

§ 17-5 感生电动势

1. 感生电动势的产生

当导体回路不动，但由于磁场变化引起磁通量改变而产生的感应电动势。

导体在磁场中运动： 洛伦兹力

导体不动，仅有磁场变化： 非静电力的来源

?

实验发现该感生电动势的大小、方向与导体的种类和性质无关，仅由变化的磁场本身引起。

Maxwell敏锐地感觉到感生电动势的现象预示着有关电磁场的新的效应。

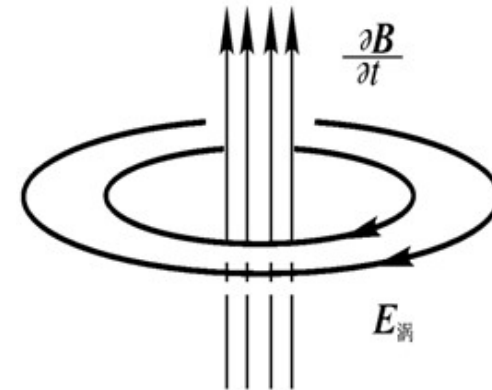
Maxwell假设：

不论空间有无导体存在，变化的磁场总是在其周围激发一种电场，这种电场具有涡旋性，称为**感生电场或涡旋电场**。产生感生电动势的**非静电力**称为**感生电场力或涡旋电场力**。

根据电动势的定义和电磁感应定律，则有：

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \quad \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_L E_i \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS$$



法拉第电磁感应定律可表示为：

$$\varepsilon_i = \int_L E_i \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

---变化的磁场激发电场

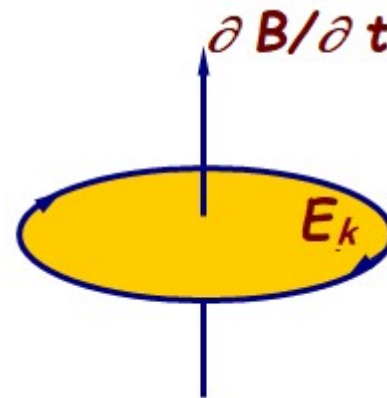
2. 涡旋电场的性质

1) 涡旋电场的存在完全不取决于空间是否存在导体回路，变化的磁场总是会在空间激发出电场；当有导体存在时，显示出感应电流。

2) 自然界中存在两种不同方式激发的电场，它们所激发的电场性质也截然不同：由静止电荷所激发的电场是保守力场(无旋场)，由变化磁场所激发的电场不是保守力场(有旋场)。

空间某一点的总电场 E : $E(\text{总}) = E(\text{静}) + E(\text{感生})$

3)感生电场与 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 的方向如图所示，满足左手螺旋关系，即：涡旋电场的绕行方向与所围成的磁场变化方向的负方向构成了右手螺旋关系。



4)涡旋电场与静电场的效应比较

相同处：

对电荷都有作用力

若有导体存在
都能形成电流

不相同处：

涡旋电场不是由电荷激发，是由变化磁场激发

涡旋电场线不是有头有尾，而是形成闭合回路

3.感生电动势的计算

I.按法拉第电磁感应定律计算:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS$$

II.如果磁场的分布具有对称性,则可以先求出涡旋电场 \mathbf{E}_k ,再按公式:

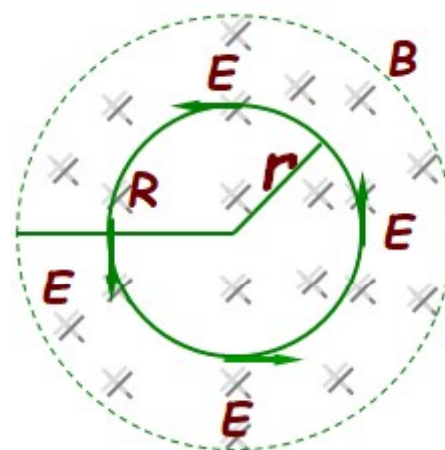
$$\varepsilon_i = \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

---计算一段导体 ab 上的感生电动势

课堂练习题17-6:

在半径为 **R** 的圆柱形空间存在着均匀磁场，如图所示。当此磁场以 **$\frac{dB}{dt}$** 的速率增大时，求：圆柱体内外涡旋电场的分布。

解：由磁场变化的对称性可知涡旋电场也具对称性。所以应取同轴圆周为积分回路 **L** ，顺时针为绕行正向，则 **\mathbf{n}** 与 **\mathbf{B}** 同向。



由公式：

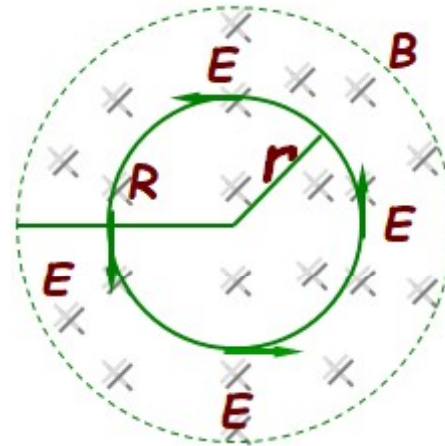
$$\int_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

1) $r < R$ 的区域，磁场均匀变化，故有：

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$$

$$E_i = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

负号“-”表示 E_i 的方向与回路绕行方向相反。



2) $r > R$ 的区域，磁场集中在圆柱体内，故有：

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2$$

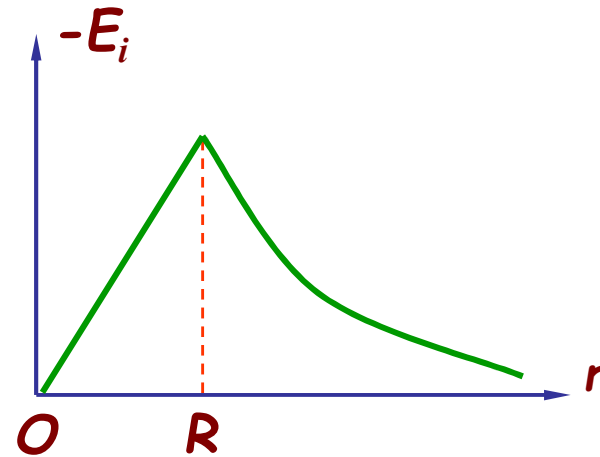
$$E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

1) $r < R$ 的区域，磁场均匀变化，故有：

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$$

$$E_i = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

负号“-”表示 E_i 的方向与回路绕行方向相反。



2) $r > R$ 的区域，磁场集中在圆柱体内，故有：

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2$$

$$E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

课堂练习题17-7:

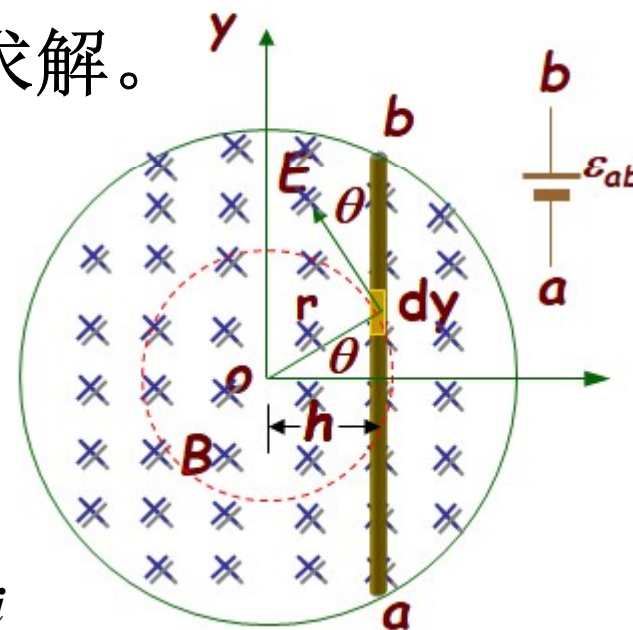
若在上题的变化磁场中放置一长为 L 的导电细棒 ab ，与圆心 o 的垂直距离为 h ，求：棒 ab 上的感生电动势。

解法一：按感生电动势定义求解。

$r < R$ 的区域， E_i 的大小：

$$E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad \text{方向：逆时针}$$

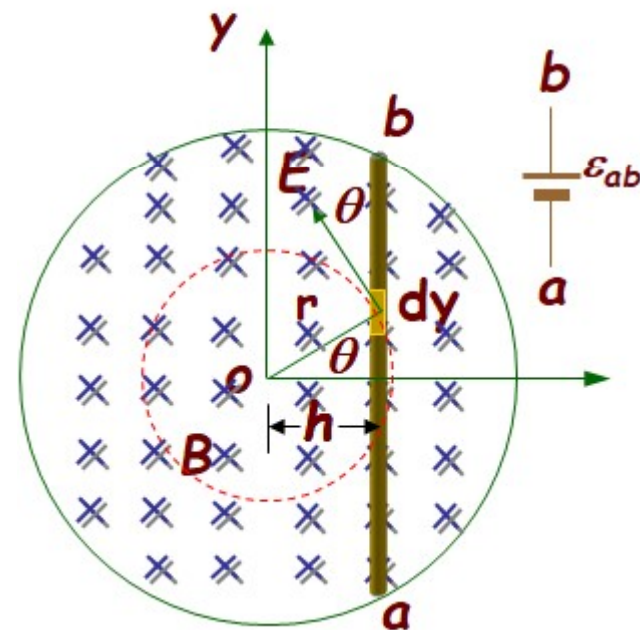
在棒上任取一线元 dy ，与 E_i 的夹角为 θ ， dy 的感生电动势为：



$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_i &= E_i \cdot dy = E_i \cos \theta \cdot dy \\
 &= \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{r} dy \\
 &= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dy
 \end{aligned}$$

