

# 第十八章 麦克斯韦方程 电磁波

光的电磁波理论

麦克斯韦方程组

电磁波的基本特性

# 第十八章 麦克斯韦方程 电磁波

熟练掌握：

**18.1** 位移电流；

**18.2** 麦克斯韦方程。

一般了解：

**18.3** 电磁波；

**18.4** 电磁波谱。

## ➤ 麦克斯韦(Maxwell, James Clerk)

天文学、数学和物理学家

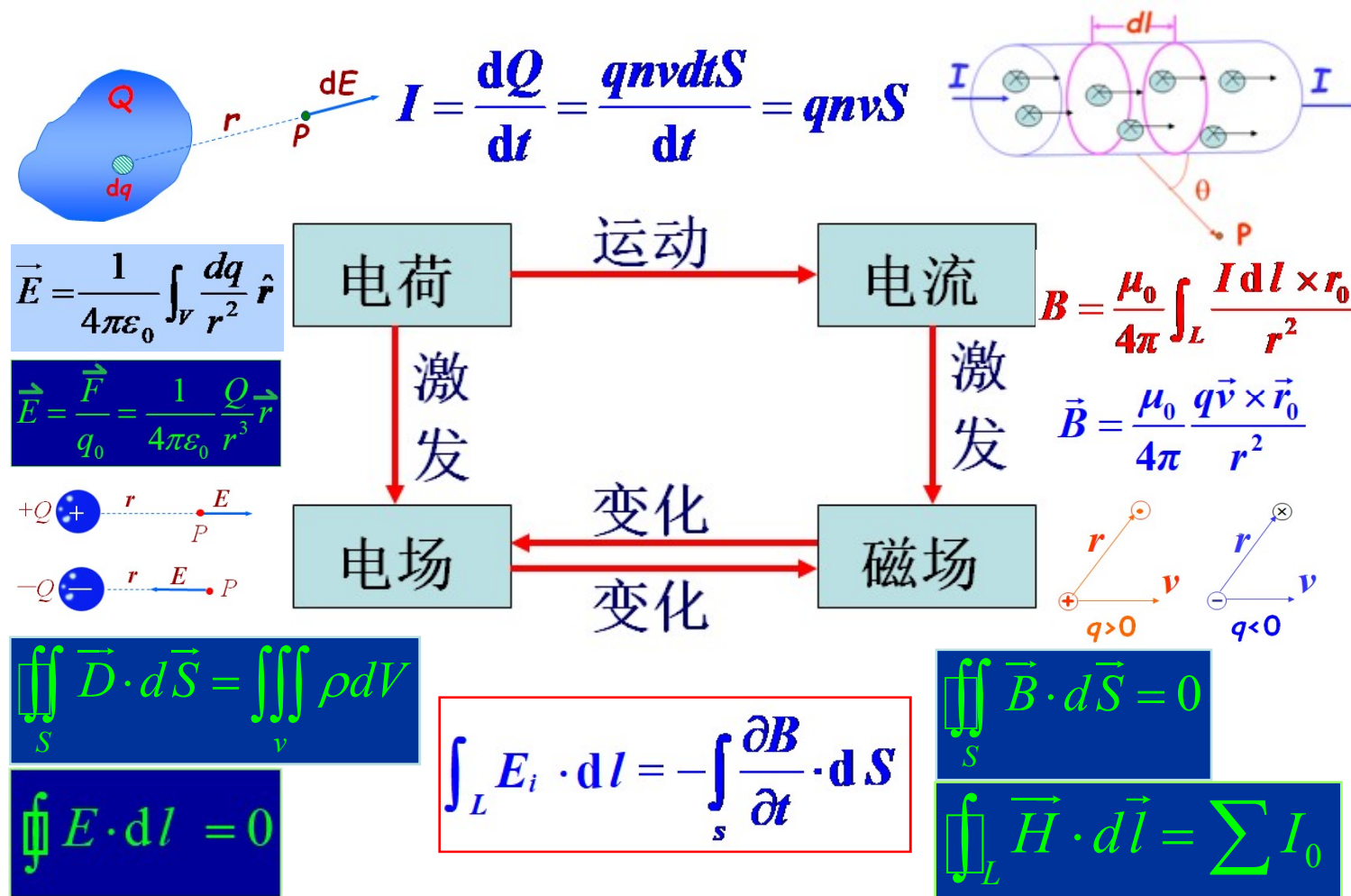
主要成就：

- 1) 将统计学的方法引入到气体分子运动论；
- 2) 发展了光的电磁波理论，将磁学、电学和光学的所有现象统一起来并预言电磁波的存在。



1831-1879

## ➤ 电场和磁场的本质及内在联系



## ➤ 电场和磁场的本质及内在联系

电场与磁场之间可以相互转化，这反映电场和磁场是同一物质，即是电磁场的两个方面。

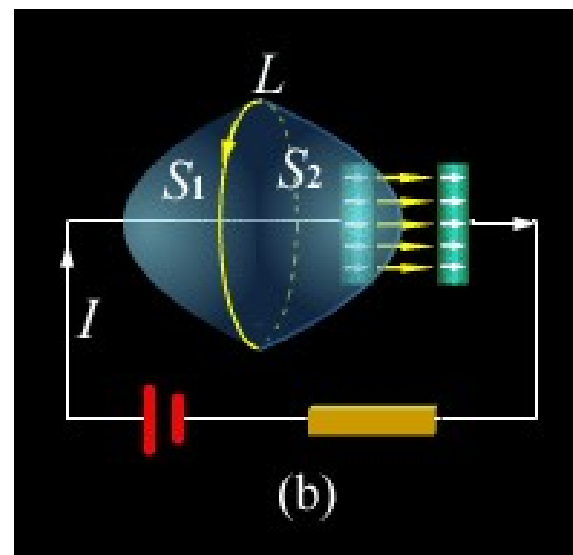
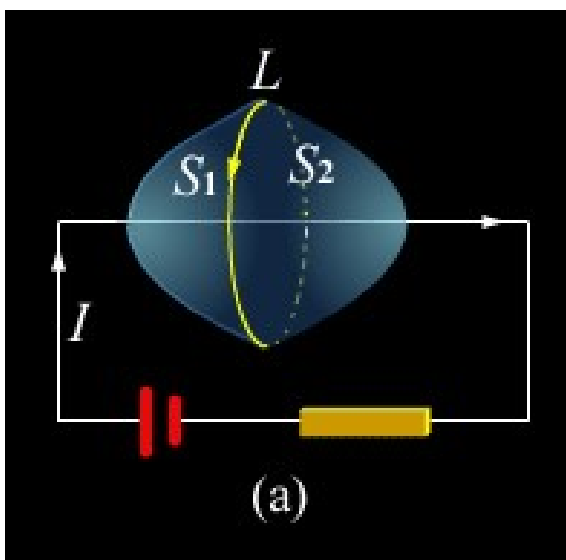
法拉第电磁感应定律涉及到变化磁场能激发电场。麦克斯韦在研究了安培环路定理运用于随时间变化的电路电流的矛盾之后，提出了变化的电场激发磁场的概念，从而进一步揭示了电场和磁场的内在联系及依存关系。

## --- 麦克斯韦方程组与电磁波

## § 18-1 位移电流

### 1. 位移电流

对于稳恒电流的电路  
环路定理是成立的！



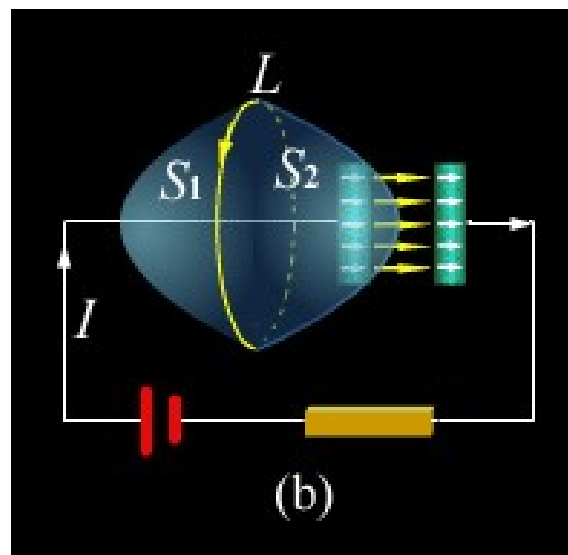
对于非稳恒电流电路  
环路定理是否成立？

讨论一下电流中平行板电容器的充电过程。

图中 $\mathbf{S}_1$ 、 $\mathbf{S}_2$ 组成闭合曲面，对此二曲面分别作环路积分：

对曲面 $\mathbf{S}_1$ ：
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

对曲面 $\mathbf{S}_2$ ：
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$



环路定理只适用于稳恒电流电路，而在不稳定条件下，环路定理是不适用的。

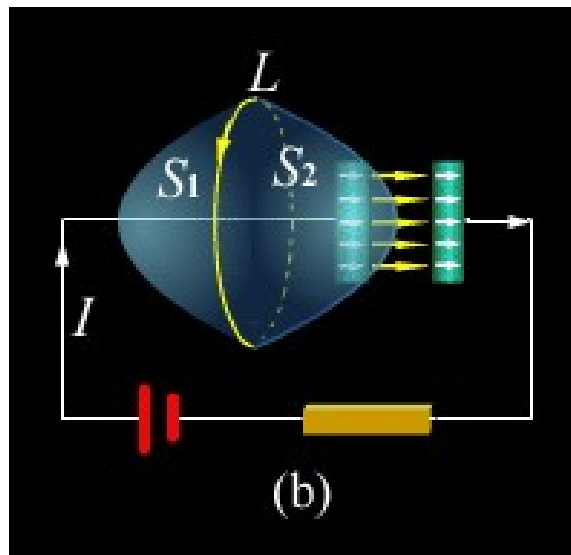
引起的原因是传导电流不连续。

在电容器充放电时， $I$ 在极板上被截断，但电荷量 $q$ 及面密度 $\sigma$ 随时间变化，期间的电位移 $D$ 及电位移通量 $\varphi_D = SD$ 也随时间而改变。

