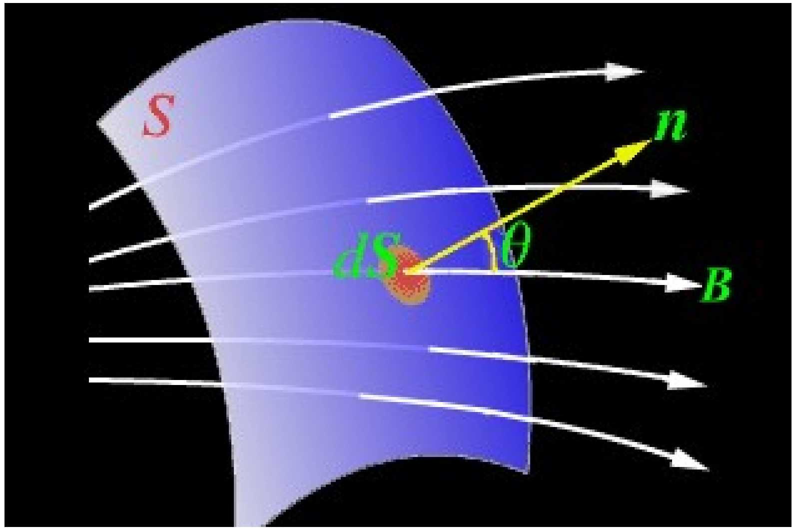
§15-7 磁场的高斯定理·安培环路定理

1.磁通量

定义为穿过磁场中给定曲面的磁感应线的总数，通常用Φ表示。

对于曲面上是非均匀磁场的情形，一般用微元分割法求其磁通量。

如图所示，dS与磁感应强度B的夹角为θ，则通过dS的磁通量为：



对所取微元，磁通量为：

$$d\Phi_m = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = B dS \cos\theta$$

对整个曲面，定义磁通量：

与电通量定义完全类似

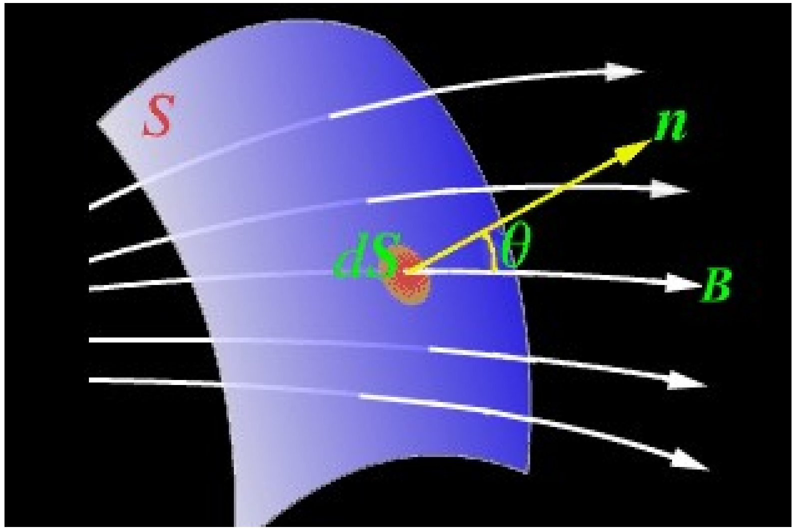
$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

单位：韦伯(Wb)

$1Wb=1T \cdot m^2$，

$1T=1\underline{Wb/m^2}$。

磁感应强度的单位



2.磁场的高斯定理

磁感应线是无始无终的闭合线，从一闭合面穿进的磁力线，必从另一处穿出。

对于闭合曲面，取外法线方向为正，则磁力线从曲面穿出磁通量为正，穿入为负，因此对闭合曲面有：

$$\oiint_S B \cdot dS = 0$$

此式称为磁场中的高斯定理。这说明磁场是无源场，而电场的高斯定理表明电场是有源场。

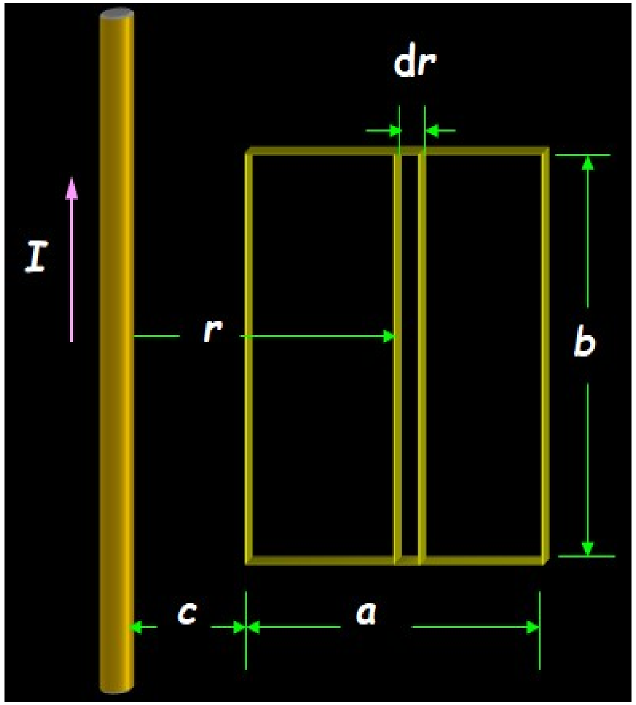
课堂练习题15-1：

一无限长直导线通有电流***I***，其近旁平行放置一矩形线框，求：穿过矩形线框的磁通量。

解： 如图所示，无限长载流直导线磁感应强度为：

$$B = \mu_0 I / 2\pi r$$

距导线***r***处取取宽度为***dr***的面元，其面积等于***bdr***，则通过此面元的磁通量为：



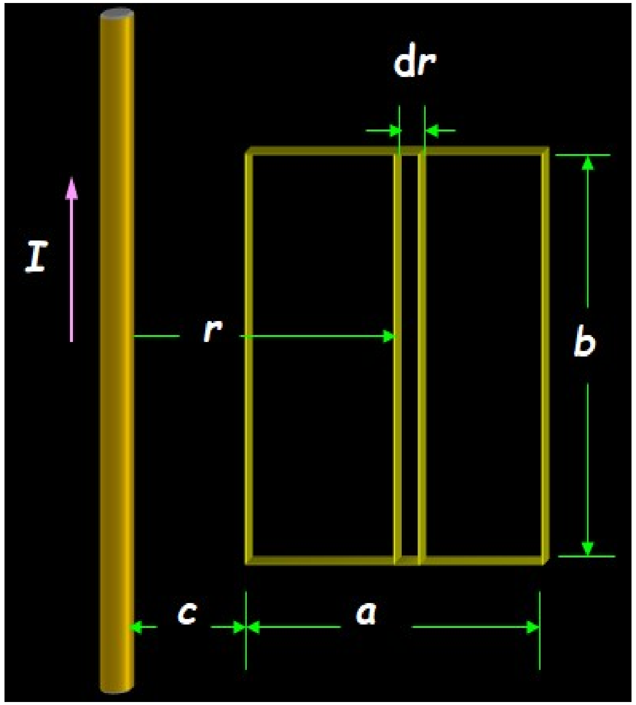
$$\mathrm{d}\Phi_m = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr$$

则通过整个矩形线框的总磁通量为：

$$\Phi_m = \int \mathrm{d}\Phi_m$$

$$= \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b \mathrm{d}r$$

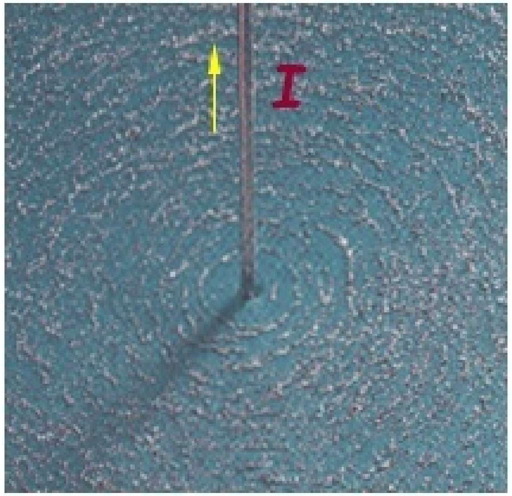
$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln(\frac{a+c}{c})$$



3.安培环路定理

在研究静电场的环路定理时，已知：由于静电场是保守力场，因此静电场E的环流等于零；

但对于磁场而言，由于磁感应线是闭合的，因此磁感应强度B的环流应该不为零！



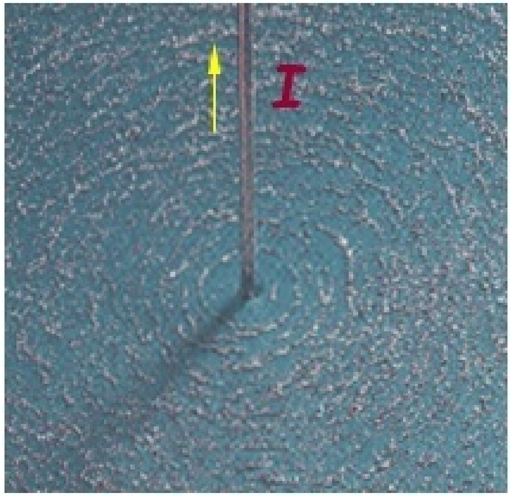
下面以无限长直载流导线为例，从以下所有四种可能的闭合曲线情形来研究磁感应强度的环流问题：

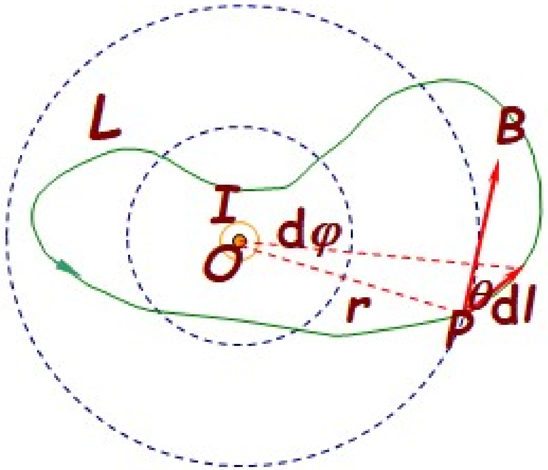
1)当闭合曲线*L*在垂直于电流导线的平面内时：

可知曲线上任一点的磁感应强度大小为：

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

图中：$dl\cos\theta=rd\varphi$



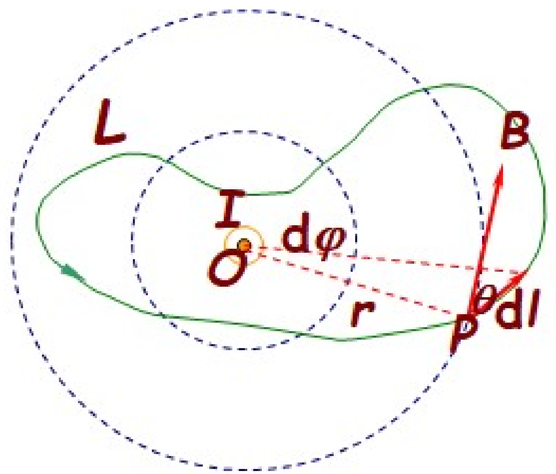


按图示绕行方向，**B**沿闭合曲线的环路积分为：

$$\oint_L B\cdot dl = \oint_L B\cos\theta dl = \oint_L Brd\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}rd\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi = \mu_0 I$$

2)当闭合曲线*L*不在垂直于电流导线的平面时：



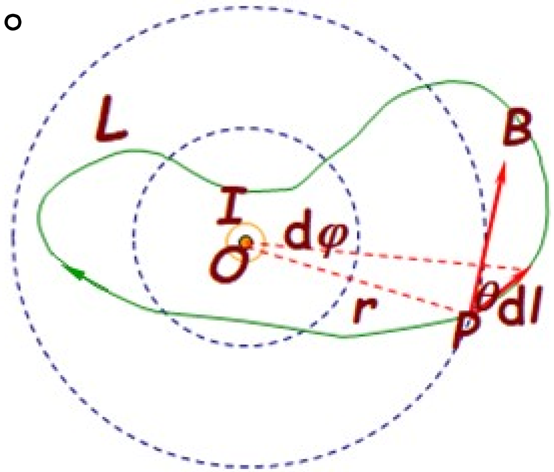
可以将**d*l***分解为$\mathbf{d}\boldsymbol{l}_{\perp}$和$\mathbf{d}\boldsymbol{l}_{//}$，所以按绕行方向**B**沿闭合曲线的环路积分为：

$$\oint_L B \cdot dl = \oint_L B \cdot (dl_\perp + dl_{//})$$

$$= \oint_L B\cos 90^0 dl_\perp + \oint_L B\cos\theta dl_{//}$$

$$= 0 + \oint_L Brd\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

此结果与情形(1)的结果相同。



3)其它条件与情形(2)相同，只改变曲线的绕行方向时：

B沿闭合曲线的线积分为：

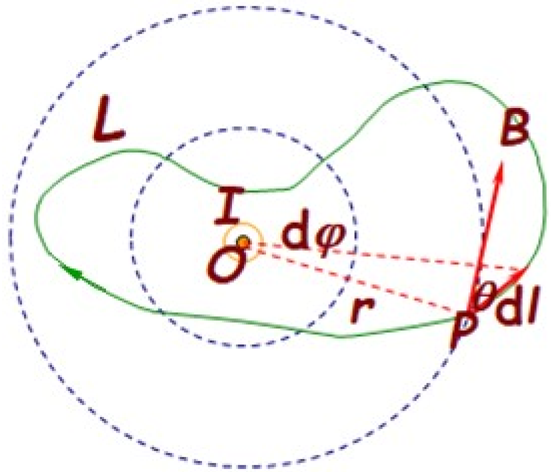
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cos\theta dl = \oint_L Brd\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{-2\pi} d\varphi = -\mu_0 I$$

