用单摆测量重力加速度

单摆实验

Simple pendulum

主讲教师：郭红丽
浙江大学物理实验教学中心 2022.12

CONTENTS

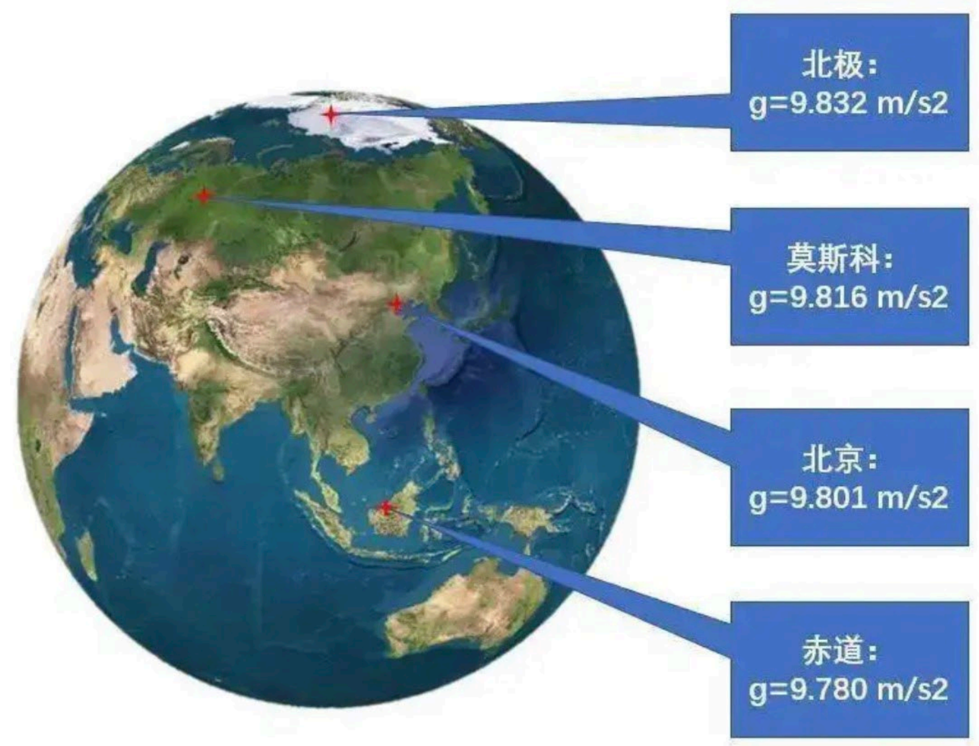
1

EXPERIMENT BACKGROUNDS 实验背景

重力加速度

Gravitational acceleration

重力对自由下落的物体产生的加速度，称为 重力加速度 。
如果以 m表示物体的质量，以 g表示重力加速度，重力 G可表示为 G=mg。
重力加速度是随着时间和空间而不断变化的量，对它的测量可以分为**绝对重力测量**和**相对重力测量**。



https://www.sohu.com/a/428121815_739961

重力加速度

Gravitational acceleration

在高度为H的重力加速度g（1930年国际重力公式）同H和有关

$$g = 978.049(1 + 0.005288\sin^2\varphi - 0.000006\sin^2 2\varphi - 0.0003086H)\text{厘米/秒}^2$$

海平面上g随纬度变化的公式（1967年国际重力公式）

$$g = 978.03185(1 + 0.005278895\sin^2\varphi + 0.000023462\sin^4\varphi)$$

重力加速度g值的准确测定的意义：

计量学、精密物理计量、地球物理学、地震预报、重力探矿和空间科学等。

重力加速度的测量

思考：测量重力加速度有什么办法?

