INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN GESTIÓN FINANCIERA.

Para preparar el parcial usted debe haber adelantado la siguiente lectura acorde al programa, además de haber cumplido un apropiado seguimiento a las clases y sus contenidos.

Mathematics for finance: an introduction to financial engineering, Capinski, Marek, New York, Springer, 2003.

Se recomienda ver en detalle los ejercicios propuestos en ella.

Para preparar el parcial considere las preguntas que se proponen a continuación.

1) Suponga que contamos con dos activos A y B cuyas rentabilidades promedio en un periodo de referencia son

$$\overline{r_A} = 6\% \quad y \quad \overline{r_B} = 9\%$$

respectivamente. Además, sus varianzas están dadas como:

$$\sigma^2{}_A = 0{,}25 \quad y \quad \sigma^2{}_B = 0{,}36\,.$$

Y sabemos que el coeficiente de correlación, entre las rentabilidades de ambos activos es:

$$\rho_{A,B} = -0{,}8.$$

Si utilizamos una variable t para describir la composición de un portafolio P como:

$$P = tA + (1-t)B.$$

a) Desarrolle con rigor, paso a paso, los argumentos estadísticos y algebraicos, para encontrar en términos de la variable t:
   - La rentabilidad del portafolio P.
   - La varianza de la rentabilidad del portafolio P.
   - La desviación estándar de la rentabilidad del portafolio P.
   - Haga un dibujo sobre el plano riesgo retorno, utilizando como medida de riesgo la desviación estándar, que ilustre la posición de cada uno de los portafolios que se definen por la variable t, cuando variamos la variable t en el intervalo [0,1].

b) Encuentre el valor de la variable t que define el portafolio con menor nivel de riesgo.
c) Para este portafolio con menor nivel de riesgo calcule su rentabilidad promedio.
d) Para este portafolio con menor nivel de riesgo calcule la varianza y la desviación estándar de su rentabilidad.
e) Grafique en el mismo plano riesgo retorno este portafolio con menor nivel de riesgo.

f) Repita los literales (a), (b), (c), (d) y (e) cuando el coeficiente de correlación entre las rentabilidades de los activos A y B es $\rho_{A,B} = -1$.
g) Repita los literales (a), (b), (c), (d) y (e) cuando el coeficiente de correlación entre las rentabilidades de los activos A y B es $\rho_{A,B} = +1$.
h) Repita los literales (a), (b), (c), (d) y (e) cuando el coeficiente de correlación entre las rentabilidades de los activos A y B es $\rho_{A,B} = 0{,}8$.

2) Suponga que contamos con dos activos A y B cuyas rentabilidades promedio en un periodo de referencia son $\overline{r_A}\ \ y\ \ \overline{r_B}$ respectivamente. Además, sus varianzas están dadas como: ${\sigma^2}_A\ \ y\ \ {\sigma^2}_B$, y la correlación entre sus rentabilidades se representa como: $\sigma_{A,B}$. Para un portafolio P definido a partir de los activos A y B como: $P = tA + (1-t)B$, realizando los pasos rigurosos de tipo algebraico y estadístico, encuentre en forma genérica:

a) La fórmula para su rentabilidad promedio $\overline{r_P}$.
b) La fórmula para la desviación estándar de su rentabilidad σ_P.
c) La fórmula para la varianza de su rentabilidad ${\sigma^2}_P$.
d) La expresión general para el valor t* que define el portafolio con el menor nivel de riesgo.
e) La expresión general del rendimiento del portafolio definido por t*.
f) La expresión general de la varianza del portafolio definido por t*.
g) La expresión general de la desviación estándar del portafolio definido por t*.
h) Muestre cada respuesta desde (a) hasta (g) en forma gráfica sobre un plano riesgo retorno.

3) Habitualmente se utilizan dos medidas de rendimiento cuando tenemos una serie de precios $P_0, P_1, \ldots, P_N$ de un activo A, estas son los rendimientos logarítmicos:

$$r_n = log\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)$$

y los rendimientos aritméticos:

$$r_n = \frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-1}}.$$

a) Escriba la fórmula de Taylor de 1er orden de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto *x=1*, para encontrar que las dos definiciones de rendimientos están conectadas por una aproximación lineal de primer orden sobre la función logaritmo.
b) En la definición de rendimientos logarítmicos, despeje el término P_n en función del precio anterior P_{n-1} para llegar a la expresión bien conocida del crecimiento exponencial del capital, donde el rendimiento r_n se configura como el exponente de la expresión exponencial.

