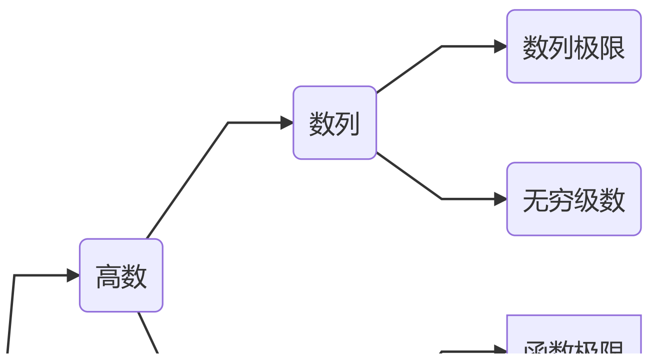
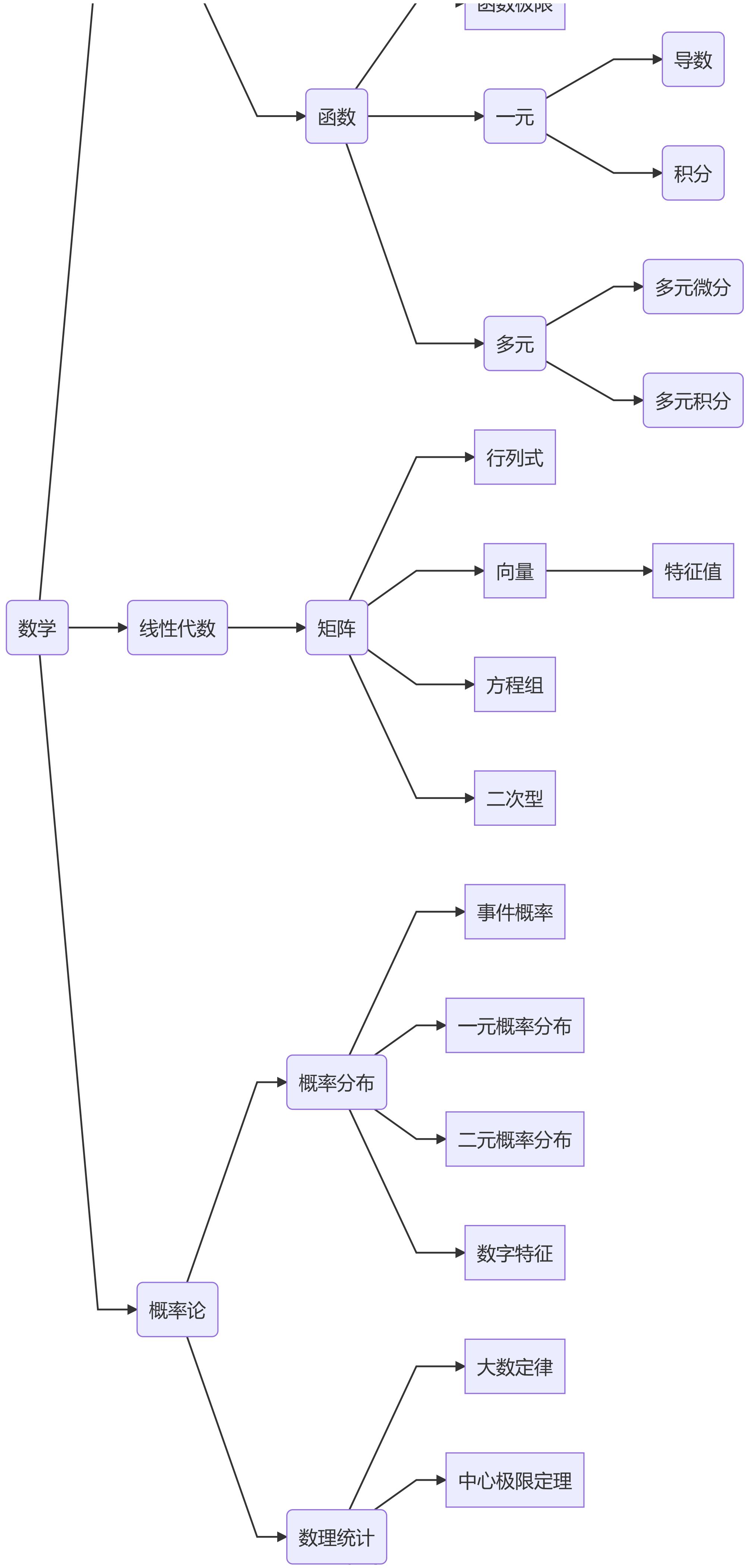
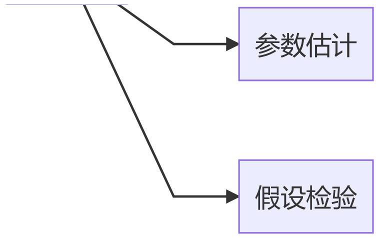
整理要背下来的东西



数列极限
数列
无穷级数
高数



数学
函数
一元
导数
积分
多元
多元微分
多元积分
线性代数
矩阵
行列式
向量
特征值
方程组
二次型
概率论
概率分布
事件概率
一元概率分布
二元概率分布
数字特征
数理统计
大数定律
中心极限定理



高等数学

渐近线

- 极坐标下要先转换为直角坐标或参数方程$x=r(\theta)cos\theta;\quad y=r(\theta)sin\theta$

$$1.\text{铅垂渐近线：}x_0\text{来源：❶无定义点}\quad\text{❷区间端点}$$

$$\text{若}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty)\Rightarrow x=x_0\text{为铅垂渐近线}$$

$$2.\text{水平渐近线：来源：}\pm\infty\text{处}$$

$$\text{若}\lim_{x\to+\infty}f(x)=y_1\Rightarrow y=y_1\text{为水平渐近线}$$
$$\text{若}\lim_{x\to-\infty}f(x)=y_2\Rightarrow y=y_2\text{为水平渐近线}$$

$$3.\text{斜渐近线：来源：}\pm\infty\text{处(已经有水平渐近线的方向一定没斜渐近线)}$$

$$\text{若}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1\Rightarrow y=k_1x+b_1\text{为斜渐近线}$$
$$\text{若}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2\Rightarrow y=k_2x+b_2\text{为斜渐近线}$$

等价无穷小

$x \to 0$时
$sinx \sim tanx \sim arcsinx \sim arctanx \sim x$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$sinx = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$a^x - 1 = e^{xlna} - 1 \sim xlna(a > 0且a \neq 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)(a \neq 0)$$

$$\sqrt{x} - 1 \sim \frac{1}{2}(x-1) \quad x \to 1$$

推广：
$(1+x)^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)x$ 要求$\alpha(x)x \to 0$, 且$\alpha(x) \neq 0$
$x - sinx \sim \frac{1}{6}x^3,\ x - arcsinx \sim -\frac{1}{6}x^3,\ x - tanx \sim -\frac{1}{3}x^3,\ x - arctanx \sim \frac{1}{3}x^3$
$x - ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2,\ tanx - sinx \sim \frac{1}{2}x^3,\ e^x - 1 - x \sim \frac{1}{2}x^2,\ 1 - cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2$

$n \to \infty$时, 有$ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$, 其中$\alpha, \beta > 0, a > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 其中$a_i \geq 0(i = 1, 2, \cdots, m)$

设$f(x)$是以T为周期的可积函数, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$

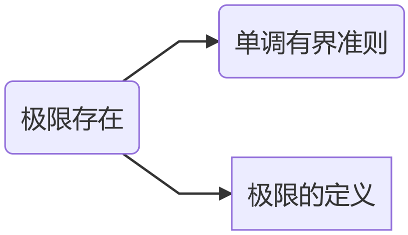
求极限的时候可以利用四则运算拆分运算

极限

- 定义

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, 当n > N时，有|x_n - A| < \varepsilon$$

- 第二问的解题之路就在第一问的结论
  极限的存在
- 数列$\{a_n\}$极限存在⇔数列$\{a_n\}$收敛
- $\{a_n\}$收敛+g(x)连续⇒$\lim_{n\to\infty} arcsin\ x_n = arcsin(\lim_{n\to\infty} x_n)$
- 函数极限存在⇔左右极限存在且相等



单调有界准则

- 单调递增有上界：极限存在
- 单调递减有下界：极限存在

间断点类型都有哪些

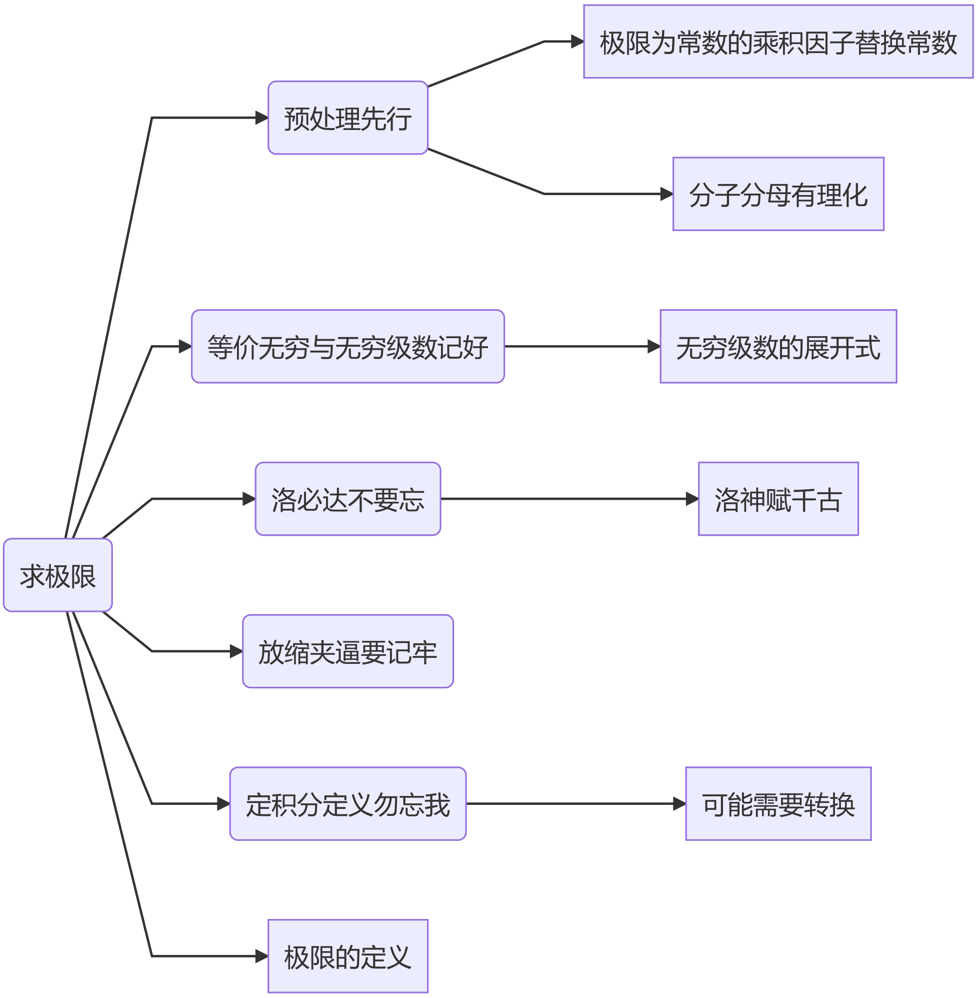
$$\begin{cases} 第一类间断点\begin{cases} 可去间断点 & \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x) \\ \\ 跳跃间断点 & \lim_{x\to x_0^-}f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+}f(x) \end{cases} \\ \\ \\ 第二类间断点\begin{cases} 无穷间断点 & \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty 或者 \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty \\ \\ 震荡间断点 & \lim_{x\to x_0^-}f(x)=振荡不存在 or \lim_{x\to x_0^+}f(x)振荡不存在 \end{cases} \end{cases}$$