约在1590年，伽利略利用斜面将g的测定改为测定微小加速度a=gsinθ，θ是斜面的倾角。

伽利略·伽利雷（Galileo di Vincenzo Bonaulti de Galilei）（1564年～1642年）意大利天文学家、物理学家和工程师、欧洲近代自然科学的创始人。
伽利略被称为“观测天文学之父”、“现代物理学之父”、“科学方法之父”、“现代科学之父”。

2

EXPERIMENT OBJECTIVE 实验目的

- 根据已知条件和测量 精度的要求，学会应用误差均分原则选用适当的仪器和测量方法；
- 学习累积放大法的原理和应用；
- 分析基本误差的来源，提出进行修正和估算的方法。

3 EXPERIMENT PRINCIPLE 实验原理

1. 公式推导

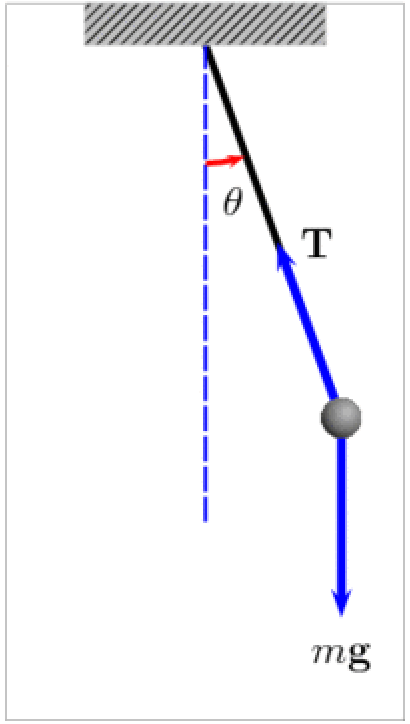
$$\sin\theta=\frac{x}{L}$$

$$f=-mg\frac{x}{L}=-m\frac{g}{L}x$$

$$a=\frac{f}{m}=-w^2x$$

$$f=ma \qquad a=-\frac{g}{L}x$$

$$T={2\pi}/{w}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



10

1. 公式推导

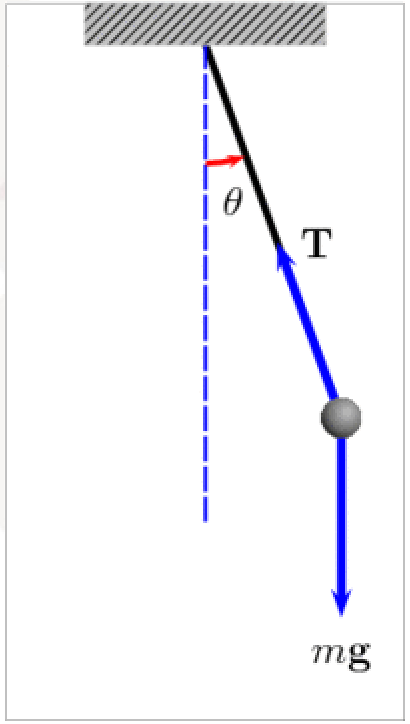
由单摆的一级近似的周期公式，由此通过测量周期T，摆长l求重力加速度.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}sin\theta=0$$

第一类完全椭圆积分：$K(m)=F(\frac{\pi}{2},m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-msin^2\theta}}d\theta$

$$T=4t=4\sqrt{\frac{l}{g}}K(sin^2\frac{\alpha}{2})\qquad \theta_0\ll 1$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\cdots\right)\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



11

2 不确定度均分原理

在间接测量中，每个独立测量的量的不确定度都会对最终结果的不确定度有贡献。如果已知各测量之间的函数关系，可写出不确定度传递公式，并按均分原理，将测量结果的总不确定度均匀分配到各个分量中，由此分析各物理量的测量方法和使用的仪器，指导实验。

一般而言，这样做比较经济合理。对测量结果影响较大的物理量，应采用精度较高的仪器，而对测量结果影响不大的物理量，就不必追求高精度仪器。

2累积放大法

是物理实验中对微小物理量进行测量的放大法之一。

在可以简单重叠的前提下，将其拓展若干倍后再进行测量的方法，称为累计放大法(叠加放大法)。

例：用单摆的振动测量重力加速度，已知：重力加速度 $g=\dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$