把上式的负号放入电流中，即 $-\mu_0 I = \mu_0(-I)$

对于仅改变闭合曲线的绕行方向而言，可以认为相当于电流取负值。

4)当闭合曲线*L*不包围电流导线时：



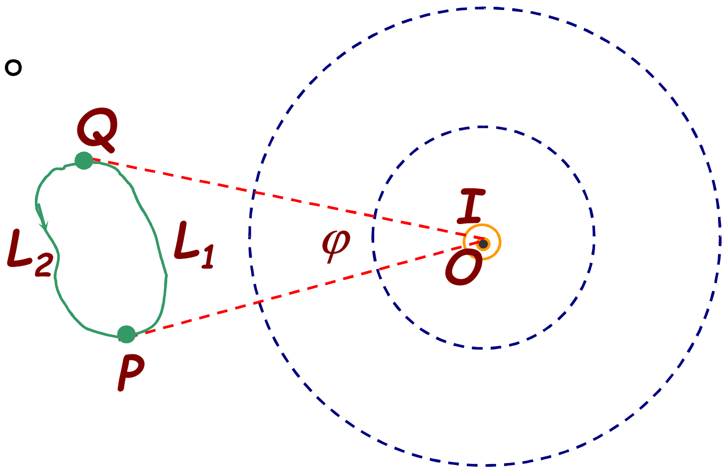
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cos\theta dl = \oint_L Brd\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{-2\pi} d\varphi = -\mu_0 I$$

把上式的负号放入电流中，即 $-\mu_0 I = \mu_0(-I)$

对于仅改变闭合曲线的绕行方向而言，可以认为相当于电流取负值。

4)当闭合曲线*L*不包围电流导线时：



B矢量的环流为：

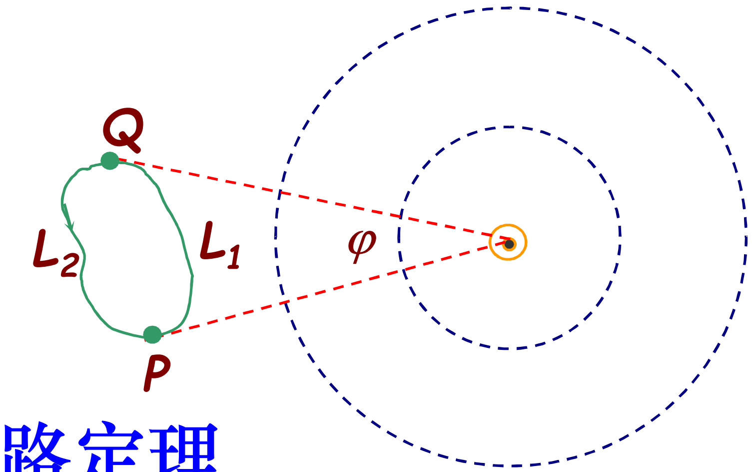
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi\right) = 0$$

即当闭合曲线***L***没有包围电流导线时，***B***矢量的环流等于零。

在一般情况下：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I$$



---安培环路定理

➢安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I$$

在磁场中，沿任何闭合曲线，**B矢量的线积分**(或*B*矢量的环流)等于真空的磁导率μ_0乘以穿过这个闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和，即：

等于穿过该环路所有电流的代数和的μ_0倍

安 培

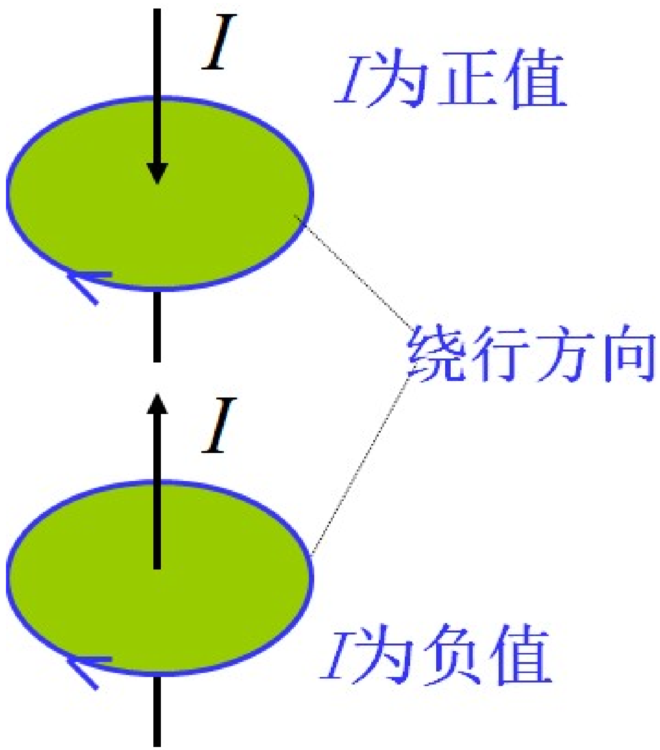
➢安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I$$

注意：

1)关于电流正负的规定：

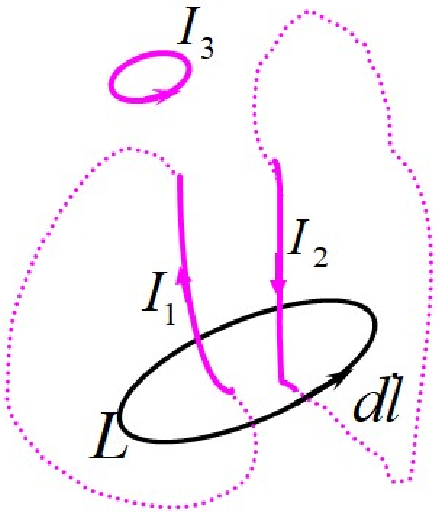
当积分路径***L***的绕行方向与电流***I***成右手螺旋关系时，电流***I***为正值；反之，***I***为负值。



➢安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum_{S_L} I$$

注意：



2)定理中电流I包括穿过环路的电流，但定理中的磁场是环路内外的所有电流决定的；

3)B矢量的环流不为零，说明磁场不是有势场，而电场的环路定理则表明电场是有势场。

2.安培环路定理的应用

利用安培环路定理可以计算磁场，步骤如下：

1)分析磁场的对称性；

2)过场点选择适当的路径，使***B***沿此环路的积分易于计算；即或此环路上***B***的量值恒定，或它与积分元***dl***的夹角处处相等或容易确定；

3)求出环路积分；

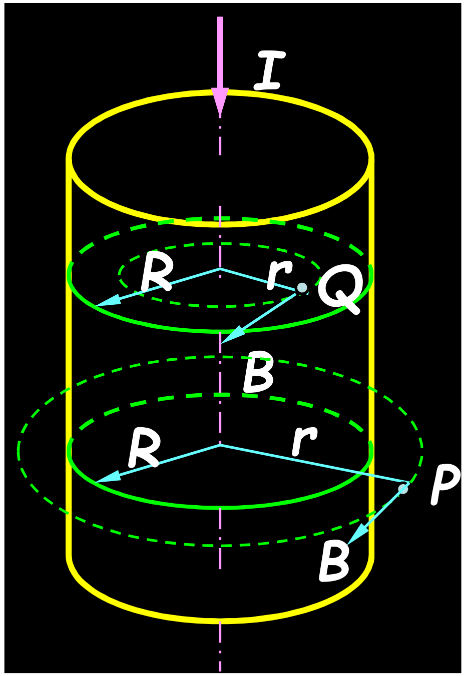
4)用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负；然后，由磁场的安培环路定理求出磁感应强度***B***的大小。

➢1)长直圆柱形载流导线内外的磁场

设圆柱截面半径为*R*，电流*I*沿轴流动。

过P点(或Q点)取半径为*r*的磁感应线为积分回路，则*B*矢量的环流为：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B\cdot 2\pi r$$



当*r*>*R*(图中P点)时，应用安培环路定理得： $B2\pi r = \mu_0 I$

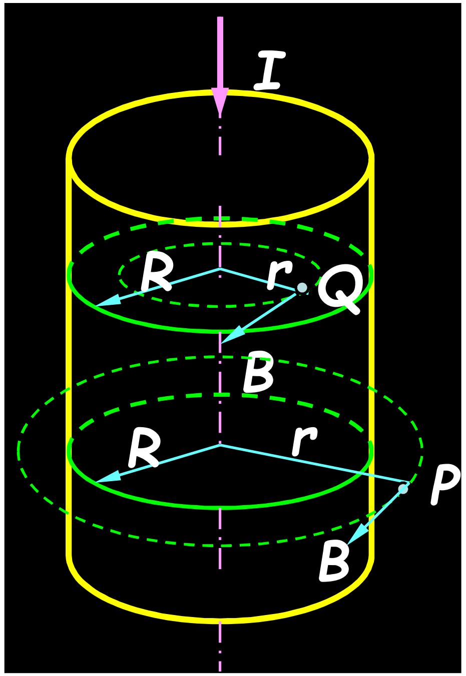
所以P点的磁感应强度为：

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}}$$

当$r<R$(图中Q点)时，可分两种电流分布情形：

I.仅分布在导体表面时 $B2\pi r=0$ 即：$B=0$

II.均匀分布在整个导体中时，穿过积分回路的电流应是：$\dfrac{I}{\pi R^2}\pi r^2$



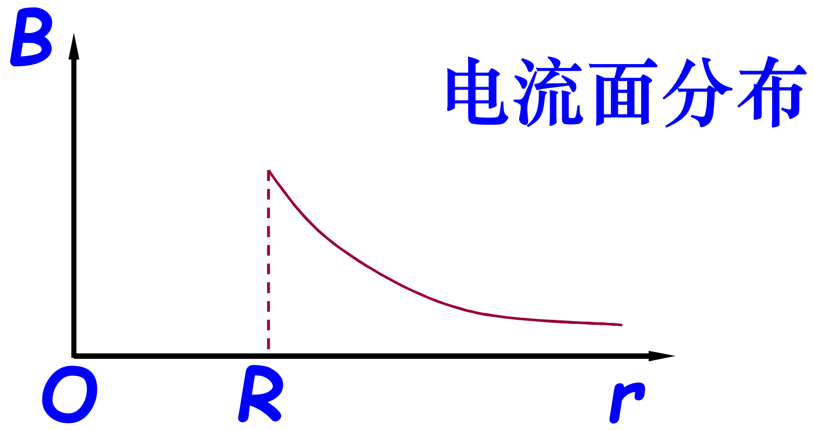
应用安培环路定理得：

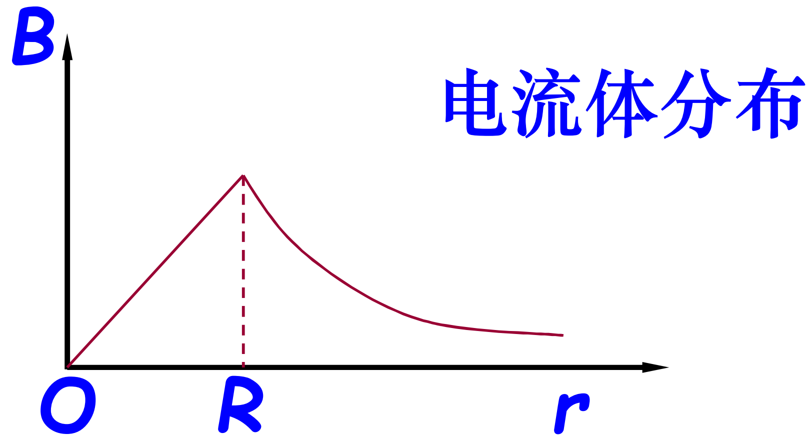
$$\oint_L B\cdot dl = B2\pi r=\mu_0\frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