棒 ab 上的感生电动势为：

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= \int_a^b d\varepsilon_i = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \cdot dy \\
 &= \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}
 \end{aligned}$$



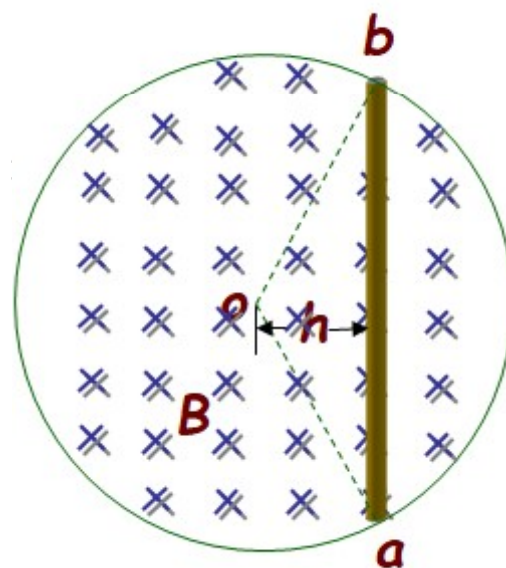
解法二：按法拉第电磁感应定律计算。

作辅助线 **oa**、**ob** 构成假想回路 **obao**。因 E_i 为同心圆，**ao**、**bo** 段上 E_i 垂直 **dl**，故两条辅助线上的感生电动势为零，因此回路 **obao** 上的感生电动势即为 **ba** 段 ε_i 。穿过回路所包围面积的磁通量为

$$\Phi = BS = B \cdot \frac{1}{2} hL = \frac{1}{2} BhL$$

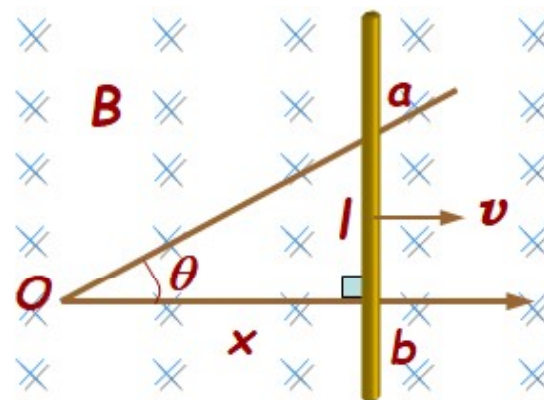
所以： $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$

负号表示 ε_i 的方向与回路方向相反，为 **a**→**b**。



课堂练习题17-8:

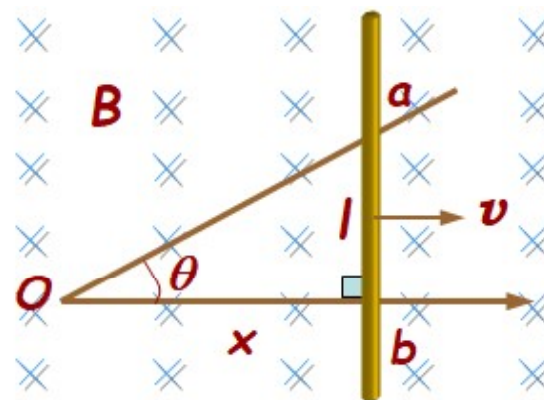
如图，均匀磁场中有一金属框架 $oabo$ ， $\angle aob = \theta$ 且 $ab \perp Ox$ ，如果 ab 边以速率 v 平行于 x 轴匀速滑动，磁场随时间变化关系为 $B = t^2/2$ 。求：任意时刻 t 金属框中感应电动势的大小和方向。



解：因 B 随时间变化，同时导线 ab 切割磁力线，故回路中既存在感生电动势又存在动生电动势。下面利用感应电动势的定义来求解：

由法拉第电磁感应定律可知，**t**时刻金属框中感应电动势的大小为(取绕行方向为**oabo**):

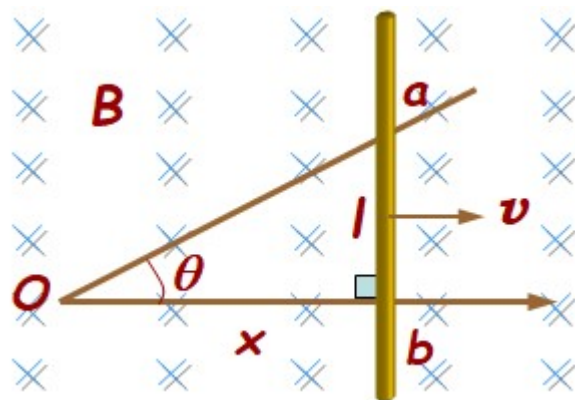
$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -B\frac{dS}{dt} - S\frac{dB}{dt} \\ &= -B\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}lx\right) - \frac{1}{2}lx\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ &= \varepsilon_{\text{动}} + \varepsilon_{\text{感}}\end{aligned}$$



将 **$x=vt$** ， **$l=x \tan\theta=vt \tan\theta$** 代入上式，则：

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}t^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2t^2 \tan\theta\right) - \frac{1}{2}v^2t^2 \tan\theta \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right) = -v^2t^3 \tan\theta$$

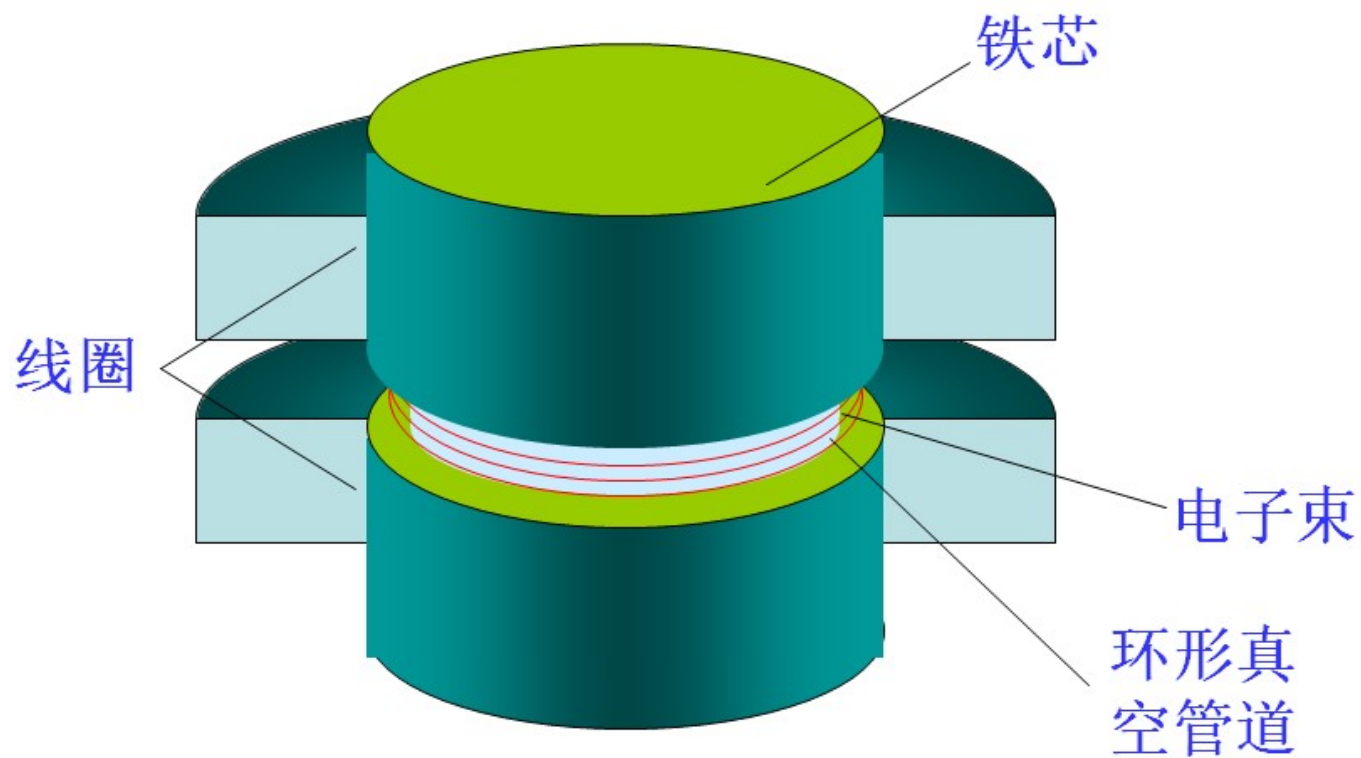
方向与绕行方向**oabo**相反。



对于这类问题，可直接用**法拉第电磁感应定律**求解总感应电动势，也可分别计算动生电动势和感生电动势，即：**先假设磁场不变化**，由金属棒切割磁场线求 $\varepsilon_{\text{动}}$ ；**再假设金属棒不动**，由磁场变化求 $\varepsilon_{\text{感}}$ ；最后求出总的感应电动势。