单摆的振动周期 $T=(2.007\pm0.003)s$

摆长 $l=(99.93\pm0.12)cm$

求的测量结果。

解：单摆的振动周期T和摆长l为直接测量量，其测量结果已用上例所述的方法获得。
其中

$$u(T)=0.003s, u(l)=0.12cm$$

都为标准不确定度。
①g 的测量结果

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}=\frac{4\times 3.142^2\times 99.93}{2.007^2}=979.7cm/s^2$$

②求合成标准不确定度
对函数两边取对数得：

$$\ln g=\ln 4\pi^2+\ln l-2\ln T$$

对各个自变量求偏导得：

$$\frac{\partial \ln g}{\partial l}=\frac{1}{l} \qquad \frac{\partial \ln g}{\partial T}=-\frac{2}{T}$$

代入合成标准不确定度公式为：

$$\frac{\Delta g}{g}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln g}{\partial l}\right)^2 u^2(l)+\left(\frac{\partial \ln g}{\partial T}\right)^2 u^2(T)}=\sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 u^2(l)+\left(-\frac{2}{T}\right)^2 u^2(T)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{99.93}*0.12\right)^2+\left(\frac{2}{2.007}*0.003\right)^2}=\sqrt{1.44202*10^{-6}+8.93733*10^{-6}}$$

$$=0.0032217$$

$$\Delta g=979.7*0.0032217=3.1563=4cm/s^2$$

③测量结果

$$g=(980\pm 4)cm/s^2$$

那么，问题来了。例题中的数据

$$\frac{\Delta g}{g}=0.0032217=0.4\%$$

如果我们要将此结果，减小到0.1%，如何入手?
现在两项的贡献相当，数量级都是$10e^{-6}$，如果有一项为10^{-8}呢?

再进一步，针对测量摆长部分，如果我们选择高精度的测量仪器，是否可以提高测量精度呢?
我们知道摆长=摆线+摆球半径。摆线长度由于非常长，我们只能用米尺测量。摆球半径可以选择游标卡尺和螺旋测微器。
假如某摆球，半径R约1cm，直径约为2cm，分别用50分度游标卡尺（±0.02mm）和螺旋测微器（±0.004mm）测量6次。分别计算不确定度：

$$u_{(A)}=\sqrt{\frac{1}{6(6-1)}\sum_{i=1}^{6}(R_i-\overline{R})^2}\qquad u_{(B)}=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.02\text{mm}}{\sqrt{3}}=0.01155=0.012$$

$$u_{(A)}=\sqrt{\frac{1}{6(6-1)}\sum_{i=1}^{6}(R_i-\overline{R})^2}\qquad u_{(B)}=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.004\text{mm}}{\sqrt{3}}=0.002309=0.0023$$

$$\Delta R=\sqrt{u_{(A)}^2+u_{(B)}^2}$$

假设，6次测量结果分别为（单位mm）（非真实数据）：

	1	2	3	4	5	6
游标卡尺	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
千分尺	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

那么对于游标卡尺：

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{0.012}{1.00}=0.012=1.2\%$$

那么对于千分尺：

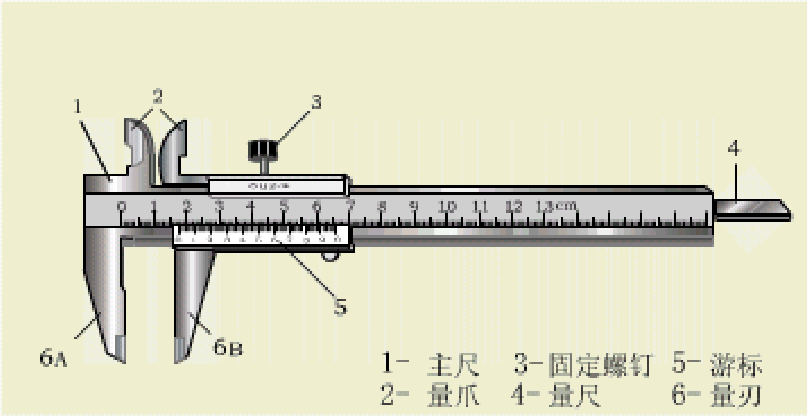
$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{0.0023}{1.00}=0.0023=0.23\%$$