设电容器极板面积为 $S$ ，  
电荷面密度为 $\sigma$ ，则充放电时：

$$I = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

设极板上电荷密度为 $\sigma$ ，则此时： $D = \sigma$





所以

$$I = S \frac{d\sigma}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$

**dD/dt**在充电时与电场方向一致，放电时与电场方向相反；无论充放电都与电流方向一致。

**Maxwell**提出：变化的电场可看作是一种电流——**位移电流**。

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad I_d = \frac{d\phi_d}{dt}$$

电场中某点的**位移电流密度**等于该点**电位移矢量的时间变化率**。通过电场中某截面的**位移电流**等于通过该截面的**电位移通量的时间变化率**

电位移通量的一般表达式： $\phi_d = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

若曲面 $S$ 不随时间变化，位移电流可表达为：

$$I_d = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

---

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad I_d = \frac{d\phi_d}{dt}$$

电场中某点的位移电流密度等于该点电位移矢量的时间变化率。通过电场中某截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量的时间变化率

## 2. 全电流的安培环路定理

在充电电路中，可以引进全电流的概念：

$$I_{\text{全}} = \sum I + I_d$$

可以证明全电流在任何情况下总是连续的。

证：将高斯定理推广到一般情况：

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\frac{d}{dt} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$$

将上式代入电荷守恒定律：流出闭合曲面的电量，等于闭合面内电量的减少。

$$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$$

此式说明全电流是连续的。

非稳恒情况下的安培环路定理称为全电流的安培环路定理或全电流定律：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + \frac{d\phi_D}{dt} = \sum I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

在充电回路中的 $\mathbf{S}_2$ 面内应用全电流定律:

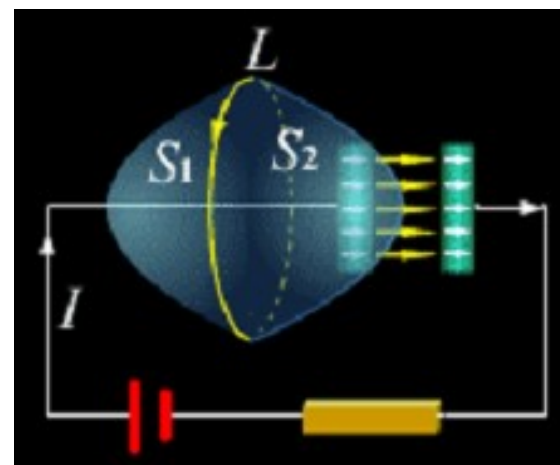
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_d = \frac{d\phi_D}{dt} = I$$

$$\frac{d\phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int \sigma \cdot ds = \frac{dq}{dt} = I$$

在充电回路中的 $\mathbf{S}_1$ 面内应用全电流定律:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

以上两式一致,  
解决了前述矛盾!



### 3.位移电流的性质

**1)**法拉第电磁感应定律说明“变化的磁场激发涡旋电场”，而位移电流说明“变化的电场也能激发涡旋磁场”；两者相互联系，形成了统一的电磁场。

**2)**电位移变化引起的位移电流可以在导体、真空或介质中存在。在导体中通常以**传导电流**为主，在介质中以**位移电流**为主。**两者异同点：**  
**在激发磁场方面是相同的，但形成机理不同！**

### 3.位移电流的性质

3)位移电流所激发的磁场矢量与变化的电场矢量组成右手螺旋关系。

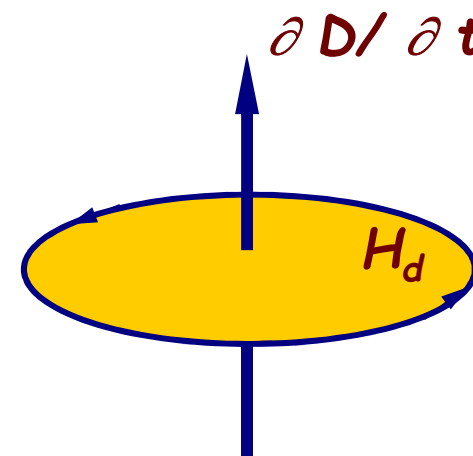
在电介质中： $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$

位移电流密度为：

$$\mathbf{j}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

纯位移电流

与极化电荷的运动有关



## § 18-2 麦克斯韦方程

➤ Maxwell电磁场理论的主要内容：

1) 除静止电荷激发无旋电场外，变化的磁场也将激发涡旋电场；

2) 变化的电场和传导电流一样将激发涡旋磁场。

### 1. Maxwell方程组

➤ Maxwell方程组的积分形式：

1) 电场的性质

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$



在任何电场中，通过任何封闭曲面的电位移通量等于闭合面内自由电荷的总量。

## 2)磁场的性质

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

在任何磁场中，通过任何封闭曲面的磁通量始终为零。

## 3)变化的电场和磁场的联系

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

因在任何磁场中，磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以此闭合曲线为边界的任意曲面的全电流。

#### 4)变化磁场和电场的联系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

在任何电场中，电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过此曲线所包围面积的磁通量的时间变化率的负值。

## ➤ Maxwell方程组的微分形式\*

向量微分算子:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

散度:  $\nabla \cdot \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

旋度:  $\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k})$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

## 2. Maxwell微分方程组

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

在应用**Maxwell**方程解决实际问题时，常与表征介质特性的量介电常数 $\epsilon$ 、磁导率 $\mu$ 以及电导率 $\gamma$ 发生联系，因此常用到介质方程：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

注：**Maxwell**方程在高速领域仍适用，但在微观领域不完全适用，为此发展了量子电动力学

### 3.总结

1)电场的性质

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

2)磁场的性质

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3)变化的电场和磁场的联系

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

4)变化的磁场和电场的联系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

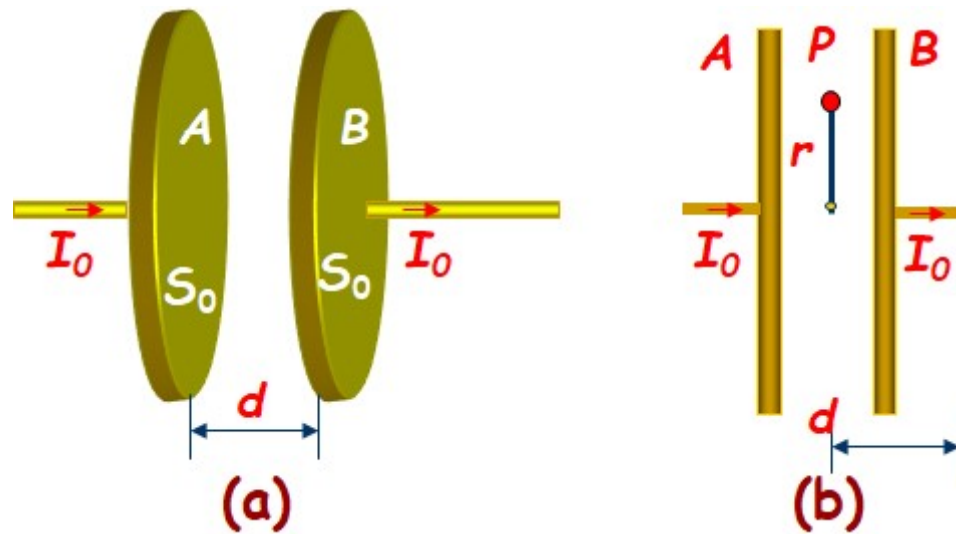
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

介质方程

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

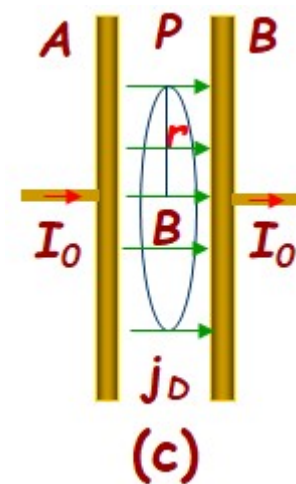
### 课堂练习题18-1:

如图(a)所示，两个面积为 $S_0$ 的大圆盘组成一间距为 $d$ 的平行板电容器，用两根长导线垂直地接在两个圆盘的圆心。今用可调电源使该电容器以恒定电流 $I_0$ 充电，求：1) 电容器中的位移电流密度；2) 电容器中 $P$ 点(如图(b))的磁感应强度。



