

Sebastian Puente

De una opción se desea que permita tranquilidad al invertir en ella y el activo. Por lo tanto, se propone que la ecuación que rige el precio de una opción V , ya sea Call o Put, parte de la posibilidad de hacer un portafolio libre de riesgo con estos 2 activos:

$$\Pi = C - \Delta S$$

Al ser un portafolio sin riesgo, debe representar una inversión a la tasa libre de riesgo r :

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (1)$$

Usando el lema de Itô, $dX^2 = dt \Rightarrow \overset{\text{proc. de Wiener}}{S^2 = \sigma^2 S^2 dt}$ si $\Pi = f - \Delta S$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\Pi &= df - \Delta dS = \left[\sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt \right] - \Delta (\mu S dt + \sigma S dX) \\ &= \underbrace{\left[\sigma S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) \right]}_{\text{aleatorio}} dX + \underbrace{\left[\mu S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right]}_{\text{Determin.}} dt \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

Constante en cada intervalo de tiempo dt

$$d\Pi = \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \quad (2)$$

Con $f = C(S, t)$ el valor de la opción call/put, o call ventana:

Uniendo (1) y (2): $r\Pi dt = r(C - \Delta S) dt = \left(\frac{\sigma^2 S^2}{2} \Delta^2 C + \Delta C_t \right) dt$

$$\Leftrightarrow \Delta C_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \Delta^2 C + rS \Delta C - rC = 0 \quad (1)$$

b) Cuando $t=T$, el tiempo de maduración, el costo de la opción debe ser igual a la del beneficio que trae, o 0 si no hay beneficio. Este beneficio es $S - \bar{E}_1$, si $\bar{E}_1 \leq S \leq \bar{E}_2$.

Si el precio de compra acordado para el subyacente es \bar{E}_1 , este beneficio es:

$$* C(S, T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S < \bar{E}_1 \\ S - \bar{E}_1 & \text{si } \bar{E}_1 \leq S \leq \bar{E}_2 \\ 0 & \text{si } \bar{E}_2 < S \end{cases}$$

• Cuando $S=0$, no tiene sentido invertir dinero en un contrato para comprar algo sin valor:

$$* C(0, t) = 0.$$

• Cuando $S \rightarrow \infty$, S crecerá más allá de \bar{E}_2 , por lo cual no se podría ejercer la opción, así que su valor se acerca a 0

$$* \lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = 0$$

c) Black-Scholes \Rightarrow E.C. Calor:

1er Cambio de variable:

$$\begin{cases} V \mapsto v & ; V = E v \Leftrightarrow v = \frac{V}{E_1} \\ t \mapsto \tau & ; t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \Leftrightarrow \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \\ S \mapsto x & ; x = \ln(S/\bar{E}) \Leftrightarrow S = \bar{E} e^x \end{cases}$$

Prescribimos la ecuación para:

$$v = v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{E}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial C}{\partial t} = E_1 \frac{\partial v}{\partial t} = E_1 \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = E_1 \frac{\partial v}{\partial \tau} \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = E_1 \frac{\partial v}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{E_1}{S} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = E_1 \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right) = E_1 \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = E_1 \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{E_1}{S^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S \frac{\partial C}{\partial S} - r C = 0$$

$$\partial_t - 2 \sigma^2 \partial_x^2 - \partial_x$$

$$\sigma_1^2 \left(-\frac{\sigma_1^2}{2}\right) \partial_x^2 v + \frac{\sigma_1^2}{2} \sigma_1^2 (\partial_x^2 v - \partial_x v) + r \sigma_1^2 \partial_x v - r \sigma_1^2 v = 0$$

$$\leftarrow \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 v = \frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 v + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \partial_x v - r v$$

$$\leftarrow \partial_x^2 v = \partial_x^2 v + \left(\frac{r}{\sigma^2/2} - 1\right) \partial_x v - \frac{r}{\sigma^2/2} v, \quad k = \frac{r}{\sigma^2/2}$$

$$\rightarrow \partial_x^2 v = \partial_x^2 v + (k-1) \partial_x v - k v \quad \text{ec. lineal con coef. constantes}$$