➤ 电子感应加速器

电子感应加速器是利用感应电场来加速电子的一种设备。



设电子在运动轨道处的磁感应强度为 B_R ，电子在洛仑兹力作用下作圆周运动，则：

$$m \frac{v^2}{R} = e v B_R \rightarrow m v = e R B_R$$

又因变化磁场具有轴对称性，可求得涡旋电场的大小为：

$$E_i = \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

\bar{B} 为轨道所围面积内的平均磁感应强度，电子在涡旋电场的作用下具有切向加速度而加速。

根据牛顿定律:

$$\frac{d(mv)}{dt} = eE_i = \frac{eR}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

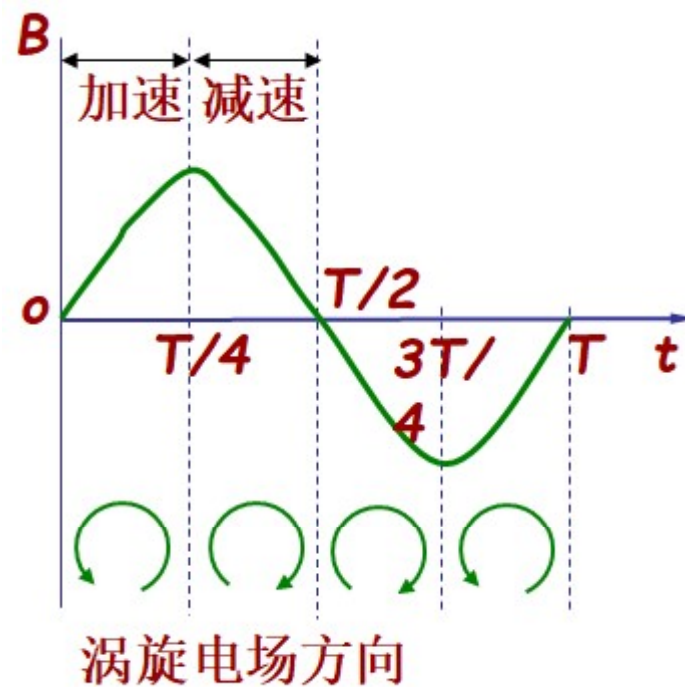
又, 对圆周运动方程 $mv = eRB_R$ 求导:

$$\frac{d(mv)}{dt} = eR \frac{dB_R}{dt}$$

比较以上两式, 可得电子在环形轨道上作加速运动的条件为:

$$B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$$

对于正弦交变磁场：
只有第一和第四个**1/4**周期中的电子才能被加速，而第四个**1/4**周期的洛仑兹力作为向心力方向相背。因而只有第一个**1/4**周期电子才被加速。



尽管时间很短，但电子还是能够被加速几十万圈，从而使运动速度被加速到接近光速。



电子感应加速器全貌

§ 17-6 涡电流

1. 涡电流

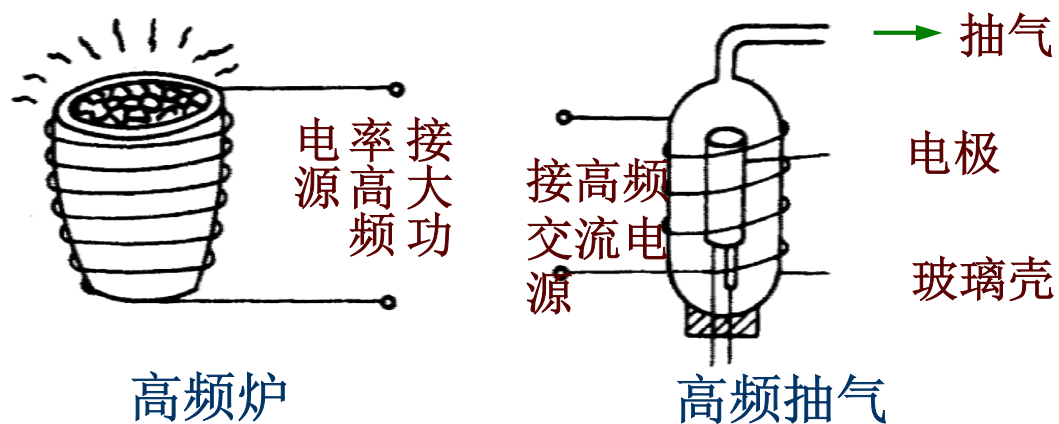
大块金属导体处在变化磁场中时，金属内部就会产生感应电流。如：圆柱形铁芯处于交变磁场中。铁芯可看成是由一系列半径不同的圆柱状薄壳组成，每层薄壳形成一个闭合回路。由于薄壳内的磁通量一直不断变化，在每一层薄壳回路中将产生感应电动势和感应电流。

