INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN GESTIÓN FINANCIERA: PROYECTO 1

1. Leer la lectura asignada: *Mercado de capitales y portafolios de inversión, J.A. Atehortúa Granados, Ediciones de la U, Medellín, 2012. Capítulos 1 a 4. Páginas 13 a 182.*
2. Escoja una familia de 6 a 9 activos para los cuales tenga información de sus precios en al menos 24 periodos iguales de tiempo como candidatos a conformar su portafolio. Explique la naturaleza de los activos escogidos a la luz de la lectura 1. Esto significa que usted debe escoger datos de Colombia esencialmente.
3. Utilizando las series de precios históricos de los activos escogidos, calcule paso a paso explicando las operaciones utilizadas: la matriz de covarianzas entre las rentabilidades de los activos escogidos y el vector de rendimientos promedio de los activos escogidos. Verifique que la matriz de covarianzas es una matriz semidefinida positiva (lo cual es un teorema) y verifique que es invertible, lo cual es deseable desde un punto de vista práctico.
4. Con base en la matriz de covarianzas y el vector de rendimientos promedio, calcule los parámetros de la teoría de la cartera a los que hemos llamado A, B y C exponiendo en su trabajo las fórmulas de las formas cuadráticas que se requieren: $A = \hat{u}^t S^{-1} \hat{u}, \quad B = \hat{u}^t S^{-1} \bar{r},\ C = \bar{r}^t S^{-1} \bar{r}$.
5. Utilizando A, B y C y un nivel de rentabilidad μ usado como parámetro escriba la ecuación general de los portafolios óptimos que usted puede formar con los activos escogidos a través del criterio de mínima varianza propio de la teoría de la cartera de Markowitz: $x^*(\mu) = \left(\frac{C-B\mu}{D}\right) S^{-1}\hat{u} + \left(\frac{A\mu-B}{D}\right) S^{-1}\bar{r}$. Escriba esta ecuación para su caso tomando 4 valores diferentes para el parámetro μ. Comente si obtiene o no posiciones en corto.
6. En un plano riesgo retorno dibuje la gráfica de la frontera eficiente del conjunto de activos que usted escogió para invertir en el punto 2. Sobre la misma gráfica dibuje la posición de cada uno de los activos que usted escogió para invertir en el punto 2 y la posición de cada uno de los 4 portafolios óptimos que usted escogió en el punto 5. Utilice la varianza como medida de riesgo en el eje de riesgo.
7. Repita la gráfica 6 pero ahora utilice la desviación estándar como medida de riesgo en el eje de riesgo. Plasme en esta gráfica cada uno de los 4 portafolios óptimos escogidos en el punto 5 y para cada uno de ellos trace la línea de mercado de capital, ya que cada uno de ellos es un portafolio eficiente y por lo tanto un portafolio de mercado. Para cada línea de mercado de capital encuentre el corte con el eje de rentabilidad que corresponde a la tasa libre de riesgo compatible con cada uno de los portafolios de mercado así escogidos. Haga varias gráficas para no recargar la figura con muchos datos.
8. Dibuje nuevamente la frontera eficiente dada en términos de la desviación estándar, como se indica en la pregunta 7, pero ahora dibuje sobre ella la línea que corresponde a su asíntota superior. Indique claramente el corte de ella (la asíntota) con el eje de rendimiento, su valor y su interpretación como una tasa libre de riesgo máxima teórica.
9. Justificando y escribiendo paso a paso las fórmulas empleadas, encuentre el portafolio de menor riesgo que puede componer entre los activos que usted seleccionó en el punto 2. Exponga la composición del portafolio, la rentabilidad obtenida y el nivel de riesgo tanto en varianza como en desviación estándar.

caso general

10. Para cada uno de los 4 portafolios óptimos escogidos en el punto 5 haga una tabla que contenga su rentabilidad promedio, su varianza, su desviación estándar, la tasa libre de riesgo compatible con cada uno de ellos. Encuentre las funciones que le permiten hallar $(\sigma_{PM}(\mu), \bar{r}_{PM}(\mu))$ en términos del parámetro de rentabilidad y verifique que los valores de la tabla cumplen la fórmula. Encuentre las funciones que le permiten hallar $(\sigma_{PM}(\tau), \bar{r}_{PM}(\tau))$ en términos de la tasa libre de riesgo y verifique que los valores de la tabla cumplen la fórmula. Grafique la curva con ambas fórmulas la cual debería ser (gráficamente) la misma e interpolar los puntos de su tabla. Encuentre la fórmula que permite calcular la tasa libre de riesgo a partir de las coordenadas del portafolio de mercado $(\sigma_{PM}, \bar{r}_{PM})$ la cual implica a los parámetros A, B y C ya calculados. Verifique que los datos de su tabla cumplen con esta fórmula.
11. Escoja uno solo entre los portafolios óptimos posibles y encuentre su tasa libre de riesgo apropiada, para cada uno de los activos que usted escogió en el punto 2 calcule el índice beta siguiendo las dos fórmulas teóricas para ello: $\frac{cov(r_x, r_{PM})}{var(r_{PM})}$ y $\frac{\bar{r}_x - \tau}{\bar{r}_{PM} - \tau}$.

Entregar en forma escrita acompañada de los soportes de cálculo el día martes 25 de septiembre en la hora de la clase.

$$\frac{x^T S x^*}{x^{*T} S x^*} = \frac{\gamma(\quad)}{\gamma(\quad)} = \frac{x^T(\bar{r} - \tau\hat{u})}{x^*(r - \tau u)} = \frac{\bar{r}_x - \tau}{\bar{r}_{PM} - \tau}$$