数学归纳法

- 如果第k项只与第k-1有关，则用第一数学归纳法
- 如果与多项k之前有关，则用第二数学归纳法

$$\begin{aligned} &第一数学归纳法 \\ &(1)验证 n=1时,命题成立 \\ &(2)假设 n=k时,命题成立 \\ &(3)证明 n=k+1时,命题成立 \\ \\ &第二数学归纳法 \\ &(1)验证 n=1,n=2,命题成立 \\ &(2)假设 n<k时,命题成立 \\ &(3)证明 n=k时,命题成立 \end{aligned}$$

极限的计算



导数

- 具体点采用定义法，导数的极限值也可以采用定义法
- 显函数直接求导
- 隐函数方程左右同时求导
- 隐函数求导公式$y' = -\frac{F_x}{F_y}$
- 高阶导数-{uv乘积导数公式}-{泰勒展开的形式不变性}

导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

变上限函数的导数

$$\frac{d \int_{g(x)}^{f(x)} h(t)dt}{dt} = f'(x)h[f(x)] - g'(x)h[g(x)]$$

要求如下：被积函数h(t)中不得含有变量x，否则需要==先进行换元==除去才可以如此求导

反函数导数

$$x' = \frac{1}{y'} \qquad x'' = -\frac{y''}{(y')^3}$$

曲率与曲率半径

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad R=\frac{1}{k}$$

极值点拐点

极值点

- 使得$f'(x)$在x_0左右变号的x值
- 可以是在不可导点
- 如果在x_0处可导，则$f'(x_0)=0$

拐点

- 凹凸区间的分隔点-凹凸区间的函数定义记住
- 使得$f''(x)$在x_0左右变号的坐标(x,y)
- $\Leftarrow f''(x_0)=0$但$f'''(x_0)\neq 0$
- 可以是在不可导点
- 如果在x_0处二阶可导，则$f''(x_0)=0$
  区别:
- 极值点是x坐标，如x=a；拐点是(x,y)坐标

拐点存在的充分条件:

$$❶\text{第一充分条件：二阶导数在}x_0\text{的左右邻域变号}$$

$$❶\text{第二充分条件：}f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$$

$$❶\text{第三充分条件：要求}n\text{为奇数},f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

多元微分

微分定义

$$\begin{aligned}&\text{一元函数：}\\&\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&\text{如果}\exists\text{常数}A\Rightarrow\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\Leftrightarrow\text{在}x_0\text{处可微：}dy|_{x_0}=Adx\\&\text{其中}A\Delta x\text{称为线性主部},\text{其中}A=f'(x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{多元函数：}\\&\text{全微分：}df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\\&\text{判断函数}z=f(x,y)\text{在点}(x_0,y_0)\text{处是否可微},\text{步骤如下：}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}❶\text{写出全增量：}\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\❷\text{写出线性增量}A\Delta x+B\Delta y,\text{其中}A=f'_x(x_0,y_0),B=f'_y(x_0,y_0)\\❸\text{作极限}\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\❹\text{如果❸中极限等于}0\Rightarrow f(x,y)\text{在点}(x_0,y_0)\text{处可微}\end{cases}$$

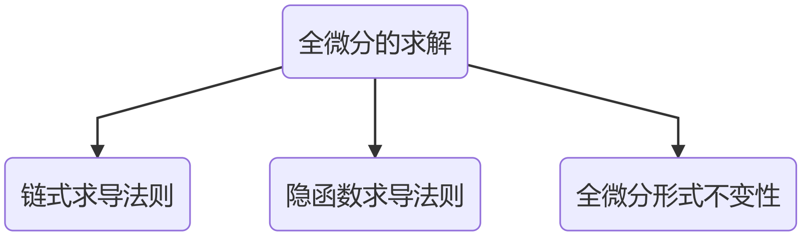
偏导数连续的判断步骤

判断函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处是否偏导数连续,步骤如下：

$$\begin{cases} ❶\text{用定义法求} f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0) \\ ❷\text{用公式法求} f'_x(x,y), f'_y(x,y) \\ ❸\text{计算} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f'_x(x,y) \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f'_y(x,y) \\ ❹\text{如果} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0) \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0) \\ \quad \text{成立,则该点偏导连续} \end{cases}$$

全微分的求解

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$



多元函数求导

导数定义

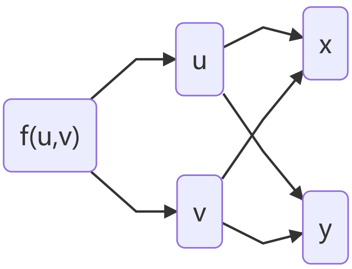
$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

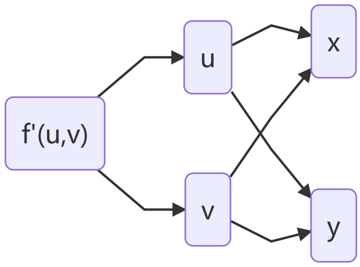
$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

显函数-链式求导

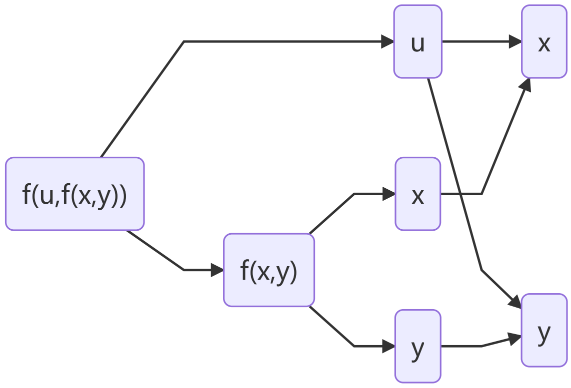
很重要的一点，f'(u,v)同样具有u,v的结构，无论f的几阶导数，都有和f相同的复合结构。为了清楚结构，不仅要写出f的复合结构图，而且还要写出f'的复合结构图。

下面列举几种复合结构图，u，v也常用1、2替代





复合里面套函数的复合结构图：



多元函数的极值判断

- Δ=0无法判断时，需要考虑放缩法
- 关于拉格朗日数乘，考虑怎么可以较好的运用约束方程

无条件极值：

(1)二元函数取极值的必要条件

$$设z=f(x,y)在(x_0,y_0)\begin{cases}一阶偏导数存在\\ \\ 取极值\end{cases}\Rightarrow f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$$

(2)二元函数取极值的充分条件

$$记A=f''_{xx}(x_0,y_0)\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0)\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)$$

$$\Delta=AC-B^2\begin{cases}\Delta>0\begin{cases}A>0 & 极小值\\ A<0 & 极大值\end{cases}\\ \\ \Delta<0 \quad 不是极值\\ \Delta=0 \quad 无法判断\end{cases}$$

有条件极值：拉格朗日数乘法

$$求目标函数u=f(x,y,z)\ 在条件\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}\quad 的最值$$

1.构造辅助函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

2.令

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0,\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0,\\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0,\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0,\\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0;\end{cases}$$

3.解上述方程组得到备选点$P_i,i=1,2,3,\cdots,n$并求$f(P_i)$,取其最大为u_{max},最小为u_{min}

中值定理

所有定理都至少要求区间连续

确定区间

- 圈出题给区间，并在坐标轴上画出

确定辅助函数

❶乘积公式$(uv)'=u'v+uv'$的逆用

$$\begin{cases} a.\,[f(x)f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x) \\ b.\,[f(x)f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x) \\ c.\,[f(x)e^{\varphi(x)}]'=[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]e^{\varphi(x)}\begin{cases} f'(x)+f(x) \\ f'(x)-f(x) \end{cases} \end{cases}$$

❷商的求导公式$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\begin{cases} a.\,[\frac{f(x)}{x}]'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \\ b.\,[\frac{f'(x)}{f(x)}]'=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)} \\ c.\,[lnf(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)} \end{cases}$$

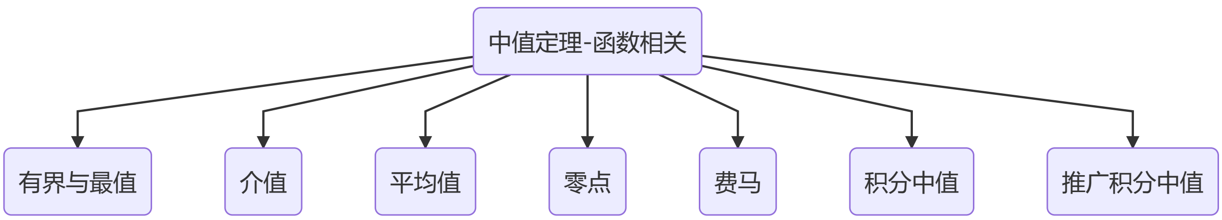
❸见到$\int_a^b f(x)dx$, 可令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$

❹二阶乘积导数公式 : $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$

确定使用的定理

函数f(x)相关

- 要求: f(x)在[a,b]上连续



$$有界与最值定理:m \le f(x) \le M, 其中m, M分别为f(x)在[a, b]上的最小值与最大值$$

$$介值定理:当m \le \mu \le M时, 存在\xi \in [a, b], 使得f(\xi) = \mu$$

$$平均值定理:当a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b时, 在[x_1, x_n]上至少存在一点\xi, 使得:$$