这些感应电流呈闭合的涡旋状，因此称为涡电流，简称涡流。

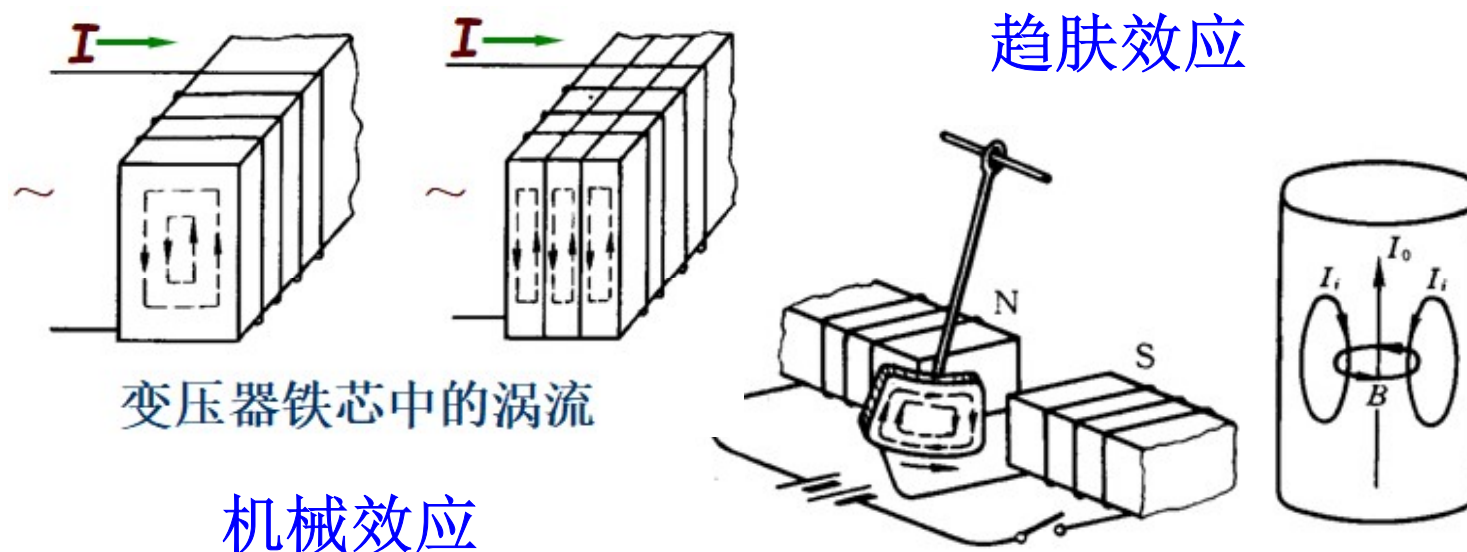
2. 涡电流的应用

1) 热效应：大块导体电阻小，电流大，容易产生大量焦耳热。因此，感应加热有许多应用。

如：可制成高频感应电炉来冶炼特种钢、难熔金属以及半导体生产工艺中，等等。



2)机械效应： 感应电流在反抗引起感应电流的原因时，会产生机械效应，可用作**电磁阻尼**。

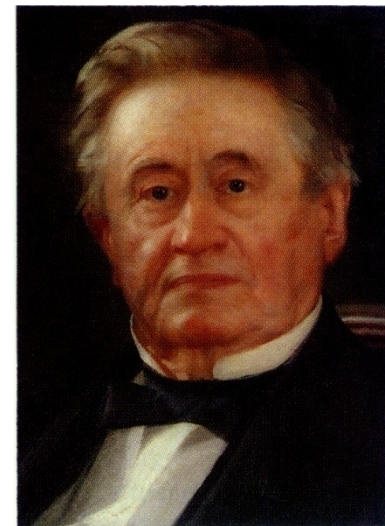


3)趋肤效应： 高频电路中，由于涡流使导体横截面上的电流分布趋于导体表面附近的现象。

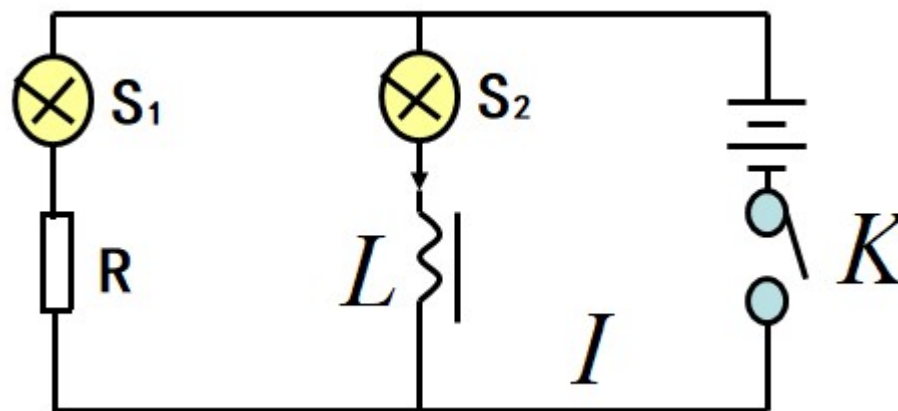
§ 17-7 自感

1. 自感现象

由于回路中电流产生的磁通量发生了变化，从而在自身回路中激发感应电动势的现象叫做自感现象，这种感应电动势称为自感电动势。



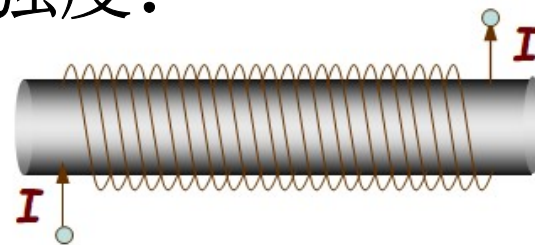
亨利



2.螺线管中的自感问题

细长，密绕线圈中的磁感应强度：

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$



线圈中的磁通量： $\Phi = BS = \frac{\mu_0 NI}{l} \pi R^2$

穿过***N***匝线圈的磁通匝链数或全磁通：

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I}{l} \pi R^2$$

若***I***变化，线圈中出现的电动势为：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi N^2 R^2}{l} \frac{dI}{dt}$$

上式可改写成右侧的形式：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

注意：

1) $dI/dt > 0$ $\varepsilon_L < 0$ 感生电动势与 I 方向相反，

$dI/dt < 0$ $\varepsilon_L > 0$ 感生电动势与 I 方向相同；

2) $L = \mu_0 \pi N^2 R^2 / l$ 称为自感系数——自感

在一般情况下，全磁通的变化是由回路电流变化引起的，从而出现感应电动势为：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dI} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

因此在一般情况下， L 定义为：

$$L = \frac{d\Psi}{dI}$$

在回路形状不变且周围没有铁磁质时，空间任一点 \mathbf{B} 与回路电流 \mathbf{I} 成正比，因而 Ψ 也与 \mathbf{I} 成正比，此时上式可写为：

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad \text{或} \quad \Psi = LI$$

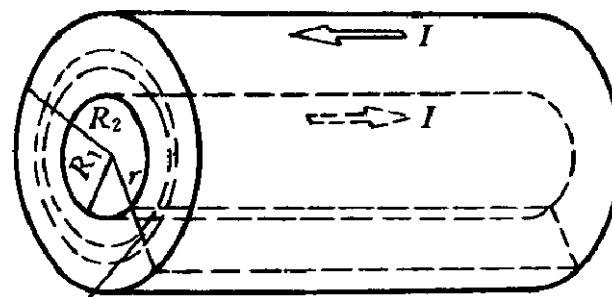
自感系数(自感)：回路中电流变化为单位值时在回路所围面积内引起的全磁通的改变值。

自感 L 的单位：亨利 (H)， $1\text{H}=1\text{Wb/A}$ 。

课堂练习题17-9:

如图，两个半径分别为 R_1 和 R_2 的“无限长”同轴圆筒状导体组成的电缆，其间充满磁导率 μ 的磁介质，电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流 I 大小相等而方向相反。求：电缆单位长度的自感。

解：应用安培环路定理，可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零；而在内外两圆筒之间，离轴线距离为 r 处的磁感应强度为：



$$B = \mu I / 2\pi r$$

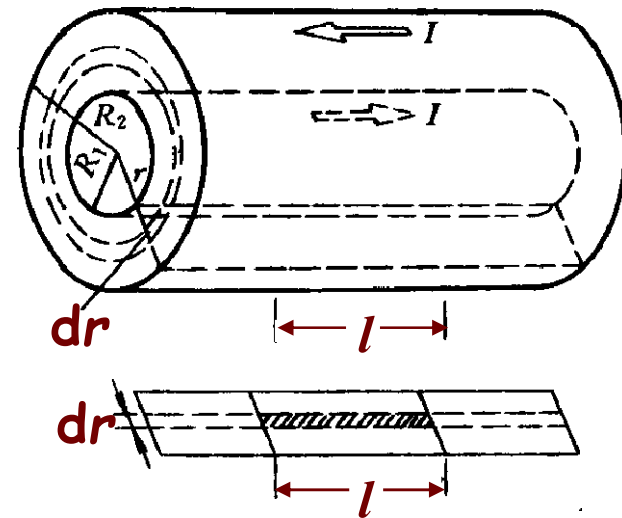
在内外圆筒之间，取图示截面，通过长为 l 的面积元 $l dr$ 的磁通量为：
$$d\Phi = B l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

通过两圆筒之间长 l 的截面的总磁通量：

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于 $\Phi = LI$ ，可知单位长度电缆的自感为：

$$L = \frac{\Phi}{I l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



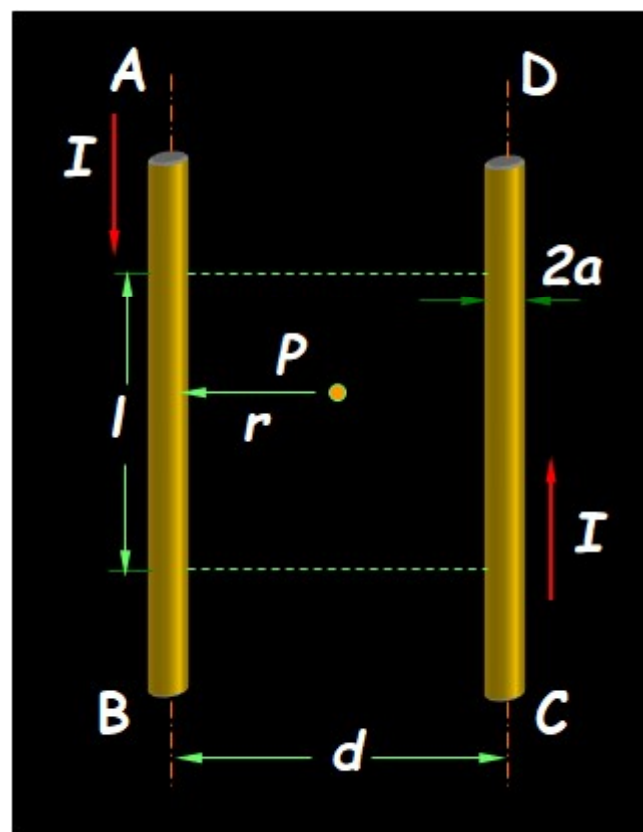
课堂练习题17-10:

如图所示，两根半径为 a 的平行长直传输线，相距 d ， $a \ll d$ 。求：长为 l 的这对传输线的自感。

解： 设传输线中电流为 I ，
电源和用电器都在无限远，且电流是从**AB**输出、从**CD**返回。

两传输线在离**AB**为 r 处产生的总磁感应强度：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

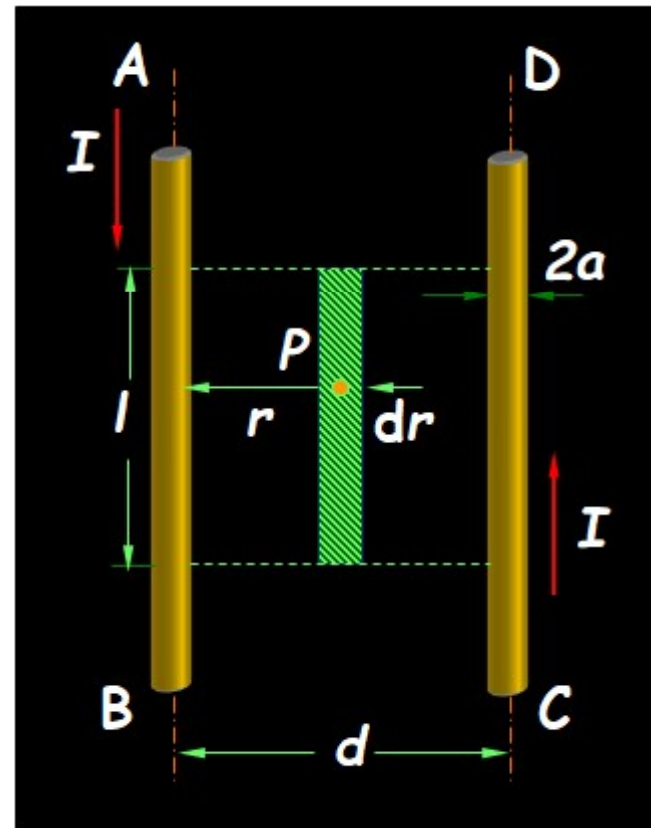


由于 $a \ll r$ ，所以可以忽略两导线内部的磁通量只考虑两传输线之间的区域。

因此，通过两传输线之间长为 l 、宽为 dr 的面积元 dS 的磁通量为：

$$\begin{aligned} d\Phi &= B \cdot dS \\ &= \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] l dr \end{aligned}$$