4) Si tenemos una pareja de series de rendimientos de dos activos llamados A y B, sobre los mismos periodos de observación:

$$r_{A1}, r_{A2}, \dots, r_{AN}, \quad r_{B1}, r_{B2}, \dots, r_{BN},$$

encuentre las expresiones para:

a) Las rentabilidades promedio de los activos A y B, llamadas $\overline{r_A}$ y $\overline{r_B}$.
b) Las varianzas de las rentabilidades de los activos A y B, con sus desviaciones estándar llamadas σ_A y σ_B.
c) La covarianza entre las rentabilidades de A y B dada como: $\sigma_{A,B}$.
d) El coeficiente de correlación entre las rentabilidades $\rho_{A,B}$.
e) Dé una explicación breve de por qué se cumple siempre: $-1 \leq \rho_{A,B} \leq 1$.
f) Explique qué significa en términos de probabilidad y estadística que el coeficiente $\rho_{A,B}$ se acerque a los valores ± 1.
g) Qué podemos concluir cuando el coeficiente de correlación $\rho_{A,B}$ toma exactamente los valores 1 o -1.
h) Qué podemos concluir cuando el coeficiente de correlación $\rho_{A,B}$ se acerca o toma el valor 0.
i) Desde la perspectiva de gestionar el riesgo entre dos activos A y B, qué valores nos son más apropiados para el coeficiente de correlación $\rho_{A,B}$ tomados entre sus rentabilidades. Explique brevemente.

5) Bajo el supuesto que tenemos m activos para invertir, podemos utilizar un índice *k=1,…,m* para identificarlos. De esta manera damos por hecho que para cada activo k contamos con su serie histórica de rendimientos:

$$r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kN}$$

siempre bajo la misma serie de intervalos de tiempo, indexados como $j = 1, \dots, N$ donde el índice *j=1,…,N* nos permite identificar los periodos de tiempo.

a) Encuentre la expresión para la rentabilidad promedio de cada activo representada como $\overline{r_k}$.
b) Encuentre la expresión para la varianza de la rentabilidad de cada activo y su desviación estándar representada como σ_k.
c) Encuentre la expresión para la covarianza $\sigma_{k,l}$ entre dos activos identificados como k y como l, por los índices k y l respectivamente.
d) Escriba explícitamente la matriz de covarianzas S para las rentabilidades observadas de los m activos disponibles.

e) Explique por qué S es una matriz cuadrada y simétrica de dimensiones m x m.

f) Muestre que teóricamente S es siempre una matriz **semi-**definida positiva. Una forma simple de abordar este concepto es tomar la siguiente definición: una matriz cuadrada A con dimensiones n x n, es *semi-definida positiva* si y solo si cada forma cuadrática $x^t Ax$ da un valor ≥ 0 para cualquier vector $x \in R^n$. Con esta definición y los resultados anteriores se resuelve con herramientas de álgebra lineal.

g) Escriba la matriz de covarianzas S para el caso de tamaño 2 x 2 que usted ya resolvió en el ejercicio 2, donde se trata de una situación simple con solo 2 activos. Muestre en este caso que S es semi-definida positiva.

h) Bajo el supuesto que la matriz S es invertible, muestre que ella es (estrictamente) definida positiva. En este caso es útil tomar la definición que nos dice que una matriz cuadrada A de dimensiones n x n es semi-definida positiva si y solo si todos sus valores propios son reales no negativos, de igual forma es definida positiva si y solo si todos sus valores propios son reales positivos.

i) Verifique que en la diagonal de la matriz de covarianzas se encuentran en orden las varianzas de las rentabilidades de los m activos analizados.

6) Supongamos que S es una matriz de covarianzas, que además por la naturaleza de los datos que la originaron, podemos dar por hecho que es una matriz invertible. Consideremos también $\bar{r} \in R^m$ como el vector que agrupa en orden, bajo la indexación *k=1,2,…,m* los rendimientos esperados de cada uno de los activos disponibles. Recordemos que un vector $x \in R^m$ define un portafolio factible si la suma de sus componentes da uno, es decir si se cumple:

$$\hat{u} \cdot x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

donde utilizaremos el vector auxiliar $\hat{u} \in R^m$ cuyas entradas son todas unos. Bajo estas suposiciones muestre algebraicamente, paso a paso, los siguientes resultados:

a) Cuando $x \in R^m$ representa un portafolio factible, su rentabilidad se obtiene a través del producto punto como:

$$\bar{r}_x = \bar{r} \cdot x \ .$$

b) Cuando $x, y \in R^m$ representan dos portafolios factibles, la covarianza entre sus rentabilidades se obtiene a través de la forma cuadrática mixta:

$$cov(r_x, r_y) = \sigma_{x,y} = x^t S y.$$

Observe que x, y son dos portafolios completamente nuevos, construidos arbitrariamente sobre la familia de m activos disponibles.

