PREGUNTAS DE PREPARACIÓN PARA EL 2DO PARCIAL

Lecturas de soporte:

- Capítulos 1 a 5 del texto: *The Mathematics of Financial Derivatives*, P. Wilmott, S. Howison & J. Dewynne, Cambridge, 1995 y explicaciones de la clase.

A-Algunos resultados de probabilidad y estadística que son la base de la argumentación.

1- Cuando $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes y cada una de las cuales tiene una distribución normal con parámetros $(\mu_1, \sigma_1), (\mu_2, \sigma_2), \dots, (\mu_n, \sigma_n)$ respectivamente acorde al índice de la numeración, demuestre con rigor que la combinación lineal

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

también sigue una distribución normal, para la cual sus parámetros son, como media:

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n$$

y como varianza:

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2\ .$$

2- Utilizando nuevamente argumentos de probabilidad, muestre con rigor que cuando $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes y cada una de las cuales tiene una distribución normal estándar, entonces la variable aleatoria:

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

sigue una distribución χ^2 chi-cuadrado con n grados de libertad.

3-Para la distribución normal con parámetros μ y σ encuentre:

a) Su valor esperado.
b) Su varianza.
c) Su desviación estándar.
d) Su función generadora de momentos.

4- Para la distribución χ^2 chi-cuadrado con n grados de libertad encuentre:

e) Su valor esperado.
f) Su varianza.
g) Su desviación estándar.
h) Su función generadora de momentos.
i) ¿Cómo se relaciona está distribución con la distribución Gama con parámetros α y β?

5- Para la distribución **log-normal** con parámetros μ y σ encuentre:

j) Su valor esperado.
k) Su varianza.
l) Su desviación estándar.
m) ¿Qué podemos decir acerca de su función generadora de momentos?

B-Fundamentos de Cálculo Estocástico

Una definición muy general de lo que significa un proceso de Wiener, consiste en proponer que se trata de una función $W(t)$ para la cual está completamente claro un valor inicial: $W(0) = W_0$, pero a partir de allí sus valores se desarrollan de forma aleatoria bajo los siguientes principios que tomamos como axiomas:

- W(t) es una variable aleatoria para cada valor $t > 0$.
- La diferencia $dW(t) = W(t + dt) - W(t)$ es un variable aleatoria con distribución normal con parámetros media cero y varianza dt, esto es válido para cualquier valor $t \geq 0$. Aquí tomamos como dt un incremento infinitesimal para la variable continua t.
- Diferentes incrementos son variables aleatorias independientes entre sí: $dW(t_1)$ con $dW(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$.

Podemos suponer que $W(t)$ con $0 \leq t \leq T$ es una función, bajo la premisa de que es una realización de la colección de todas las variables aleatorias $W(t)$ cuando $0 \leq t \leq T$. Puede verificarse con argumentos relativamente simples que $W(t)$ es un función continua, pero también puede verificarse, con argumentos relativamente simples, que $W(t)$ es una función que no admite derivación en ninguno de sus puntos $0 \leq t \leq T$, dicho de otra forma, no es derivable en ningún punto. Esta característica es mucho más especial y particular.

Podemos construir cálculos bastante objetivos tomando aproximaciones finitas de W(t) bajo la premisa que la diferencia $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$ es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros media cero y varianza Δt. ¿Pero qué tan acertada es esta argumentación?

Supongamos que $\Delta t = t_f - t_0$ es una variación finita, en la variable temporal, pero que suponemos es de escala pequeña. Supongamos que el intervalo temporal $[t_0, t_f]$ lo podemos subdividir en segmentos iguales de tiempo, pero con una escala considerablemente menor, por ejemplo: $\widetilde{\Delta t} = \frac{t_f - t_0}{N}$ donde N es un número finito, pero de gran escala. Visto de otra forma, Δt y $\widetilde{\Delta t}$ son cambios temporales finitos, de la variable temporal t, pero en escalas considerablemente diferentes: $\widetilde{\Delta t} \ll \Delta t$. Podemos subdividir el intervalo $[t_0, t_f]$ en N puntos igualmente espaciados como:

$$t_{i+1} = t_i + \widetilde{\Delta t}_i$$

donde $\widetilde{\Delta t}_i =: \widetilde{\Delta t}$ para cada $i = 0,1,2, \dots, N-1$. Nos preguntamos entonces cuál es el efecto en el proceso de Wiener $W(t)$, tomaremos las definiciones análogas

$$\Delta W = W(t_f) - W(t_0) = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta W(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} W(t_i + \widetilde{\Delta t}_i) - W(t_i)$$

pero por las hipótesis planteadas cada uno de los sumandos $W(t_i + \Delta W) - W(t_i)$ es una variable aleatoria, independiente de las demás de la suma, con distribución normal con media cero y varianza $\widetilde{\Delta t}_i$, por lo tanto ΔW sigue una distribución normal con media cero y varianza:

$$N\widetilde{\Delta t} = \Delta t.$$

Esto muestra que aunque no hemos dado un argumento formal para llevar las afirmaciones hechas acerca de un incremento infinitesimal $\boldsymbol{dt}$ a un incremento finito $\boldsymbol{\Delta t}$, sí disponemos de un argumento claro y preciso para llevar las conclusiones de una escala de tamaño a otra superior no importa el orden de magnitud que manejemos, esta es la libertad de usar un N arbitrariamente grande.

1-Usando los principios expuestos muestre que: ΔW_1 es independiente con ΔW_2 cuando están referidos a intervalos de tiempo que no traslapan: Δt_1 y Δt_2.

2-Usando los principios expuestos, muestre que podemos proponer una integración de un proceso de Wiener, sobre un intervalo de tiempo $[0, T]$ como:

$$W(T) - W_0 = \int_0^T dW = lim_{\widetilde{\Delta t}\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta W(t_i)$$

la cual es una variable aleatoria que corresponde a una distribución normal con media cero y varianza T. En general la varianza es la longitud temporal del intervalo de integración. Resaltamos aquí que la integral de un proceso de Wiener es una variable aleatoria debidamente especificada.

3-Muestre que la siguiente afirmación es válida usando argumentos de probabilidad:

$$lim_{\Delta t\to 0} \Delta W^2 = dt.$$

La idea es tomar un incremento finito ΔW del proceso de Wiener, que corresponde a una variable aleatoria normal con varianza Δt, luego su cuadrado ΔW^2 debe estar regido por una distribución relacionada con una chi-cuadrado, para la cual podemos encontrar su media y su dispersión, luego estudiamos el límite $\Delta t \to 0$. Hay que resaltar que a la derecha de la igualdad aparece una constante que no lleva elementos aleatorios.

Usaremos ahora el modelo de ecuación diferencial estocástica propuesto por Black-Scholes para el comportamiento del valor de un activo llamado S(t), esta es:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

donde μ y σ son parámetros llamados "drift" y volatilidad.

4-resuelva la ecuación diferencial ordinaria que resulta del modelo cuando $\sigma = 0$ utilizando una condición inicial genérica llamada S_0.

5-Sustente el lema de Ito, que en una de sus presentaciones se puede enunciar de la siguiente manera: si S(t) es el valor de un activo que sigue el modelo de ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes descrito arriba, entonces cuando estudiamos una función $f = f(S, t)$ que depende de S y del tiempo t, entonces esta nueva función f sigue el siguiente modelo de ecuación diferencial estocástica dado como:

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt.$$

6-Aplique el lema de Ito para encontrar el modelo de ecuación diferencial estocástica que rige a la función $f = \ln(S)$.

7-Usando el resultado encontrado en 6 y usando el método de integración estocástica para el proceso de Wiener W trabajado más arriba, encuentre:

a. La distribución de probabilidad para la variable aleatoria f(t) del proceso f(t).
b. La distribución de probabilidad para la variable aleatoria S(t) del proceso S(t).