电磁通过长为 l 的两导线间的磁通量：



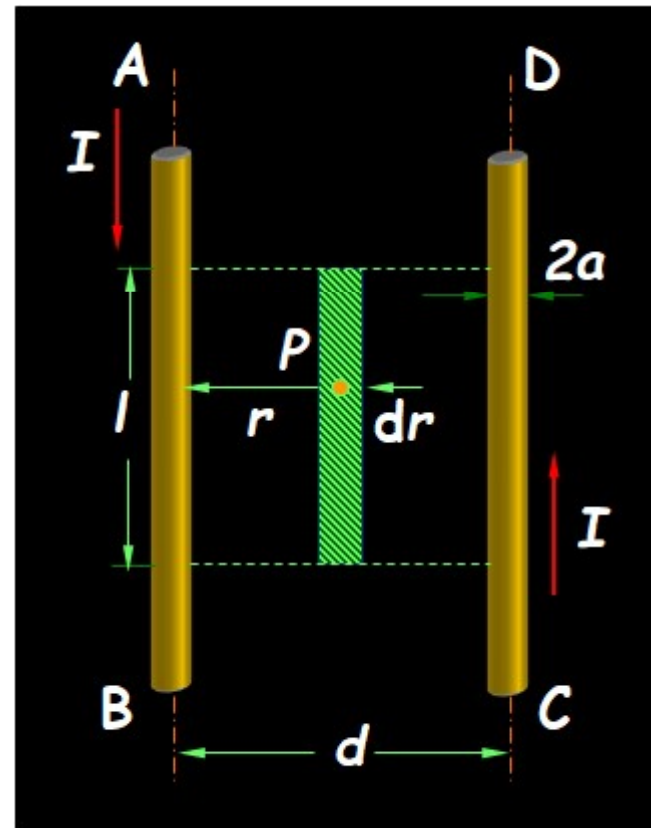
$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)} \right] l dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

于是，长为 l 的这对传输线的自感：

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

单位长度传输线的自感：

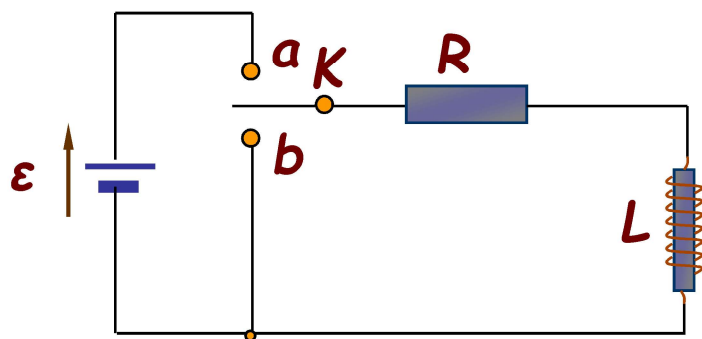
$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



§ 17-8 LR 电路

1. $R-L$ 电路

由于自感的存在，使电路中具有保持原有电流不变的特性。它使电路在接通或断开后，电路中的电流要经历一个过程才能达到稳定值，该过程称为 **RL 电路的暂态过程**。



自感1.e

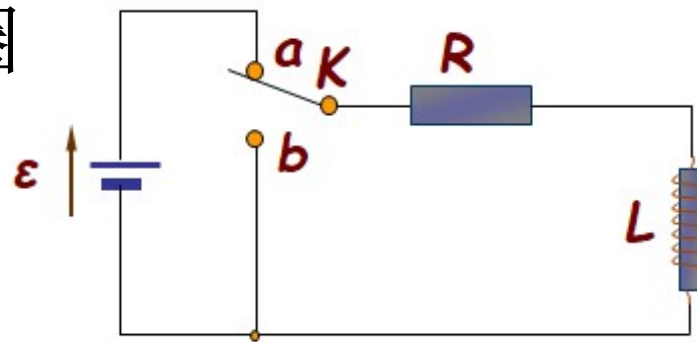
自感2.e

2. 电路接通时的电流(增长过程)

设电路有纯电感线圈 L 和纯电阻 R 构成。当电键 K 与 a 接通后，电路中某瞬时的电流 $I=I(t)$ 。

由于自感应作用，线圈中的自感电动势：

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$



回路中的总电动势为 $\varepsilon + \varepsilon_L$ ，由欧姆定律得电路方程：

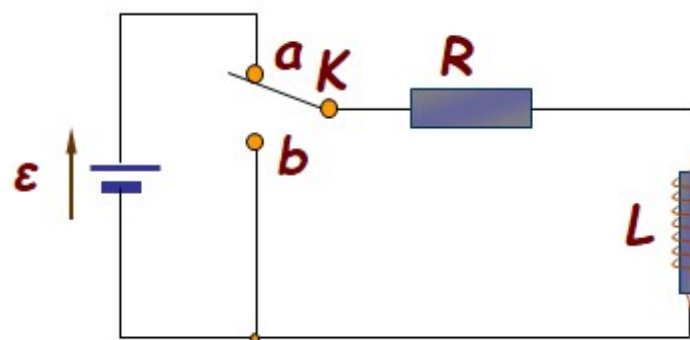
$$\varepsilon + \varepsilon_L = \varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR$$

对上式分离变量后积分，取 $t=0$ 时， $I=0$ ，于是：

$$\int_0^I \frac{dI}{I - \varepsilon / R} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt$$

积分整理后，并令

$$I_0 = \varepsilon / R$$



得：

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

电流 I 按指数规律增长，逐渐达到稳定值 I_0 。

在 RL 电路中， L/R 是表征暂态过程持续长短的特征量，它具有时间的量纲，称为 RL 电路的时间常数 τ (弛像时间)。

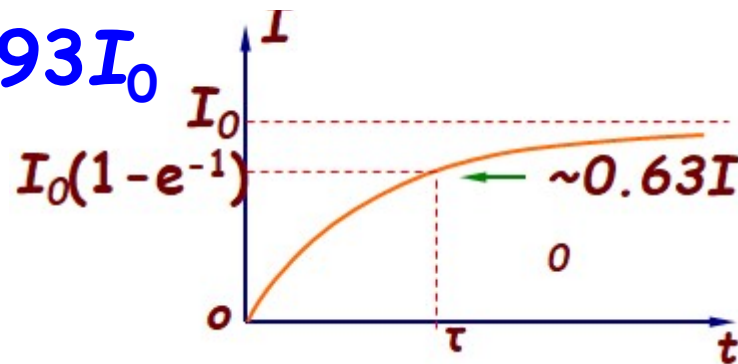
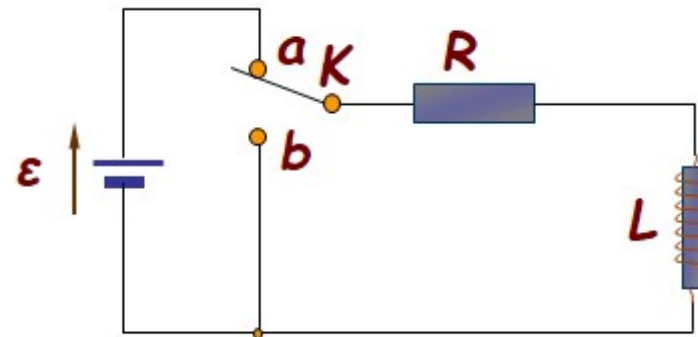
当 $t=\tau$ 时：

$$I = I_0(1 - e^{-1}) = 0.63I_0$$

当 $t=5\tau$ 时：

$$I = I_0(1 - e^{-5}) = 0.993I_0$$

此时可以认为电流已达到稳定值

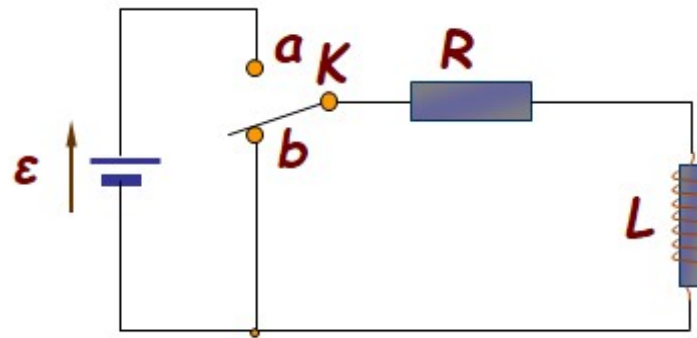


3. 电路断开时的电流(衰减过程)

当电路中的电流达到稳定值 I_0 后，将电键 **K** 从触点 **a** 倒向 **b**，这时回路中无外电源。

但是由于自感的作用：

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} = IR$$



电流不会马上回到零。

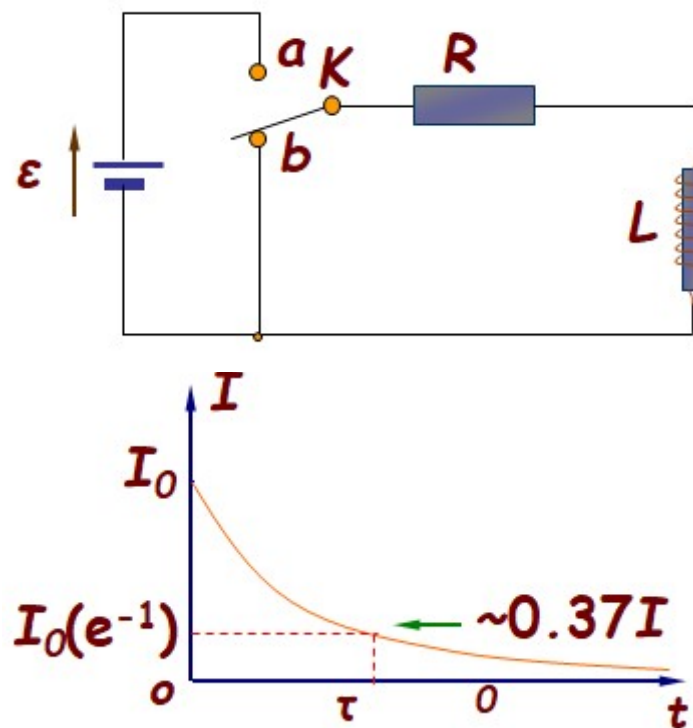
将上式分离变量后进行积分，同时考虑到 $t=0$ 时， $I=I_0$ ，则有：

