta+(\alpha-1)^2\}}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-e^{\tau\{\beta+\alpha^2\}}F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}$$
$$= E\left\{e^{x}F_Z\left(\frac{x-(\alpha-1)(2\tau)}{\sqrt{2\tau}}\right)-e^{-k\tau}F_Z\left(\frac{x-\alpha(2\tau)}{\sqrt{2\tau}}\right)\right\}$$

donde hemos utilizado estratégicamente los parámetros α y β que cumplen con las condiciones:

$$\beta+(\alpha-1)^2=0, \qquad \beta+\alpha^2=-k.$$

Procedemos ahora a utilizar las sustituciones inversas, a las que empleamos originalmente:

$$x=\ln\left(\frac{S}{E}\right),\ \ \tau=\ \frac{\sigma^2}{2}(T-t), \sqrt{2\tau}=\sigma\sqrt{T-t}, -\alpha=\frac{k-1}{2}, \quad -\alpha+1=\frac{k+1}{2}$$

para llegar a la expresión:

$$C(S,t)=E\left\{e^{\ln\left(\frac{S}{E}\right)}F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\sigma^2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right.$$
$$\left.-\,e^{-k\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\sigma^2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}$$

y utilizando la definición del parámetro $k=\frac{r}{\left(\sigma^2/_2\right)}$, conseguimos:

$$C(S,t)=SF_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-Ee^{-r(T-t)}F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Esta es la clásica fórmula llamada de Black-Scholes empleada para valorar opciones europeas tipo call.