c) Como consecuencia de (b) muestre que si $x \in R^m$ representa un portafolio factible, muestre que la covarianza entre su rentabilidad y la rentabilidad de un activo k entre la familia de m activos disponibles, se obtiene tomando $y = e^k$, lo cual nos da:

$$cov(r_x, r_k) = \sigma_{x,k} = x \cdot s^k$$

sonde $s^k \in R^m$ es la columna k-esima de la matriz de covarianzas. Puesto que S es simétrica s^k coincide también con la fila k-esima de S. Aquí usamos la notación estándar según la cual $e^1, e^2, \ldots, e^m$ es la base canónica ortonormal del espacio Euclideano R^m.

d) Explique la ecuación: $\left(e^k\right)^t S e^l = \sigma_{k,l}$ desde un punto de vista algebraico y desde un punto de vista financiero. Observe que la expresión de la izquierda es una forma cuadrática mixta.

e) Explique por qué las siguientes formas cuadráticas mixtas coinciden:

$$\hat{u}^t S^{-1} \bar{r} = \bar{r}^t S^{-1} \hat{u}.$$

f) Muestre en detalle que la forma cuadrática $\hat{u}^t S^{-1} \hat{u}$ es la suma de las componentes de la inversa de la matriz de covarianzas S.

7) Utilizando los supuestos del ejercicio (6), pero además incluyendo los parámetros de la teoría llamados A, B, C y D, definidos como los valores que resultan de las siguientes formas cuadráticas:

$$A = \hat{u}^t S^{-1} \hat{u}, \quad B = \hat{u}^t S^{-1} \bar{r}, \qquad C = \bar{r}^t S^{-1} \bar{r}, \quad D = AC - B^2.$$

Proceda a resolver los siguientes problemas de optimización, cuidando de interpretar cada uno apropiadamente en términos de tipo financiero, a la luz de la teoría estudiada.

a) Utilizando el método de Lagrange visto en clase, resuelva el problema de optimización:

$x \cdot \hat{u} = 1$

$$min_{x \in R^m} \ x^t S x \quad s.a. \quad \hat{u} \cdot x = 1.$$

Hess = S : defin. posit

$x_1 + \cdots + x_n = 1$

hyperplano en $\mathbb{R}^n$

Explicando en detalle por qué su función objetivo es convexa, cuál es el conjunto factible y por qué es convexo. Cuál es la solución óptima del problema y por qué es única. Cuál es el valor óptimo que se alcanza. Utilice el método del teorema de Lagrange visto en clase. Identifique la función objetivo, la solución óptima y el valor óptimo a la luz de los conceptos de la teoría de la cartera.

$\sum \lambda_i x^i = \sum \lambda_i = 1$

Prob. convex ⇒ las cond del Teo son nec y suf : da una sol única

b) Utilizando el método de Lagrange visto en clase, resuelva el problema de optimización:

$$min_{x \in R^m} \ x^t S x \quad s.a. \quad \hat{u} \cdot x = 1, \ \bar{r} \cdot x = \mu$$

donde μ es un parámetro de rentabilidad. Explicando en detalle por qué su función objetivo es convexa, cuál es el conjunto factible y por qué es convexo. Cuál es la solución óptima del problema y por qué es única. Cuál es el valor óptimo que se alcanza. Utilice el método del teorema de Lagrange visto en clase. Identifique la función objetivo, la solución óptima y el valor óptimo a la luz de los conceptos de la teoría de la cartera.

c) Fruto de un cuidadoso tratamiento del problema de optimización dado en (a), muestre con rigor que para cada valor del parámetro μ la solución óptima está dada como el vector m dimensional:

$$x^*(\mu) = \left(\frac{C - B\mu}{D}\right) S^{-1}\hat{u} + \left(\frac{A\mu - B}{D}\right) S^{-1}\bar{r}.$$

d) Fruto de un cuidadoso tratamiento del problema de optimización dado en (a), muestre con rigor que para cada valor del parámetro μ, el valor mínimo de la función objetivo está dada como la curva:

$$\sigma_*^2(\mu) = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{D}.$$

e) Encuentre la curvatura y el vértice de la parábola $\sigma_*^2(\mu)$ encontrada en (d) a la cual se le llama familiarmente la *frontera eficiente*.