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-t/\tau}$$

当 $t = \tau = L/R$ 时: $I = I_0 e^{-1} = 0.37 I_0$

在撤去外电源的情况下，时间常数 τ 表示：

电流由稳定值 I_0 减小至 I_0 的 37% 所需要的时间。



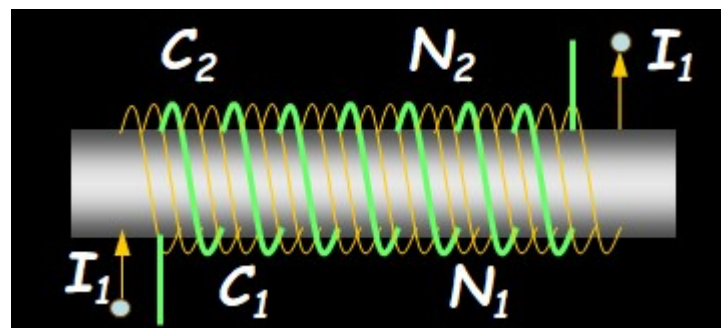
§ 17-9 互感

1. 互感现象 互感系数

由于一个回路中的电流变化而在邻近另一个回路中产生感应电动势的现象，称为互感现象。

如图所示，一个绕有 C_1 和 C_2 两层线圈的长直螺线管，长度均为 l ，截面半径都是 r 。 C_1 线圈共有 N_1 匝，当其中通电流 I_1 时，其磁场在 C_2 线圈每匝中的磁通为：

$$\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \pi r^2$$



所以通过 C_2 线圈
 N_2 匝的全磁通：

$$\Psi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} I_1 \pi r^2$$

当 I_1 变化时，在 C_2 线圈回路中将产生感生电动势：

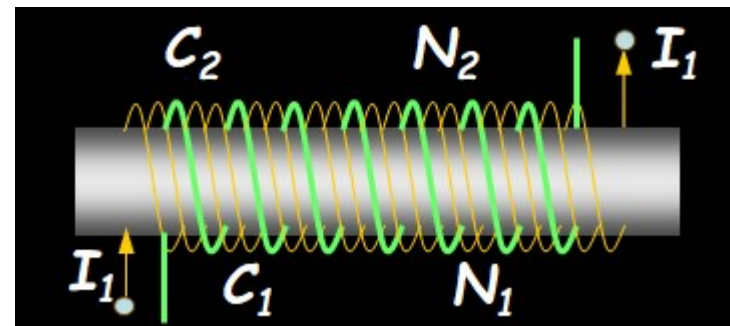
$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

将上式改写为：

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

式中：

$$M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$



同理，当 C_2 线圈中 I_2 变化时，在 C_1 回路中也将产生感生电动势：

$$\varepsilon_{12} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_2}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

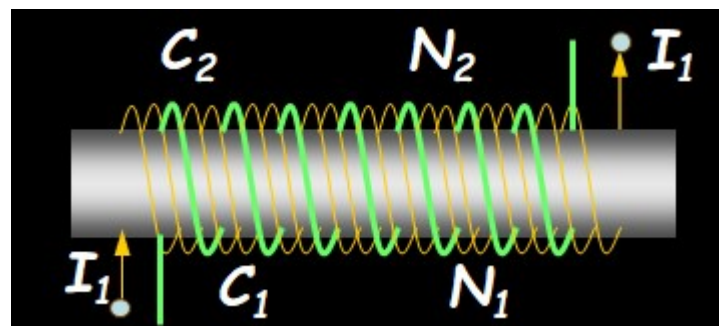
式中：

$$M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$

通过对比，可以看出：

$$M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$

记作： $M_{21} = M_{12} = M$

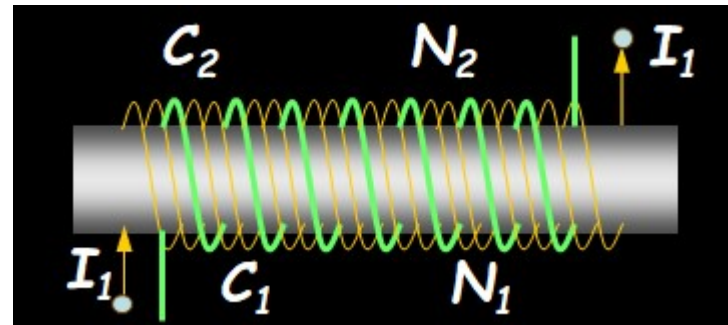


M 反映的是两回路间互相产生感生电动势的能力，称为互感系数或互感。

若周围没有铁磁物质，且两个回路的相对位置固定， $\Psi_{21} \propto I_1$ 、 $\Psi_{12} \propto I_2$ ，则：

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

一般情况下，互感和自感一样只和两回路的形状、相对位置以及周围的磁介质有关，而与电流大小无关。



M反映的是两回路间互相产生感生电动势的能力，称为**互感系数**或**互感**。

若周围有铁磁物质， Ψ_{21} 和 I_1 、 Ψ_{12} 和 I_2 就不一定是线性关系，这时：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{d\Psi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \\ \varepsilon_{21} &= -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d\Psi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}\end{aligned}$$

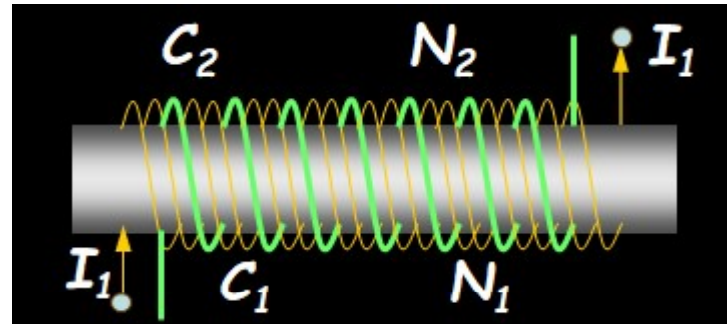
注意：互感的单位也是亨利(**H**)。

2. 自感与互感的关系

仍以两层螺线管为例讨论自感与互感的关系

已知原线圈的自感:

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r^2$$



同理，副线圈的自感系数:

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi r^2$$

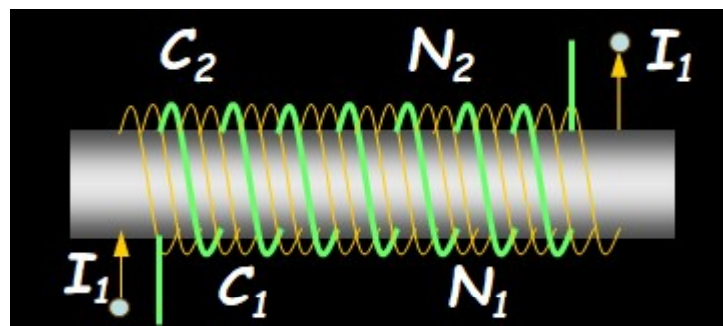
而两线圈间的互感系数:

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$

由此可见：

$$M^2 = L_1 L_2, \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$$

成立条件：只有一个回路所产生的磁感应线全部穿过另一回路时，才有上述关系。



对于一般的情形：

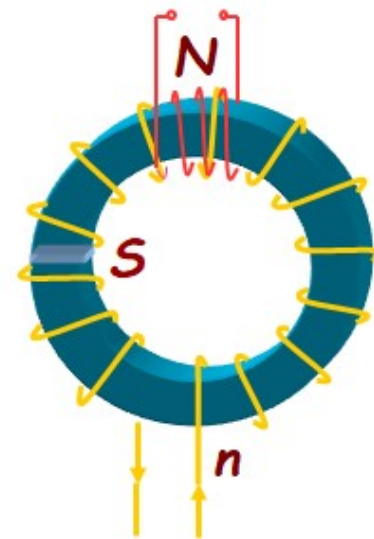
$$M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

$0 \leq K \leq 1$ ，称为耦合系数

课堂练习题17-11:

一密绕螺绕环，单位长度匝数为 $n=2000\text{m}^{-1}$ ，环的横截面积为 $S=10\text{cm}^2$ ，另一个 $N=10$ 匝的小线圈绕在环上，如图所示。求：1)求两线圈间的互感；2)当螺绕环中的电流变化率 $dI/dt=10\text{A/s}$ 时，求在小线圈中产生的互感电动势的大小。