**解：**1)由全电流概念可知，全电流是连续的。电容器中位移电流密度 $j_D$ 的方向应如图(c)所示，其大小为：

$$j_D = \frac{I_0}{S_0}$$



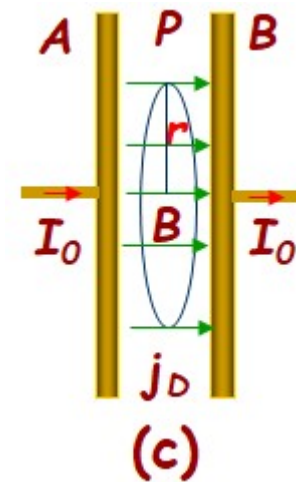
**另：**通过电源给电容器充电时，使电容器极板上电荷随时间变化，从而使极板间电场发生变化。因此，也可以这样来求  $j_D$ ：

$$I_0 = \frac{dQ_0}{dt} = \frac{d}{dt}(S_0 \sigma_0)$$

又知  $\sigma_0 = D$

因此  $I_0 = S_0 \frac{dD}{dt} = S_0 j_D$

所以  $j_D = \frac{I_0}{S_0}$



**2)**由题意可知，导电流和位移电流呈轴对称分布，故板间磁场***B***也呈轴对称分布，所以过***P***点的***B***线为圆心在对称轴上的圆，如图**(c)**所示。

根据全电流安培环路定理：



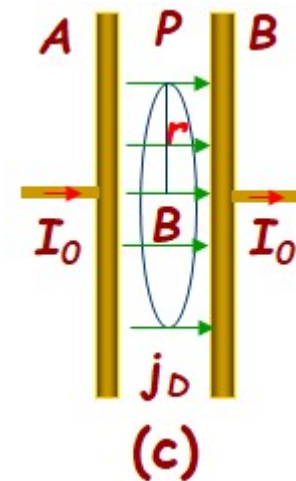
将  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S}$

用于此**B**线上，有：

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \mu_0 \int_s (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \int_s \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \mu_0 j_D \pi r^2 = \mu_0 \frac{I_0}{S_0} \pi r^2 \end{aligned}$$

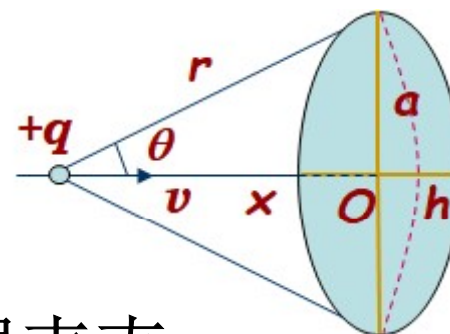
得  $B 2\pi r = \mu_0 \frac{I_0}{S_0} \pi r^2$

所以  $B = \mu_0 \frac{I_0}{2S_0} r$



## 课堂练习题18-2:

如图所示，电荷 $+q$ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 向 $O$ 点运动( $+q$ 到 $O$ 点的距离以 $x$ 表示)。在 $O$ 点处作半径为 $a$ 的圆，圆面与 $\boldsymbol{v}$ 垂直。求：通过该圆面的位移电流和圆周上各点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 。



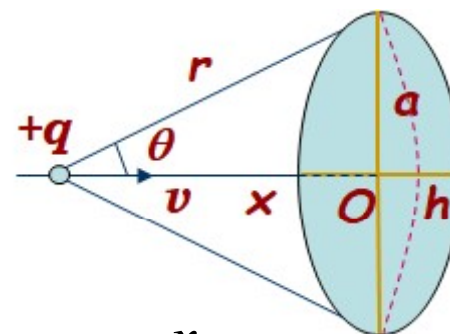
**解：**1) 电荷在其周围会激发电场；

另一方面，电荷是运动的，根据麦克斯韦假设此时随时间变化的电场又激发磁场。

设 $t$ 时刻穿过圆面上的电位移通量为：

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

为计算简便，可以做一个球冠，球心为 $q$ ，半径为 $r$ ，底面是半径为 $a$ 的小圆，球冠上各点 $D$ 的大小相等，穿过题意圆面的电位移通量与穿过球冠的电位移通量相等。



$$\begin{aligned}\Phi_D &= \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = DS_{\text{球冠}} = \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r \cdot h \\ &= \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r (r - r \cos \theta) = \frac{q}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\end{aligned}$$

代入到位移电流的定义式，得：

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{q}{2} \cdot \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \frac{dx}{dt} = \frac{qa^2}{2r^3} v$$

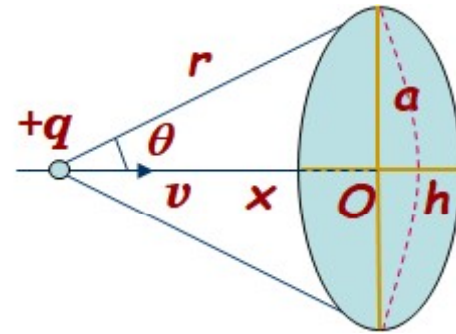
2)取半径为 $a$ 的圆为积分回路 $L$ ，根据全电流的安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_D = \frac{qa^2}{2r^3}v$$

因 $+q$ 运动沿圆面的轴线，系统具有对称性，所以环路上各点的 $H$ 大小相等，即：

$$H \cdot 2\pi a = \frac{qa^2}{2r^3}v$$

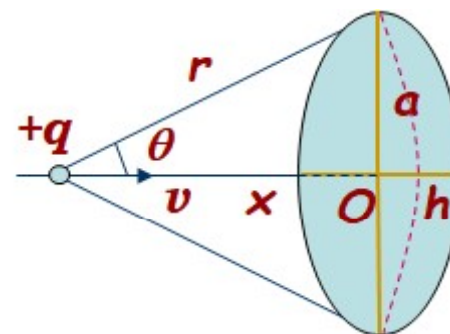
$$H = \frac{qa}{4\pi r^3}v = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \theta$$



得：  $B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin \theta$

写成矢量形式有：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$



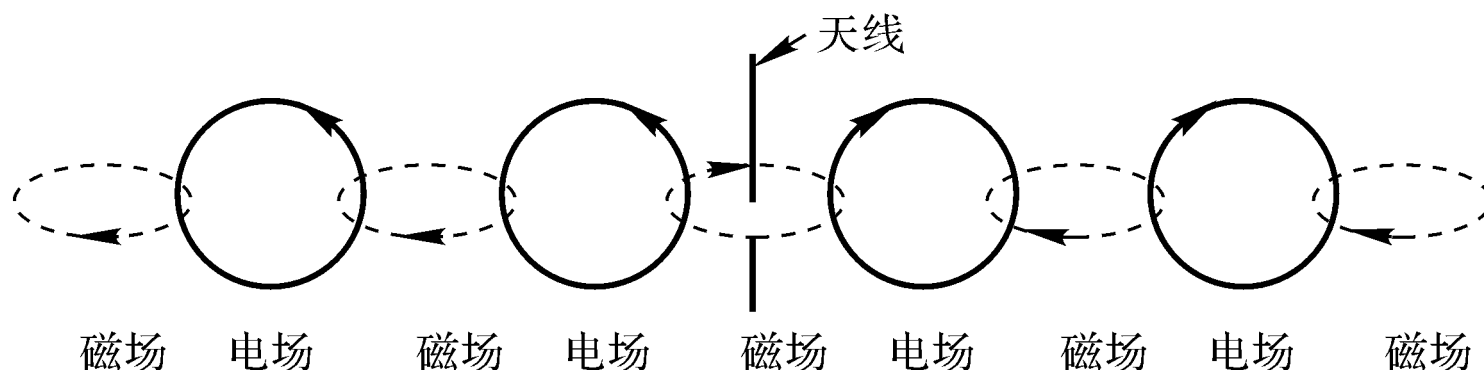
---这正是运动电荷产生的磁场公式！

## § 18-3 电磁波

### ➤ Maxwell电磁场理论的最大成就

--- 预言了电磁波的存在

变化的电场和变化的磁场不断地交替产生，由近及远以有限速度在空间传播，形成**电磁波**。



---该预言在**1889**年由赫兹实验证实。

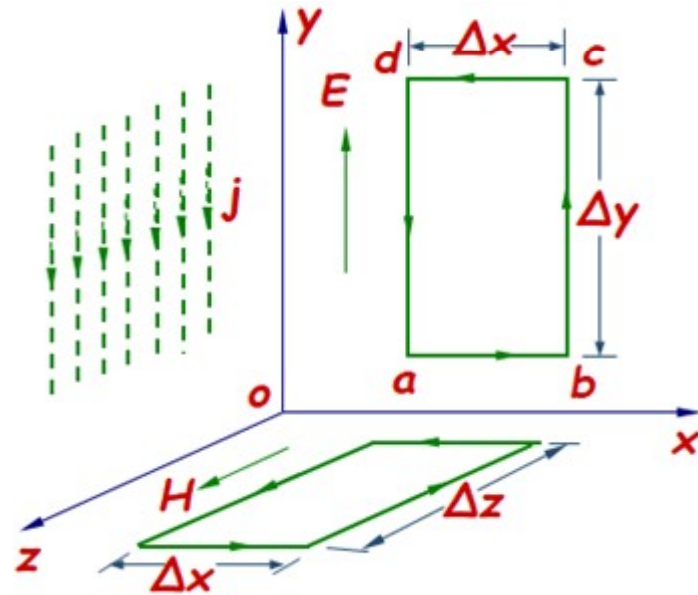
# 1.电磁波的波动方程

考虑一种理想化的波动模型—平面简谐电磁波

设在 $yz$ 平面上有一无限大均匀带电薄板沿 $y$ 轴做简谐振动，从而形成无限大均匀载流平面。

这是一种理想化的简谐波源，其产生的 $H$ 平行 $z$ 轴，产生的 $E$ 平行 $y$ 轴，因此可设为：

$$\vec{H} = \vec{H}(x, t) \quad \vec{E} = \vec{E}(x, t)$$

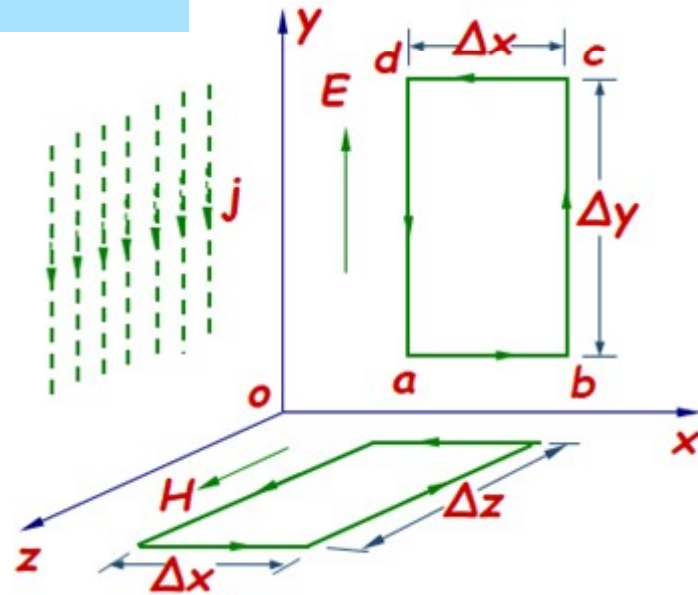


**t**时刻， $x \sim x + \Delta x$ 的两相邻平面上， $E \sim E + \Delta E$ 。在 **xoy** 平面内，取边长  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  的无限小矩形回路 **abcd**，有法拉第电磁感应定律：