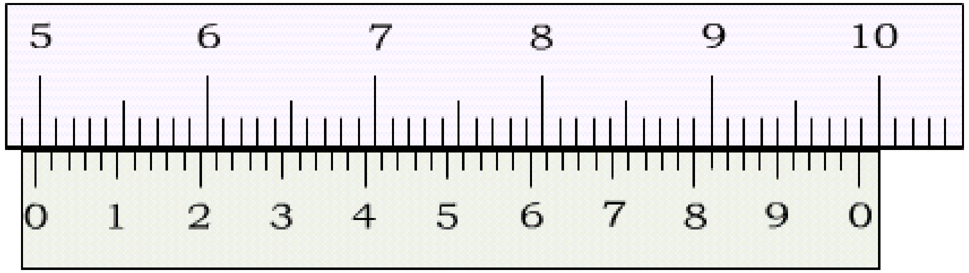
从单一一次测量的角度看，使用高精度测量仪器，确实提高了测量精度。但是如果和其他测量相比较，是否就一定提升很大呢？请大家思考。

4

EXPERIMENT CONTENT 实验内容

1）游标类器具（游标卡尺、分光计度盘、大气压计等），不估读。



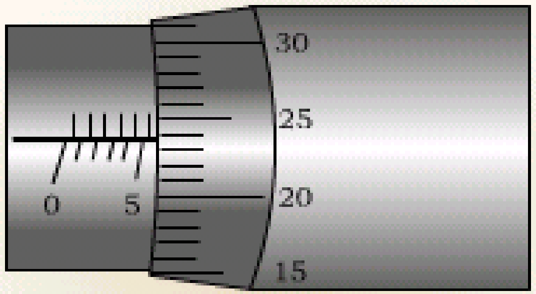


49.86mm

1. 记录零点修正值；
2. 在主尺上读出副尺零线以左的刻度，为整数部分；
3. 找到副尺上与主尺刻线对其的线所对应的格数，与最小分度值相乘，为小数部分。

$$49 + 0.02 \times 43 \text{ mm}$$

2）螺旋测微器，估读一位。



5.737mm

螺纹的螺距0.5mm，可动刻度50个刻度，最小分度为0.01mm。

1. 零点修正，记录零点修正值。
2. 读固定读数。
3. 读可动刻度，注意估读。

$$5.5 + 0.01 \times 23.7 \text{ mm}$$

一. 用误差均分原理设计一单摆装置，测量重力加速度g.

设计要求：

(1) 根据误差均分原理，自行设计试验方案，合理选择测量仪器和方法.

