Proyecto 2 MMGF Pts 2 y 3

Sebastian Puerto

2) a)

De una opción se desea que permita tranquilidad al invertir en ella y el activo. Por lo tanto, se propone que la ecuación que rige el precio de una opción V, ya sea Call o Put, parta de la posibilidad de hacer un portafolio libre de riesgo con estos 2 activos:

$$\Pi = C - \Delta S$$

Al ser un portafolio sin riesgo, debe representar una inversión a la tasa libre de riesgo r:

$$d\Pi = r\Pi\, dt \qquad (1)$$

Usando el lema de Ito, $dX^2 = dt \Rightarrow \overset{2}{\dot{S}} = \sigma^2 S^2 dt$ (proc. de Wiener) si $\Pi = f - \Delta S$

$$\Rightarrow d\Pi = df - \Delta dS = \left[\sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt\right] - \Delta(\mu S dt + \sigma S dX)$$

$$= \underbrace{\left[\sigma S\left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta\right)\right] dX}_{\text{aleatorio}} + \underbrace{\left[\mu S\left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right] dt}_{\text{Determin.}}$$

$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ Constante en cada intervalo de tiempo dt

$$d\Pi = \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt \qquad (2)$$

Con $f = C(S,t)$ el valor de la opción call/put, o call ventana:

Uniendo (1) y (2): $r\Pi\, dt = r(C - (\partial_S C)S)\,dt = \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2}\partial_S^2 C + \partial_t C\right)dt$

$$\longleftrightarrow \partial_t C + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\partial_S^2 C + rS\,\partial_S C - rC = 0 \qquad (1)$$

b)

· Cuando $t=T$, el tiempo de maduración, el costo de la opción debe ser igual a la del beneficio que trae, o 0 si no hay beneficio. Éste beneficio es $S-E_1$, si $E_1 \leq S \leq E_2$.

Si el precio de compra acordado para el subyacente es E_1, este beneficio es:

$$* \; C(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S < E_1 \\ S-E_1 & \text{si } E_1 \leq S \leq E_2 \\ 0 & \text{si } E_2 < S \end{cases}$$

· Cuando $S=0$, no tiene sentido invertir dinero en un contrato para comprar algo sin valor:

$$* \; C(0,t) = 0.$$

· Cuando $S \to \infty$, S crecerá más allá de E_2, por lo cual no se podría ejercer la opción, así que su valor se acerca a 0

$$* \; \lim_{S\to\infty} C(S,t) = 0$$

c) Black-Scholes ⇒ Ec. Calor:

1er Cambio de variable:

$$\begin{cases} V \mapsto v & ; V = E v \leftrightarrow v = \frac{V}{E_1} \\ t \mapsto \tau & ; t = T - \tau/\frac{\sigma^2}{2} \leftrightarrow \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \\ S \mapsto x & ; x = \ln(S/E) \leftrightarrow S = E_1 e^x \end{cases}$$

Reescribimos la ecuación para:

$$v = v(x,\tau) \qquad = \frac{C(S,t)}{E}$$

=)

$$\cdot \; \frac{\partial C}{\partial t} = E_1 \frac{\partial v}{\partial t} = E_1 \frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = E_1 \frac{\partial v}{\partial t}\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\cdot \; \frac{\partial C}{\partial S} = E_1 \frac{\partial v}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{E_1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\cdot \; \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = E_1 \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right) = E_1 \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = E_1\left(-\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{E_1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \; \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

$$\partial t \quad 2 \quad \partial S^2 \quad \partial S$$

$$E_1\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\partial_\tau v + \frac{\sigma^2}{2}E_1\left(\partial_x^2 v - \partial_x v\right) + rE_1\partial_x v - rE_1 v = 0$$

$$\longleftrightarrow \frac{\sigma^2}{2}\partial_\tau v = \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 v + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\partial_x v - rv$$

$$\longleftrightarrow \partial_\tau v = \partial_x^2 v + \left(\frac{r}{\sigma^2/2} - 1\right)\partial_x v - \frac{r}{\sigma^2/2}v \,, \quad k = \frac{r}{\sigma^2/2}$$

$$\longleftrightarrow \partial_\tau v = \partial_x^2 v + (k-1)\partial_x v - kv$$: ec. lineal con coefs. constantes

2do Cambio de Variables

- Hacemos una sustitución más (para volver esta ecuación en la ecuación del calor):