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

**E** 的方向与路径 **ab**、**cd** 都垂直，故 **E** 的环流：

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= (E + \Delta E)\Delta y - E\Delta y \\ &\approx \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$





当矩形回路 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 很小时， $\mathbf{B}$ 可视为相同：

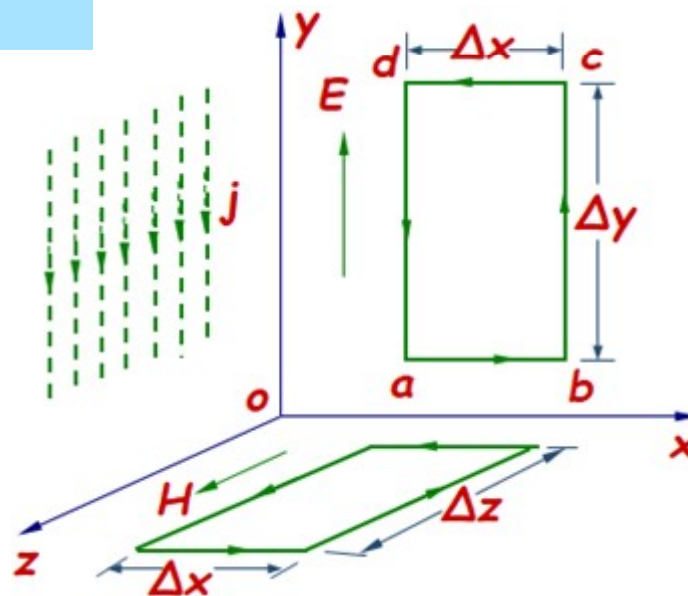
$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\Delta x\Delta y$$

则有：

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial B}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

代入法拉第电磁感应定律，且 $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ ，得：

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

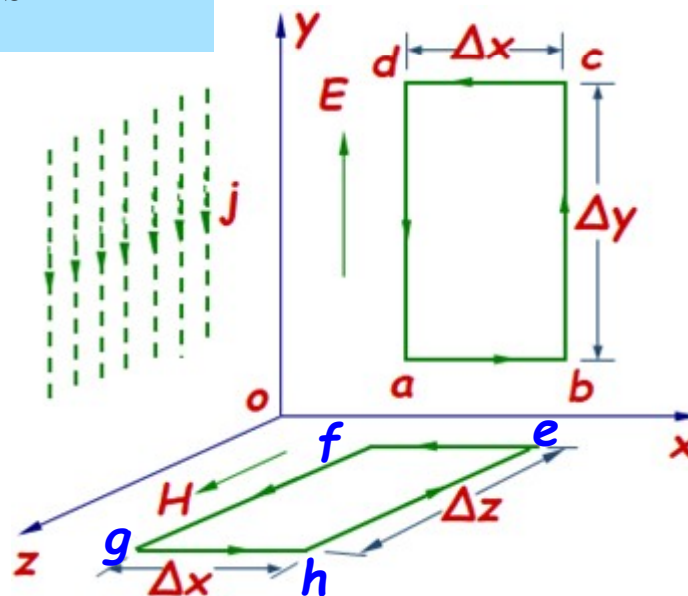


$t$ 时刻,  $x \sim x + \Delta x$  的两相邻平面上,  $H \sim H + \Delta H$ 。在  $xoz$  平面内, 取边长  $\Delta x$ 、 $\Delta z$  的无限小矩形回路, 因无传导电流, 有全电流安培环路定理:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$H$  的方向与路径  $ef$ 、 $gh$  都垂直, 故  $H$  的环流:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= (H + \Delta H)\Delta z - H\Delta z \\ &\approx \frac{\partial H}{\partial x} \Delta x \Delta z \end{aligned}$$



当矩形回路 $\Delta x$ 、 $\Delta z$ 很小时， $\mathbf{E}$ 可视为相同：

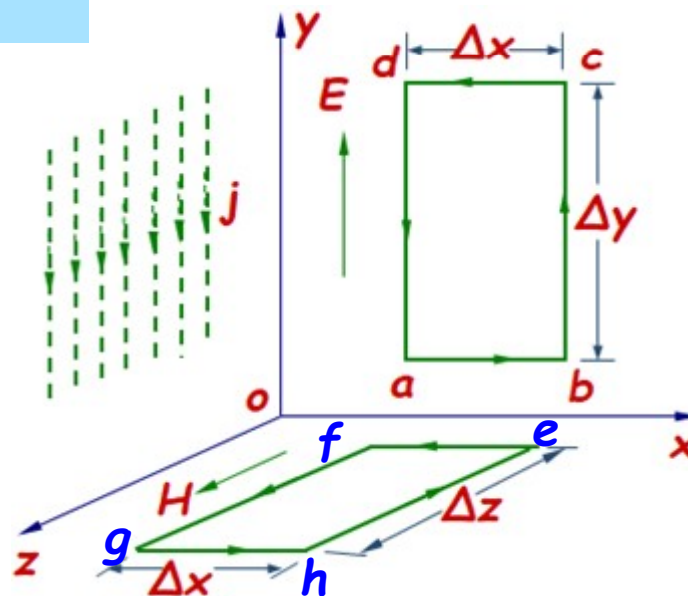
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\Delta x\Delta z$$

则有：

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial E}{\partial t} \Delta x\Delta z$$

代入全电流的安培环路定理，且 $\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}$ ，得：

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2)$$



将(1)对  $x$  求偏导, (2)对  $t$  求偏导, 合并两式有:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

将(1)对  $t$  求偏导, (2)对  $x$  求偏导, 合并两式有:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

以上两式与一维平面波的波动方程的形式完全相同

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

与波动方程对照, 可得电磁波在真空中的传播速度:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

求解平面电磁的  
波动方程，可得：

$$E = E_0 \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$$

将上式代入  
(1)式，可得：

$$H = -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial E}{\partial x} dt = -\frac{E_0 \omega}{\mu_0 u} \int \sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0] dt$$

上式积分，可得：

$$H = H_0 \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$$

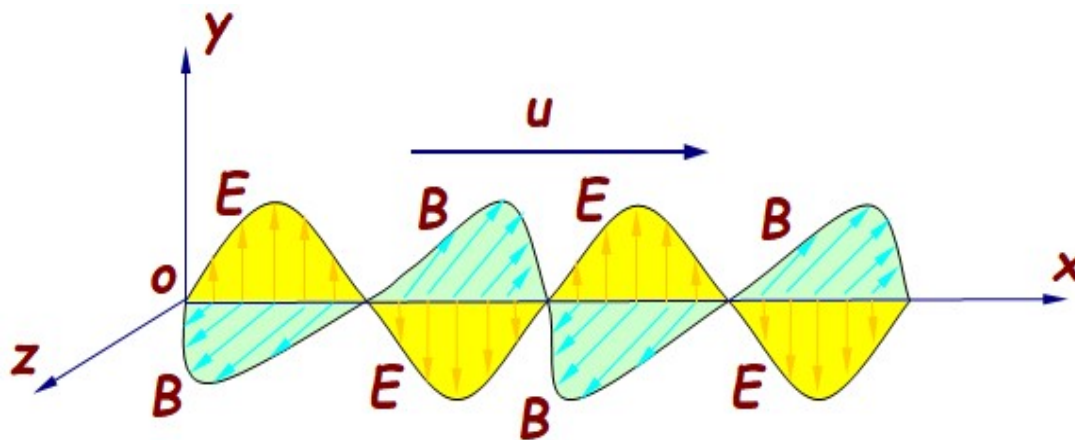
$$H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 u} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0, \quad u = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad \sqrt{\epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$$