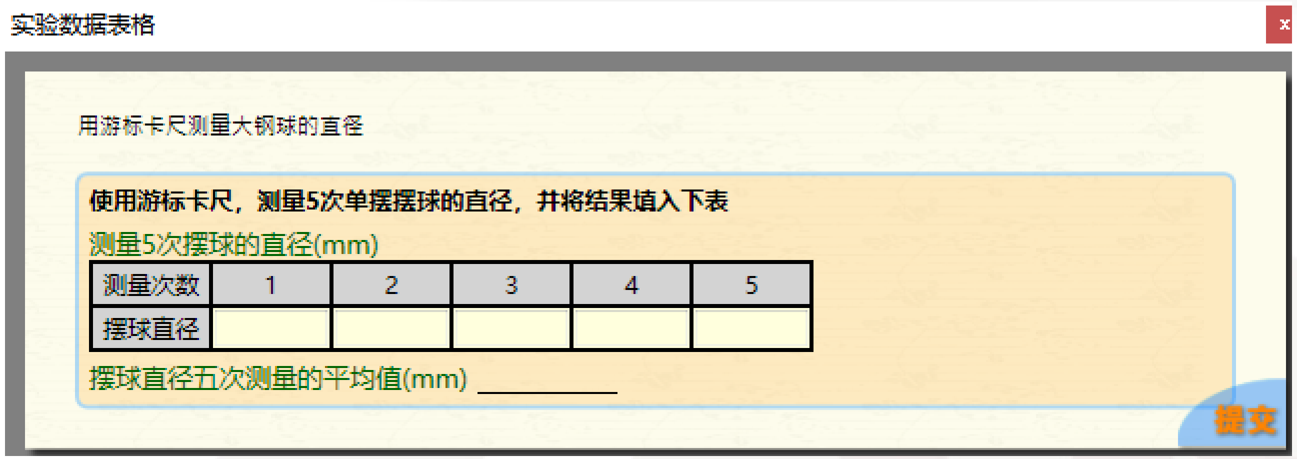
(2) 写出详细的推导过程，试验步骤.

(3) 用自制的单摆装置测量重力加速度g，测量精度要求$\Delta g/g < 1\%$.

用自制的单摆装置测量重力加速度g, 测量精度要求△g/g ＜ 1%.

根据 $$\frac{\Delta g}{g}=\sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 u^2(l)+\left(-\frac{2}{T}\right)^2 u^2(T)}$$ 来分析。

1、游标卡尺的使用
使用游标卡尺，测量5次单摆摆球的直径，记录数据。
2、螺旋测微计的使用
使用螺旋测微计，测量5次单摆摆球的直径，记录数据。
3、电子秒表的使用
使用电子秒表测量单摆摆动5个周期的时间，记录数据。
4、根据不确定度均分原理，设计单摆测量重力加速度g
（1）根据误差均分原理,自行设计试验方案,合理选择测量仪器和方法.
（2）测量重力加速度g,测量精度要求$\Delta g/g < 1\%$.
可提供的器材及参数:
游标卡尺,米尺,千分尺,电子秒表,支架,细线(尼龙线),钢球,摆幅测量标尺(提供硬白纸板自制),天平(公用).
假设摆长$l \approx 70.00cm$;摆球直径$D \approx 2.00cm$;摆动周期$T \approx 1.700s$;
米尺精度$\Delta_米 \approx 0.05cm$;卡尺精度$\Delta_卡 \approx 0.002cm$;千分尺精度$\Delta_千 \approx 0.001cm$;秒表精度$\Delta_秒 \approx 0.01s$;
根据统计分析,实验人员开或停秒表反应时间为0.1s左右,所以实验人员开,停秒表总的反应时间近似为$\Delta t_人 \approx 0.2s$.
5、利用单摆测量重力加速度g
利用实验室提供的单摆仪，调整并确定合适的摆线长度，测量重力加速度



实验数据表格

用游标卡尺测量大钢球的直径

使用游标卡尺，测量5次单摆摆球的直径，并将结果填入下表

测量5次摆球的直径(mm)