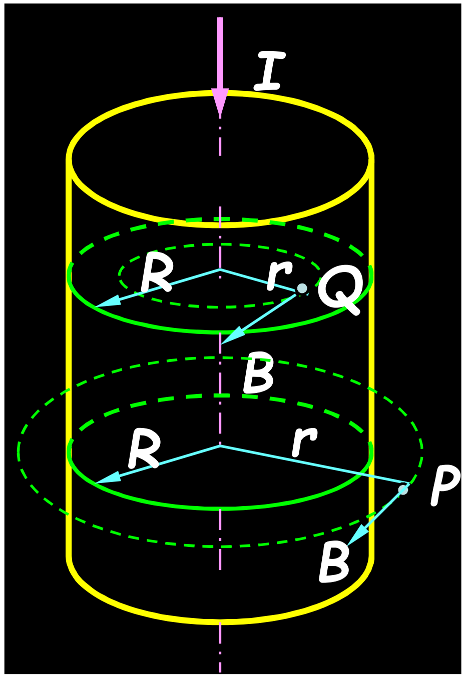
所以Q点的磁感应强度为：

$$\boxed{B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{R^2}}$$

➢长直圆柱形载流导线内外的磁场分布曲线







➢2)载流螺绕环内的磁场

设螺绕环的内外径r_1、r_2，总匝数N，电流I。

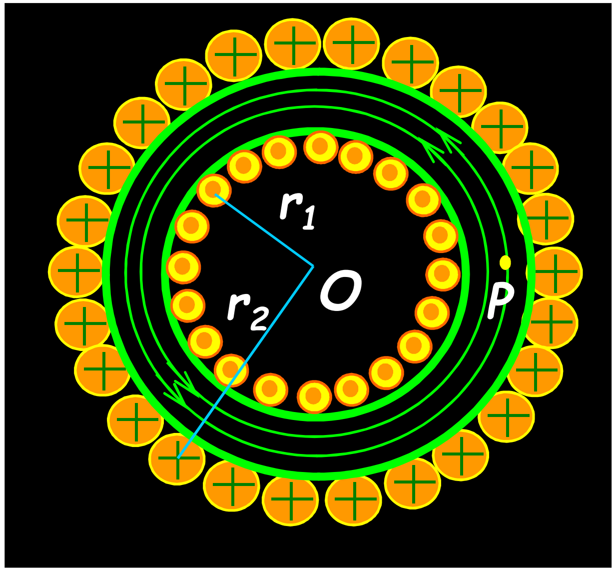
考虑到对称性，环内磁场的磁感应线都是同心圆，因此，我们可选择通过管内任一点P的磁感应线L作为积分环路。

则B矢量的环流为：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B\cdot 2\pi r$$

应用安培环路定理得：

$$B2\pi r = \mu_0 NI$$



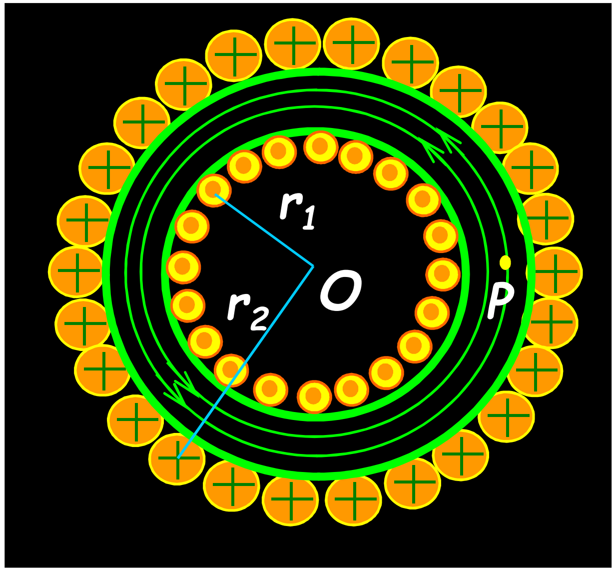
计算得P点的磁感应强度为：

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当r_2-r_1远小于环的平均半径r时，令$l=2\pi r$，

则：$$B=\frac{\mu_0 NI}{l}=\mu_0 nI$$

式中n为螺绕环单位长度上的匝数，磁感应强度B的方向与电流I流向成右手螺旋关系。

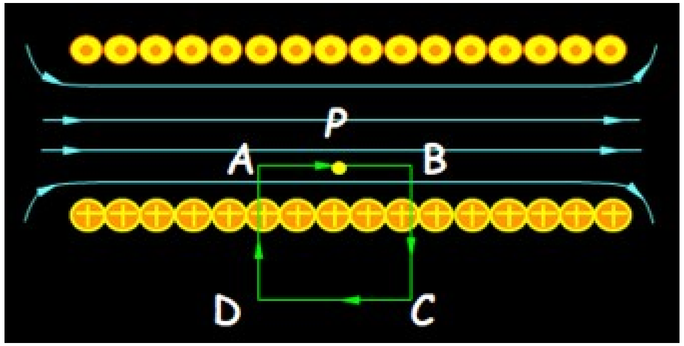


➢3)载流长直螺线管内的磁场

设密绕长直螺线管长l共有**N**匝，通电流I。

计算螺线管内任一点P处的磁感应强度。

过*P*点做一矩形闭合回路ABCDA，CD段及管外部分的BC和DA段，则有：*B*=0；



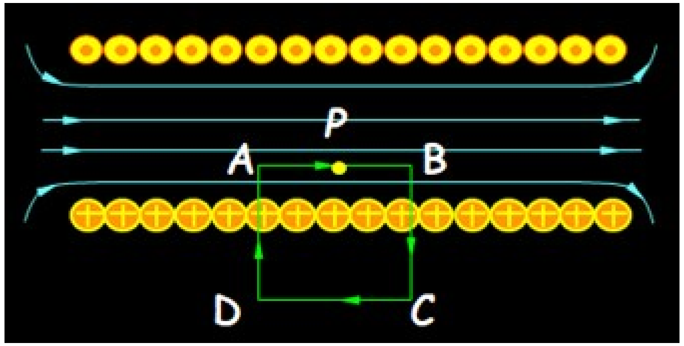
对于管内部分的BC和DA段，虽然*B*≠0，但所以dl与*B*垂直，即：$\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=0$

所以**B**矢量沿**ABCDA**的环流为：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{AB} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{BC} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{CD} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{DA} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \int_{AB} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= B\cdot AB$$



螺线管单位长度上的线圈匝数为：$n=N/l$

ABCDA回路所包围的总电流为：

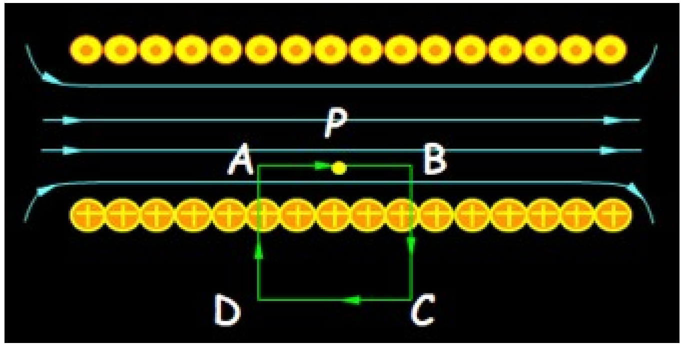
$$I_{总} = AB\cdot nI$$

应用安培环路定理得：

$$\oint_L B\cdot \mathrm{d}l = B\cdot AB = \mu_0 AB\cdot nI$$

所以： $B = \mu_0 nI$

或： $B = \mu_0 NI/l$



由于矩形回路是任取的，**AB**段在管内任何位置时上式均成立。

在螺线管内，磁场是均匀分布的。

课堂练习题15-2：

两个长直螺线管半径有区别，但它们通过的电流和线圈环绕密度相同，则这两个螺线管内部的磁感应强度是

A) 相同

B) 不相同

C) 不确定

课堂练习题15-2：

两个长直螺线管半径有区别，但它们通过的电流和线圈环绕密度相同，则这两个螺线管内部的磁感应强度是

A) 相同

B) 不相同

C) 不确定

[A]

课堂练习题15-3：

通有电流I的单匝环型线圈，将其弯转迭成$N=2$的两匝环型线圈，仍然保持导线长度和电流不变，问：线圈中心o点的磁感应强度B和磁矩p_m是原来的多少倍。

A) 4倍，1/4倍

B) 4倍，1/2倍

C) 2倍，1/4倍

D) 2倍，1/2倍

课堂练习题15-3：

通有电流I的单匝环型线圈，将其弯转迭成$N=2$的两匝环型线圈，仍然保持导线长度和电流不变，问：线圈中心o点的磁感应强度B和磁矩p_m是原来的多少倍。

A) 4倍，1/4倍

B) 4倍，1/2倍

C) 2倍，1/4倍

D) 2倍，1/2倍

已知 $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$，$p_{m_0}=I\cdot\pi R^2$

弯转迭放后：$r=\dfrac{R}{2}$，$N=2$

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2r}=\frac{2\mu_0 I}{2(R/2)}=4\frac{\mu_0 I}{2R}=4B_0$$

$$p_m=NIS=2I\cdot\pi r^2=2I\cdot\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$=\frac{I\cdot\pi R^2}{2}=\frac{1}{2}p_{m_0}$$

课堂练习题15-3：

通有电流I的单匝环型线圈，将其弯转迭成$N=2$的两匝环型线圈，仍然保持导线长度和电流不变，问：线圈中心o点的磁感应强度B和磁矩p_m是原来的多少倍。

A) 4倍，1/4倍

B) 4倍，1/2倍

C) 2倍，1/4倍

D) 2倍，1/2倍

已知 $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$，$p_{m_0}=I\cdot\pi R^2$

弯转迭放后：$r=\dfrac{R}{2}$，$N=2$

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2r}=\frac{2\mu_0 I}{2(R/2)}=4\frac{\mu_0 I}{2R}=4B_0$$

$$p_m=NIS=2I\cdot\pi r^2=2I\cdot\pi(\frac{R}{2})^2$$

$$=\frac{I\cdot\pi R^2}{2}=\frac{1}{2}p_{m_0}$$

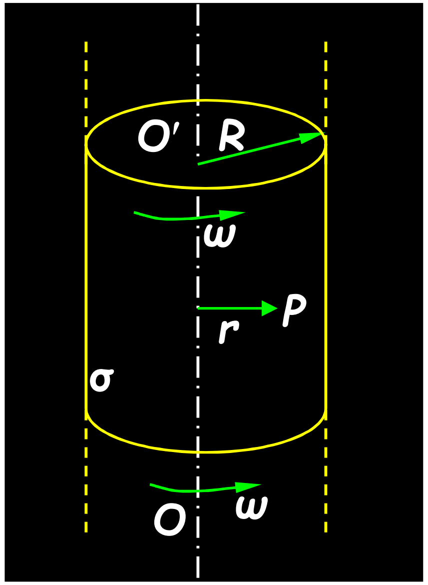
[B]

课堂练习题15-4：

如图，一个半径为R的无限长非导体圆筒均匀带电，电荷面密度为σ。若受到外力矩的作用，圆筒从静止开始以匀角加速度β绕OO'轴转动，求：t时刻圆筒内距转轴r处的磁感应强度B的大小。

解： 圆筒绕OO'轴转动相当于长直密绕螺线管，磁场分布布有轴对称性。

对密绕螺线管，管内为均匀磁场，管外磁场强度为零。

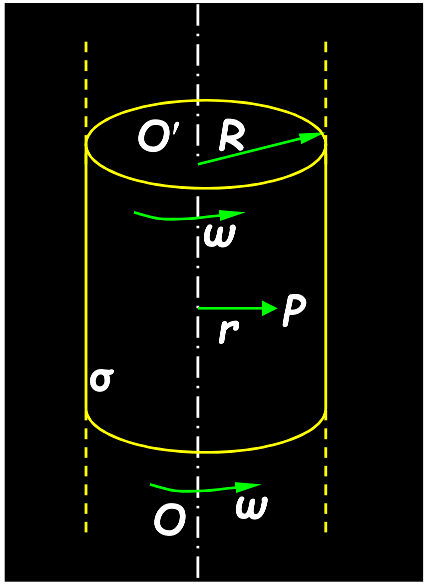


因此过管内场点*P*做一矩形积分回路*abcda*，由安培环路定理，得：

$$\oint_L B\cdot \mathrm{d}l = \int_a^b B\cos 0^0 \mathrm{d}l + \int_b^c B\cos 90^0 \mathrm{d}l + \int_c^d 0\mathrm{d}l + \int_d^a B\cos 90^0 \mathrm{d}l$$

$$= B\overline{ab} = \mu_0 \sum I_i$$

分析系统可知，积分回路所包围的电流代数和为：



$$\sum I_i = \sigma(\omega R\Delta t\cdot \overline{ab})/\Delta t$$

$$= \sigma(\omega R\cdot \overline{ab})$$

又 $\omega = \omega_0 + \beta t$，$t = 0$ 时，$\omega_0 = 0$

则： $\omega = \beta t$

所以 $\sum I_i = \sigma(\beta t R \cdot \overline{ab})$

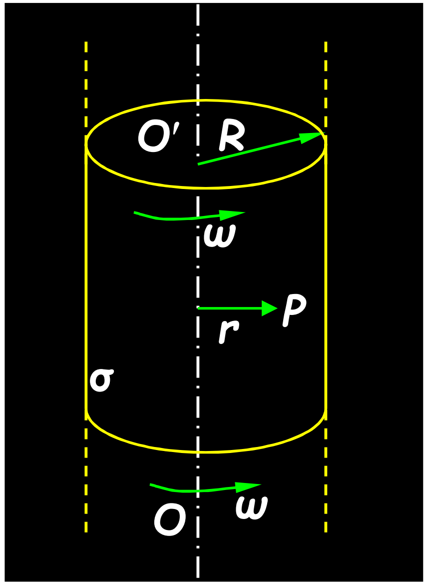
因此 $B\overline{ab} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 \sigma(\beta t R \cdot \overline{ab})$