Nota: al hacer el ejercicio 7 parece que los métodos de integración estocástica reproducen o recrean los métodos de integración de cálculo integral. Esto definitivamente no es cierto y justamente hemos aplicado en el ejercicio 7 a. los métodos de integración del proceso de Wiener porque este aparece completamente independiente (solo) en la expresión.

8-Si proponemos una función definida como $g(t) = f(t) - \Delta S(t)$ encuentre la forma funcional que debe tomar Δ para que la función g(t) no traiga explícitamente ningún término con la componente del proceso de Wiener. A esto se le llama remoción de la aleatoriedad.

9-Cuando *f(t)* es una función determinista, utilice los argumentos dados acerca de los procesos de Wiener para mostrar que la integral estocástica

$$I(T) = \int_0^T f(t)dW(t)$$

es una variable aleatoria con distribución normal con media cero y varianza

$$Var\big(I(T)\big) = \int_0^T [f(t)]^2 dt.$$

10-Encuentre las ecuaciones diferenciales estocásticas que rigen a los procesos

$$f(S) = S^k \quad y \quad f(S) = cS.$$

cuando S es el proceso descrito arriba por la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes.

C-Opciones Europeas y su Valoración

1-Supongamos que *C=C(S,t)* es el valor que debe tomar una opción europea tipo call cuando el subyacente toma un valor S y estamos en el tiempo t de avance del contrato respectivo. Deduzca en detalle la ecuación diferencial parcial que debe cumplir C, a la cual llamamos ecuación de Black-Scholes. Incluya los parámetros de precio strike E y vencimiento T de la opción.

2-Encuentre las condiciones de frontera para C, cuando *S=T*, cuando *S=0* y cuando S crece sustancialmente.

3-Repita 1 y 2 cuando se trata de una opción put, cuyo valor es *P=P(S,t).*

4-Realice las argumentaciones necesarias basadas en cambios de variables y sustituciones para convertir la ecuación diferencial parcial encontrada en 1 en una ecuación de difusión definida como:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde buscamos una función $u = u(x, \tau)$ que cumpla una condición inicial $u(x, 0) = g(x)$ las variables independientes son $x \in R,\ \tau \geq 0$.

5-Describa los elementos físicos del problema descrito en 4 cuando el modelo se utiliza para describir la distribución de temperatura en un cuerpo unidimensional. Preferiblemente tomado de un texto de física o similar.

6-Pruebe que la función

$$\tilde{u}(x,\tau) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{2\sqrt{\pi\tau}}$$

Llamada núcleo del calor (o función de Green) resuelve la ecuación diferencial dada en 4 a la cual llamamos ecuación del calor.

No, como func. → como distribución ; δ
- Formal, necesita func. test.

7-Calcule el límite $\lim_{\tau\to 0} \tilde{u}(x,\tau)$ con la función del punto 6.

8-Muestre que la ecuación diferencial en -4- es lineal e invariante frente a traslaciones en la variable x, es decir que una combinación lineal de soluciones da una solución y que si aplicamos una traslación a la variable x en una solución, la función resultante sigue siendo una solución.

9-Si la función $\tilde{u}(x,\tau)$ dada en -6- la consideramos como una familia de distribuciones de probabilidad normales en la variable x, parametrizadas por la variable τ, explique por qué tiene sentido desde el punto de vista de la probabilidad el siguiente límite:

$$\lim_{\tau\to 0} \tilde{u}(x,\tau) = \delta(x)$$

donde $\delta(x)$ es una distribución de probabilidad discreta llamada delta de Dirac, que corresponde a una distribución de probabilidad muy simple, que tiene rango formado por el solo punto cero cuya probabilidad (discreta) es 1. : "aproximacion de la unidad"

10-Para resolver el problema de valor inicial descrito en el punto -4- usamos una función definida como:

$$u(x,\tau) = \begin{cases} E_{N(x,2\tau)}(g) & si \quad \tau > 0 \\ \underbrace{E_{\{x\}_{p_x=1}}(g)}_{=g(x)} & si \quad \tau = 0 \end{cases}$$