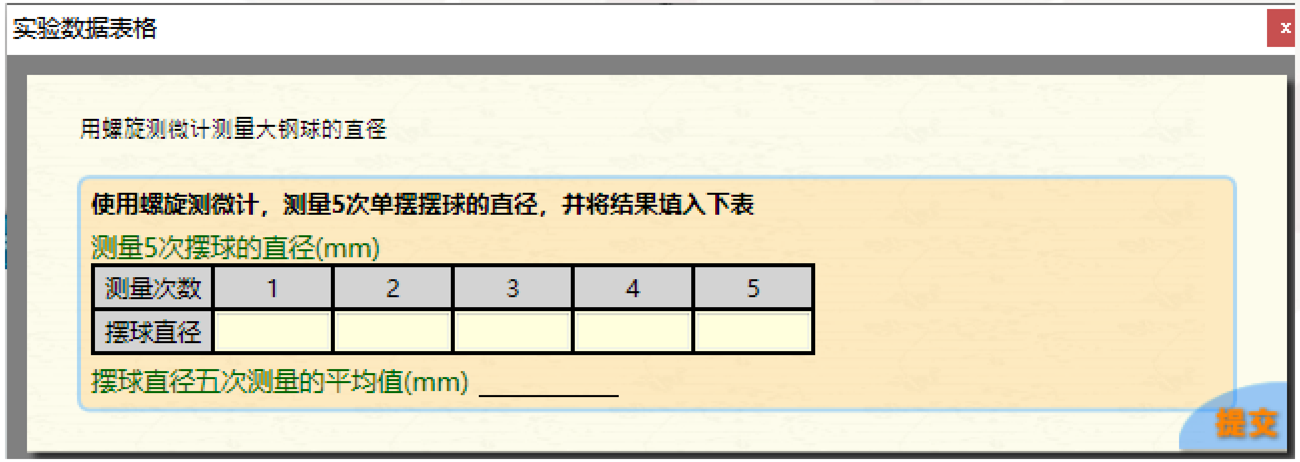
测量次数	1	2	3	4	5
摆球直径					

摆球直径五次测量的平均值(mm) ________

提交

数据处理要求：

1. 有此表格截图；（及时拍照截图）
2. 实验报告里，计算直径的平均值，不确定度；
2. 直径测量结果的完整表达式；
3. 注：50分度游标卡尺仪器误差：0.02mm



实验数据表格

用螺旋测微计测量大钢球的直径

使用螺旋测微计，测量5次单摆摆球的直径，并将结果填入下表

测量5次摆球的直径(mm)