即得 $\boxed{B = \mu_0 \sigma \beta t R}$

---**B**的方向由**σ**决定

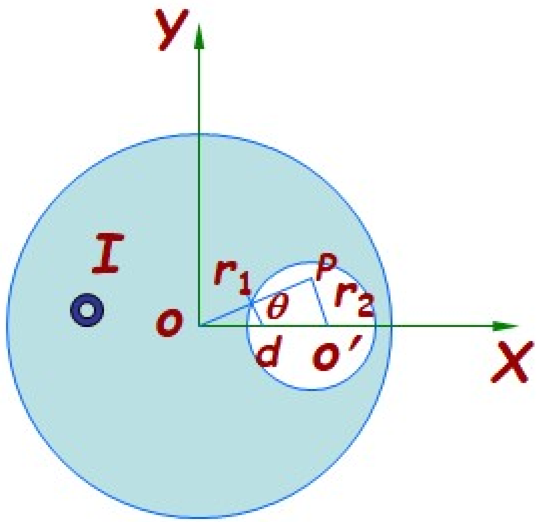
由结果可知：

圆筒内部的磁场**B**与***r***无关，即筒内磁场是均匀分布的。



课堂练习题15-5：

如图所示，一半径为R的无限长圆柱形导体，在其中距其轴线为d处挖去一半径为$r(2r<R)$、轴线与大圆柱形导体平行的小圆柱，形成圆柱形空腔结构，导体中沿轴均匀通有电流I。求：空腔内的磁感应强度的大小与方向。

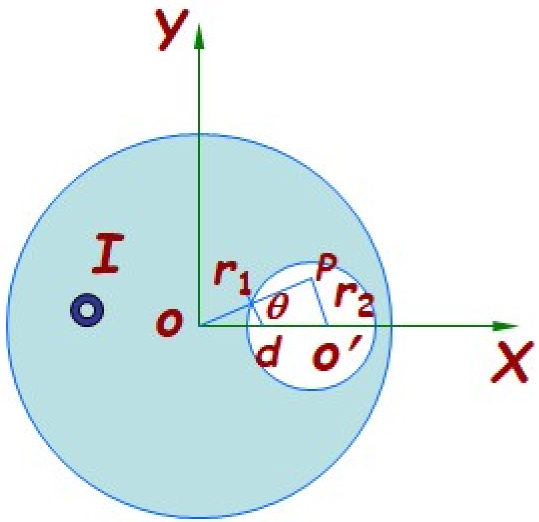


解： 取坐标系XOY，如图所示。

由于空腔的存在，不能直接应用安培环路定理求解。但是，小圆柱空腔表示其中通

过的电流等于0，可以等效成空腔中同时存在**两个等值反向的电流**，进而采用**补偿法**求解：

将空腔部分的电流等效为同时存在电流密度为**+j**和**-j**的两个电流。所以，空腔中任意一点的磁场为通有电流密度**+j**半径为**R**的大圆柱体，和通有反向电流密度**-j**半径为**r**的小圆柱体产生的磁场的矢量和。



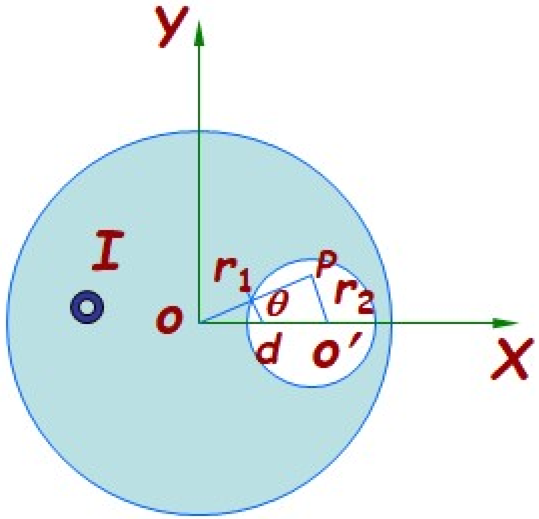
即：$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

取空腔中任意一点***P***，有：

$$\overline{OP}=r_1\text{，}\quad \overline{O'P}=r_2$$

由于半径为***R***和半径为***r***的长圆柱体产生的磁场具有轴对称性，故可根据安培环路定理，有：

$$B_1=\frac{\mu_0 j\pi r_1^2}{2\pi r_1}=\frac{\mu_0 r_1}{2}j$$



上式中 $j=\dfrac{I}{\pi(R^2-r^2)}$ 所以：

$$\boxed{B_1=\frac{\mu_0 I r_1}{2\pi(R^2-r^2)}}$$

同理可得：$$B_2=\frac{\mu_0 r_2}{2}j=\frac{\mu_0 I r_2}{2\pi(R^2-r^2)}$$

B_1和B_2方向根据右手法则确定，如下图所示。

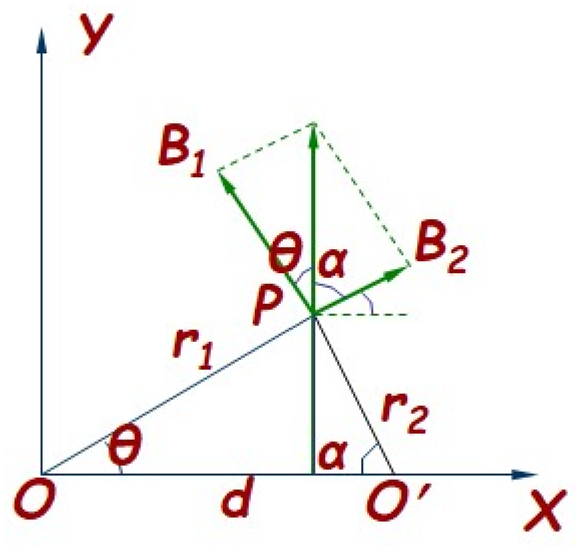
将B_1，B_2在X，Y轴上投影，其分量为：

$$B_{1x}=-B_1\sin\theta=-\frac{\mu_0}{2}jr_1\sin\theta$$

$$B_{1y}=B_1\cos\theta=\frac{\mu_0}{2}jr_1\cos\theta$$

$$B_{2x}=B_2\sin\alpha=\frac{\mu_0}{2}jr_2\sin\alpha$$

$$B_{2y}=B_2\cos\alpha=\frac{\mu_0}{2}jr_2\cos\alpha$$

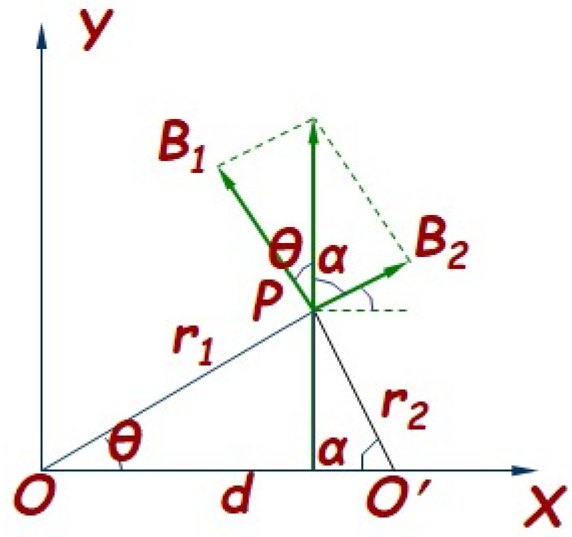


所以***P***点的磁感应强度***B***的两个正交分量为：

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = \frac{\mu_0 j}{2}(r_2 \sin\alpha - r_1 \sin\theta) = 0$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = \frac{\mu_0 j}{2}(r_2 \cos\alpha + r_1 \cos\theta) = \frac{\mu_0 j}{2} d$$

结果表明，***P***点磁感应强度***B***的大小为一常量，方向垂直于***OO'***间的连线***d***，即：沿***Y***轴正方向。



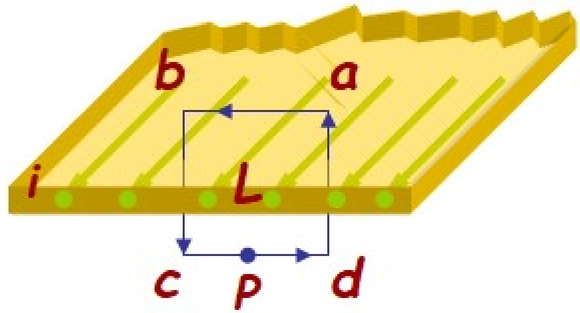
空腔中的磁场为匀强磁场：

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2 - r^2)}}$$

课堂练习题15-6:

如图所示，无穷大平行平面上有均匀分布的面电流，面电流密度为i，i的方向为电流流动的方向(i为垂直于电流方向上单位长度的电流强度)，求：此平面外的磁感应强度**B**的大小。

解：由于平板无穷大，所以平板外任一点的磁感应强度**B**都与平板平行。



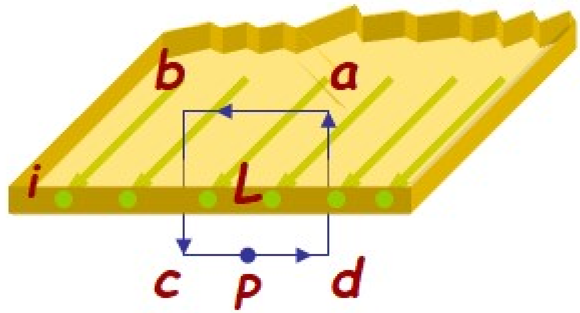
做垂直于i 的环路abcda，由安培环路定理：

$$\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 \sum I$$

$$\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = \int_a^b B \cdot \mathrm{d}l + \int_b^c B \cdot \mathrm{d}l + \int_c^d B \cdot \mathrm{d}l + \int_d^a B \cdot \mathrm{d}l$$

$$= \int_a^b B \cdot \mathrm{d}l + \int_c^d B \cdot \mathrm{d}l = 2BL$$

又： $\mu_0 \sum I = \mu_0 iL$



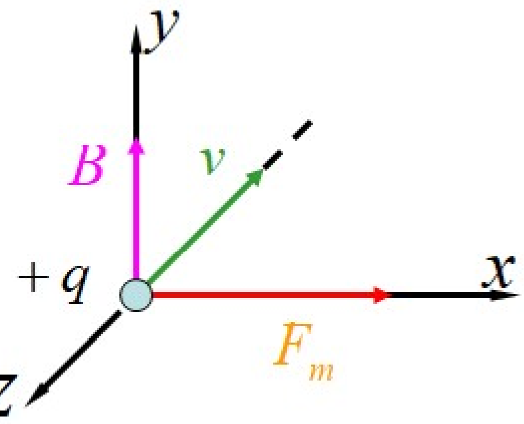
所以： $B = \dfrac{\mu_0 i}{2}$

§ 15-8 洛伦兹力

1.磁力的大小

在强度为**B**的磁场中，引入一个检验电荷**q**以速度**υ**运动，电荷所受的力**F**为：

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$$



大小： **F=qυBsinθ**

---θ是**υ**与**B**的夹角

方向： **υ×B**的方向

---可用右手螺旋法则确定

2.洛伦兹力

如果空间中同时存在电场和磁场，则电荷所受到的作用力为：

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$

上式是洛伦兹从实验得出的，故称为洛伦兹力。

考虑到相对论效应后：

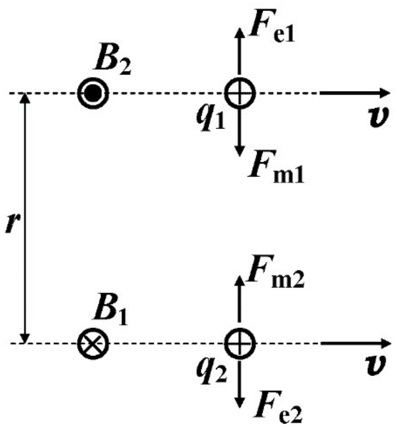
$$q\vec{E}+q\vec{\upsilon}\times\vec{B}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right]$$

3.运动电荷所受电场力和磁力的关系

两个带电量分别为q_1和q_2的点电荷，以远小于光速c的相同速度v分别沿两条平行直线运动。

由于$v<<c$，实际电场等于静止电荷的电场。

所以作用在电荷上的电力为：



$$F_{e1}=F_{e2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

而作用在电荷上的磁力为：

$$F_{m1}=F_{m2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v^2}{r^2}$$

电荷所受的磁力与电力之比为：

$$F_{\mathrm{m}}/F_{\mathrm{e}}=\varepsilon_0\mu_0 v^2$$

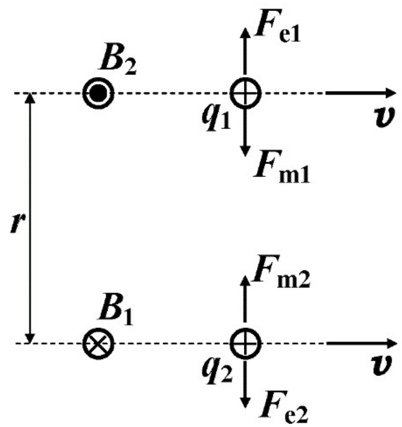
---这是两个力的比值，所以是无量纲式

所以**1/$\varepsilon_0\mu_0$**应具有$\boldsymbol{v}^2$的量纲。令：$c^2=1/\varepsilon_0\mu_0$