f) Verifique que si μ^* es el valor donde la parábola $\sigma_*^2(\mu)$ encontrada en (d) alcanza su mínimo, cuando este valor se reemplaza en la ecuación para $x^*(\mu)$ encontrada en (c) obtenemos la misma solución del problema planteado en (a). Explique esta situación bajo los conceptos de la teoría de la cartera.

g) La frontera eficiente la podemos también expresar en términos de la desviación estándar de los portafolios óptimos:

$$\sigma_*(\mu) = \sqrt{\frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{D}}.$$

Encuentre las coordenadas del vértice de esta curva. El valor para μ^* debe coincidir con el de la parábola $\sigma_*^2(\mu)$.

h) Encuentre la ecuación de la asíntota superior a la gráfica de la función $\sigma_*(\mu)$. Exprese su respuesta en forma de una recta $\mu = L(\sigma)$, que depende de la variable σ. Muestre el valor en el cual la recta L corta al eje μ. Ilustre esta situación con un dibujo.

i) Repita la parte (h) pero ahora exprese su respuesta en forma de una recta $\sigma = \tilde{L}(\mu)$, que depende de la variable μ. Ilustre el caso con un dibujo.

8) Bajo las mismas suposiciones y variables propuestas en las preguntas (6) y (7) proceda con las siguientes preguntas.

a) Utilizando el método de Lagrange visto en clase, resuelva el problema de optimización:

$$\max_{x \in R^m} \frac{\bar{r} \cdot x - \tau}{\sqrt{x^t S x}} \quad s.a. \quad \hat{u} \cdot x = 1.$$

Note que este es un problema de optimización parametrizado por un número τ al cual identificamos con la tasa libre de riesgo de la economía. Explique la interpretación financiera de este problema de optimización. Defina la región factible, la función objetivo y estudie si es de naturaleza convexa o no. Esta última solicitud es más compleja que otras partes del cuestionario.

b) Explique en detalle por qué, desde la interpretación como modelos financieros, dentro de la teoría de cartera, el problema de optimización dado en (a) captura en su solución la misma familia de portafolios eficientes que conseguimos como soluciones en el problema de optimización propuesto en la pregunta 7 literal (c).

c) De forma consecuente con lo expuesto en (b), encuentre las funciones escalares

$$f = f(\tau),\ \ g = g(\tau)$$

que permiten expresar cada vector solución óptima del problema (a) en la forma vectorial

$$x^{PM}(\tau) = f(\tau)S^{-1}\hat{u} + g(\tau)S^{-1}\bar{r}.$$

Aquí la abreviación PM se refiere a "portafolio de mercado" que es la forma como se denominan a los portafolios eficientes, pero bajo la óptica del modelo de optimización dado en (a).

d) De igual manera, dado un valor para el parámetro τ que se refiere a la tasa libre de riesgo, encuentre expresiones concretas en función de τ para la rentabilidad, la desviación estándar y la varianza del portafolio de mercado que resuelve el problema (a), dado vectorialmente en (c). Es decir encuentre $\overline{r_{PM}}, \sigma_{PM}^2, \sigma_{PM}$ en términos de A, B y C como parámetros de la teoría y el parámetro τ como parámetro en el problema de optimización. El marcador PM se utiliza para enfatizar la definición de cada portafolio eficiente como un portafolio de mercado, pero cada uno de ellos está directamente vinculado con una única solución vectorial $x^*(\mu)$, solo hemos cambiado el marcador * de optimalidad del problema de optimización descrito en 7 (b) por el marcador PM de optimalidad del problema de optimización dado en 8 (a). Es interesante probar la ecuación que conecta cada parámetro μ con cada parámetro τ, cuando escribimos la ecuación vinculante $x^{PM}(\tau) = x^*(\mu)$.

e) Cuando seleccionamos un portafolio de mercado $x^{PM}(\tau)$ determinado por una tasa libre de riesgo τ, podemos utilizarlo como referente para definir el beta de cada portafolio factible $x \in R^m$. Muestre que a la luz de la teoría de la cartera se cumple la siguiente fórmula:

$$\frac{cov(r_x, r_{PM})}{var(r_{PM})} = \frac{\overline{r_x} - \tau}{\overline{r_{PM}} - \tau}.$$

Explique el sentido de estas expresiones.