2do Cambio de Variables

* Hacemos una sustitución más (para volver esta ecuación en la ecuación del calor):

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} \underline{u(x, \tau)}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau v = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \partial_\tau u$$

$$\partial_x v = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \partial_x u$$

$$\partial_x^2 v = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \partial_x u + e^{\alpha x + \beta \tau} \partial_x^2 u$$

+ Nota que el exponencial se cancelará:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - k v$$

$$\leftarrow \beta u + \partial_\tau u = (\alpha^2 u + 2\alpha \partial_x u + \partial_x^2 u) + (k-1)(\alpha u + \partial_x u) - k u$$

$$\text{Con } \alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \quad \text{para satisf. la ec. dif.}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\tau u = \partial_x^2 u} \quad \text{ecuación del calor}$$

Condición de Frontera

La condición
en: $x=0, (\infty)$

$$C(S, T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S < \bar{E}_1 \\ S - \bar{E}_1 & \text{si } \bar{E}_1 \leq S \leq \bar{E}_2 \\ 0 & \text{si } S > \bar{E}_2 \end{cases}$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{S}{E_1} < 1 \\ \frac{S}{E_1} - 1 & \text{si } 1 \leq \frac{S}{E_1} \leq \frac{E_2}{E_1} \\ 0 & \text{si } \frac{S}{E_1} > \frac{E_2}{E_1} \end{cases} \quad \rightarrow \ln \frac{S}{E_1} < 0 \quad \rightarrow 0 \leq \ln \frac{S}{E_1} \leq \ln \frac{E_2}{E_1}$$

$\frac{S}{E_1} = e^x$
 $\frac{S_2}{E_1} < \frac{S}{E_1} \Rightarrow \ln\left(\frac{S_2}{E_1}\right) < \ln\left(\frac{S}{E_1}\right)$

$$u(x, \tau) = e^{-\alpha x} v(x, \tau) = \begin{cases} e^{\alpha x} e^x & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \ln \frac{E_2}{E_1} \\ 0 & \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) < x \end{cases}$$

!!
g(x)

Sol. General

desplaz. media de 0 a x

$$u(x, \tau) := E_{v(x, \tau)}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \tilde{u}(s-x) ds = (g * \tilde{u})(x, \tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds = \int_0^{\ln \frac{E_2}{E_1}} e^{-(\alpha-1)s} e^{-as} \frac{1}{\sqrt{2\tau} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right)^2} ds$$

$z := \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}, s = \sqrt{2\tau}z + x$
 $s \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$
 $s \rightarrow \infty \Leftrightarrow z \rightarrow \infty$
 $s = \ln \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow z = \frac{\ln \frac{E_2}{E_1} - x}{\sqrt{2\tau}}$

$$u(x, \tau) = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln \frac{E_2}{E_1} - x}{\sqrt{2\tau}}} (e^{-(\alpha-1)(\sqrt{2\tau}z+x)} - e^{-\alpha(\sqrt{2\tau}z+x)}) f_z(z) dz$$

pdf normal est.

$$= e^{-(\alpha-1)x} I(\alpha-1) - e^{-\alpha x} I(\alpha)$$

con

$$I(\alpha) = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln \frac{E_2}{E_1} - x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\alpha \sqrt{2\tau} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{\ln \frac{E_2}{E_1} - x}{\sqrt{2\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} [(z + \alpha \sqrt{2\tau})^2 - 2\alpha \sqrt{2\tau} z]} dz$$

normal est. con media desplaz. $\alpha - \alpha \sqrt{2\tau}$

$$= e^{\alpha^2 \tau} \left[F_z\left(\frac{\ln \frac{E_2}{E_1} - x}{\sqrt{2\tau}} + \alpha \sqrt{2\tau}\right) - F_z\left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \alpha \sqrt{2\tau}\right) \right]$$

pdf de normal est.

