Estimados estudiantes para el caso de la opción tipo barrera, en atención a varias de sus consultas hechas, les invito a ver este análisis el cual es análogo, similar, pero no igual al que hicimos para las opciones call europeas. Esencialmente para la opción call que estamos estudiando, hay dos valores de referencia y una condición de frontera que se comporta de la siguiente manera:

Ecuación de Black-Scholes

La ecuación diferencial parcial que rige la función *C=C(S,t)* como la función que permite valorar una opción call tipo barrera, sigue la ecuación análoga a la vista en clase y su deducción es igual:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0.$$

Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera que aplican son:

$$C(S,T)=\begin{cases} 0 \; si \; S<E_1 \\ S-E_1 \; si \; E_1\leq S\leq E_2\,, \\ 0 \; si \; S>E_2 \end{cases} \quad cuando \; t=T.$$

$$C(0,t)=0, \quad cuando \; S=0.$$

$$C(S,t)\to 0, \quad cuando \; S\to\infty.$$

Cambio de Variables

Para simplificar esta ecuación y llevarla a la forma de una ecuación diferencial parcial de la física matemática, especialmente la ecuación del calor (también llamada de difusión), usamos los siguientes cambios de variable que son reversibles entre sí:

$$C=E_1 v(x,\tau), \qquad S=E_1 e^x, \quad t=T-\frac{\tau}{\left(\sigma^2/_2\right)}$$

para luego suponer que $v(x,\tau)=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$ donde α y β son parámetros escogidos para simplificar el problema como: $\alpha=\frac{1-k}{2}$, $\beta=\frac{-1}{4}(1+k)^2$ donde el parámetro k vincula con los parámetros financieros del caso como: $k=\frac{r}{\left(\sigma^2/_2\right)}$, donde r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad asociada con la ecuación diferencial estocástica (también llamada de Black-Scholes) que rige la evolución del valor del activo subyacente *S(t)* como un proceso estocástico.

Condición de Frontera

Con estas transformaciones y suposiciones, es fácil ver que la función $u(x,\tau)$ tiene que resolver el siguiente problema de valor inicial basado en la ecuación del calor (o difusión):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad bajo\ la\ condición\ \ u(x,0)=g(x)=\begin{cases} 0 \quad , \ si\ x<0 \\ e^{-(\alpha-1)x}-e^{-\alpha x}, \ si\ 0<x<\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \\ 0 \quad , \quad si\ x>\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \end{cases}$$

$para\ x\in R\ y\ \tau\geq 0$. Con argumentos propios de la Física Matemática, debidamente expuestos en clase, encontramos que la solución de este problema de valor inicial, se puede dar con expresiones propias de la probabilidad en la siguiente forma:

$$u(x,\tau)=E_{N(x,\sqrt{2\tau})}(g) \quad cuando \quad \tau>0$$

donde E se refiere al operador valor esperado y $N\left(x,\sqrt{2\tau}\right)$ se refiere a la distribución normal que tiene media x y varianza 2τ.

Desarrollo

La clave aquí es seguir los pasos para la opción call estudiada, ver documento de trabajo compartido hace unos días, para desarrollar la integral:

$$\begin{aligned} E_{N(x,\sqrt{2\tau})}(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\frac{1}{\sqrt{2\tau}} f_Z\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right) ds \\ &= \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} \left(e^{-(\alpha-1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)}-e^{-\alpha\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)}\right) f_Z(y)dy \end{aligned}$$

a partir de aquí el estudiante debería seguir un desarrollo análogo a los que hicimos en clase y están expuestos en el documento de trabajo anexo, para alcanzar una respuesta en términos de la función de probabilidad acumulada de una normal estándar: F_Z. *Veremos esto en detalle más abajo.*

Consultas en Internet y Otra Bibliografía

Muchos estudiantes han acudido a consultas en internet y otras fuentes bibliográficas y encuentran una respuesta que combina senos y cosenos de una forma compleja. Se refiere a que podemos plantear un problema muy parecido, pero no igual, cuando pedimos resolver la ecuación del calor o difusión, dada como:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad bajo\ la\ condición\ \ u(x,0)=g(x)\ en\ un\ intervalo\ 0\leq x\leq L$$

donde L es una constante. Esta es la forma clásica de la ecuación del calor para una barra unidimensional que ocupa el intervalo [0,L], pero cuando uno observa la literatura en detalle se dará cuenta que aparecen condiciones impuestas (el efecto barrera) cuando la variable x llega o toma el valor L, para valores arbitrarios de la variable temporal τ. Entonces la forma clásica de solución es a través del método de separación de variables y la expansión en series de Fourier.