对因***H***、***E***为同频  
率、同位相，故：

$$\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$$

## ➤ 电磁波的一般性质

- 1) 电场、磁场与传播方向垂直——横波特性；
- 2) 电场、磁场在各自平面内振动——偏振特性；
- 3) 电场、磁场为同频率、同位相的周期函数；



$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$

## ➤ 电磁波的一般性质

4) 电场、磁场满足关系式:  $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$

5) 电磁波在介质中的传播速度:

$$u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

对于真空的情况:

$$c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

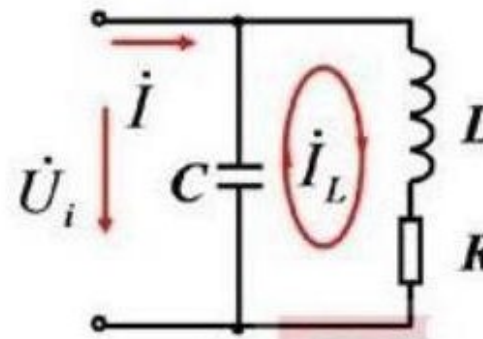
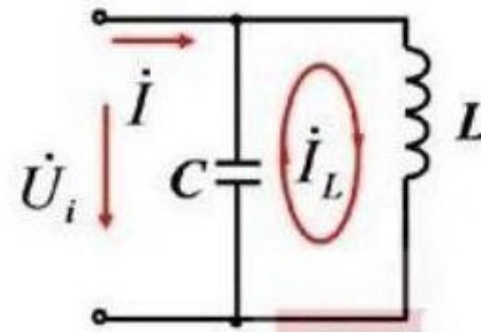
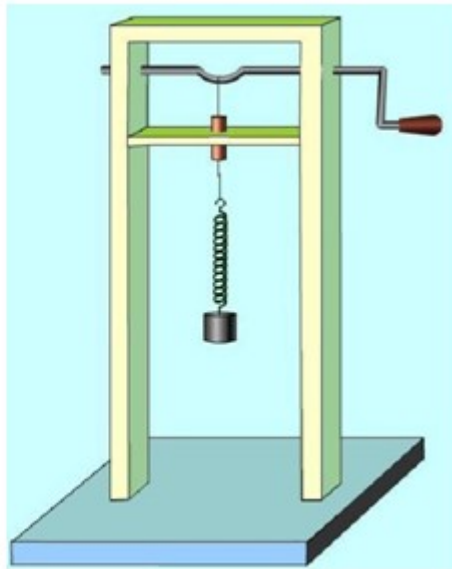
$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \text{ 称为介质的折射率}$$

## 2. 电磁波的产生(电磁振荡)

➤ 1) 无阻尼的自由振荡(LC振荡电路)

➤ 2) 阻尼振荡(RLC振荡电路)

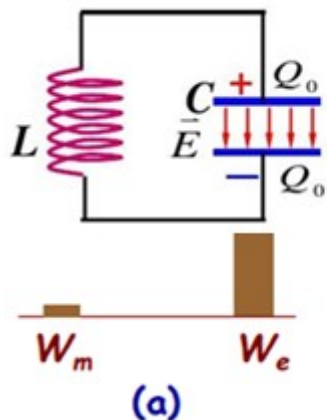
➤ 3) 受迫振荡(电共振)





## ➤ 1) 无阻尼的自由振荡(LC振荡电路)

设  $t=0$  时,  
LC 电路中的  
能量集中于  
电容器两极  
板间。



电容器重新  
放电, 电流  
反向流动,  
 $t=3T/4$  时,  
电能又全转  
变为磁能。

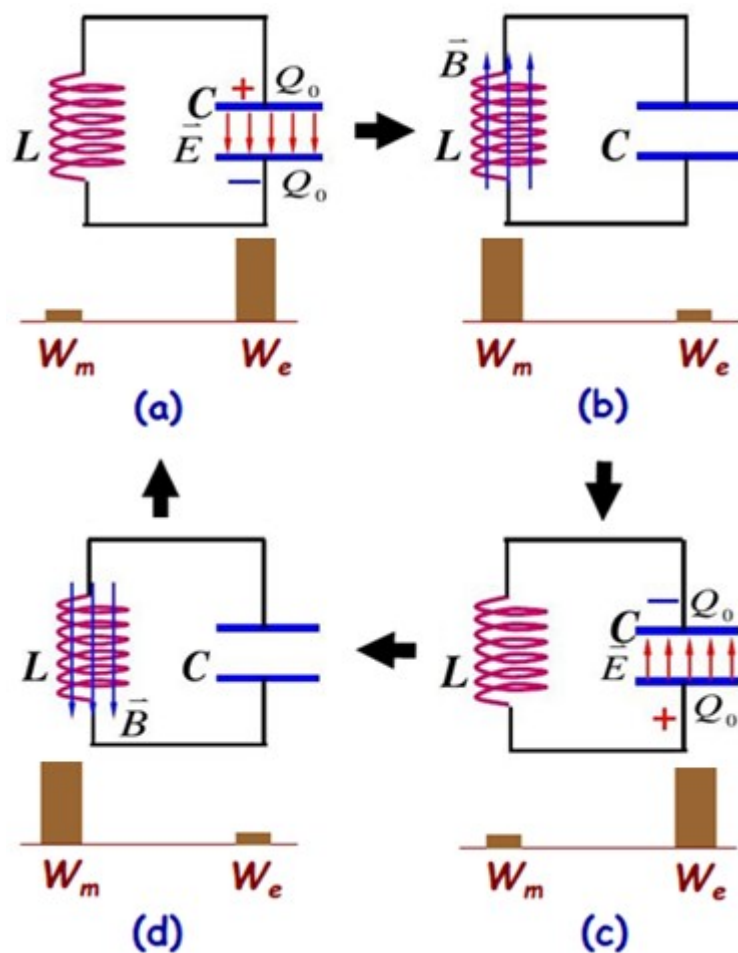
$t=T/4$  时,  
电容器内的  
能量会全部  
转换到线圈  
之内;

$T=T/2$  时,  
电容器经反  
向充电, 能  
量又集中于  
电容器两极  
板间;

## ➤ 1) 无阻尼的自由振荡(LC振荡电路)

设  $t=0$  时,  
LC 电路中的  
能量集中于  
电容器两极  
板间。

电容器重新  
放电, 电流  
反向流动,  
 $t=3T/4$  时,  
电能又全转  
变为磁能。



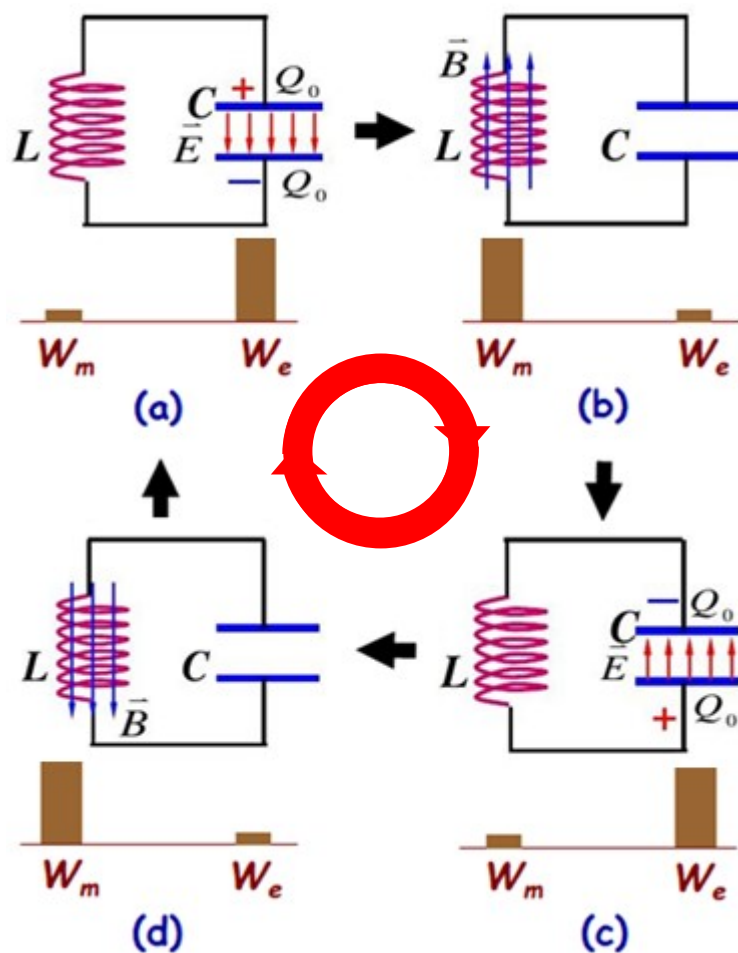
$t=T/4$  时,  
电容器内的  
能量会全部  
转换到线圈  
之内;

$T=T/2$  时,  
电容器经反  
向充电, 能  
量又集中于  
电容器两极  
板间;

## ➤ 1) 无阻尼的自由振荡(LC振荡电路)

设  $t=0$  时,  
LC 电路中的  
能量集中于  
电容器两极  
板间。

电容器重新  
放电, 电流  
反向流动,  
 $t=3T/4$  时,  
电能又全转  
变为磁能。



$t=T/4$  时,  
电容器内的  
能量会全部  
转换到线圈  
之内;

$T=T/2$  时,  
电容器经反  
向充电, 能  
量又集中于  
电容器两极  
板间;