Ahora sí:

$$C(S, t) = E_1 v(x, \tau) = E e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) = E e^{\alpha x + \beta \tau} [e^{-(\alpha-1)x} I(\alpha-1) - e^{-\alpha x} I(\alpha)]$$

$$= [E e^x I(\alpha-1) - E I(\alpha)] e^{\beta \tau}$$

$$\text{Como } \beta + (\alpha-1)^2 = -\frac{1}{A} (1+K)^2 + \left(\frac{1-K-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{A} [-(1+K)^2 + (1-K-2)^2] = 0$$

$$\beta + \alpha^2 = -\frac{1}{A} (1+K)^2 + \frac{1}{A} (1-K)^2 = \frac{1}{A} (1-2K-K^2 + 1-2K+K^2) = -\frac{4K}{A} = -K$$

Concluimos que

$$C(S, t) = S \left\{ F_z[d_1(E_2)] - F_z[d_1(E_1)] \right\}$$

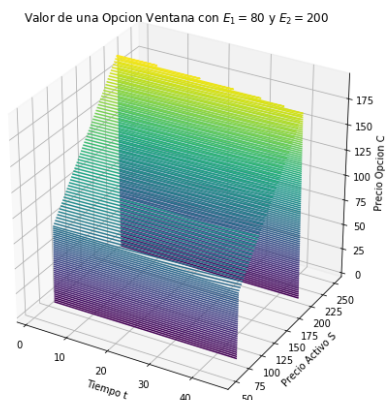
$$\tau = T - t$$

$$-C_1 e^{-rt_1} + P_2 Q_2(t_1) + P_1 Q_1(t_1)$$

$$\ln d_i(E) = \frac{\ln \frac{E}{S} - (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

, con + corresq a $i=1$
& - a $i=2$

c)



3.

Una opción en general ofrece un seguro ante posibles fluctuaciones de un activo subyacente, y en el caso de las opciones ventanas esto es así tanto para el creador del contrato como del tenedor de la opción. Las opciones permiten reducir el riesgo de las grandes fluctuaciones del precio del activo subyacente al permitir la no compra de este si el precio baja por debajo de lo esperado, y solo su compra (en el caso de una opción call) si el precio es mayor del precio esperado. Sin embargo, esta naturaleza de forzar la venta del activo por parte de quien firma el contrato de la opción call lo expone a grandes pérdidas si el precio del subyacente crece mucho más de lo esperable, de modo que la opción ventana o barrera permite esta noción de tranquilidad a ambas partes sin arriesgar a grandes pérdidas a ninguna de ellas.

La seguridad que ofrece una opción call ventana se ve reflejada en la posibilidad de crear portafolios con el activo subyacente S y escribir opciones call (ventana), lo cual en las ecuaciones se representa como tener una posición en corto para la opción. Vemos que estas dos inversiones se hacen con esperanzas opuestas: la inversión positiva en el activo se hace esperando que este valor suba de precio, mientras que la inversión negativa en la opción call se hace esperando que el valor del activo subyacente baje de precio (pues es aquí donde quien escribe la opción Call se beneficia, en oposición a quien adquiere esta opción). Son estas esperanzas opuestas y relación positiva (que se convierte en negativa por la posición en corto) que hay entre estos activos lo que permite que el riesgo disminuya manteniendo rendimientos incluso mejores que los de cualquiera de los activos.

Además, la opción call ventana tiene la ventaja adicional en el tiempo de maduración de que, en caso de que el precio del activo suba más de lo esperado, quien compra la opción call no puede ahora ejercer su opción de compra y yo, quien la escribe, puedo disponer en su totalidad de esta ganancia, además del precio inicial del contrato de la opción que no se ejerció.