代入ε_0和μ_0的值，可得：

$$c=3\times10^8\,\mathrm{m}$$

即：$F_{\mathrm{m}}/F_{\mathrm{e}}=v^2/c^2$



磁力要比电力小得多。原因：

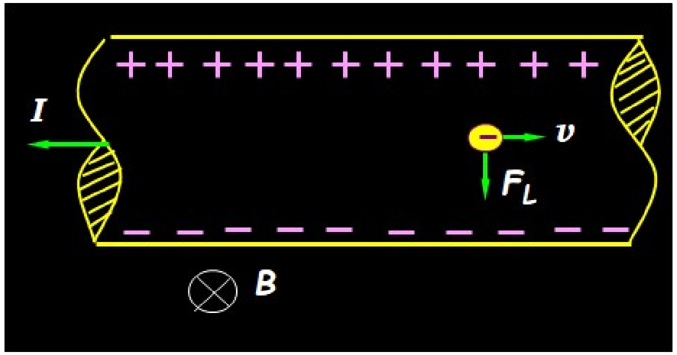
运动电荷间的磁相互作用是一种相对论效应。

§15-9 安培定律

1.安培定律

实验指出，载流导线在磁场中将受到力的作用，称这种力为安培力。

在载流导线上任取一电流元**I**d*l*，并假设电流元所在处磁感应强度为**B**，方向垂直纸面向里。则电流元中的电子受洛伦兹力：



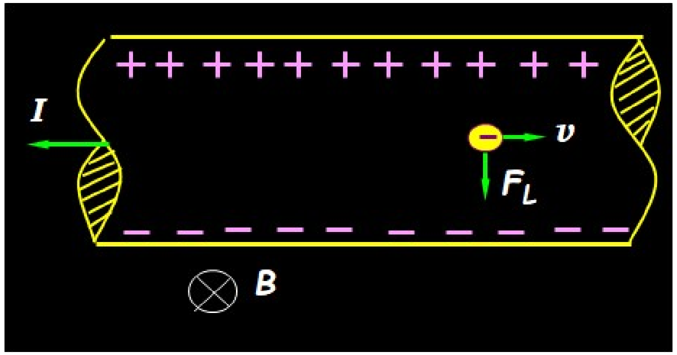
$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

设电子数密度为n，则电流元Idl中的电子数为$dN=nSdl$，因此电流元所受的安培力：

$$d\vec{F}=dN\vec{F}_L=-dNe\vec{v}\times\vec{B}$$
$$=-nSdle\vec{v}\times\vec{B}=Id\vec{l}\times\vec{B}$$

$I=enSv$

上式称为安培定律。



对于任意形状的载流导线，安培定律可写成：

$$F=\int dF=\int_L Idl\times B$$

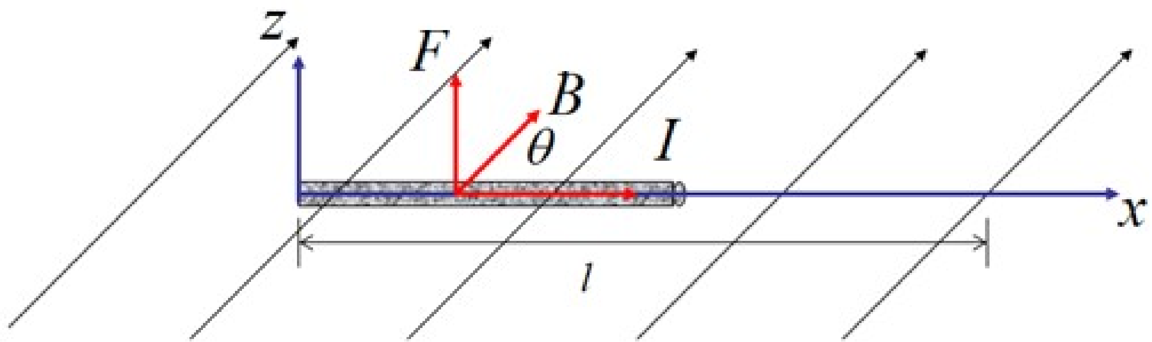
2.安培定律的应用

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$。

安培定律的微分形式

$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$。

安培定律的积分形式



$$F_z = \int_L \mathrm{d}F = \int_0^l I\,\mathrm{d}l B\sin\theta = IlB\sin\theta$$

合力作用在导线中点(质心)，方向沿**Z**轴正向。

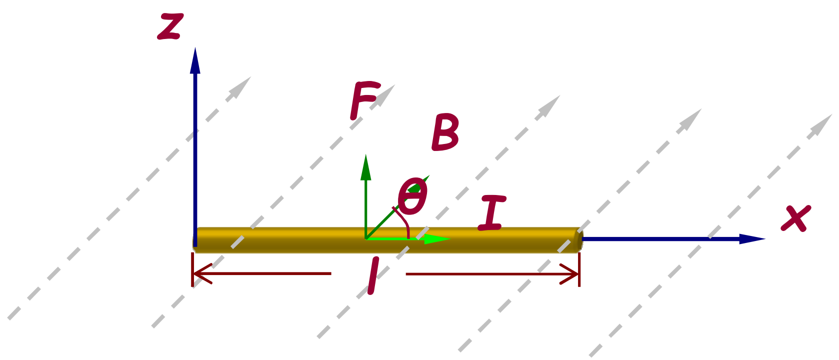
课堂练习题15-7：

求均匀磁场中一段长直导线所受的安培力。

解： 设导线长l，电流I，置于磁感应强度为B的匀强磁场中，导线与B的夹角为θ，见下图。

长直导线各段受力都指向Z轴方向，大小：

$$F=\int dF=\int_0^l I\mathrm{d}lB\sin\theta=IB\sin\theta\int_0^l \mathrm{d}l=IlB\sin\theta$$

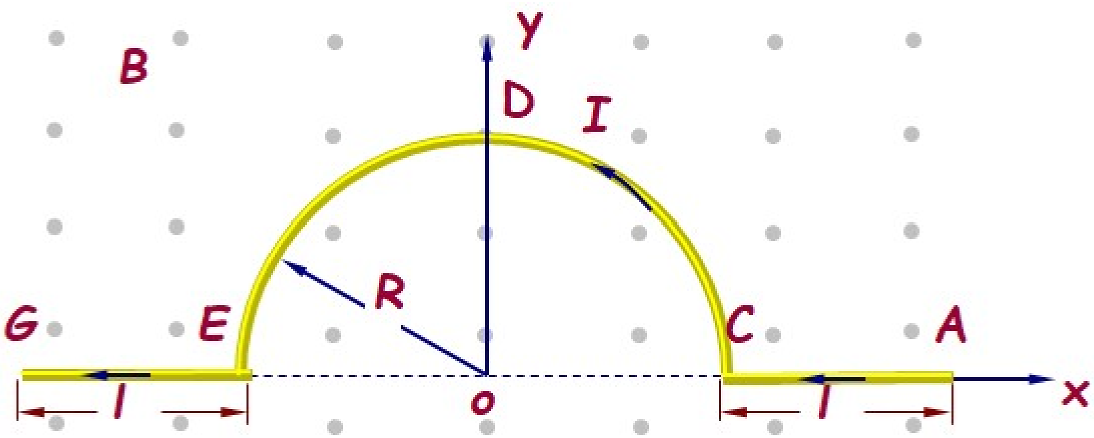


课堂练习题15-8：

如图所示，一根弯曲导线通有电流I，弯曲部分是半径为R 的半圆，两端直线部分的长度均为***l***，载流导线位于与匀强磁场垂直的平面内，求作用在导线上的安培力。

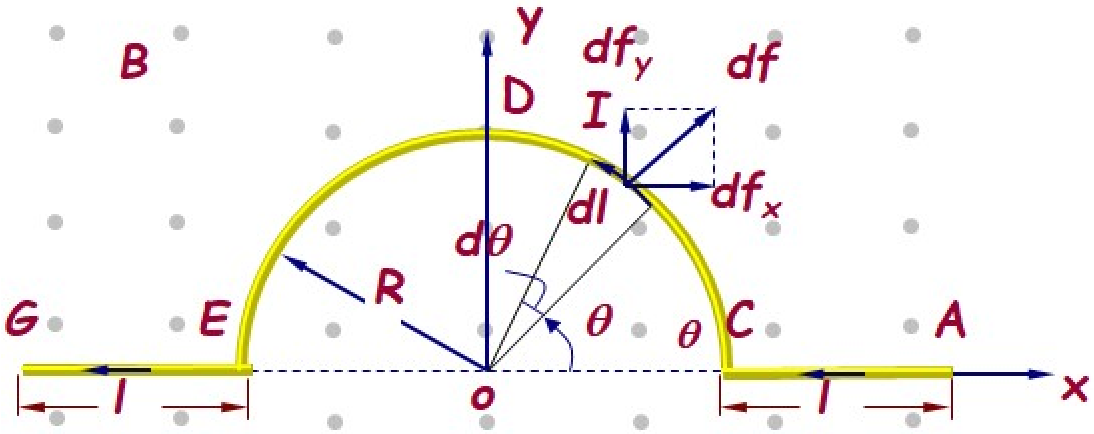
解： 取坐标xoy，由安培定律，两端直线受力：

$$F_{AC} = F_{EG} = IlB\vec{j}$$



在圆弧形导线上取电流元Idl，此电流元所受安培力为：$d\vec{f} = Id\vec{l} \times \vec{B}$，此力可分解为$df_x$和$df_y$，由对称性可知，各电流元水平分量之和为零，而垂直分量为：

$$F_{CE} = \int df_y = \int_0^{\pi} (IRd\theta B)\sin\theta = 2IBR$$



在圆弧形导线上取电流元Idl，此电流元所受安培力为：$df = Idl \times B$，此力可分解为df_x和df_y，由对称性可知，各电流元水平分量之和为零，而垂直分量为：

$$F_{CE} = \int df_y = \int_0^{\pi} (IRd\theta B)\sin\theta = 2IBR$$

所以作用在整个导线上的力为：

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{EG} + \vec{F}_{CE} = 2(l+R)IB\vec{j}$$

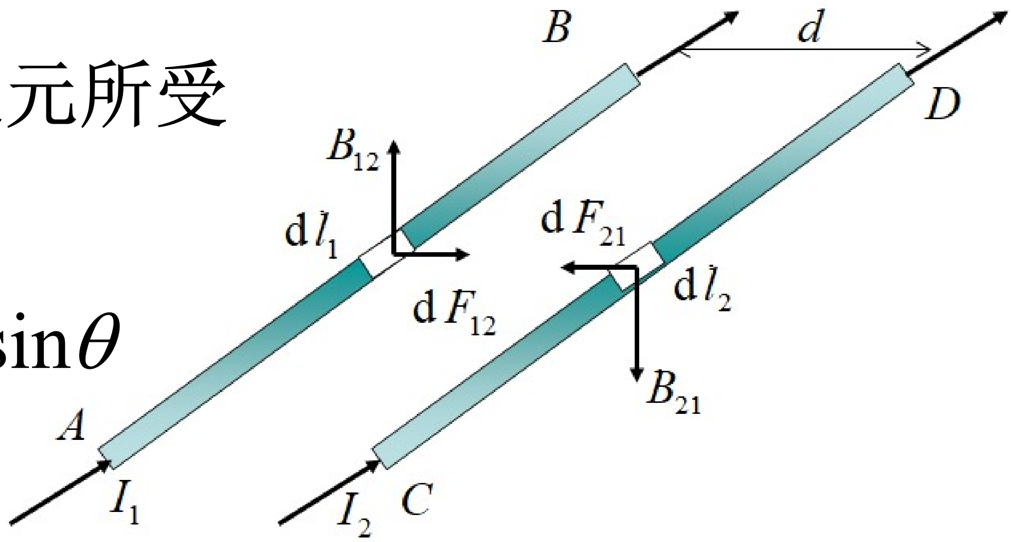
3.平行长直导线间的相互作用力

相距为 d 的无限长直导线，电流分别为 I_1、I_2。

利用毕奥—萨伐尔定律和安培定律，先求出其中一根导线的磁场分布，然后再计算其它载流导线在该磁场中受到的安培力。

导线2上的电流元所受到的力为：

$$dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 \sin\theta$$



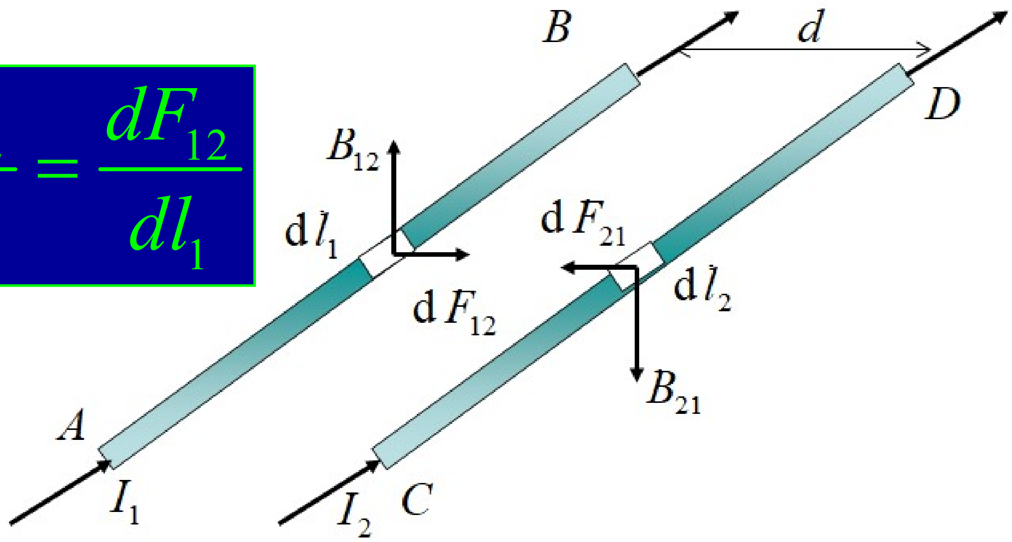
其中**θ**是电流元与磁场间夹角

$$B_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} dl_2$$

单位长度受力：

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} = \frac{dF_{12}}{dl_1}$$



其中**θ**是电流元与磁场间夹角

$$B_{21}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d} \qquad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad dF_{21}=B_{21}I_2dl_2=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}dl_2$$