测量次数	1	2	3	4	5
摆球直径					

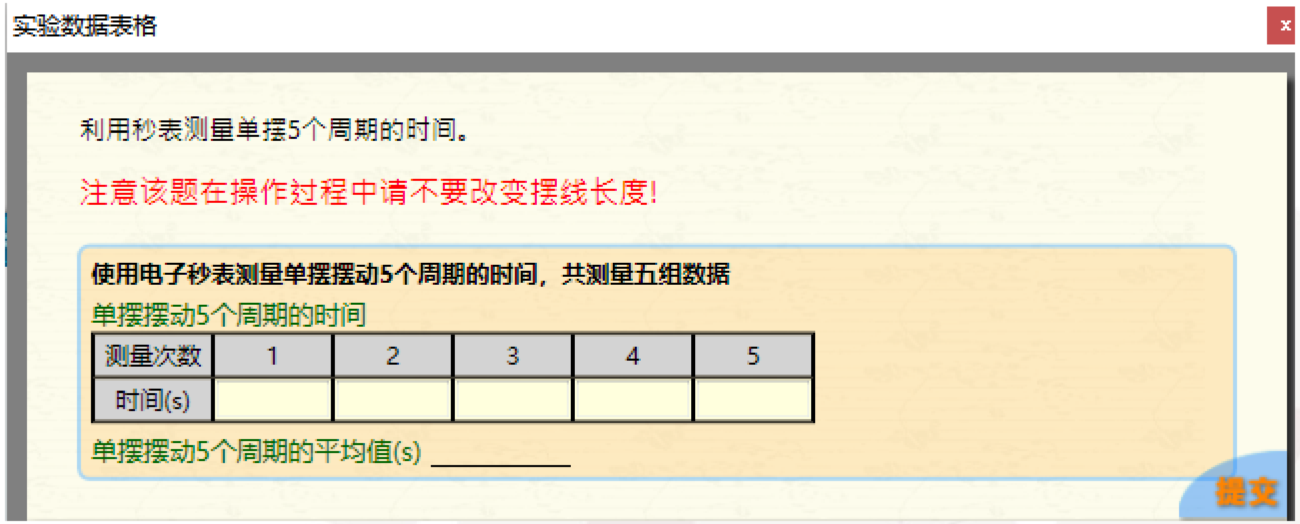
摆球直径五次测量的平均值(mm) ________

提交

数据处理要求：

1. 有此表格截图；
2. 实验报告里，计算直径的平均值，不确定度；
2. 直径测量结果的完整表达式；
3. 注：螺旋测微器仪器误差：0.004mm

4 实验内容 EXPERIMENT CONTENT



实验数据表格

利用秒表测量单摆5个周期的时间。

注意该题在操作过程中请不要改变摆线长度!

使用电子秒表测量单摆摆动5个周期的时间，共测量五组数据

单摆摆动5个周期的时间

测量次数	1	2	3	4	5
时间(s)					

单摆摆动5个周期的平均值(s) ________

提交

数据处理要求：

1. 有此表格截图；
2. 实验报告里，计算5个周期的总时间平均值，不确定度；
2. 实验报告里，5个周期的总时间的测量结果的完整表达式；
3. 注：仪器误差从实验平台数据里看：0.004mm

实验数据表格

实验室提供的单摆仪，摆长70cm

摆球的直径D≈2.00cm

摆动的周期T≈1.700s

米尺的精度为1mm

游标卡尺的精度为0.02mm

千分尺的精度为0.001mm

电子秒表的精度为0.01s

根据统计，实验人员开或停秒表的反应时间为0.1s。

单摆公式适用。

要使重力加速度的最大不确定度，设计需测量多少个周期的时间。

设计需要测量的周期数，并将测量数据填入下表

测量的周期数N= ________

单摆摆动N个周期的时间

测量次数	1	2	3	4	5
时间(s)					

提交

秒表精度△秒≈0.01s;根据统计分析,实验人员开或停秒表反应时间为0.1s左右,所以实验人员开,停秒表总的反应时间近似为$\triangle t_{人}$≈0.2s.

数据处理要求：

1. 实验报告里，要有必要的计算过程，详细步骤，说明为什么选择N次，满足对不确定度的要求。
2. 测量线长，一次，实验报告里，写出完整表达式；
3. 有此表格截图；

注：这里摆长约为70cm，自己再测一下，表格里没有这项，自己写在实验报告里。

实验数据表格

单摆公式适用。

实验室提供的单摆仪，游标卡尺、米尺、电子秒表。请测量本地的重力加速度g，并计算重力加速度的不确定度。将测量实验数据填入表格内。

调整并确定一个合适的摆线长度，然后开始测量实验数据。注意在之后的数据测量过程中，请勿再次调整摆线的长度。

线长(mm) ________

摆球直径(mm) ________

请设计出需要测量的摆动周期数N ________

测量nT的时间(s) ________

计算重力加速度值g(m/s²) ________

提交

数据处理要求：

1. 测量线长，一次，写出完整表达式；
2. 摆球直径可以用1或者2里的数据；
3. 有此表格截图；

注：可以使用同4一样的摆长。

注意：在实验报告里，实验数据处理的最终结果需要计算不确定度并写出最终结果表达式。

$$g = (\bar{g} \pm \Delta g) m/s^2$$

秒表精度△秒≈0.01s;根据统计分析,实验人员开或停秒表反应时间为0.1s左右,所以实验人员开,停秒表总的反应时间近似为$\Delta t_{人}$≈0.2s.

5 EXPERIMENT INSPIRATION 实验思考

思考题：

1.测量单摆周期时要测几十个周期的时间，而不是一个，为什么？

2.当测量不同精确度的测量对象时，根据什么原理选择测量仪器？

3.调研重力加速度与你专业知识的关联。

本实验分数：

实验操作30%+实验报告70%

实验操作在奥锐虚拟实验平台上完成，在实验平台上单摆实验的满分为100。