+ $v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}\, u(x,\tau)$

$\Rightarrow$

- $\partial_\tau v = \beta e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x + \beta\tau}\partial_\tau u$
- $\partial_x v = \alpha e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x + \beta\tau}\partial_x u$
- $\partial_x^2 v = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta\tau}\partial_x u + e^{\alpha x + \beta\tau}\partial_x^2 u$

+Nota que el exponencial se cancelará:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

$$\longleftrightarrow \beta u + \partial_\tau u = \left(\alpha^2 u + 2\alpha\,\partial_x u + \partial_x^2 u\right) + (k-1)(\alpha u + \partial_x u) - ku$$

Con $\alpha = \frac{-1}{2}(k-1)$ para satisf. la ec. dif.

$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\tau u = \partial_x^2 u}$$: ecuación del calor

Condición de Frontera

La condición inicial

$$*\, C(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S < E_1 \\ S - E_1 & \text{si } E_1 \le S \le E_2 \\ 0 & \text{si } E < S \end{cases} \qquad v(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{S}{E_1} < 1 \leftrightarrow \ln\frac{S}{E_1} < 0 \\ \frac{S}{E_1} - 1 & \text{si } 1 \le \frac{S}{E_1} \le \frac{E_2}{E_1} \leftrightarrow 0 \le \ln\frac{S}{E_1} \le \ln\frac{E_2}{E_1} \\ 0 & \text{si } \dots \end{cases}$$

$\frac{S}{E_1}=e^x$ $\qquad \frac{E_2}{E_1}<\frac{S}{E_1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)<\ln\left(\frac{S}{E_1}\right)$

$$\longleftrightarrow u(x,0)=e^{-\alpha x}v(x,0)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ e^{-\alpha x}e^{x}-e^{-\alpha x} & \text{si } 0\le x\le \ln\frac{E_2}{E_1}\\ 0 & \text{si } \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)<x\end{cases}$$

$$\underset{g(x)}{\overset{!!}{}}$$

Sol. General

desplaza media de 0 a x

$$u(x,\tau):=E_{\mathcal{N}(x,2\tau)}[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(s)\tilde{u}(s-x)\,ds=(g*\tilde{u})(x;\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha s}g(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\tau}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)^2}ds=\int_0^{\ln\frac{E_2}{E_1}}\left[e^{-(\alpha-1)s}-e^{-\alpha s}\right]\frac{1}{\sqrt{2\tau}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)^2}\,?=\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}}\left(e^{-(\alpha-1)s}-e^{-\alpha s}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$z:=\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$, $s=\sqrt{2\tau}z+x$; $s\ge 0 \Leftrightarrow z\ge\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$

; $s\to\pm\infty \Leftrightarrow z\to\pm\infty$

; $s=\ln\frac{E_2}{E_1}\Leftrightarrow z=\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}$

$$u(x,\tau)=\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}}\left(e^{-(\alpha-1)(\sqrt{2\tau}z+x)}-e^{-\alpha(\sqrt{2\tau}z+x)}\right)\underbrace{f_z(z)}_{\text{pdf normal est.}}dz=$$

$$=e^{-(\alpha-1)x}I(\alpha-1)-e^{-\alpha x}I(\alpha)$$

con

$$I(\alpha)=\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}}e^{-\alpha\sqrt{2\tau}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}[(z+\alpha\sqrt{2\tau})^2-2\tau\alpha^2]}dz=e^{\tau\alpha^2}\int_{-\frac{x}{2\tau}}^{\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+\alpha\sqrt{2\tau})^2}{2}}dz=e^{\tau\alpha^2}\int_{-\frac{x}{2\tau}-(-\alpha\sqrt{2\tau})}^{\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_z(z)\,dz$$

normal est. con media desplaz. $a-\alpha\sqrt{2\tau}$

pdf de normal están.

$$=e^{\alpha^2\tau}\left[F_z\left(\frac{\ln\frac{E_2}{E_1}-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F_z\left(\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right]$$

Ahora sí:

$$C(S,t)=E_1v(x,\tau)=Ee^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)=Ee^{\alpha x+\beta\tau}\left[e^{-(\alpha-1)x}I(\alpha-1)-e^{-\alpha x}I(\alpha)\right]$$

$$=\left[Ee^{x}I(\alpha-1)-EI(\alpha)\right]e^{\beta\tau}$$

Como $\cdot\ \beta+(\alpha-1)^2=-\frac{1}{4}(1+K)^2+\left(\frac{1-K-2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[-(1+K)^2+[-(K+1)]^2\right]=0$