在电磁振荡过程的任一瞬间：

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C}$$

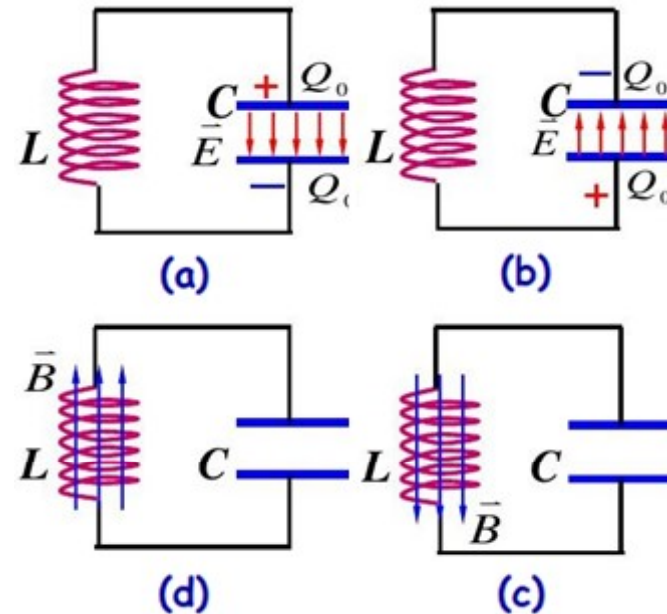
将  $I = dq/dt$  代入可得：

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

---此即谐振微分方程

其解为：  $q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi)$

方程中的  $Q_0$ 、 $\varphi$  由初始条件决定。



振荡的圆频率、周期：

$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

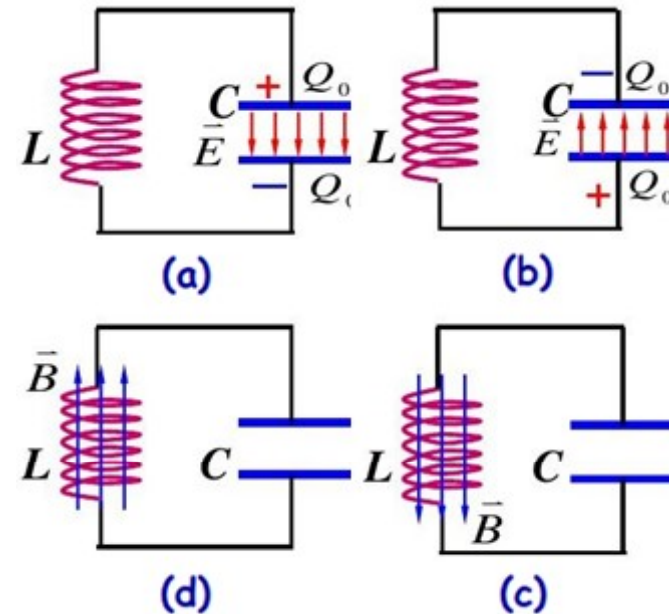
电路中的电流强度：

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= I_0 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

此电流的相位比电量超前 $\pi/2$ 。

无阻尼振荡中任意时刻电容器中的电场能量：



$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

自感线圈中的磁场能量：

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2C} Q_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

任意时刻电路中的总能量：

$$W = W_e + W_m = \frac{Q_0^2}{2C}$$

总电磁能为起振时储存在电容器中的电场能。

## ➤ 2) 阻尼振荡

**LC**电路中串入电阻**R**(能量损耗器件)，此时电路为阻尼振荡电路，任一瞬时的电路方程为：

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{或} \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

当**R**很小(轻阻尼)时，方程的解：

$$q = Q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

当  $\omega_0^2 < \beta^2$  或  $4L < CR^2$  时，电容器将做非周期性放电，电路不产生电磁振荡。

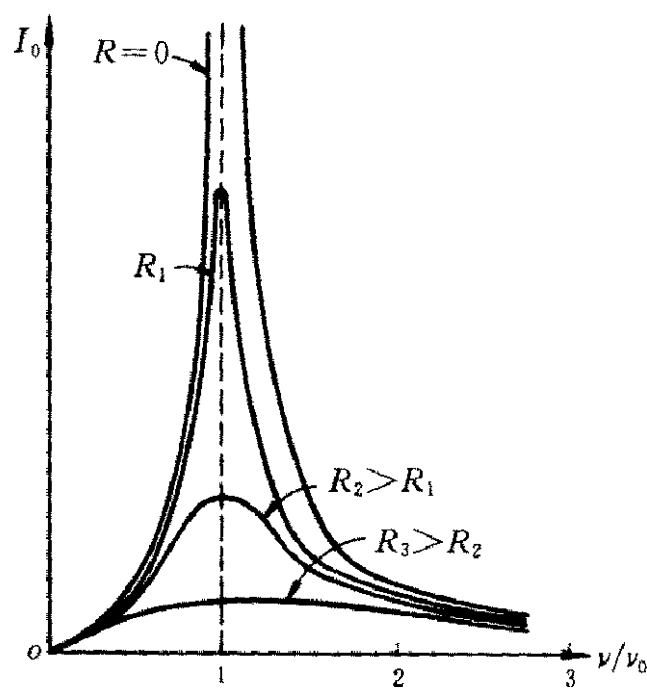
### ➤ 3) 受迫振荡(电共振)

在外界周期性电动势作用下所产生的电磁振荡称为受迫振荡。

当外加电动势的圆频率等于无阻尼自由振荡的圆频率时，即：

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

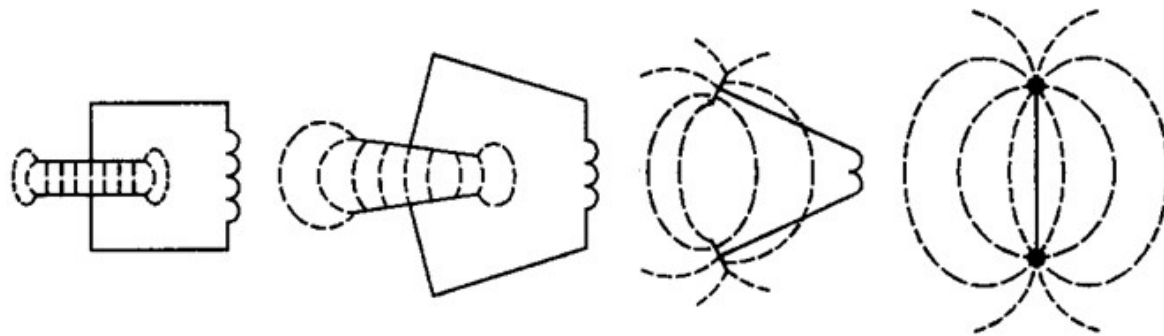
振荡电流的振幅具有最大值，此现象称为电共振。





### 3.电磁波的发射

要使振荡电路辐射电磁波，**振荡频率必须足够大**，即**LC**值足够小。另外上述**LC**电路中，能量变化集中在电容和线圈内，不利于辐射。因此，为使电磁波辐射成为可能，**电路应具有敞开的形式**，敞开形式的极端是**振荡电偶极子**。