解：1)设螺绕环中通有电流 I ，螺绕环中磁感应强度 $B=\mu_0 nI$ ，通过螺绕环上各匝线圈的磁通量等于通过小线圈各匝的磁通量，所以



在通过 **N** 匝小线圈的磁通链数为:

$$\Psi_N = N\Phi = N\mu_0 nIS$$

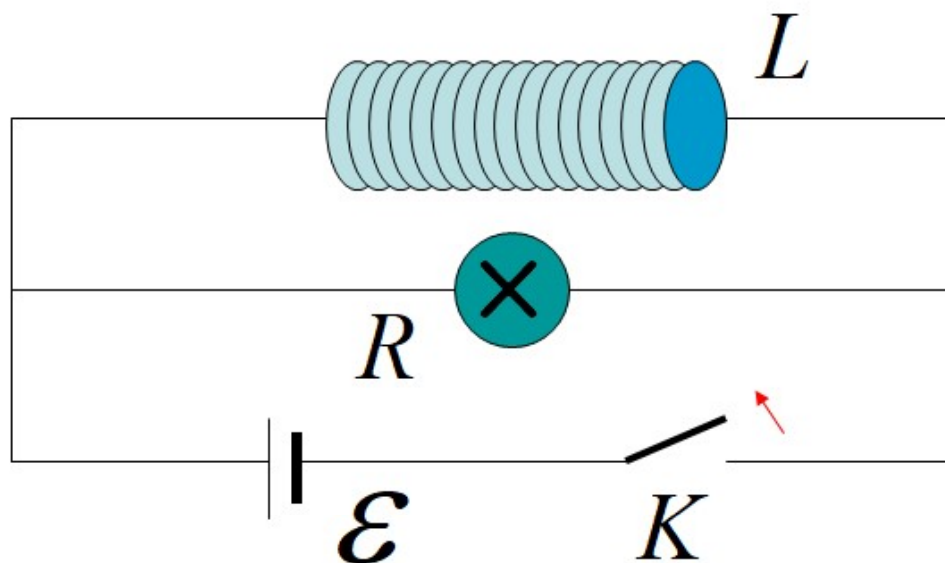
由互感定义, 可得螺绕环与小线圈间的互感:

$$M = \frac{\Psi_N}{I} = N\mu_0 nS = 25\mu H$$

2)小线圈中产生的感生电动势的大小为:

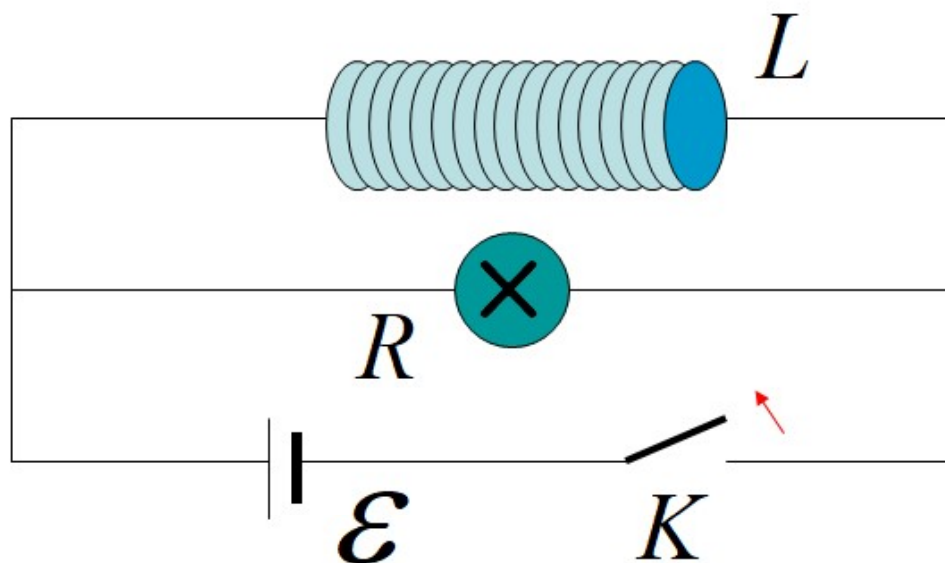
$$\varepsilon_{21} = \left| -M \frac{dI_1}{dt} \right| = 2.5 \times 10^{-5} \times 10 = 250 \mu V$$

§ 17-10 磁场的能量



当电键打开后，电源已不再向灯泡供应能量。
但灯泡会闪亮一下，所消耗的能量从哪里来？
答：使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势
产生的电流，该电流随着线圈中的磁场的消失

§ 17-10 磁场的能量



而逐渐消失。所以，使灯泡闪亮的能量是原来储存在通有电流的线圈中的，或者说是储存在线圈内的磁场中。

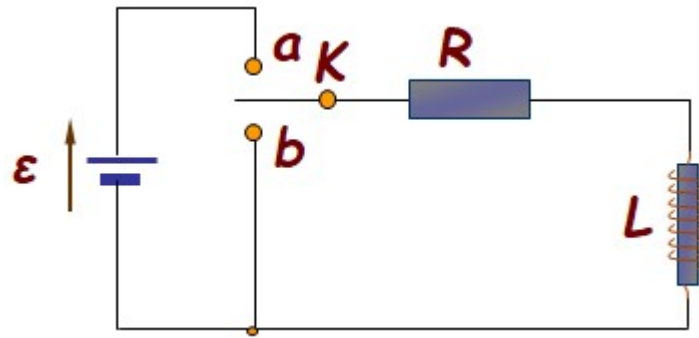
---该能量称为磁能

1. 自感磁能

在带电系统形成过程中，外力克服静电场力做功，转化为电荷系统或电场的能量，电场的能量密度为：

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

在 RL 暂态过程中，由于电流克服自感，在回路电流消长中存在能量转化问题。在上一节的 RL 电路中，由欧姆定律：



$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = RI$$

设 $t=0$ 时, $I=0$; $t=t$ 时, $I=I_0$ 。电流从 0 增长到 I_0 的过程中, 电源电动势做功: ($dw=\varepsilon dq$)

$$\int_0^t \varepsilon I dt = \int_0^{I_0} LI dI + \int_0^t RI^2 dt$$

在 L 与 I 无关的条件下:

$$\int_0^t \varepsilon I dt = \frac{1}{2} LI_0^2 + \int_0^t RI^2 dt$$

方程右边第一项为克服感生电动势所做的功,
第二项为电源消耗在电阻上的热能。

根据功能原理，此功是以能量形式储存在线圈内。当电键**K**倒向**b**， $\mathbf{I}=\mathbf{I}_0\mathbf{e}^{-(R/L)t}$ ，衰减过程中**R**中的焦耳热来自于线圈储存能：

$$Q = \int_0^{\infty} RI^2 dt = RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

线圈中储存的能量将通过自感电动势做正功全部释放出来。因此，在自感为**L**的回路中线圈内储存的磁能：

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2$$

2.磁场的能量

线圈中的能量可视为存储在磁场中。对于一充满磁介质的长直螺线管，磁导率为 μ ，电流为 I_0 ，则有 $B=\mu n I_0$ ， $I_0=B/\mu n$ ， $L=\mu N^2 S/l$ 。

将 L 和 I_0 代入 W_m ：

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2}{l} S \cdot \frac{B^2}{(\mu N/l)^2} = \frac{1}{2} B H V$$

定义单位体积内的磁能为磁能密度：

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} B H \quad \text{或} \quad \omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

➤磁场的能量

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

---磁场的能量密度

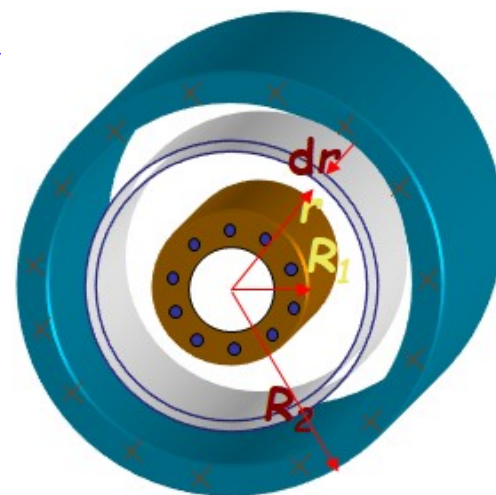
➤电场的能量

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

---电场的能量密度

课堂练习题17-12:

如图一根很长的同轴电缆，由半径为 R_1 的圆柱筒与半径为 R_2 的同心圆柱筒组成，电缆中央的圆柱筒上载有稳定电流 I ，再经外层导体返回形成闭合回路。求：1)长为 l 的一段电缆内的磁场中所储藏的能量；
2)该段电缆的自感。



解：1)根据安培环路定理，在外圆柱筒外面和内圆柱筒内部区域： $B=0$ ；而在内外圆柱筒之间的区域内离轴线距离为 r 处的

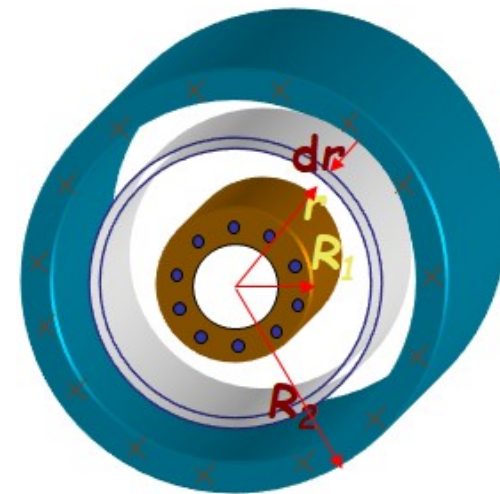
磁感应强度为: $B = \mu I / 2\pi r$

所以在两圆柱筒之间区域离轴线距离为 r 的磁能密度为:

$$\omega_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在半径为 r 与 $r+dr$, 长 l 的圆柱壳空间之中的磁能为:

$$dW_m = \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr l = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