Donde E se refiere al valor esperado, $N(x,2\tau)$ se refiere a la distribución de probabilidad normal con media en x y varianza 2τ, $\{x\}_{p_x=1}$ se refiere a la distribución de probabilidad discreta que incluye en su rango solamente al punto x cuya probabilidad es 1. A esta distribución la representamos como $\delta(s-x)$ donde δ es la delta de Dirac, pero con s la variable y -x es la traslación al punto x de referencia.

a. Desarrolle los cálculos para escribir la función $u(x,\tau)$ cuando $\tau > 0$.
b. Desarrolle los cálculos para escribir la función $u(x,\tau)$ cuando $\tau = 0$.
c. Muestre que se cumple la condición inicial $u(x,0) = g(x)$.
d. Muestre que la función calculada en a. cumple la ecuación del calor.

11-De forma pausada explique cuál es la función $g(x)$ que nos permite calcular la función C(S,t) que valora una opción call europea.

12-De forma pausada explique cuál es la función $g(x)$ que nos permite calcular la función P(S,t) que valora una opción put europea.

13-Utilizando el lenguaje de distribuciones exprese la función de *"densidad"* de probabilidad para una variable aleatoria X discreta que tiene:

a. Distribución uniforme sobre el rango de valores: 1 a 10.
b. Distribución Binomial non parámetro n.

Podemos asignar un precio a la opción a través de una fórmula concreta llamada fórmula de Black-Scholes de la siguiente manera:

$$C(S,t) = S \times F(d_1) - Ee^{-r(T-t)} \times F(d_2)$$

donde F es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución normal estándar y los parámetros d_1 y d_2 se calculan como:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

De igual forma si se trata de una opción put, podemos asignar un precio a la opción a través de una fórmula concreta llamada fórmula de Black-Scholes de la siguiente manera:

$$P(S,t) = -S \times F(-d_1) + Ee^{-r(T-t)} \times F(-d_2).$$

Aquí r es la tasa libre de riesgo y σ la volatilidad del modelo que rige el comportamiento del subyacente a través del proceso estocástico de Black – Scholes para la S.

14-Usando con rigor los elementos vistos en el curso, demuestre la fórmula de Black-Scholes para valorar una opción europea call, como: $C(S,t) = S \times F(d_1) - Ee^{-r(T-t)} \times F(d_2)$ paso a paso, explicando detalladamente su argumentación. ; Íbamos en $u(x,\tau)$ $\Rightarrow$ Sust. hacia atrás

15-Usando con rigor los elementos vistos en el curso, demuestre la fórmula de Black-Scholes para valorar una opción europea *put*, como:

$$P(S,t) = -S \times F(-d_1) + Ee^{-r(T-t)} \times F(-d_2)$$

+

paso a paso, explicando detalladamente su argumentación.

16- Explique en detalle, con los argumentos de la clase del curso, por qué bajo las hipótesis planteadas las funciones $C(S,t)$ y $P(S,t)$ cumplen la ecuación diferencial parcial llamada Black-Scholes: Se dedujeron estas ecuaciones con argumentos financi e matc en los ptos 1 y 3: tal vez falta ver que efect. sirven

$$(a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad - \quad (b) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

17- Supongamos que S_∞ es un valor de referencia, lo suficientemente alto para que podamos estar seguros que no se realizará, pero lo suficientemente bajo para poder hacer cálculos explícitos con él. Utilizando este valor de referencia encuentre las condiciones de frontera que deben cumplir las funciones C y P cuando: $a)\ cuando\ S = 0.$ $b)\ cuando\ S = S_\infty.$ $c)\ cuando\ t = T.$

18- Explique en detalle por qué el portafolio compuesto por una unidad del activo A cuyo valor es S(t), una unidad de una opción put: P y que incluye una posición en corto de una unidad de una opción call: C, es un portafolio sin riesgo. Aquí suponemos que las opciones put P y call C tienen los mismos valores para sus parámetros E y T, además de estar definidas sobre el mismo activo subyacente cuyo precio es S. Esta relación se llama paridad call-put y significa que las opciones put y call llevan a efectos inversos, o compensables entre sí.

paridad P - C