单位长度受力：

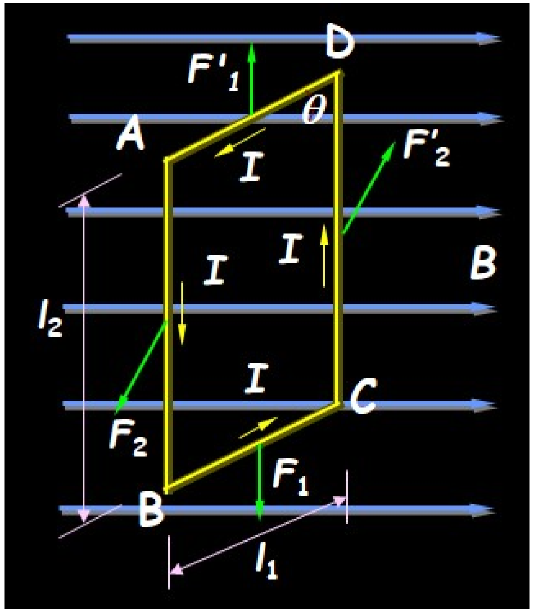
$$\frac{dF_{21}}{dl_2}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}=\frac{dF_{12}}{dl_1}$$

安培定义：真空中相距**1m**的无限长直的平行细导线，载有相等电流，若每米导线上受力恰好为**2×10^{-7}N**，则导线内的电流定义为**1A**。

§15-11 均匀磁场对载流线圈的作用

1.磁场对平面载流线圈的力矩

磁场中刚性长方形载流线圈，边长l_1、l_2，线圈平面与磁场成θ。根据安培定律，导线BC和AD所受磁力分别为：

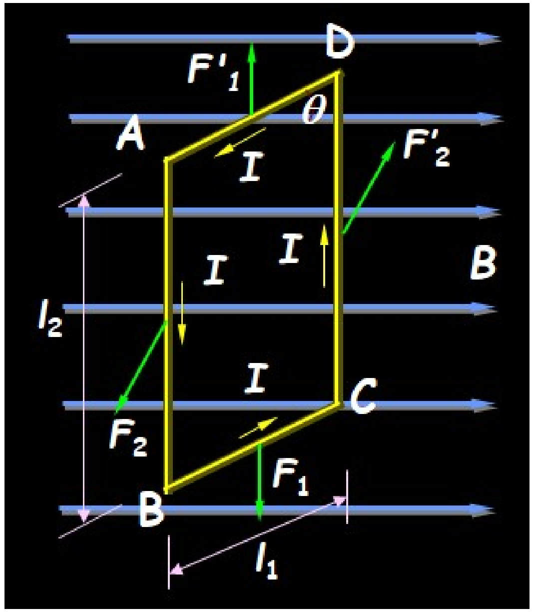


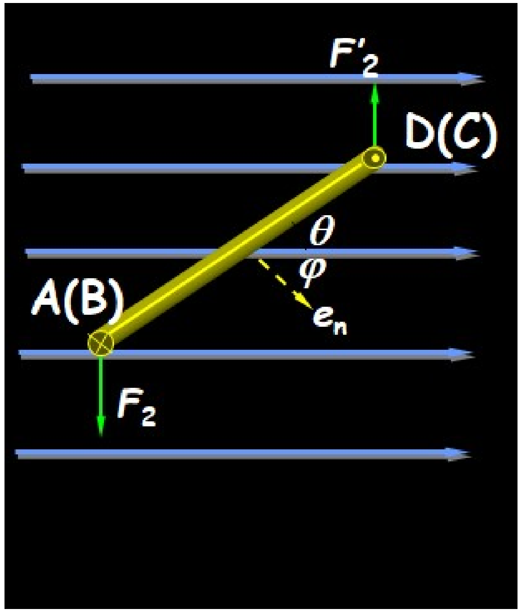
$$F_1 = BIl_1 \sin\theta$$

$$F_1' = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin\theta$$

以上两力大小相等，方向相反，相互抵消。

导线AB和CD所受磁力分别为：$F_2 = F_2' = BIl_2$

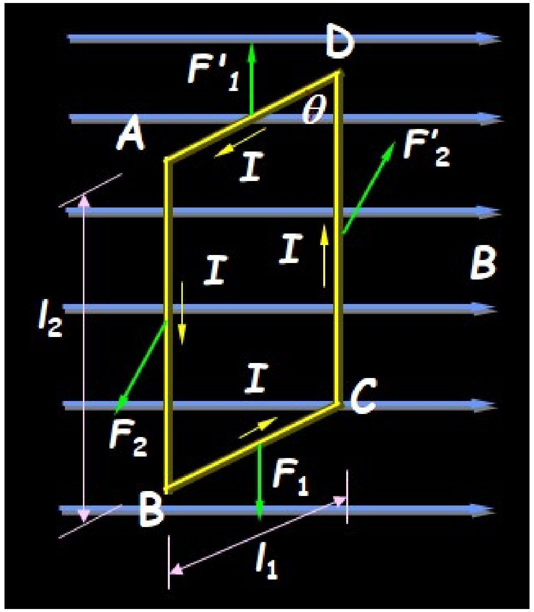


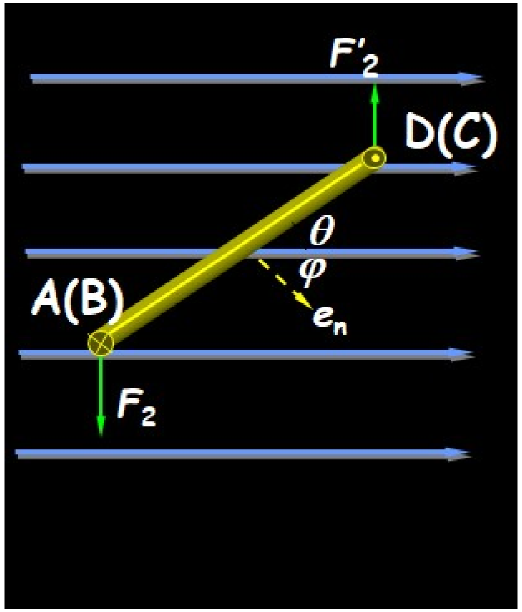


此两力也是大小相等，方向相反，但作用力不在同一直线上，形成一力偶，力臂$l_1 \cos\theta$。

作用在线圈上的力偶矩为：

$$M = F_2 l_1 \cos\theta = BIl_1 l_2 \cos\theta$$



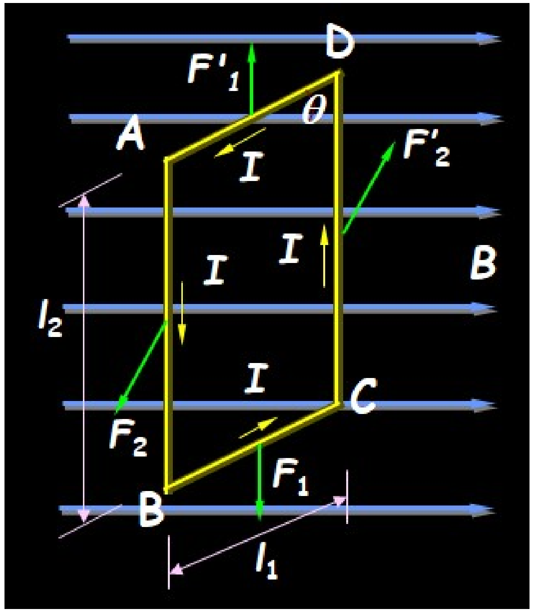


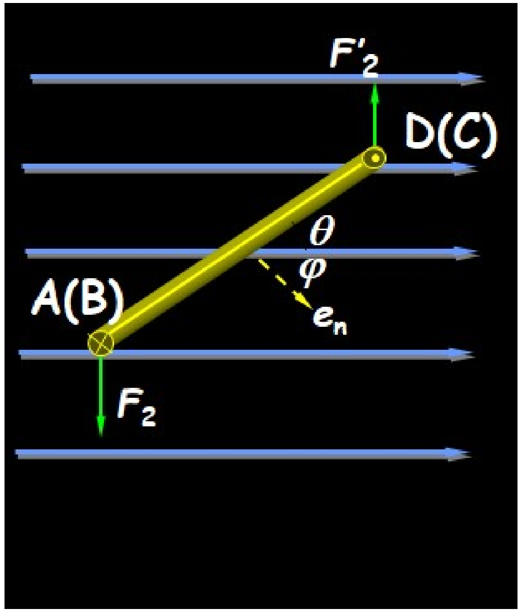
式中$S=l_1 \cdot l_2$，由于$\varphi+\theta=\pi/2$，则：

$$M=BIS\sin\varphi$$

如线圈有N匝，则：

$$M=NBIS\sin\varphi=\left|\vec{p}_m\right|B\sin\varphi$$

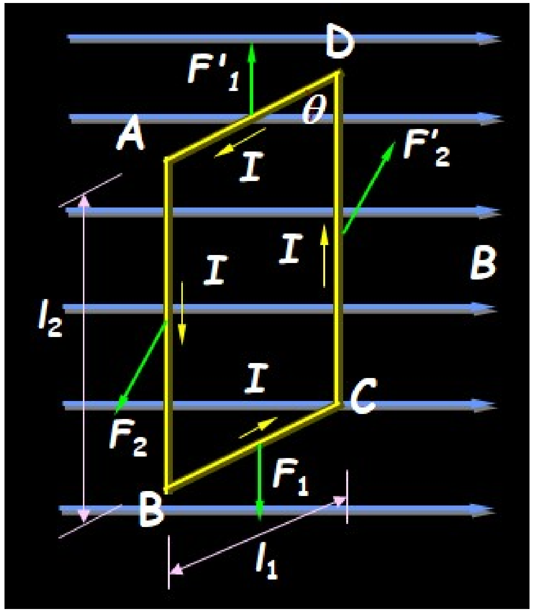


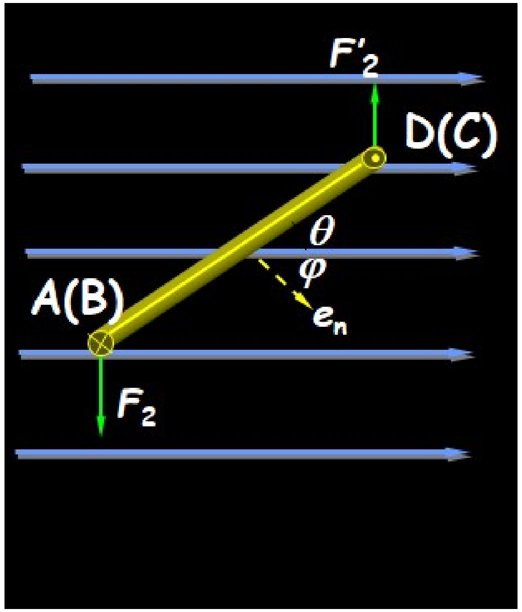


$P_m = NIS$为载流线圈的磁矩，上式写成矢量式：

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}}$$

上式虽从矩形线圈推得，但可证明它对均匀磁场中任意形状的平面载流线圈都适用。



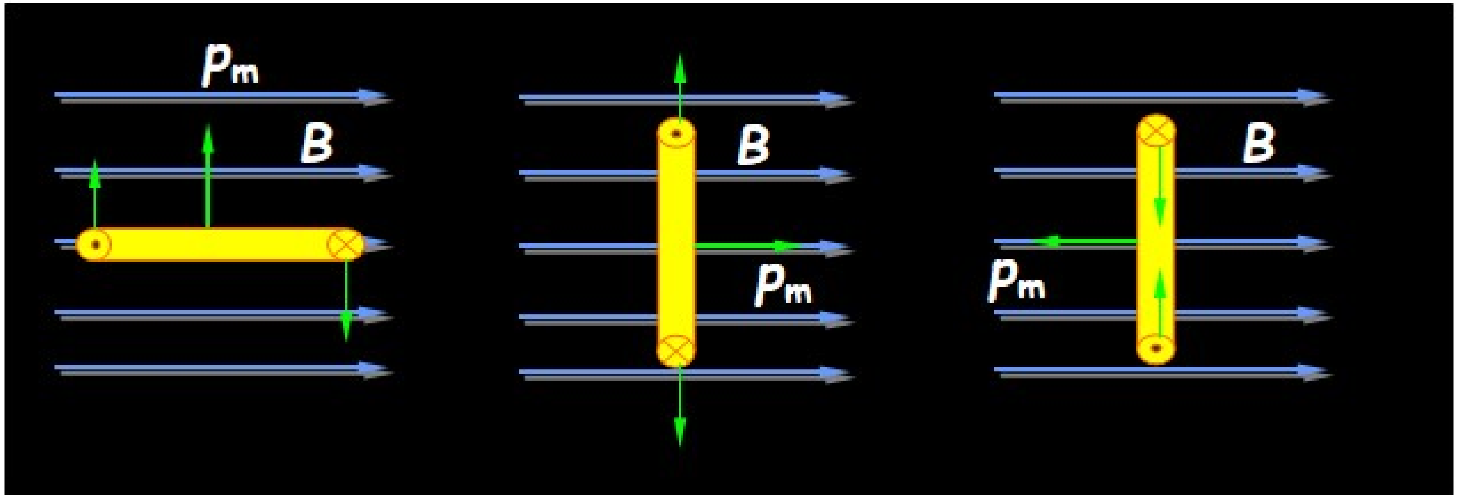


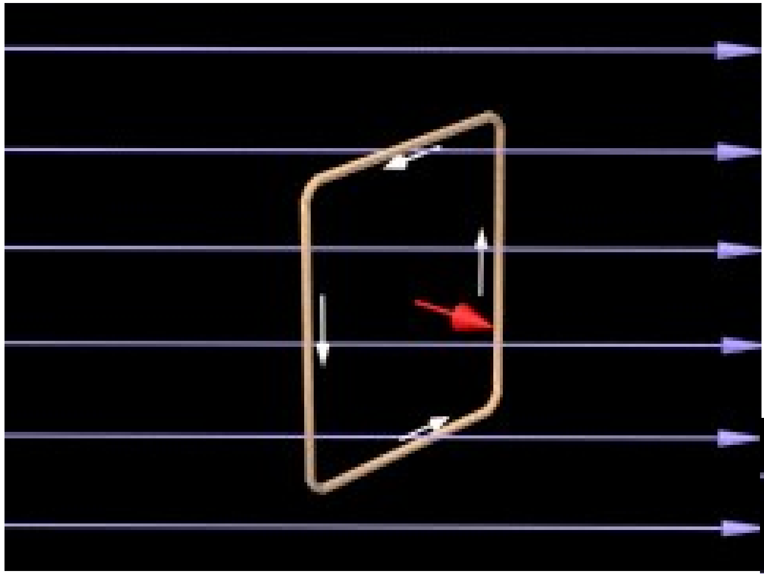
讨论几种特殊情况:

1)当p_m与B的夹角 $\varphi=\pi/2$时，M最大。

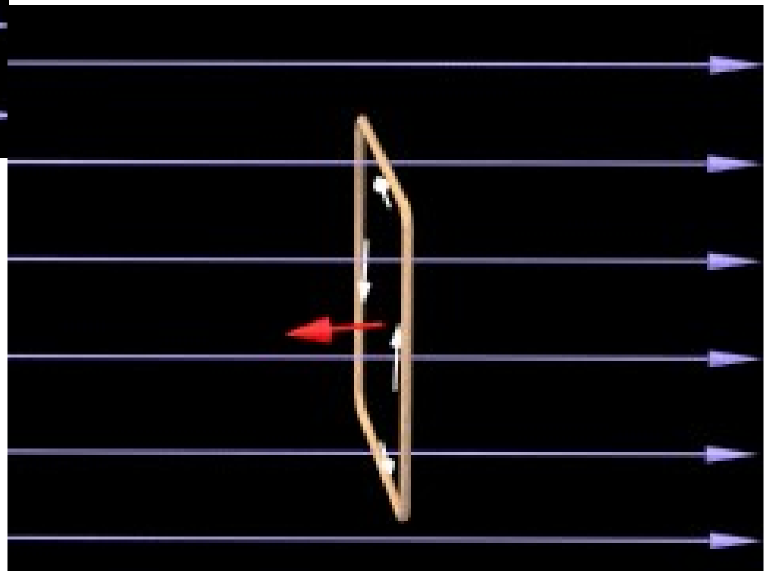
2)当$\varphi=0$时，$M=0$，线圈处于稳定平衡态。

3)当$\varphi=\pi$时，$M=0$，但线圈处于不稳定平衡态。





载流线圈的稳定平衡

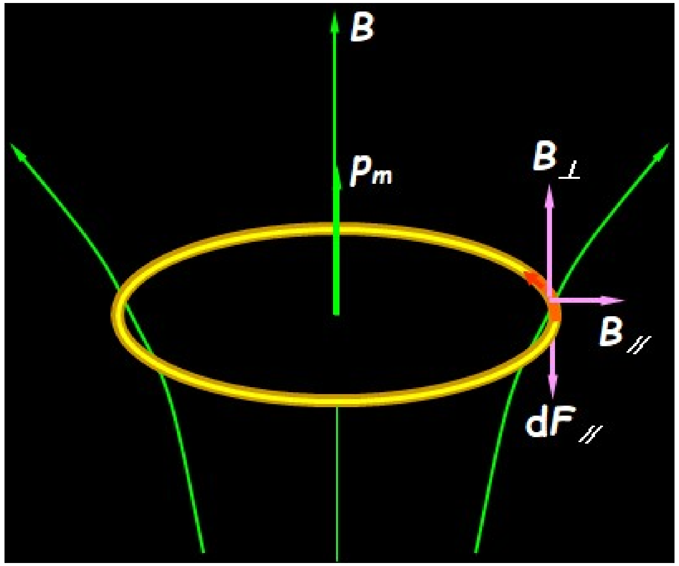


载流线圈的不稳定平衡

上述载流线圈处在均匀磁场中，所受合力为零。

当载流线圈处在非均匀磁场中时，所受合力和合力矩可能都不为零，这样除转动外还有平动。

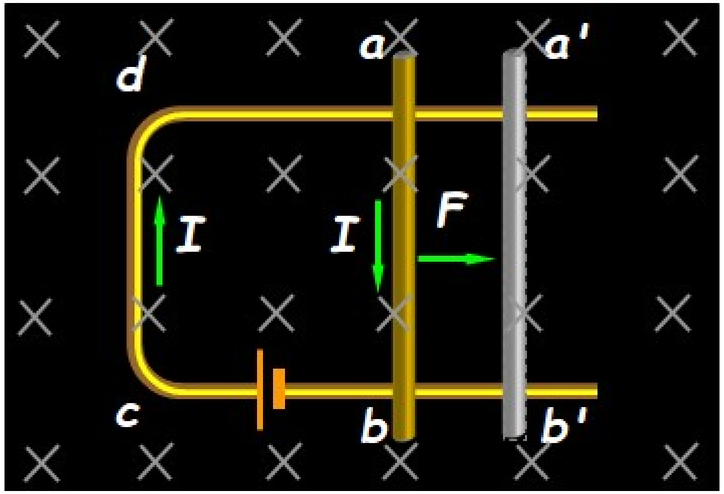
例如：磁矩为p_m线圈在辐射形磁场中，电流元受磁场$B_\perp$的作用力被线圈弹力抵消；而受$B_{/\!/}$的作用力竖直向下，线圈将向磁场较强处移动。



2.载流导线在磁场中平动时磁力的做功*

如图所示载流回路中可滑动导线**ab**受力为：

F=BI*l*



导线从***ab***滑动到***a'b'***

时磁力做功的大小：

A=Faa'=BIlaa'

滑动前后磁通量变化：

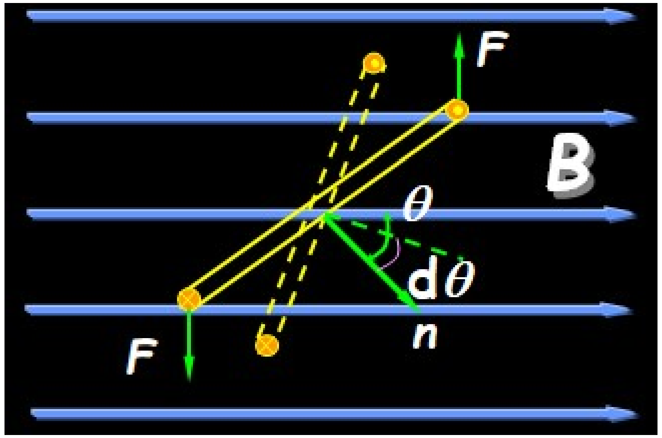
$$\Phi_0 = Bl\overline{da} \rightarrow \Phi_t = Bl\overline{da'} \qquad \Delta\Phi = Bl\overline{aa'}$$

$\boxed{A = I\Delta\Phi}$ 磁力做功等于电流乘磁通变化量

3.载流导线在磁场中转动时磁力的做功*

当线圈法线**n**与**B**成θ角时，磁力矩：

$$M=-BIS\sin\theta$$



当线圈逆向转过**dθ**角时，磁力做功：

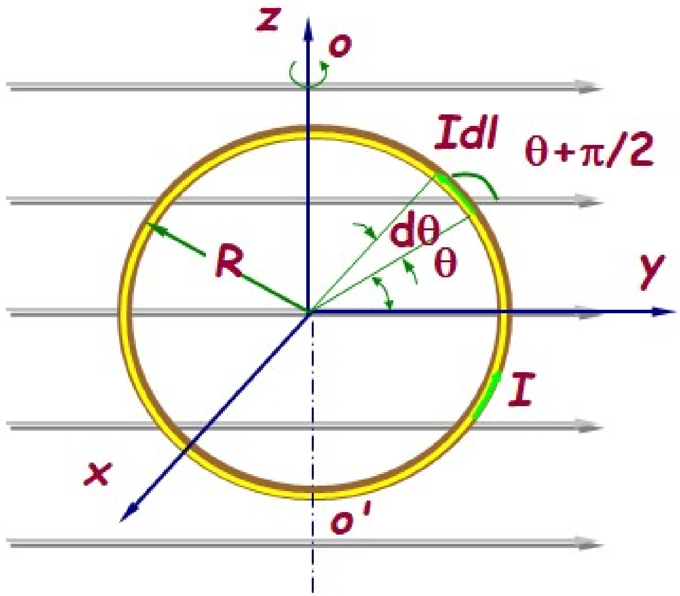
$$\begin{aligned}\mathrm{d}A&=M\mathrm{d}\theta\\&=-IBS\sin\theta\mathrm{d}\theta=I\mathrm{d}(BS\cos\theta)=I\mathrm{d}\Phi\end{aligned}$$

当线圈从θ_1转到θ_2时，磁力做的总功：

$$A=\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}I\mathrm{d}\Phi=I(\Phi_2-\Phi_1)=I\Delta\Phi$$

课堂练习题15-9：

半径为***R***的圆形线圈，通电流***I***，放置在磁感应强度为***B***的均匀磁场中，方向沿***y***轴正向并与线圈平面平行。证明线圈所受对***z***轴的力矩为***BIS***。



解： 在圆弧上取电流元***Idl***，

该电流元所受力：

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l \cdot B\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$$

方向沿***x***轴负向，其力矩：

$$dM = ydF = yIdl \cdot B\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = yIBdl\cos\theta$$

上式中 $y=R\cos\theta$， $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$ 代入上式可得：

$$\mathrm{d}M=BIR^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

线圈右半部分所受合力矩的大小为：

$$M_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}BIR^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}BI\pi R^2$$

---方向沿z轴正向

同理线圈左半部受力与右半部相同但方向相反。

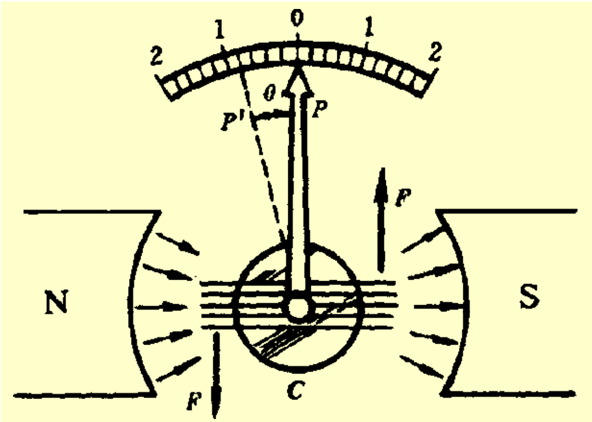
所以整个线圈所受力矩的大小为：

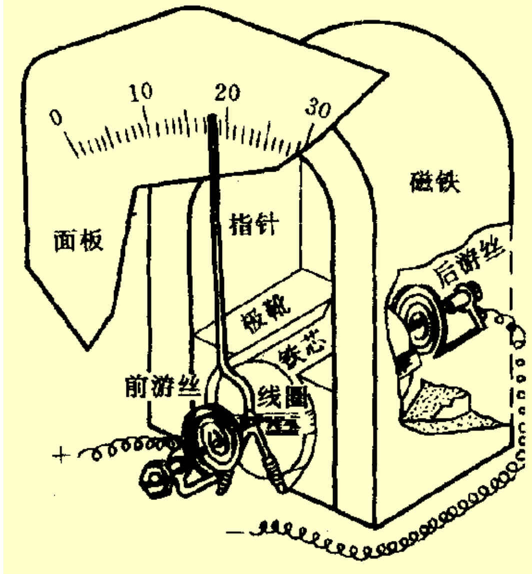
$$\boxed{M=2M_1=BI\pi R^2=BIS}$$

课堂练习题15-10：

磁电式电流计的内部结构

如图所示：



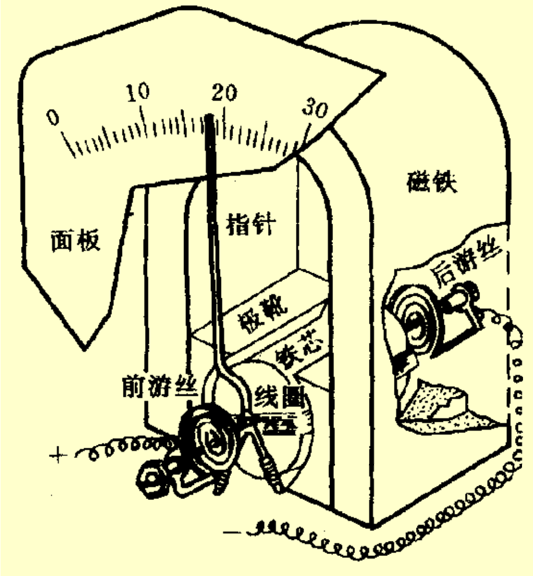


其中永久磁铁的磁场均匀地沿径向分布，空气间隙放一可绕固定轴转动的线圈，轴的两端各有一游丝，其上固定一指针。通电时，线圈所受力矩 M 的大小为(线圈平面的法向总与磁场方向垂直)：