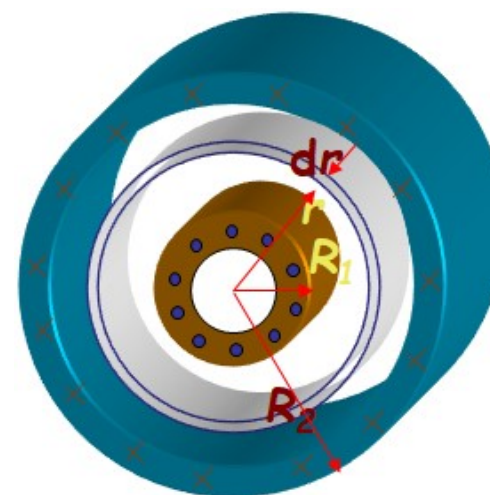


积分可得储藏在内筒之间空间内的总磁能：

$$W_m = \iiint_V \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2) 由磁能公式 $W_m = 1/2 LI^2$ ，可求出长为 l 的同轴电缆的自感：

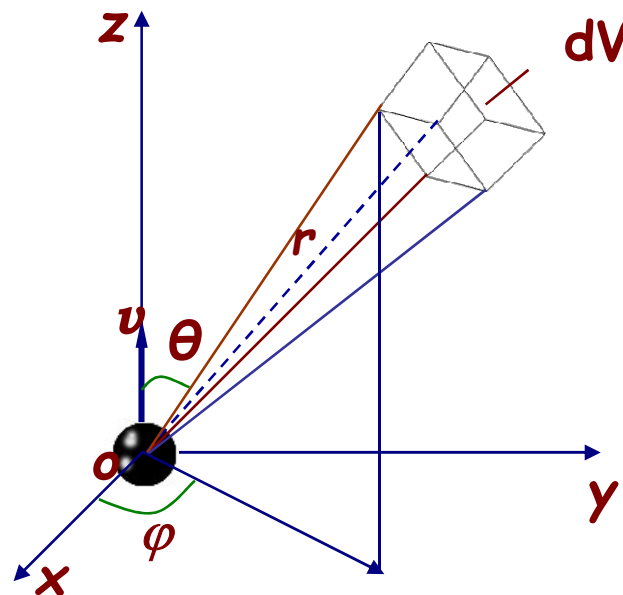
$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



该结果与**练习题17-9**所得结果完全相同。

课堂练习题17-13:

如图，设电子是一个半径为 R 的小球，并假定电荷均匀分布在其表面上，当电子以速度 \mathbf{v} ($v \ll c$) 运动时，在电子会周围无限大的空间内建立电磁场。求：此时电磁场中的总磁能。



解： 因为 $v \ll c$ ，所以离电子瞬时位置 \mathbf{r} 处的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin \theta}{r^2}$$

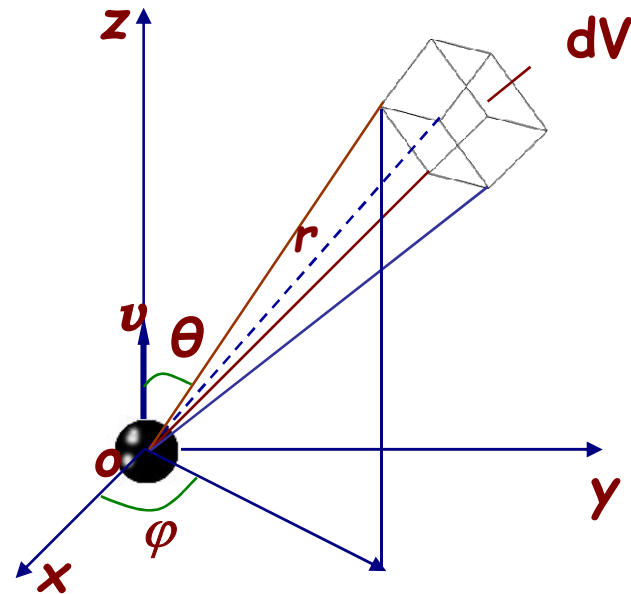
设电子沿 \mathbf{z} 轴运动，为简便计算，用图示的球面坐标。则离电子瞬时位置 \mathbf{r} 处的体积元为：

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

在该体积元中的磁能为：

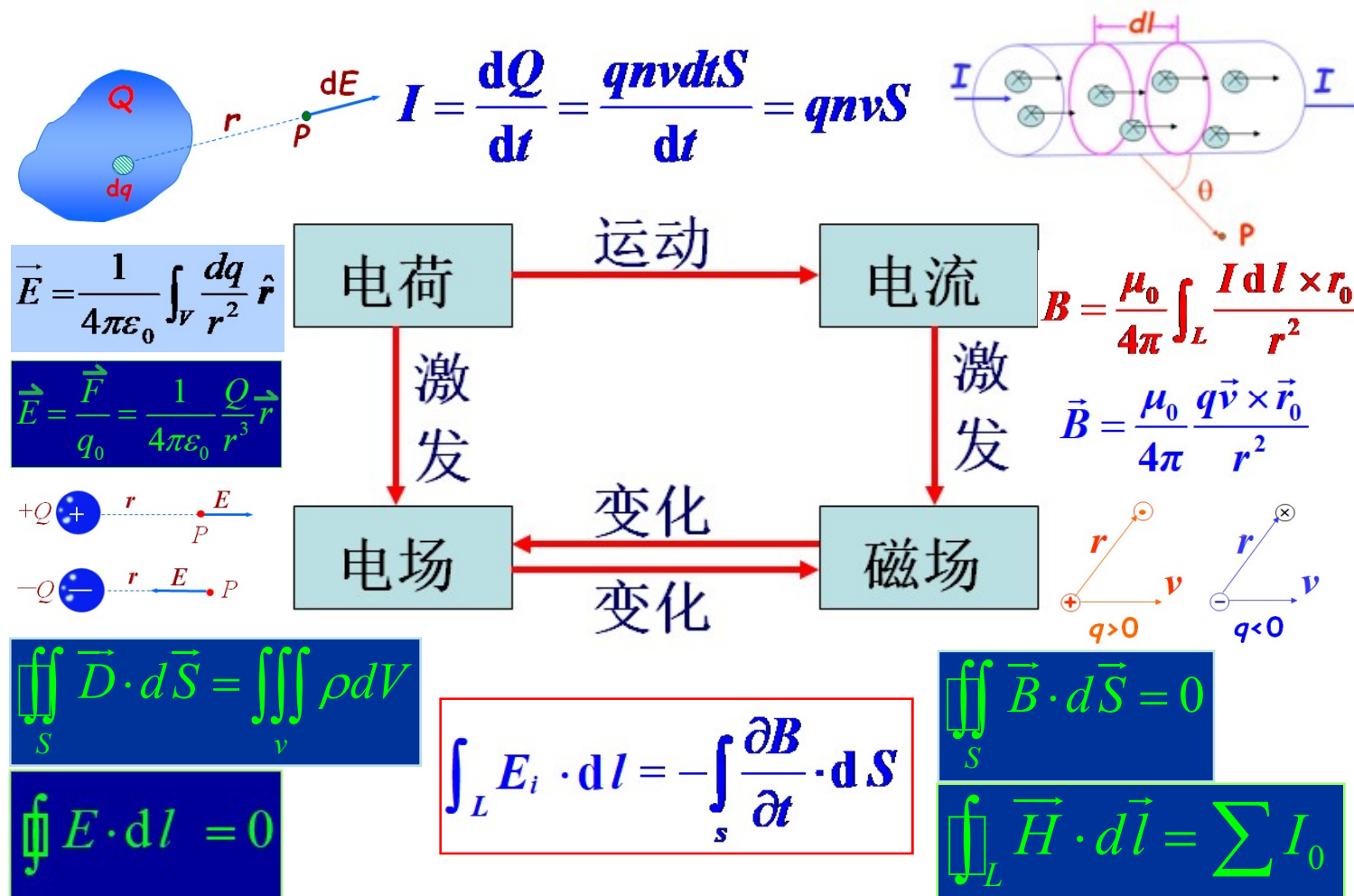
$$dW_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

在电子本身体积外的全部空间，对上式进行积分，得运动电子周围空间的总磁能为：



$$\begin{aligned}
W_m &= \iiint_V dW_m \\
&= \frac{\mu_0}{2} \iiint_V \left(\frac{e v \sin \theta}{4 \pi r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{\mu_0}{32 \pi^2} e^2 v^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{\mu_0}{32 \pi^2} e^2 v^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty \left[-\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) \right]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\mu_0}{32 \pi^2} e^2 v^2 \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{4}{3} \right] [2\pi] = \frac{\mu_0}{12 \pi} \frac{e^2}{R} v^2
\end{aligned}$$

电场和磁场的本质及内在联系



电磁感应 【学习重点】

- 1.深刻理解楞次定律、电动势、电势差、感应电流、动生/感生电动势、涡旋电场、自感系数、磁能等**概念**。
- 2.熟练运用法拉第电磁感应定律、动生/感生电动势的定义等求解电磁感应的**相关问题**。

<动生电动势与感生电动势>

法拉第电磁感应定律和涡旋电场、自感

第七次作业 电磁感应下

P325-327:

17-10

17-11

17-12

17-14

17-15

17-16

17-18

17-26