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

$$零点定理:f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \ \in (a, b), 使得f(\xi) = 0$$

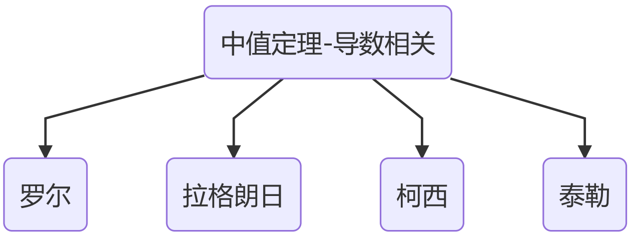
$$费马定理:设f(x)在点x_0处满足\begin{cases} ❶可导 \\ ❷取极值 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$积分中值定理:设f(x)在[a, b]上连续, 则存在\xi \in [a, b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

$$推广积分中值定理:\begin{cases} 1.f(x)、g(x)在[a, b]上连续 \\ 2.g(x)在[a, b]上不变号 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx \quad \exists \xi \in (a, b)$$

导数相关

- 等式罗尔，二阶泰勒，柯西基本不考，一阶不等式或一二阶相联系拉他
- 分部积分也可以构建f(x)与f'(x)之间关系
- f(x)在[a,b]连续
- f'(x)在(a,b)可导
- $ln1 = 0, e^0 = 1$,==留意f(x)=0,f'(x)=0的点==



$$罗尔定理:设f(x)满足\begin{cases}❶[a,b]上连续\\ ❷(a,b)内可导\\ ❸f(a)=f(b)\end{cases}则存在\xi\in(a,b),使得f'(\xi)=0$$

$$拉格朗日定理:设f(x)满足\begin{cases}❶[a,b]上连续\\ ❷(a,b)内可导\end{cases}则存在\xi\in(a,b),使得f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$柯西中值定理:设f(x),g(x)满足\begin{cases}❶[a,b]上连续\\ ❷(a,b)内可导\\ ❸g'(x)\neq 0\end{cases}则存在\xi\in(a,b),使得\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$泰勒公式:f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$二元泰勒:f(x,y)=f(x_0,y_0)+\begin{pmatrix}f'_x & f'_y\end{pmatrix}_{X_0}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\Delta x & \Delta y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{pmatrix}_{X_0}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+R_2$$

微分等式问题

- 方程的根、函数的零点

$$a.存在性:零点定理$$

$$b.唯一性:单调性,研究导数$$

$$c.罗尔原话:f^{(n)}(x)=0有k个根\Rightarrow f(x)=0至少有k+n个根$$

$$d.实系数奇次方程组至少有一个实根$$

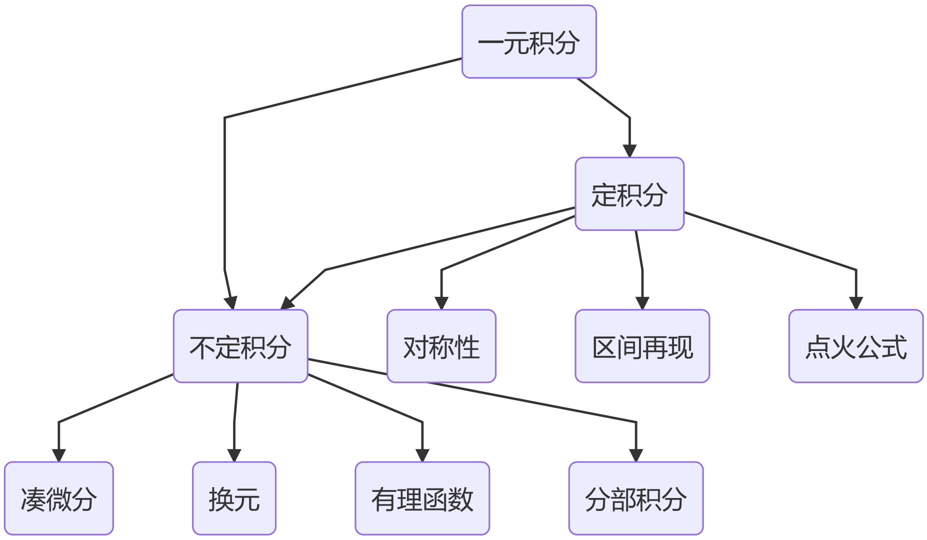
微分不等式

- 观察函数的性质-对称性
- 利用函数性质-单调性-凹凸性
- 放缩法

一元积分

- 常数项写作定积分形式→放缩为定积分
- 被积函数可积⇒变上限积分连续　　被积函数连续/可去间断点⇒变上限积分可导
- 变上限函数≠原函数

- 求解旋转曲面面积
- 周期函数积分特性$\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$，在一个周期内的积分与周期的起终点无关



定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(0+\frac{1-0}{n}i)\frac{1-0}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(0+\frac{1-0}{n}i)\frac{1-0}{n} = \int_0^1 f(x)dx$$

原函数存在定理

- 在一定区间内成立
- 连续函数必有原函数
- 含有第一类间断点和无穷间断点的必没有原函数
- 含震荡间断点的可能存在原函数

积分表

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \quad k \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C \quad a > 0且a \neq 1$$

$$\int tanxdx = -ln|cosx| + C \xrightarrow{法则1} \int cotdx = ln|sinx| + C$$

$$\int \frac{1}{cosx}dx = \int secxdx = ln|secx + tanx| + C \xrightarrow{法则1} \int \frac{1}{sinx}dx = \int cscdx = ln|cscx - cotx| + C$$

$$\int sec^2xdx = tanx + C \longrightarrow \int csc^2xdx = -cotx + C$$

$$\int secxtanxdx = secx + C \xrightarrow{法则1} \int cscxcotxdx = -cscx + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C \quad (a > |x| \geq 0)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = -\frac{a^2}{2}ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$\int sin^2xdx = \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C \xrightarrow{法则1} \int cos^2xdx = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + C$$

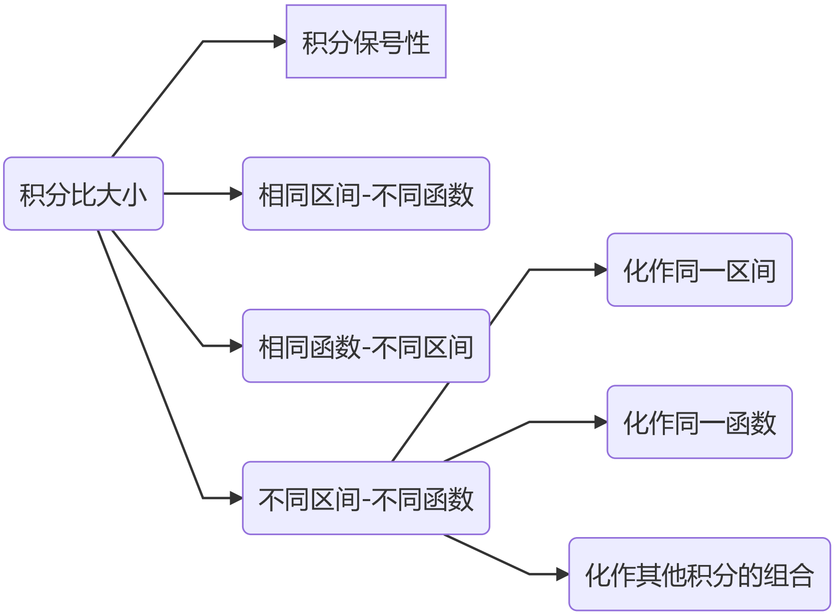
$$\int tan^2xdx = tanx - x + C \xrightarrow{法则1} \int cot^2xdx = -cot - x + C$$

华里士公式

`[0,pi]cos奇数n为0`

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^nxdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^nxdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 & n为奇数 \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n为偶数 \end{cases}$$

积分比大小



一元积分的物理应用

- 以水面为坐标起点，向下为x轴正方向
- 提取物体做功

$$W=\rho g\int_a^b xA(x)dx \quad \rho\text{为物体密度} \quad g\text{为重力加速度}$$

- 静水压力

$$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]dx$$

一元积分的几何应用

- 弧长公式：$s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$
- 曲线绕坐标轴旋转公式：$v=\int_a^b \pi f^2(x)dx \quad v=\int_a^b 2\pi x f|(x)|dx$
- 极坐标面积公式：$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}|r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)|d\theta$

反常积分的敛散判断

- 将题给反常积分转为如下两种形式

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}dx \quad (a<b)\begin{cases} q<1, & \text{收敛} \\ q\geq 1, & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \quad (a>0)\begin{cases} p>1, & \text{收敛} \\ p\leq 1, & \text{发散}\end{cases}$$

求解曲面表面积(侧)

记住公式，不要将坐标系的转换当作公式换元

- 绕x轴旋转

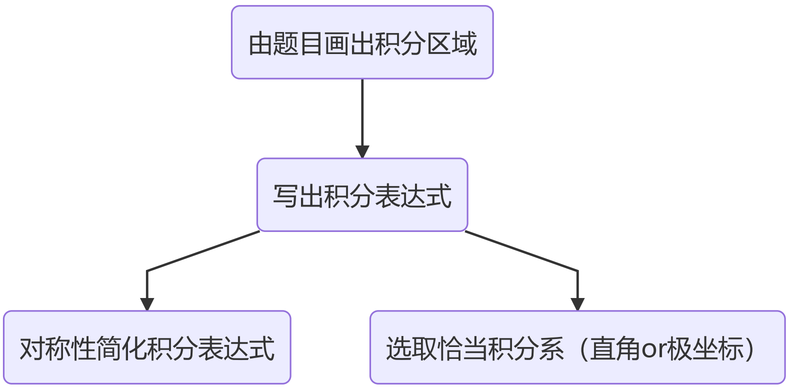
$$S_{侧}=\begin{cases}2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx\\ \\ 2\pi\int_a^b y(t)\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\\ \\ 2\pi\int_a^b r\sin\theta\cdot\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta\end{cases}$$

- 绕y轴旋转

$$S_{侧}=\begin{cases}2\pi\int_a^b x\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx\\ \\ 2\pi\int_a^b x(t)\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\\ \\ 2\pi\int_a^b r\cos\theta\cdot\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta\end{cases}$$