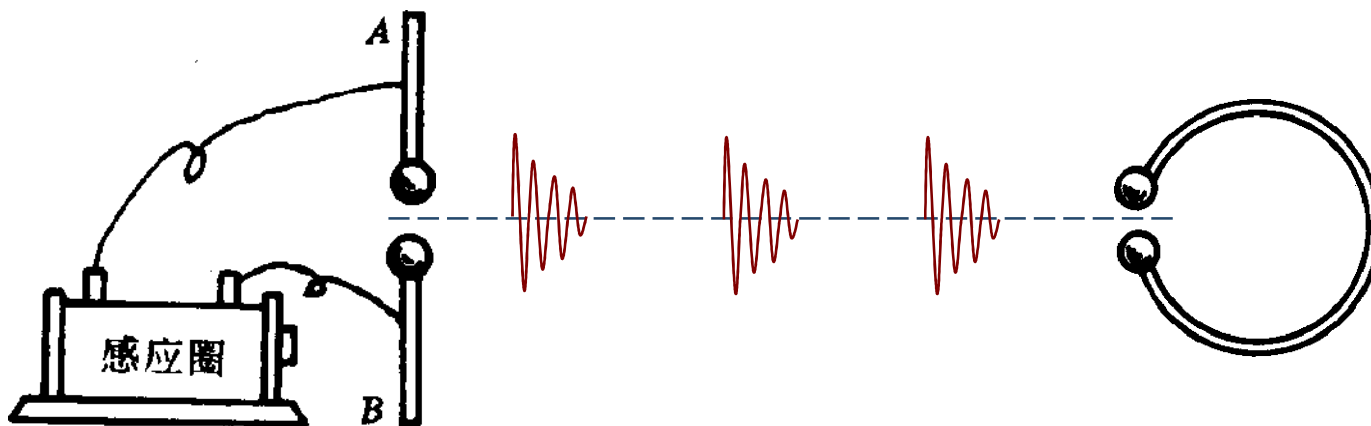


从**LC**振荡电路过渡到偶极振子

## ➤ 1) 赫兹实验

在**1889**年，赫兹用上述偶极振子做了许多实验，从而证实了振荡偶极子能够成功的发射和接收电磁波。

实验装置如下图：



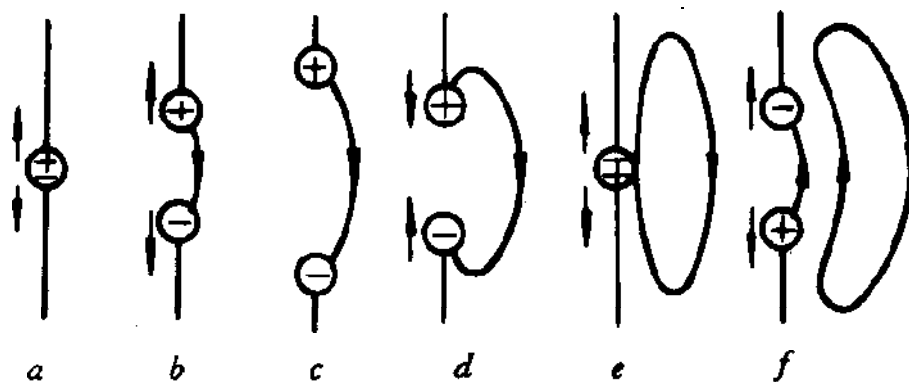
## ➤ 2) 振荡电偶极子辐射的电磁波

最简单的偶极振子，其电偶极矩 $\mathbf{p}$ 可表示为：

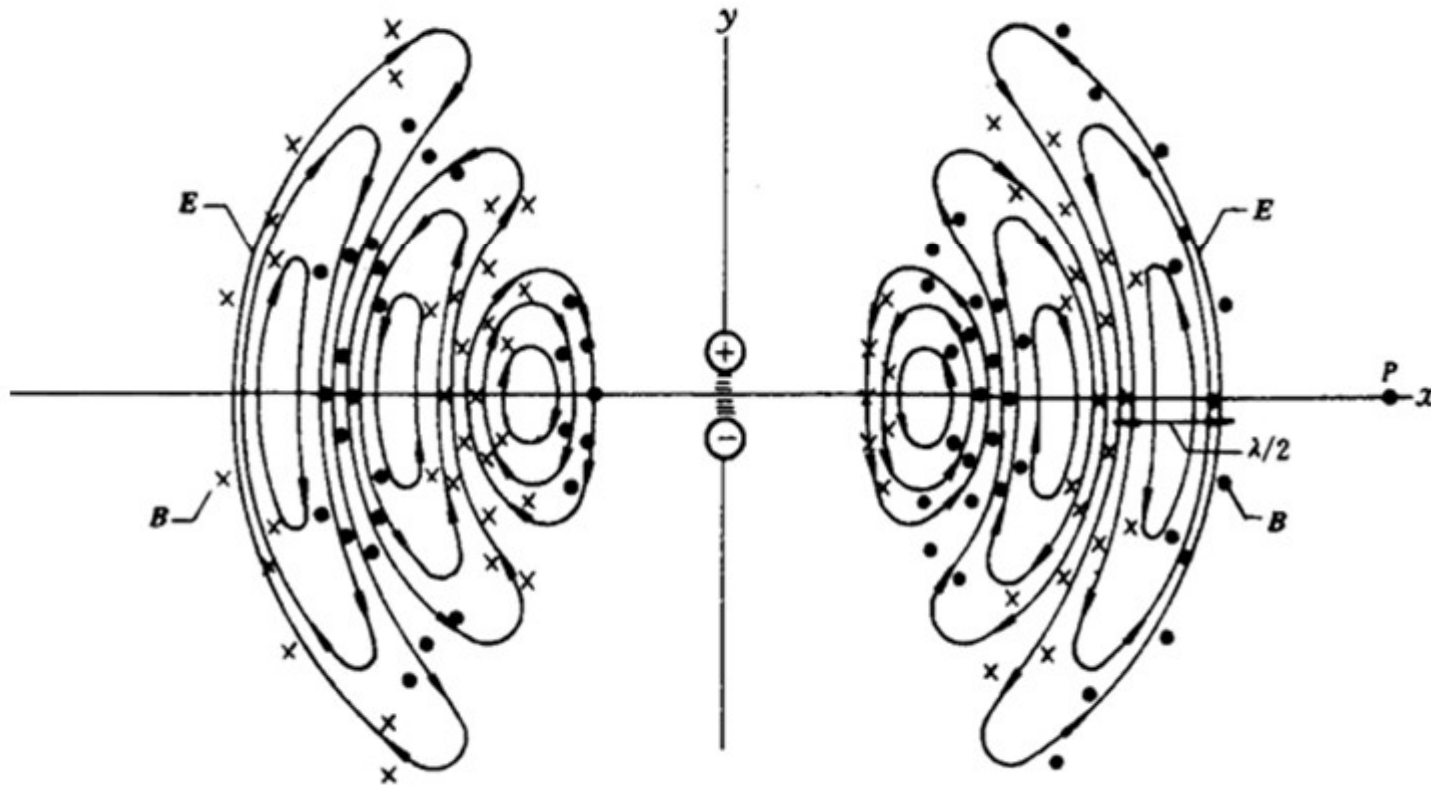
$$\vec{p} = q \vec{l}$$

$$p = p_0 \cos \omega t = ql_0 \cos \omega t$$

天线辐射相当于一电矩 $\mathbf{p}$ 做高频振荡，在周围产生电磁辐射，其电场线的形成过程见下图：



电场线的远场特性是其波面渐成球形，而磁感应线是以偶极振子为轴线的一系列同心圆：



取偶极子所在点为极坐标原点，空间 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \theta, \varphi)$   
 点在 $\mathbf{t}$ 时刻的场量：

$$E = E_{\theta} = \frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4 \pi \varepsilon_0 v^2 r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$

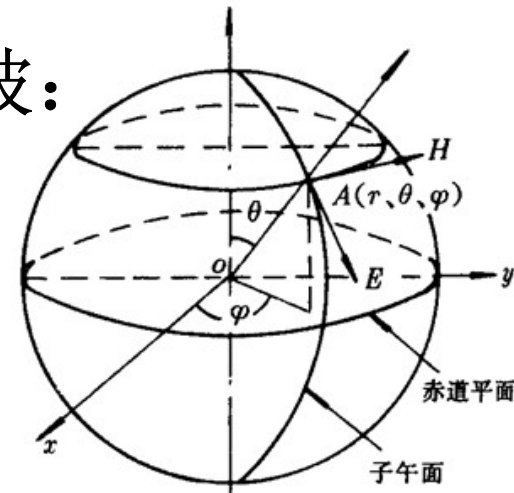
$$H = H_{\varphi} = \frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4 \pi v r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$

$$\text{式中 } v = 1 / \sqrt{\varepsilon \mu}$$

$\mathbf{r}$ 很大时，电磁波可看作平面波：

$$E = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$

$$H = H_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$



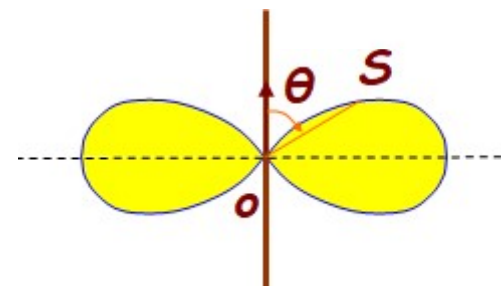
### ➤ 3) 振荡电偶极子的辐射强度和辐射功率

振荡电偶极子在球面任一处的坡印亭矢量为:

$$S = E \cdot H = \frac{\mu\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 \nu r^2} \cos^2 \omega(t - \frac{r}{\nu})$$

一个周期内的平均辐射能量:

$$\bar{S} = \frac{\mu\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \nu r^2}$$



电偶极子的辐射特点:

- 1)  $\bar{S} \propto \omega^4$ : 只有频率相当高才有明显的辐射;
- 2)  $\bar{S} \propto \sin^2 \theta$ : 辐射强度与辐射角度相关。

## 4. 电磁波的能量

单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的辐射能称为**能流密度或辐射强度**。

电场和磁场的能量体密度为：

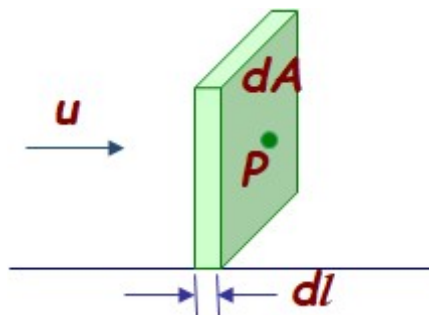
$$\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad \omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

电磁场的能量体密度：

$$\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

设通过P点的小体积元的能量为 $\omega dAdl$ ，这些能量在 $dt=dl/u$ 的时间内通过面积 $dA$ ，则：

$$S = \frac{\omega dAdl}{dt dA} = \omega u = \frac{u}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$



将  $u = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 、 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$  代入可得：

$$S = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}}(\sqrt{\epsilon}E\sqrt{\mu}H + \sqrt{\mu}H\sqrt{\epsilon}E) = EH$$

将上式写成矢量式：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

坡印廷矢量



对于真空中传播的平面余弦波：

$$E = E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

$$H = H_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

$$S = E_0 H_0 \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

取一个周期内的平均值：

$$\overline{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 c H_0^2$$

### 课堂练习题18-3:

某广播电台的平均辐射功率为 **$P=15\text{KW}$** ，假定辐射出来的能流均匀分布在以电台为中心的半个球面上，求：**1)**在离电台 **$r=10\text{km}$** 处的辐射强度，**2)**在 **$r=10\text{km}$** 处一个小的空间范围内电磁波可看作平面波，求该处电场强度和磁场强度的振幅。

**解：****1)**在距电台 **$r=10\text{km}$** 处，平均辐射强度：

$$\bar{S} = \frac{\bar{P}}{2\pi r^2} = 2.93 \times 10^{-5} \text{ J}/(\text{m}^2\text{s})$$

$$\mathbf{2)} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\epsilon_0 c}} = 0.134 \text{ V/m} \quad H_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\mu_0 c}} = 4.47 \times 10^{-8} \text{ A/m}$$