Nuestro problema, no impide que el valor del subyacente pase el límite de referencia E_2 para valores arbitrarios de la variable temporal t, antes de llegar al vencimiento, lo que pide es un comportamiento asintótico en forma de límite como: $C(S,t)\rightarrow 0, \quad cuando\ S\rightarrow\infty$. Es una diferencia muy sutil, pero que hace nuestro ejercicio diferente al de otras fuentes y nuestro método estudiado apropiado para este caso y no para otros de la literatura.

Para efectos del proyecto bienvenido si alguien quiere profundizar en estas lecturas o casos expuestos en otras fuentes.

Proceso de Integración

Para calcular la siguiente integral, la estrategia es igual a la estrategia seguida en el caso de la opción call europea vista en clase y analizada en la lectura. Primero observamos que se puede escribir como la resta de dos términos muy parecidos, pero no iguales:

$$\int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} \left(e^{-(\alpha-1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)} - e^{-\alpha\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)}\right) f_Z(y)dy$$

$$= e^{-(\alpha-1)x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-(\alpha-1)\left(\sqrt{2\tau}y\right)}\, f_Z(y)\, dy - e^{-\alpha x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)}\, f_Z(y)\, dy.$$

Nuevamente recalcamos que los términos que se restan son análogos, tienen la misma forma, pero no son iguales. Tomemos el segundo término que aparece restando en la sustracción:

$$e^{-\alpha x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy.$$

Aunque puede parecer una integral compleja se vuelve muy simple cuando agrupamos los exponentes de los exponenciales que forman el integrando:

$$-\frac{y^2}{2} - \alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right) = -\frac{1}{2}\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2 + \alpha^2\tau$$

y así toma la forma:

$$e^{-\alpha x} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha\left(\sqrt{2\tau}y\right)} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy = e^{-\alpha x+\alpha^2\tau} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}} \frac{e^{-\frac{\left(y+\alpha\sqrt{2\tau}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

donde identificamos el integrando de la integral a la derecha como la función de densidad de una distribución normal con media $-\alpha\sqrt{2\tau}$ y desviación estándar 1. Así que siguiendo el proceso de estandarización, tomamos el cambio de variable $w = y + \alpha\sqrt{2\tau}$ y llegamos a la expresión:

$$e^{-\alpha x+\alpha^2\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw = e^{-\alpha x+\alpha^2\tau} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}^{\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}} f_Z(w)dw$$

que puede simplificarse acudiendo a la función de distribución de probabilidad acumulada de una distribución de probabilidad normal estándar, llamada F_Z en la forma:

$$e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}.$$

Pero recordemos que este es el término que se sustrae en la expresión dada más arriba, para tener la expresión completa debemos observar que la primera integral de la resta es exactamente igual, salvo que en vez de calcularse en α se calcula en $\alpha-1$. Llegamos así a la expresión que determina la función $u(x,\tau)$:

$$u(x,\tau)=e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right\}$$
$$-e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}.$$

Tendremos en cuenta los cambios de variables dados más arriba, así que:

$$C(S,t)=E_1v(x(S),\tau(t))=E_1e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

$$=E_1e^{\alpha x+\beta\tau}\left\{e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right\}\right.$$
$$\left.-e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}\right\}$$

$$=E_1e^{x+\{(\alpha-1)^2+\beta\}\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right\}$$
$$-E_1e^{\{\alpha^2+\beta\}\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}.$$

De forma análoga al ejercicio de la opción call europea de la clase, usamos estratégicamente las relaciones impuestas en la definición de α y β, estas son: $\beta+(\alpha-1)^2=0,\ \ \beta+\alpha^2=-k$, así la expresión se convierte en:

$$
\begin{aligned}
&= E_1 e^{x}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right\}\\
&\quad - E_1 e^{-k\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_Z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Acudiendo a las variables originales:

$$
x=\ln\left(\frac{S}{E_1}\right),\ \ \tau=\ \frac{\sigma^2}{2}(T-t),\qquad \sqrt{2\tau}=\sigma\sqrt{T-t},\qquad \alpha=\frac{1-k}{2},\quad \alpha-1=-\left(\frac{k+1}{2}\right)
$$

la expresión se transforma en:

$$
\begin{aligned}
&S\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right)+(\alpha-1)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right)+(\alpha-1)\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}\\
&\quad - E_1 e^{-k\tau}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right)+\alpha\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right)+\alpha\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

la cual, nuevamente, se simplifica con las siguientes observaciones:

$$
(\alpha-1)\sigma^2=-\left(\frac{k+1}{2}\right)\sigma^2=-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right),\quad \alpha\sigma^2=\left(\frac{1-k}{2}\right)\sigma^2=\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)
$$

llevándonos a la expresión:

$$
\begin{aligned}
C(S,t) &= S\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}\\
&\quad - E_1 e^{-r(T-t)}\left\{F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_2}{S}\right)+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right.\\
&\quad \left. - F_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{E_1}{S}\right)+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$