二重积分

后积先定限，限内画条线
先交写下限，后交写上限



$$1.对称性：\begin{cases}❶普通对称性：\{x轴\}-\{y轴\}-\{原点\}-\{x=a\}-\{y=b\}对称\\ ❷轮换对称性：积分区域关于y=x对称\quad \iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma\end{cases}$$

$$2.积分坐标系：\begin{cases}❶直角坐标系\begin{cases}❶先x后y：\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx\\ ❷先y后x：\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\\ ❸交换积分次序\end{cases}\\ \\ ❷极坐标系\begin{cases}❶\ \iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(rcos\theta,rsin\theta)rdr\\ ❷被积函数中出现(x-y)^2,(x^2+y^2),\frac{y}{x}\cdots时使用\end{cases}\\ \\ ❸参数方程：化为直角坐标下的累次积分\end{cases}$$

$$3.二重积分中值定理：\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$$

交换积分次序or极直互换
由已知积分上下限⇒重构积分区域⇒重写积分上下限

二重积分换元法

一元函数积分换元 $\int_a^b f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

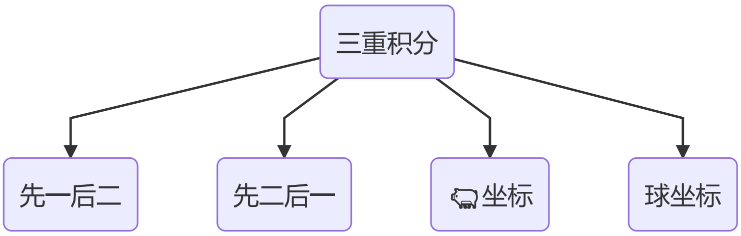
其中三换：$a.\ f(x) \to f[\varphi(t)] \quad b.\ \int_a^b \to \int_\alpha^\beta \quad c.\ dx \to \varphi'(t)dt$

二元函数积分换元 $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy \xlongequal[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint_{D_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

其中三换：$a.\ f(x,y) \to f[x(u,v),y(u,v)] \quad b.\ \iint_{D_{xy}} \to \iint_{D_{uv}} \quad c.\ dxdy \to \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

三重积分



球坐标公式

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(rsin\varphi cos\theta, rsin\varphi sin\theta, rcos\varphi)r^2 sin\varphi d\theta d\varphi dr$$

第一型曲线积分

- 弧长公式$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$

$$\begin{cases} \int_L f(x,y)ds \\ \int_\Gamma f(x,y,z)ds \end{cases}$$

$$\int_L f(x,y)ds = \begin{cases} \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+(y_x')^2}dx \\ \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt \\ \int_\alpha^\beta f[rcos\theta, rsin\theta]\sqrt{r^2+(r')^2}dt \end{cases}$$

第一型曲面积分

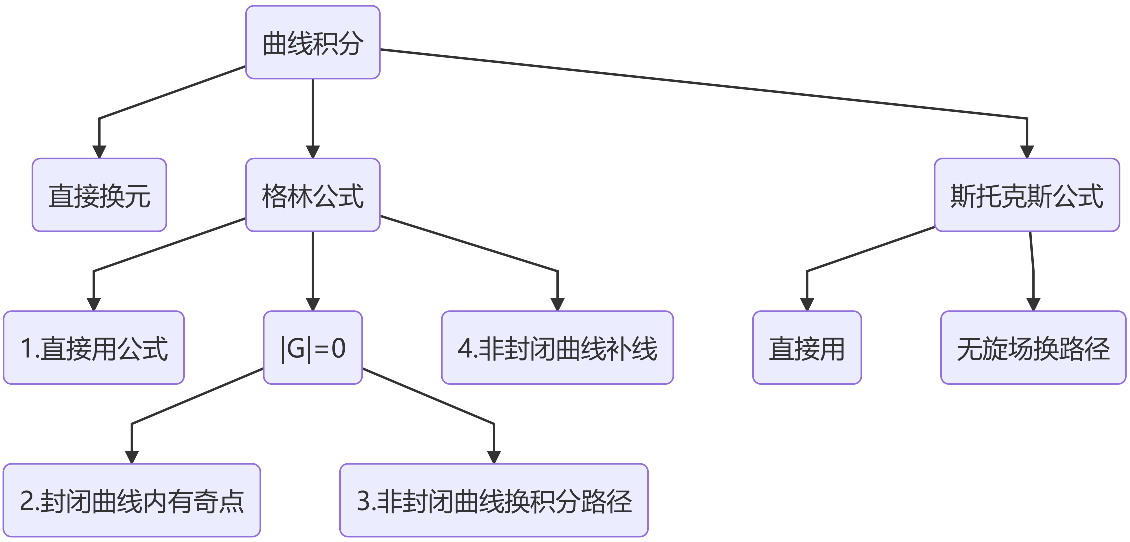
- 普通对称，轮换对称
- 投影面不能有重叠哦
- 应用：求解曲面面积$S = \iint_\Sigma 1dS$

$$
曲面\sum : z = g(x,y)
$$

$$
\iint_{\sum} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,g(x,y)) \cdot \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ dxdy
$$

第二型曲线积分

- 其对称性与其他积分不同，谨慎使用，因为与积分路径的方向有关系
- 换元的积分起终点没有绝对的大小关系
- 使用格林公式之后-积分区域变化，原来函数关系不再成立
- $\int_L Pdx + Qdy = \int_L (Pcos\alpha + Qsin\alpha)ds = \int_L (A \cdot \tau)ds$
- $\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds = \int_\Gamma (A \cdot \tau)ds$
- 其中A：向量场。τ：与L/Γ同方向的单位切向量



对称性：第二型的对称性和其他都不一样！！！

- 轮换对称性

$$
\text{如果被积曲线关于}y=x\text{对称} \Leftrightarrow \text{交换}x,y\text{后曲线方程不变}
$$

$$
\Rightarrow \int_L f(x,y)dx + f(y,x)dy = 0
$$

- 普通对称性

$$1.L关于y轴对称：L_1为L在右半平面的部分$$

$$\int_L P(x,y)dx = \begin{cases} 0 & P(x,y)是关于x的奇函数 \\ 2\int_{L_1} P(x,y)dx & P(x,y)是关于x的偶函数 \end{cases}$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \begin{cases} 2\int_{L_1} Q(x,y)dy & Q(x,y)是关于x的奇函数 \\ 0 & Q(x,y)是关于x的偶函数 \end{cases}$$

$$2.L关于x轴对称：L_1为L在上半平面的部分$$

$$\int_L P(x,y)dx = \begin{cases} 2\int_{L_1} P(x,y)dx & P(x,y)是关于y的奇函数 \\ 0 & P(x,y)是关于y的偶函数 \end{cases}$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \begin{cases} 0 & Q(x,y)是关于y的奇函数 \\ 2\int_{L_1} Q(x,y)dy & Q(x,y)是关于y的偶函数 \end{cases}$$

格林公式:

- 有界闭区域D由分段光滑曲线L围成
- P(x,y)、Q(x,y)在D上具有一阶连续偏导数-如果只是函数连续,则不可使用格林公式
- L取正方向-人沿着这个方向走的时候, 左手始终在L所围的D内部

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$$

重定义格林公式如下:

$$定义格林行列式|G| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}$$

$$重写格林公式如下：$$
$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D |G|d\sigma$$

积分与路径无关的几个充要条件

- a.$\int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$与路径无关
- b. $Pdx + Qdy$为某二元函数u(x,y)的全微分
- c. $Pdx + Qdy = 0$为全微分方程
- d. $Pi + Qj$为某二元函数的梯度
- e. 沿D内任意分段光滑闭曲线L都有$\oint_L Pdx + Qdy = 0$
- f. $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$在D内处处成立

斯托克斯公式

- Γ与$\sum$的法向量成右手系
- P，Q，R在Ω内具有连续的一阶偏导数-如果只是函数连续,则不可使用斯托克斯公式
- 使用斯托克斯公式之后-积分区域变化，原来函数关系不再成立
- 对于平面⇒第一型曲面积分，对于曲面⇒第二型曲面积分

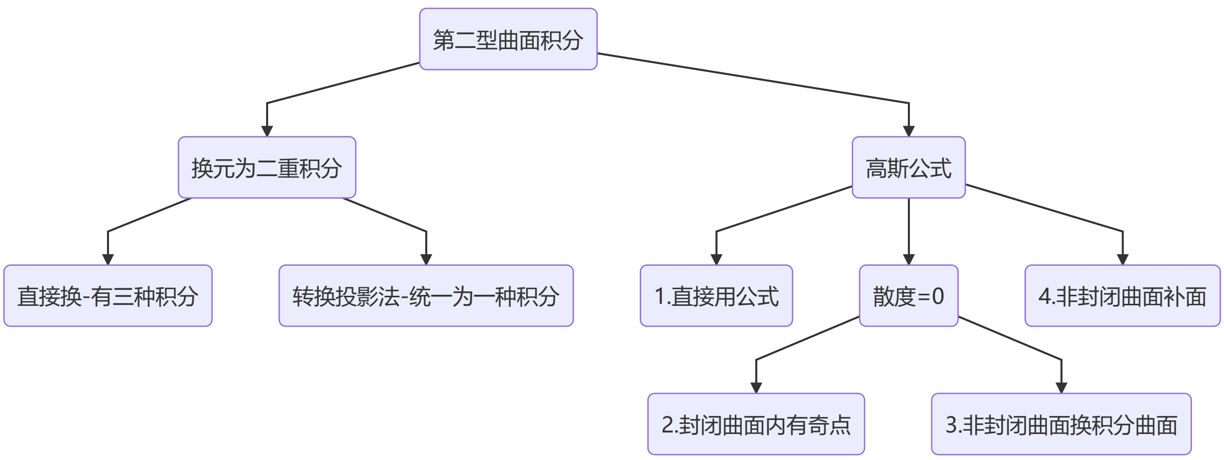
$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint_\sum \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\sum \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$其中\overrightarrow{n}=(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)为\sum的单位外法线向量$$

第二型曲面积分

- $\iint_\sum Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\sum(Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)dS$ 其中$(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)$为$\sum$同侧单位法向量



换元-二重积分
将P(x,y,z)中的x用x(y,z)替换,Q中的y用y(z,x)替换,R中z用z(x,y)替换:

$$\iint_\sum P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\pm\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]dydz\pm\iint_{D_{zx}}P[x,y(z,x),z]dzdx\pm\iint_{D_{xy}}P[x,y,z(x,y)]dxdy$$

其中D_{xy},D_{zx},D_{xy}为原来的曲面向对应二维平面的投影

要求:

- 1.其投影面不能有任何重叠部分，如果有重叠的话，要分割处理投影

- 2.其中当“曲面的法向量”和“被消变量的正轴方向夹锐角时取+”

转换投影法

$$\iint_{\sum} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} P[x,y,z(x,y)](-\frac{\partial z}{\partial x}) + Q[x,y,z(x,y)](-\frac{\partial z}{\partial y}) + Q[x,y,z(x,y)]dxdy$$

要求:

- 投影面不能有重叠
- ±与直接换元法取法同

高斯公式
使用条件:

- 1.空间有界闭区域Ω由有向分片光滑曲面∑围成
- 2.P(x,y,z)、Q(x,y,z)、R(x,y,z)在Ω上具有一阶连续偏导数
- 3.其中∑取外侧
- 使用高斯公式之后-积分区域变化，原来函数关系不再成立

公式:

$$\oiint_{\sum} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv$$

各类积分

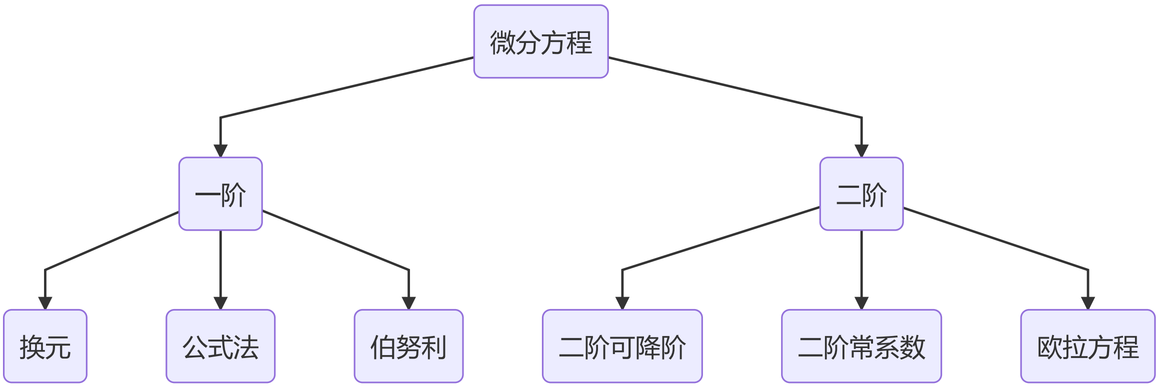
[[定积分-二重积分-三重积分.xmind]]
![[定积分-二重积分-三重积分.png]]
[[各类积分之间的联系.xmind]]
![[Pasted image 20221125101415.png]]

积分的物理与数学应用

[[积分在物理和数学上的应用.xmind]]

微分方程

- 积微分方程都需要通过求导转为微分方程求解
- 积分带非积分变量函数



换元法

常见的四种换元方式

- 如果$\frac{dy}{dx}$走不通，可以考虑$\frac{dx}{dy}$

$$
\begin{aligned}
u =& ay + bx + c \\
u =& \frac{y}{x} \\
u =& \frac{x}{y} \\
u =& xy
\end{aligned}
$$

公式法求解

$$
\text{形如}: y' + p(x)y = q(x)
$$

$$
y = e^{-\int p(x)dx}\{\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\ dx + C\}
$$

伯努利方程

$$
y' + p(x)y = q(x)y^n
$$

$$
\text{令} z = y^{1-n} \quad \text{则有}: \frac{1}{1-n} z' + p(x)z = q(x), \text{再代公式}
$$

二阶可降阶

- 缺y形

$$
\begin{gathered}
\text{形如}: y'' = f(x, y') \\
\text{令} y' = z, y'' = z' \text{即可}
\end{gathered}
$$

- 缺x形

$$
\begin{gathered}
\text{形如}: y'' = f(y, y') \\
\text{令} y' = z, y'' = zz' \text{即可}
\end{gathered}
$$

二阶常系数微分方程

- 三种通解形式

$$单根:y_n=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

$$重根:y_n=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$$

$$复数根(\lambda=\alpha\pm\beta j);y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$$

- 两种特解形式

$$1.f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)时$$

$$设为:y_p=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k\quad k=\begin{cases}0 & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\\ \\ 1 & \alpha=\lambda_1或\alpha=\lambda_2\\ \\ 2 & \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$$2.f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)cos\beta x+P_n(x)sin\beta x]时$$

$$设为:y_p=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)sin\beta x]x^k\quad k=\begin{cases}0 & \alpha\neq\lambda\\ \\ 1 & \alpha=\lambda\end{cases}$$

欧拉方程

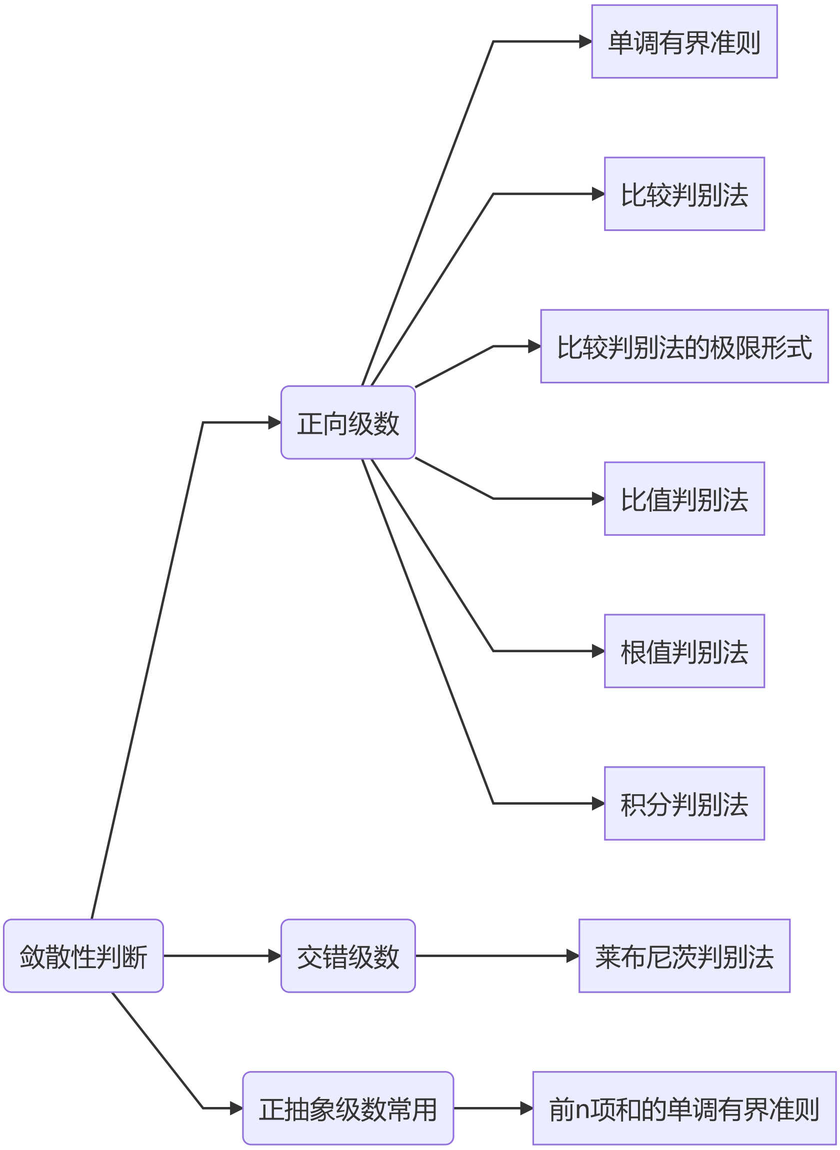
$$形如:x^2y''+pxy'+qy=f(x)$$

$$换元成如下形式:$$
$$\begin{cases}y''+(p-1)y'+qy=f(e^t)\qquad x>0\quad x=e^t\\ \\ y''+(p-1)y'+qy=f(-e^t)\quad x<0\quad x=-e^t\end{cases}$$

无穷级数

- 级数收敛的必要条件是数列极限为0

敛散性的判别



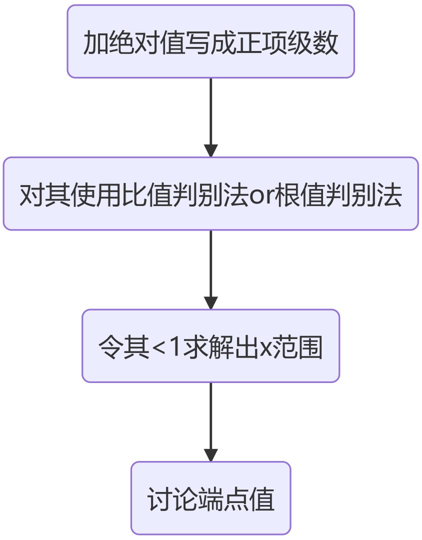
[[无穷级数.xmind]]

级数的敛散性

绝对收敛⇒原级数必收敛
条件收敛前提是原级数收敛

幂级数收敛域

- 幂级数的收敛域关于收敛中心对称



$$\text{对于}\sum u_n f(x_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_n f(x_n)}{u_{n-1}f(x_{n-1})}|<1$$

常用参考级数

$$❶\text{等比级数}\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}\frac{a}{1-q} & |q|<1\\ \\ \text{发散} & |q|>1\end{cases}$$

$$❷p\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \\ \text{发散} & p\le 1\end{cases}$$

$$❸\text{广义}p\text{级数}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(lnn)^p}\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \\ \text{发散} & p\le 1\end{cases}$$

$$❹\text{交错}p\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{绝对收敛} & p>1\\ \\ \text{条件收敛} & 0<p\le 1\end{cases}$$

阿贝尔定理

- 收敛域端点的敛散性：具体问题具体分析

$$1.\text{当幂级数}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{在点}x=x_1\text{处收敛时}$$
$$\Rightarrow\text{对于}|x|<|x_1|,\text{幂级数绝对收敛}$$

$$2.\text{当幂级数}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{在点}x=x_1\text{处发散时}$$
$$\Rightarrow\text{对于}|x|>|x_1|,\text{幂级数发散}$$

已知某点敛散性求该级数的收敛半径：

$$\text{对于级数}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)\text{在某点}x_1\text{的敛散性}$$

$$\begin{cases} ❶convergence & \text{则收敛半径}R \geq |x_1 - x_0| \\ ❷divergence & \text{则收敛半径}R \leq |x_1 - x_0| \\ ❸conditional & \text{则收敛半径}R = |x_1 - x_0| \end{cases}$$