## 5.电磁波的动量

根据相对论的质能关系： $m = \omega/c^2$

单位体积中电磁场的动量：

$$mc = \left(\frac{\omega}{c^2}\right) \cdot c = \frac{\omega}{c}$$

真空中电磁波的辐射强度(能流密度)： $S = \omega c$

在单位时间内，通过垂直于传播方向的单位面积的电磁动量，称为动量流密度：

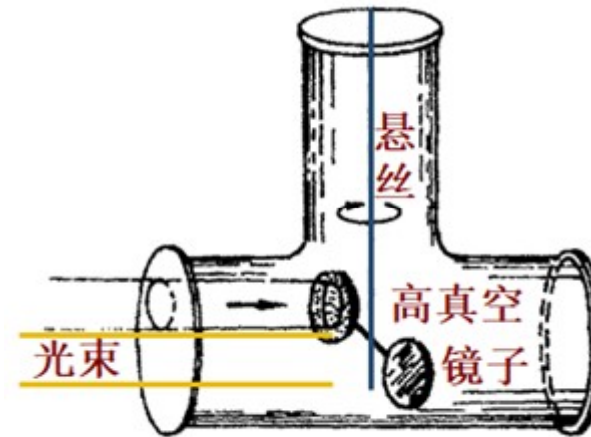
$$\left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot c = \frac{S}{c}$$

设在电磁波垂直入射以及物体表面全部吸收的情况下，作用在表面的压强在数值上等于单位时间垂直通过单位面积的动量，因此：

$$P = \frac{S}{c}$$

对于全部反射的情况：

$$P = \frac{2S}{c}$$

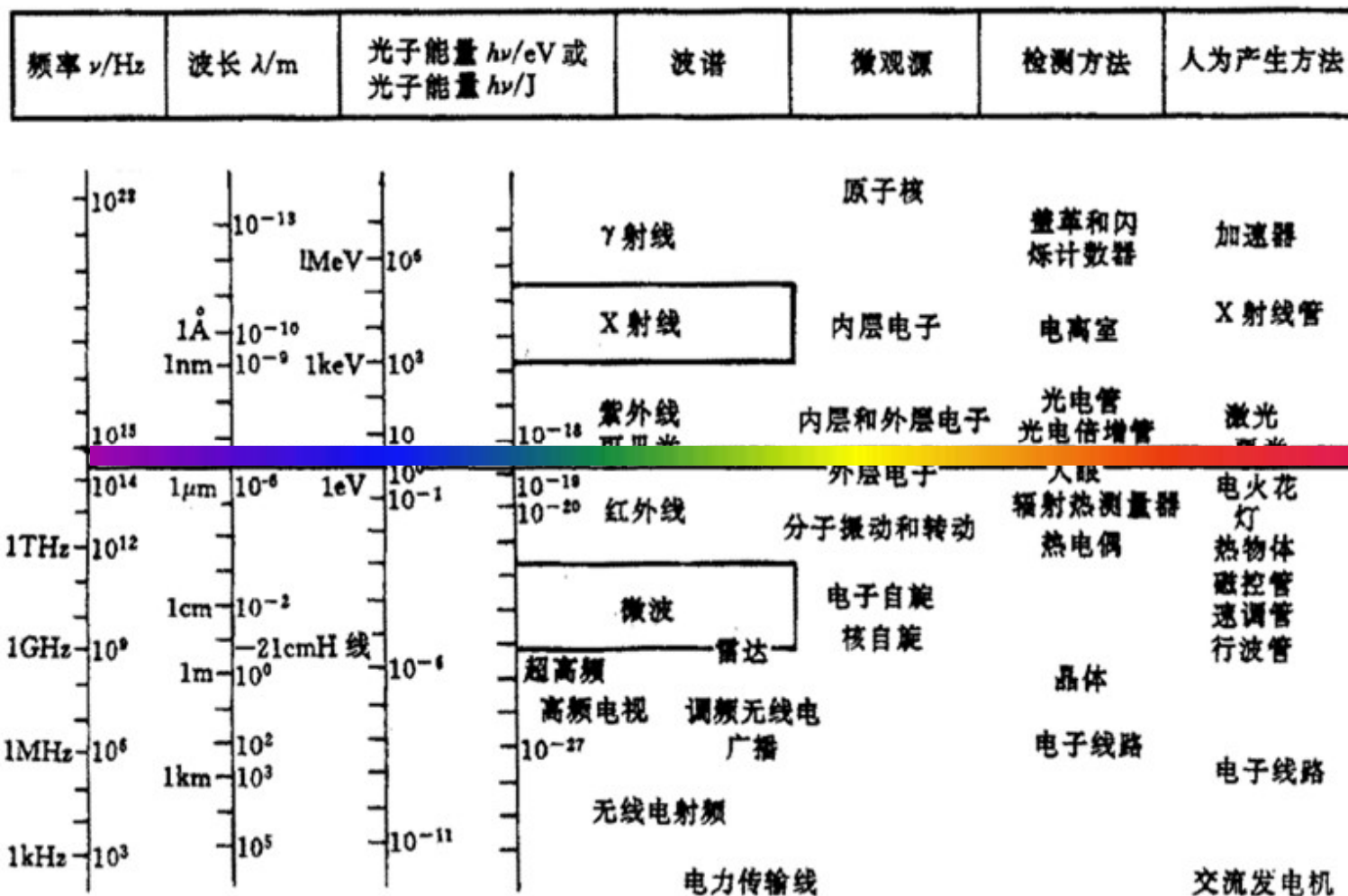


列别捷夫光压实验

例如太阳对地球表面的辐射能为 $1.4\text{kW}/\text{m}^2$ 时

$$P = S/c = 1.4 \times 10^3 / 3 \times 10^8 = 4.7 \times 10^{-6} \text{pa}$$

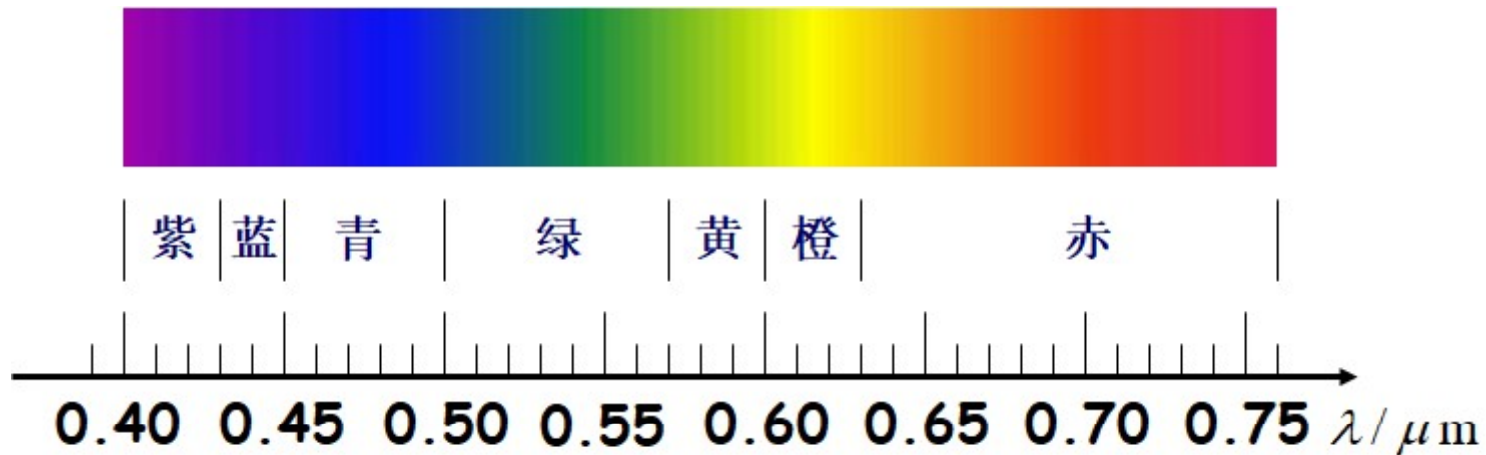
## § 18-4 电磁波谱



## 各种无线电波的范围和应用

名称	长波	中波	中短波	短 波	米 波	微 波		
						分米波	厘米波	毫米波
波长	30000-3000m	3000-200m	200-50m	50-10m	10-1m	1m-10cm	10cm-1cm	1 cm - 0.1cm
频率	10-100kHz	100-1500kHz	1.5-6MHz	6-30MHz	30-300MHz	300-3000MHz	3000-30000MHz	30000-300000MHz
主要用途	越洋长距离通信和导航	无线电广播	电报通讯	无线电广播、电报通信	调频无线电广播、电视广播、无线电导航	电视、雷达、无线电导航及其他专门用途		

**可见光** 能使人眼产生视觉效应的电磁波段。



**红外线** 波长范围在**(760~1000)  $\mu\text{m}$** 之间的电磁波；红外线最显著的性质是**热效应**。

**紫外线** 波长范围在**(400~10)nm**之间的电磁波；紫外线有明显的生理作用。

**X射线(伦琴射线)** 波长比紫外线更短的一类电磁波，其波长在 $10^{-8} \sim 10^{-11}\text{m}$ 之间。

X射线具有很强的穿透能力。

**$\gamma$ 射线** 在原子核内部的变化过程(称衰变)中发出的一种波长极短电磁波，其波长小于 $10^{-10}\text{m}$ 以下。

$\gamma$ 射线可应用于对金属探伤等，  
也可以帮助了解原子核的结构。



## 麦克斯韦方程和电磁波【学习重点】

- 1.深刻理解 位移电流、位移电流密度、电磁波的能量、动量 等概念。
- 2.熟练运用全电流的安培环路定理、麦克斯韦方程组、电磁波的能量密度等求解电磁场中的非稳恒电路、振荡电路等问题。

### <位移电流与坡印廷矢量>

全电流安培环路定理和麦克斯韦方程组

## 第八次作业 麦克斯韦方程 电磁波

**P339-340:**

**18-2**

**18-3**

**18-4**

**18-5**

**18-8**

**18-12**