$$M = NBIS$$

线圈在此力矩作用下转动时游丝卷紧，产生的反力矩与转角成正比：

$$M' = k\theta$$



当上述两个力矩平衡时：

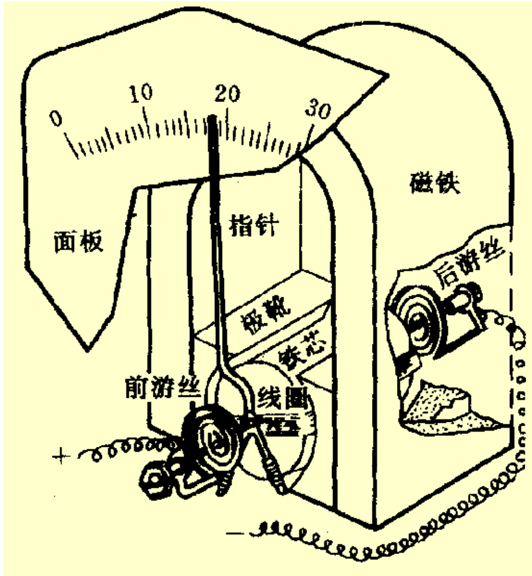
$$NBIS = k\theta$$

即： $I = \dfrac{k}{NBS}\theta = K\theta$， $K = \dfrac{k}{NBS}$ 为恒量。

---线圈转角与电流成正比

$$I=\frac{k}{NBS}\theta=K\theta$$

---称为磁电式电流计的工作原理。



若上述电流计中通一脉冲电流，求电流计怎样偏转。

解：设脉冲的持续时间为t_0，线圈将受一冲量矩的作用：

$$G=\int_0^{t_0}Mdt=\int_0^{t_0}NBISdt=NBS\int_0^{t_0}Idt=NBSq$$

其中$\int_0^{t_0} Idt = q$为脉冲电流通过时的总电量。

由于t_0极短，脉冲通过后，线圈获得一角速度ω_0，按定轴转动角动量定理：$G = J\omega_0 - 0$

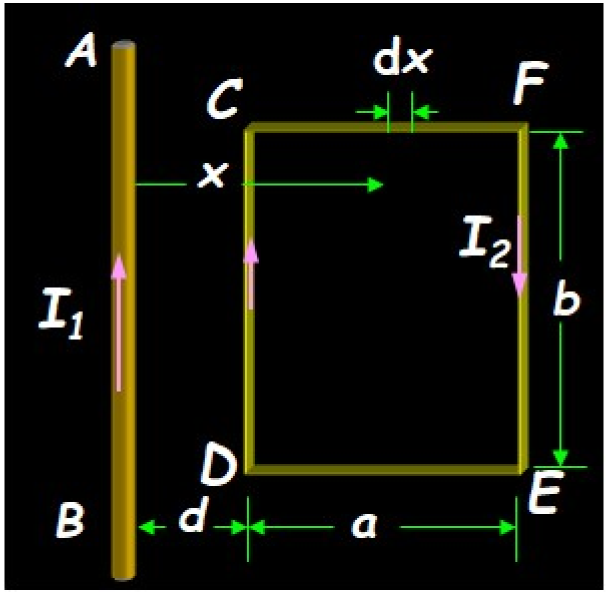
J为线圈的转动惯量，设线圈的最大偏转角为θ，由机械能守恒定律，线圈的初动能将转变为游丝的弹性势能：$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2$

合并以上三式，可得：$\boxed{q = \frac{\sqrt{kJ}}{NBS}\theta}$

---冲击电流计的工作原理

课堂练习题15-11：

无限长直导线AB内通有电流I_1，与其共面的有一矩形线框$CDEF$，通有电流I_2。CD、EF均平行于AB。$CF=a$，$EF=b$，AB与CD间距为d。求：1)矩形线框$CDEF$各边所受直导线的磁场力；2)矩形线框所受到的磁场合力。



解： 1)根据安培力公式：

$$dF = Idl \times B$$

两端积分可求得线框各边的受力，具体如下：

$$F_{CD} = I_2 b B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d}$$ 方向垂直于**CD**向左

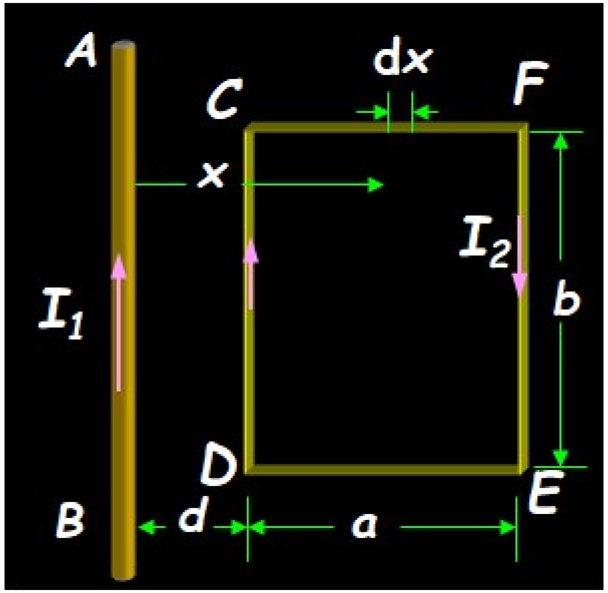
$$F_{EF} = I_2 b B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+d)}$$ 方向垂直于**EF**向右

对于**CF**和**DE**段，由于各点的**B**不相同，所以取电流元$I_2 dx$，积分可得：

$$F_{CF} = F_{DE} = \int_d^{a+d} B I_2 dx$$

$$= \int_d^{a+d} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}$$



上式中，F_{CF}的方向垂直CF向上，

F_{DE}的方向垂直DE向下。

2)由(l)中的结果，可求得作用于矩形线框上的合力为：

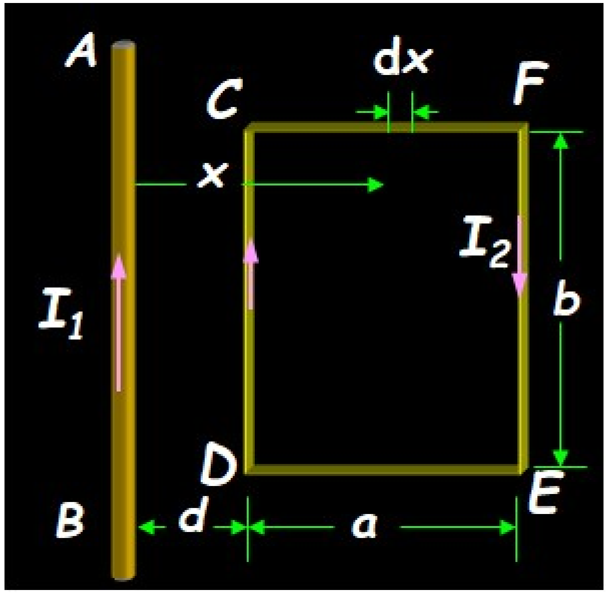
$$F = F_{CD} - F_{EF}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a+d}\right)$$

显然F>0，由此可知：

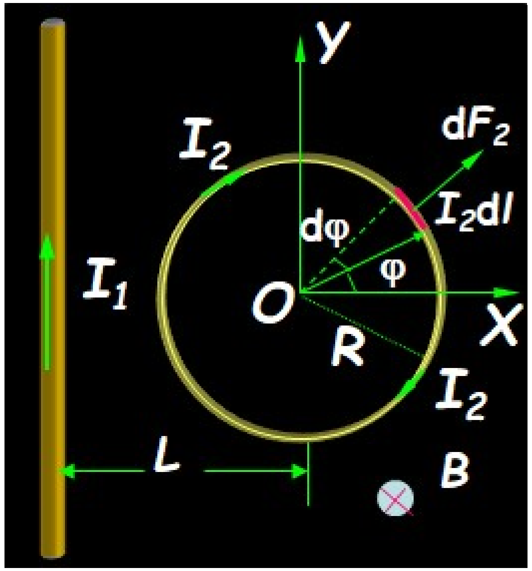
合力F与F_{CD}方向相同，

方向垂直于CD向左。



课堂练习题15-12：

一无限长直导线中载有电流I_1，它旁边放置着一个与其共面的圆形线圈，线圈半径为R、载有电流I_2、圆心到导线的距离为L，两电流的方向如图所示。求：无限长直导线对圆线圈的磁场力。



解： 对于圆线圈，由I_1激发的磁场的方向均垂直纸面向里。

因而圆线圈各电流所受磁场力均沿径向向外。

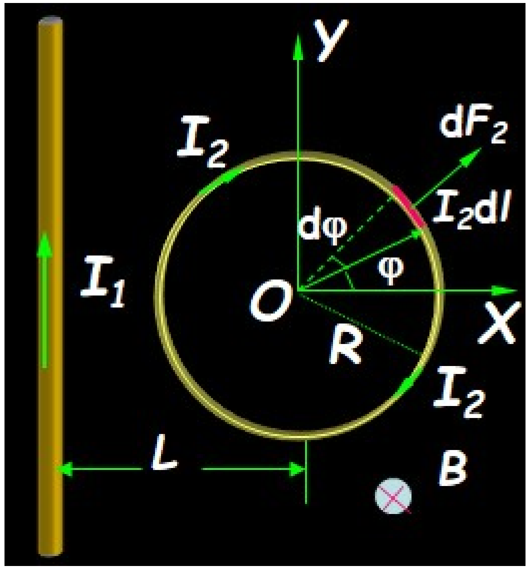
分析可知，圆线圈上各电流元所受磁场力的y。

分量之和为零。因此只需计算***x***分量之和即可。

在圆线圈中任取电流I_2dl，它所受安培力dF_2的方向沿径向向外，大小为：

$$dF_2 = I_2 dl B$$

$$= I_2 R d\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(L + R\cos\varphi)}$$



dF_2的***x***分量为：

$$\mathrm{d}F_{2x} = \mathrm{d}F_2 \cos\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{2\pi(L + R\cos\varphi)}$$

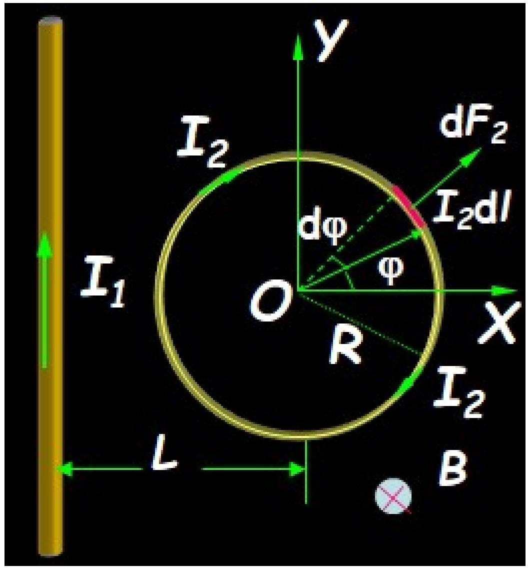
故圆线圈所受作用力为：

$$F_2 = F_{2x} = \int \mathrm{d}F_{2x} = 2\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{(L + R\cos\varphi)}$$

式中：

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{(L + R\cos\varphi)}$$

$$= \frac{\pi}{R}(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}})$$



代入上式，得：

$$F_2 = F_{2x} = \mu_0 I_1 I_2 (1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}})$$

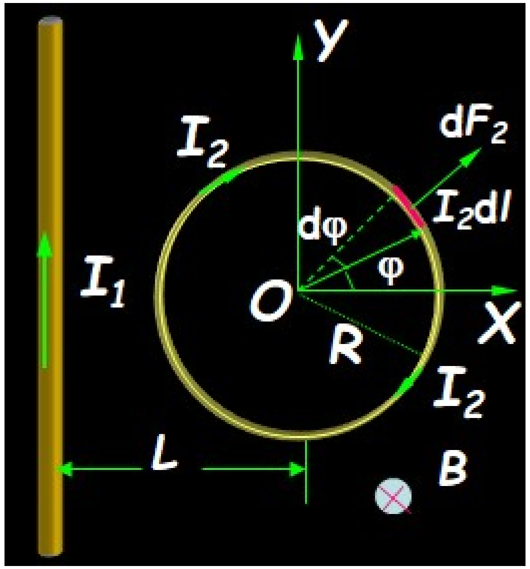
写成矢量式为:

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right)\vec{i}$$

由于 $L > \sqrt{L^2 - R^2}$

所以 $F_2 < 0$

即**F_2**与***i***反向，方向指向无限长直导线。



⟹ **F_2**为吸引力!

电流和磁场【学习重点】

1.深刻理解运动电荷、电流、磁偶极子、磁矩、磁通量、洛伦兹力、安培力等**概念**。

2.熟练运用毕奥—萨伐尔定律、安培环路定理与安培定律求解几种典型载流体系的磁场、磁场中的运动和安培力等**磁场相关问题**。

<矢量矢积与微积分>

毕奥—萨伐尔定律 和 安培环路定理

第四次作业 电流和磁场下

P286-288:

15-9

15-10

15-11

15-14

15-15

15-19

15-22