常用展开公式

- 以下只是相应函数在x=0一点处的展开公式
- 由于积分与求导会改变端点值的收敛情况，所以端点值的收敛情况需要单独分析！！！
- 把展开式乘到级数那边分析a_n关系-待定系数法

$$\text{要记住的只有两个对数与指数}$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad -1 < x \leq 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$ln(1-x) = ln(1+(-x)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad -1 \leq x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{d[ln(1+x)]}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+(ax)^b} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{bn}x^{bn} \qquad -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$$

$$arctanx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$cosx = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$sinx = \int cosx dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{这两个和正弦系数形式很像：}$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

求解收敛域的时候可以利用加减运算法则分开求解，然后取交集！！！

求解和函数

- 级数的和函数在收敛域中出现未定义点，最后的s(x)应该修正包含无定义点

1. 先积后导，先导后积，直接求
2. 构建微分方程求解

傅里叶级数

- 注意傅里叶级数在间断点和区间端点的值

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$\text{其中：}a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

多元微分学预备知识

空间曲线的切向量

$$\text{参数方程：}\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

$$\text{方程组：}\begin{cases}F(x,y,z)\\ \\G(x,y,z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\tau}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}_P$$

空间曲面的法向量

$$隐式方程：F(x,y,z)=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)|_p$$

$$显式方程：z=f(x,y)\quad 令F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n}=(f'_x(x,y),f'_y(x,y),-1)|_p$$

$$参数方程：\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}_P$$

平面束方程

$$如果某条空间直线可写做\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

$$则：\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$
为所有经过该直线的平面,也称平面束

$1.$当已知不需要考虑平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$时
改写如下：$\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

$2.$当已知不需要考虑平面$(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$时
改写如下：$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

点到平面的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

旋转曲面

- 曲线绕直线旋转

在直线L上取一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,任取曲线Γ上一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,

M_1旋转形成的纬圆上任一点$P(x,y,z)$

记直线方向向量$\overrightarrow{s}=(m,n,p)$

则有如下方程成立：

$$\begin{cases}P\vec{M}_1\cdot\overrightarrow{s}=0\\ \\|PM_0|=|M_1M_0|\\ \\(x_1,y_1,z_1)在曲线\Gamma上\end{cases}$$

- 曲线绕坐标轴旋转

- 以绕z轴旋转为例子

$$从直线方程中解出：x=\varphi(z),y=\psi(z)$$

$$旋转曲面方程：x^2+y^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z)$$

向量积

$$a \times b = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|a \times b| = |a||b|sin\theta \quad \theta右手法则，不大于\pi$$

混合积

- [abc]=(a×b)·c

方向导数-梯度-散度-旋度

- 梯度是最大方向导数的方向，其模值是最大的方向导数值
- 方向导数是数，梯度是向量
- 散度是数，旋度是向量

方向导数

- 对于函数u(x,y,z)上的某一个点(x,y,z)的梯度(u'_x,u'_y,u'_z),与可能的空间任意方向$(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)$的点乘
- (x,y,z)一定在函数u(x,y,z)上，但其空间方向是无关函数u(x,y,z)的
- 而在某一个具体点(x_0,y_0,z_0)的最大方向导数是其梯度的模值

方向导数与偏导数关系

- 方向导数：函数在某一个方向上的导数
- 偏导数：只要求x，y方向。但是要求x，y方向的双侧！
- 方向导数只要求一侧有值即可，偏导数要求x，y双侧有值且相等
- 两者互相不能推出

在可微条件下可以用此公式

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = u'_x cos\alpha + u'_y cos\beta + u'_z cos\gamma$$

不可微分条件下需使用定义

$$方向导数：\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - u(x_0, y_0, z_0)}{\rho}$$

$$其中\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$梯度：\mathbf{grad}\ u = (u'_x, u'_y, u'_z)$$

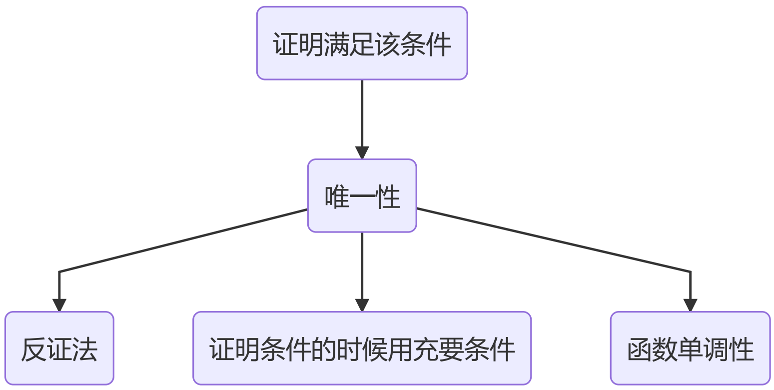
$$\mathbf{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$散度：div\ \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

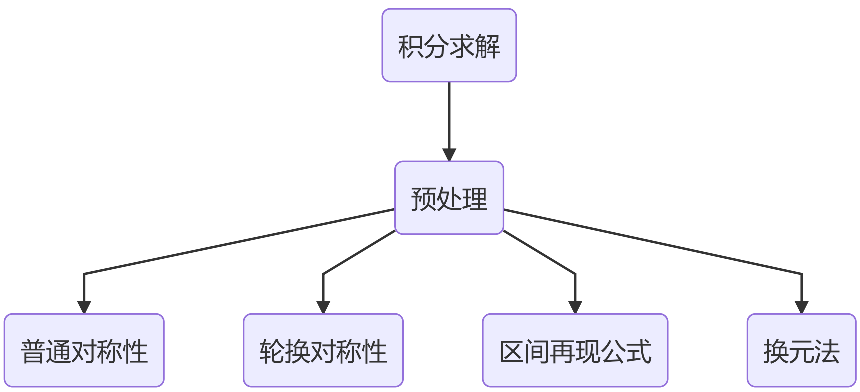
$$旋度：\mathbf{rot}\ \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

高数一些Tips

证明满足什么条件的唯一性



做积分题目之前想想对称性



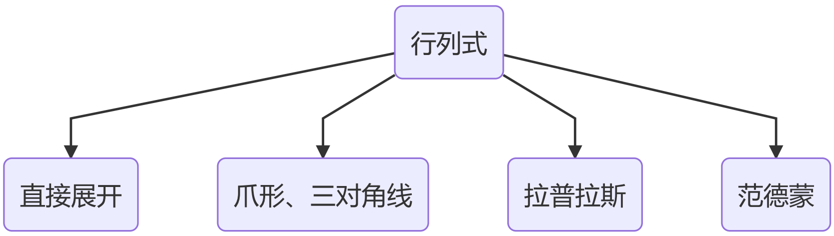
函数相关的题

- 单调性-凹凸性
- 导数-偏导

线性代数

- 巧劲用不上就暴力破解，==一力降十会==
  [[线性代数框架.xmind]]

行列式



求解行列式的几种方法：[[2-1行列式]]

- 消出一行或一列出现单非0，然后按单非0展开。展开时注意存在符号问题!
- 爪型、三对角线型、拉普拉斯(符号问题)、范德蒙、上下三角(符号问题)
- 技巧：逐行相加、全加到第一行、对角线消元素

展开式：

$$\text{其中}A_{ij}\text{是代数余子式，}M_{ij}\text{是余子式，}A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

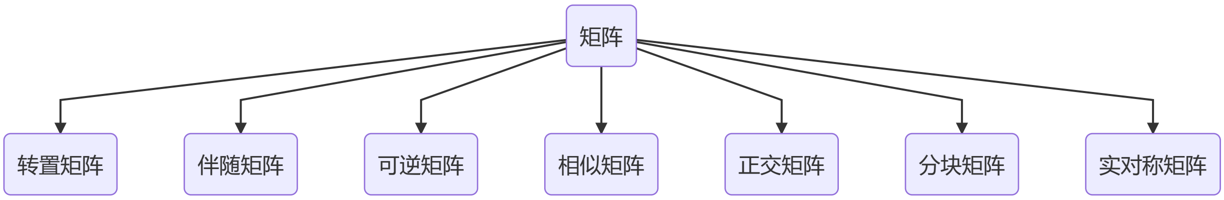
$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

公式：

$$\begin{aligned}
&A-n\text{阶},B-n\text{阶}\\
&1.|A^T|=|A|\\
&2.|kA|=k^n|A|\\
&3.|AB|=|A||B|\\
&4.|A^*|=|A|^{n-1}\quad AA^*=A^*A=|A|E\\
&5.|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\\
&6.|A|=\prod\lambda_i\\
&5.A\text{、}B\text{相似}\Leftrightarrow P^{-1}AP=B\text{，则}|A|=|B|
\end{aligned}$$

矩阵

- 正交矩阵A⇒$|A|=\pm1\quad A^*=\pm A^T\quad A_{ij}=\pm a_{ij}$，列向量两两正交且单位
- 正定矩阵⇔特征值都大于0⇔正定二次型的矩阵，其主对角线元素全为正数



伴随矩阵

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$A - n\text{阶矩阵}: r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

初等变换与初等矩阵

- 左行右列
- 初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换所得矩阵

$$E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k); \quad E_{ij}^{-1} = E_{ij}; \quad E_i^{-1}(k) = E_i(\frac{1}{k});$$

$$E_{ij}^n(k) = E_{ij}(nk); \quad E_{ij}^n = \begin{cases} E_{ij}, & n = 2k \\ \\ E, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$E_i^n(k) = E_i(k^n);$$

矩阵的秩

- 秩与空间直线或平面之间的联系

  矩阵秩的性质：

1.秩$r(A)=A$的行秩$=A$的列秩

2.$r(A)=r(A^T)\quad r(A^TA)=r(A)$

3.$k\neq 0\quad r(kA)=r(A)$

4.$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

5.$r(AB)\leq min(r(A),r(B))$

6.A可逆，则$r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$

7.若$A_{m\times n},B_{n\times s}$且$AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$