$\cdot\ \beta+\alpha^2=-\frac{1}{4}(1+K)^2+\frac{1}{4}(1-K)^2=\frac{1}{4}(-1-2K-K^2+1-2K+K^2)=-\frac{4K}{K}=-K$

Concluimos que

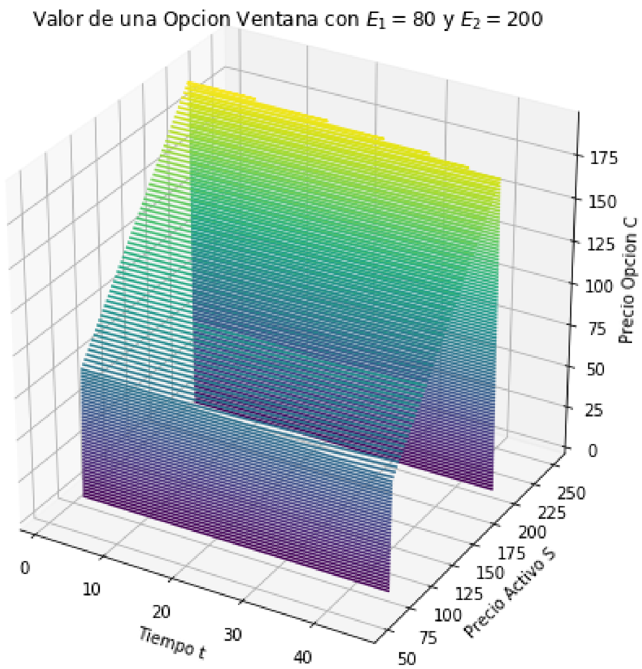
$$C(S,t)=S\left\{F_z[d_1(E_2)]-F_z[d_1(E_1)]\right\}$$

$$-Ee^{-r(T-t)}\{F_z[d_1(E_2)]-F_z[d_1(E_1)]\}$$

$-t_1 e \quad) + z(d_2(t_2)) \quad + z(d_2(t_1))$

Con $d_i(E) = \dfrac{\ln \frac{E}{S} - (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, con $+$ corresp. a $i=1$
& $-$ a $i=2$

C)



3.

Una opción en general ofrece un seguro ante posibles fluctuaciones de un activo subyacente, y en el caso de las opciones ventanas esto es así tanto para el creador del contrato como del tenedor de la opción. La opciones permiten reducir el riesgo de las grandes fluctuaciones del precio del activo subyacente al permitir la no compra de este si el precio baja por debajo de lo esperado , y solo su compra (en el caso de una opción call) si el precio es mayor del precio esperado. Sin embargo, esta naturaleza de forzar la venta del activo por parte de quien firma el contrato de la opción call lo expone a grandes pérdidas si el precio del subyacente crece mucho más de lo esperable, de modo que la opción ventana o barrera permite esta noción de tranquilidad a ambas partes sin arriesgar a grandes pérdidas a ninguna de ellas.

La seguridad que ofrece una opción call ventana se ve reflejada en la posibilidad de crear portafolios con el activo subyacente S y escribir opciones call (ventana), lo cual en las ecuaciones se representa como tener una posición en corto para la opción. Vemos que estas dos inversiones se hacen con esperanzas opuestas: la inversión positiva en el activo se hace esperando que este valor suba de precio, mientras que la inversión negativa en la opción call se hace esperando que el valor del activo subyacente baje de precio (pues es aquí donde quien escribe la opción Call se beneficia, en oposición a quien adquiere este opción). Son estas esperanzas opuestas y relación positiva (que se convierte en negativa por la posición en corto) que hay entre estos activos lo que permite que el riesgo disminuya manteniendo rendimientos incluso mejores que los de cualquiera de los activos.

Además, la opción call ventana tiene la ventaja adicional en el tiempo de maduración de que, en caso de que el precio del activo suba más de los esperado, quien compra la opción call no puede ahora ejercer su opción de compra y yo, quien la escribe, puedo disponer en su totalidad de esta ganancia, además del precio inicial del contrato de la opción que no se ejerció.

/