8.$r\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=r(A)+r(B)$

7.$A\sim B,\Rightarrow r(A)=r(B),r(A+kE)=r(B+kE)$

8.$A-m\times n,r(A)=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$

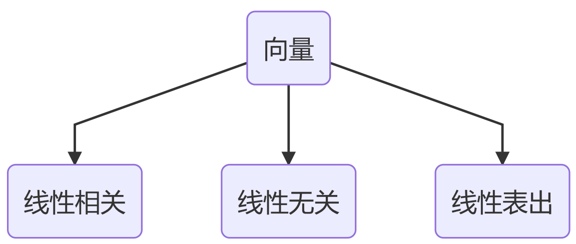
9.初等变换不改变矩阵的秩

10.$Ax=0$有非0解$\Leftrightarrow r(A)<n$
线性无关解向量个数为$n-r(A)$

11.AB的列向量可由A线性表出,AB的行向量可由B线性表出

A,B为n阶矩阵　$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$

向量



线性相关

- 充要条件

1.$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s]x=0$有非零解

2.$r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)<s\Leftrightarrow$ 方程组的个数小于未知数的个数

3.某α_i可以由$\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_s$线性表出

4.n个n维向量线性相关的充分必要条件是行列式为0, 克拉默法则

- 充分条件

$$1.n+1个n维向量一定线性相关$$

$$2.多数向量能用少数向量表示$$

$$3.存在零向量$$

- 线性相关的几何意义

$$\begin{aligned}&\alpha相关 \Leftrightarrow \alpha=0\\&\alpha_1,\alpha_2相关 \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2共线\\&\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3相关 \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3共面\end{aligned}$$

线性无关

- 和线性相关反着来就是

线性表出

- 充要条件

$$\beta能由\alpha_1,\alpha_2...\alpha_s线性表出 \Leftrightarrow 方程组x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_s\alpha_s=\beta有解$$

$$\Leftrightarrow 增广矩阵[\alpha_1,\alpha_2...\alpha_s,\beta]与系数矩阵的秩相等$$

一些相关定理

$$❶\begin{cases}矩阵AB的列向量可由A的列向量线性表出\\ \\矩阵AB的行向量可由B的行向量线性表出\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&❷如果向量组\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s可由向量组\beta_1,\beta_2,...,\beta_t线性表出,而且s>t\\&那么\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s线性相关.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&❸如果向量组\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s可由向量组\beta_1,\beta_2,...,\beta_t线性表出,\\&则r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)\end{aligned}$$

方程组

基础解系

- 齐次方程组解的极大无关组
- 是解、极大(n-r(A))、无关

齐次方程组$A_{m\times n}x=0$

- 必有零解，要么只有零解，要么有无穷组解
- 把A按列展开，就是线性相关无关问题
- 联系特征值与特征向量的定义：`Aα=λα⇔(λE-A)α=0`
- 线性无关解个数：`n-r(A)`

$$n:代表A的列向量个数,也代表未知数个数$$

$$\begin{cases}有非零解-列向量组线性相关\Leftrightarrow r(A)<n\\无非零解-列向量组线性无关\Leftrightarrow r(A)=n\end{cases}$$

$$基础解系个数:n-r(A)$$

非齐次方程组

- 与空间平面或直线的位置关系联系
- 线性无关解个数：n-r(A)+1

$$\begin{cases}有解 r(A)=r(\overline{A})\begin{cases}r(A)=r(\overline{A})=n & 唯一解\\r(A)=r(\overline{A})<n & 无穷解\end{cases}\\无解 r(A)+1=r(\overline{A})\end{cases}$$

同解方程组

- Ax=0与Bx=0同解的充要条件

$$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$$

- Ax=0的解是Bx=0的解的充要条件

$$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

有公共解

$$n阶矩阵A、B,Ax=0与Bx=0有非零公共解\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$$

特征值&特征向量

- 同一个特征值对应的特征向量的线性组合依旧是特征向量且特征值不变
- 特征向量有无穷组,α和$k\alpha(k\neq0)$均是λ对应的特征向量
  特征值性质

$$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

几种矩阵之间特征值的联系

- A^T与A的特征值相同，但特征向量不一定相同

A	$kA+E$	$A+kE$	A^{-1}	A^*	A^n	$P^{-1}AP$
λ	$k\lambda+1$	$\lambda+k$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ^n	λ
α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$

<合工大-超越2>

tr(A)、tr(A*)、|A|和矩阵特征多项式的关系

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-|A|$$

$$=(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda-\lambda_3)$$

相似

- 实对称矩阵一定可以相似对角化，AA^T是实对称
- 已知特征值与特征向量，使用矩阵乘法，反解出原矩阵A
- $\alpha\alpha^T$是实对称矩阵，相似于diag$(\alpha^T\alpha,0,\cdots,0)$

相似的性质

$$1.|A|=|B|$$

$$2.r(A)=r(B)$$

$$3.|\lambda E-A|=|\lambda E-B|\Rightarrow \text{特征值相同}$$

$$4.\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$$

$$5.A+kE\sim B+kE$$

$$6.\text{相似的传递性}:A\sim\Lambda,B\sim\Lambda\Rightarrow A\sim B$$

$$7.A^n\sim B^n,\text{借助对角阵可解决}n\text{阶矩阵问题}$$

$$8.A\sim B\Rightarrow A,B\text{具有相同的特征值}$$

相似对角阵

- 实对称矩阵一定可以相似对角化

$$A\alpha=\lambda\alpha\quad\text{其中}\lambda\neq0\Rightarrow\alpha\text{是}A\text{的特征向量},\lambda\text{是其特征值}$$

1. 不同特征值对应的特征向量线性无关

- 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交

3. 当P可逆时矩阵A才可以相似对角化
   a. A有n个不同的特征值
   b. A的一个特征值有k重，但是其对应有k个线性无关的特征向量

$$对于三阶矩阵A,有三个特征值\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,且对应特征向量为\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$$

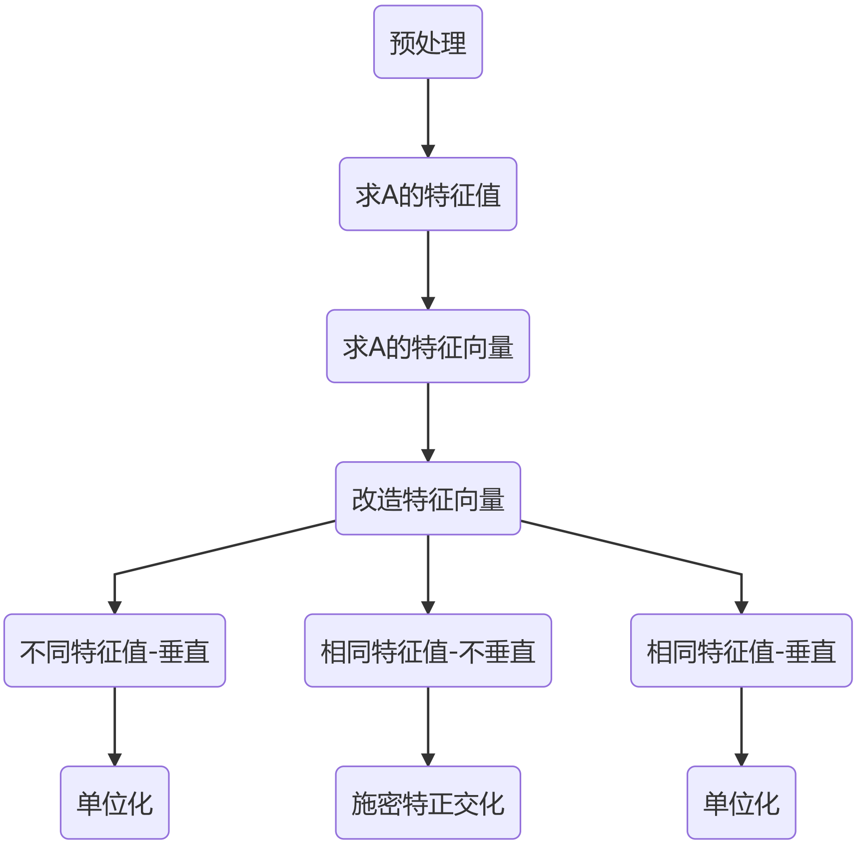
$$记P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)则有:P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

求解特征向量

- 特征向量≠0
- 写出特征多项式⇒得到特征值⇒求解特征方程组⇒特征向量
- 使用定义$A\alpha=\lambda\alpha$

正交相似对角化-正交变换

- 正交变换$Q^TAQ=\Lambda\Rightarrow x^TAx\xlongequal{x=Qy}y^T\Lambda y$



施密特正交化

如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

单位化

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} \quad \gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

等价-相似-合同

- 两个矩阵合同的充要条件正负惯性指数相等，合同的前提得是矩阵A、B得是对称矩阵
- $Q^TAQ = \Lambda \Leftrightarrow Q^T(A + A^*)Q = \Lambda + \Lambda^*$

$$\text{等价：} A \cong B \Leftrightarrow PAQ = B \quad (P, Q\text{可逆})$$

$$\text{相似：} A \sim B \Leftrightarrow P^{-1}AP = B$$

$$\text{合同：} A \simeq B \Leftrightarrow C^TAC = B, \text{矩阵}C\text{可逆}$$

正定充要条件

$$\begin{aligned} &1.\text{特征值}\lambda\text{全} > 0 \\ &2.\text{正惯性指数}p = n \\ &3.\text{顺序主子式全} > 0 \\ &4.A \simeq E : A = C^TEC\text{其中}C\text{可逆} \\ &5.x \neq 0 \Rightarrow \text{二次型}f > 0 \end{aligned}$$

过渡矩阵-坐标变换

过渡矩阵:

$$\text{由基}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\text{到基}\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\text{的过渡矩阵}C\text{满足：}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)C$$

坐标变换:

若向量γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的坐标分别是$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,即：

$$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$$

$$X=CY\text{或}Y=C^{-1}X$$

其中C是从基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵

概率论

概率公式

1.分割互斥　　2.全集分解

❶分割互斥：$A\cup B=A\cup\overline{A}B=B\cup A\overline{B}=A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B;$
$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(B)+P(A\overline{B})=P(A\overline{B})+P(AB)+P(\overline{A}B)$

❷全集分解：$A=A\Omega=A(B_1\cup B_2\cup B_3)=AB_1\cup AB_2\cup AB_3$
$\Rightarrow P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$

❸减法公式：$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$

❹$a.$ 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$b.$ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$
$c.$ 如果$A_1,A_2,\cdots,A_n(n>3)$两两互斥,则：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

❺$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\quad(P(B)>0)$

❻$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)=P(A)+P(B)-P(A+B)=P(A)-P(A\overline{B})$

❼$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$

❽$A_1,A_2,\cdots,A_n$为完备事件组,$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

❾若已知B发生了,执果索因 − 贝叶斯,有：

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

独立

- 如果事件A的概率P(A)=0/1，则它与任何一个事件都相互独立

$$A、B\text{相互独立} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

$$A、B、C\text{相互独立} \Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A) \cdot P(B) \\ P(BC) = P(B) \cdot P(C) \\ P(AC) = P(A) \cdot P(C) \\ P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$$

分布

概率密度函数与概率分布函数

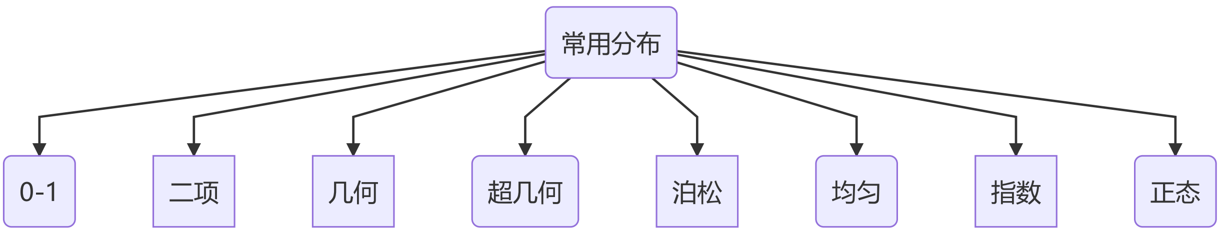
$$F(x) = P\{X < x\} \geq 0 \quad \text{其中}x\text{取遍}(-\infty, +\infty)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (x \in R) \quad f(x) = F'(x) \geq 0$$

$$(1)F(x)\text{是分布函数} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)\text{是}x\text{的单调不减,右连续函数} \\ \text{且}F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1 \end{cases}$$

$$(2)\{p_i\}\text{是概率分布} \Leftrightarrow \begin{cases} p_i \geq 0 \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

$$(3)f(x)\text{是概率密度} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$



0-1分布

$$X \sim B(1,p), \quad X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

二项分布

$$X \sim B(n,p)\begin{cases} a.n\text{次实验相互独立} \\ b.P(A)=p \\ c.\text{只有}A,\overline{A}\text{两种结果} \end{cases}$$

$$\text{记}X\text{为}A\text{发生的次数},\text{则}P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$$

$$\text{二项分布性质:对于固定}n\text{和}p,\text{随着}k\text{的增大},P\{X=k\}\text{先上升再减小}$$

$$\text{最大概率对应的}k\text{值:}$$
$$\begin{cases} k=(n+1)p\text{或}(n+1)p-1 & (n+1)p\text{为整数} \\ \\ k=[(n+1)p] & (n+1)p\text{不为整数} \end{cases}$$

几何分布

- **首中即停止,无记忆性**

$$X \sim G(p)\text{首中即停止(等待型分布)},\text{记}X\text{为试验次数},\text{则:}$$
$$P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots$$

超几何分布

$$N\text{件产品中有}M\text{件正品},\text{无放回取}n\text{次},\text{则取}k\text{个正品的概率}$$
$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

泊松分布

- **可加性**

$$\text{某单位时间段某场合下},\text{源源不断的随机质点流的个数},\text{也用于描述稀有事件的概率}$$
$$X \sim P(\lambda):P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\cdots,\lambda>0) \quad \lambda\text{表示强度}(EX=\lambda)$$

$$\text{泊松定理:若}X \sim B(n,p),\text{当}n\text{很大},p\text{很小},\lambda=np\text{适中时},\text{二项分布可用泊松分布}$$
$$\text{近似表示:}C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\begin{cases} n \geq 20,p \leq 0.05 & \text{效果比较好} \\ \\ n \geq 100,np \leq 10 & \text{效果更好} \end{cases}$$

$$X \sim f(x),\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt; \quad F(x)\text{单调不减}$$

$$f(x)\text{可唯一确定}F(x)$$
$$F(x)\text{不可唯一确定}f(x)$$

均匀分布

$$X \sim U(a,b)$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b \\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

指数分布

- 无记忆性

$$X \sim E(\lambda)$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \quad (\lambda>0) \quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$\text{无记忆性}: P\{X\ge t+s|X\ge t\}=P\{X\ge s\}$$
$$\lambda - \text{失效率(常数)}$$

正态分布

- σ越大，图像越矮胖，σ越小，图像越高瘦
- 可加性

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \qquad X \sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$\mu=0,\sigma=1\text{时的正态分布}N(0,1)\text{为标准正态分布}:$$
$$X\sim\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

正态标准化

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$
$$P\{a\le X\le b\}=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

标准正态分布性质

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

$$P\{|x|\le a\}=2\Phi(a)-1$$

$$P\{|x|>a\}=2[1-\Phi(a)]$$

正态分布的线性组合还是正态分布:

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$$

二维正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)\quad \text{注意顺序}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]}$$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 注意顺序

六大结论：

❶联合分布为正态 $\Rightarrow$ 边缘分布为正态

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)\Rightarrow X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

❷如果边缘都是正态 + 独立性 $\Rightarrow$ 联合分布为正态

$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$且$X_1,X_2$相互独立 $\Rightarrow(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$

❸$(X_1,X_2)\sim N\Rightarrow k_1X_1+k_2X_2\sim N(k_1,k_2$不全为$0)$

❹$(X_1,X_2)\sim N,Y_1=a_1X_1+a_2X_2,Y_2=b_1X_1+b_2X_2$,且

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow (Y_1,Y_2)\sim N$$

❺$(X_1,X_2)\sim N,\Rightarrow X_1,X_2$相互独立 $\Leftrightarrow X_1,X_2$不相关

❻二维正态分布的条件分布仍然是正态分布

$(X_1,X_2)\sim N$,则$f_{X|Y}(x|y)\sim N,f_{Y|X}(y|x)\sim N$

混合型分布

$$X\text{是混合型},\text{则}F(x)=P\{X\leq x\}$$

用定义法

分布的期望方差

- 前n项平方和：$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$❶X\sim p_i\Rightarrow EX=\sum_i x_ip_i\begin{cases}\text{有限项相加}\\ \text{无穷项相加}\end{cases}$$

$$❷X\sim f(x)\Rightarrow EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\begin{cases}\text{有限区间积分(定积分)}\\ \text{无穷区间积分(反常积分)}\end{cases}$$

$$DX=E(X^2)-(EX)^2$$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2cov(X,Y)$$

分布	期望EX	方差DX
$0-1$分布	p	$p(1-p)$
$X\sim B(n,p)$	np	$np(1-p)$
$X\sim P(\lambda)$	λ	λ
$X\sim G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X\sim U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X\sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
$X\sim \chi^2(n)$	n	$2n$

二维随机变量的分布

- 已知X,Y满足的关系，可以以此为积分区间积分得事件概率

  定义

$$1.\text{二维随机变量分布函数}(X,Y)\sim F(x,y)$$

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$\text{意义：}F(x,y)\text{表示事件}A=\{X\le x\}\text{与事件}B=\{Y\le y\}\text{同时发生的概率}$$

$$2.\text{二维离散随机变量分布律}(X,Y)\sim p_{ij}$$

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}\quad(i,j=1,2,\cdots)$$

$$\text{常用表格形式来表示}X,Y\text{联合分布律}$$

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y=y_i\}$	$p_{\cdot 1}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

$$3.\text{联合概率密度函数：}F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

求边缘分布

$$1.F_X(x)=F(x,+\infty)\qquad F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

$$2.p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}\qquad p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$$

$$3.f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

求条件分布

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \leftrightarrow$ 条件=$\frac{联合}{边缘}$

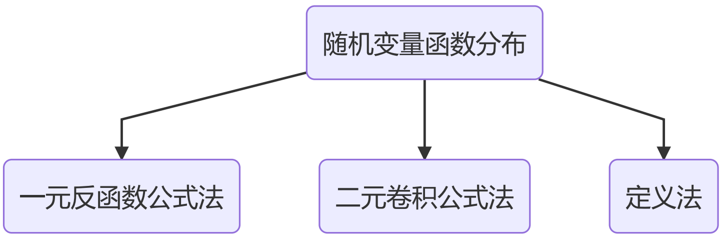
$$1.离散\begin{cases}P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_i\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\\ \\ P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_i\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\end{cases}$$

$$2.连续\begin{cases}f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\\ \\ f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\end{cases}$$

$$3.记一个公式：\frac{f_{Y|X}(y|x)}{f_{X|Y}(x|y)}=\frac{f_Y(y)}{f_X(x)}$$

随机变量函数的分布

- 公式法与定义法：事件的转化
- 独立时可以卸磨杀驴
- 不独立时要根据定义求解



一维随机变量公式法

$$前提：y=g(x)在(a,b)上单调可导：其反函数x=h(y)$$

$$结论如下：$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta\\ \\ 0, & 其它\end{cases}$$
$$其中：(\alpha,\beta)为y=g(x)在(a,b)上的值域$$

Y=F(X)型

变量之间的变换关系是一个分布函数

$$如果F(X)是连续型随机变量：$$
$$\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y>1\end{cases}$$

二维随机变量-卷积公式法

- z取值扫值时，若与区域无交点积分为0
  做题三部曲:换字母→换区域→背口诀

$$\begin{gathered}积谁不换谁,换完求偏导\\偏导加绝对,还要换区域\\从-扫到+,分组求积分\end{gathered}$$

$$常用四种卷积公式:$$

$$❶Z=X+Y$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy$$

$$❷Z=X-Y$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(x-z)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)dy\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z+y)\cdot f_Y(y)dy$$

$$❸Z=XY$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)\cdot f_Y(\frac{z}{x})dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f(\frac{z}{y},y)dy\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X(\frac{z}{y})\cdot f_Y(y)dy$$

$$❹Z=\frac{X}{Y}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy\overset{\text{X,Y独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(zy)\cdot f_Y(y)dy$$

最值关系

- $max\{X,Y\}\cdot min\{X,Y\}=XY$

两个随机变量情况

$$U = max\{X, Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2} \qquad V = min\{X, Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U+V = X+Y \\ U-V = |X-Y| \\ UV = XY \end{cases}$$

$Y = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_Y(y) = 1 - [1-F(y)]^n$$

$$f_Y(y) = n[1-F(y)]^{n-1} f(y)$$

$$X_i \overset{iid}{\sim} U(0,\theta) \Rightarrow EY = \frac{\theta}{n+1}$$

$Z = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_Z(z) = [F(z)]^n$$

$$f_Z(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z)$$

$$X_i \overset{iid}{\sim} U(0,\theta) \Rightarrow EZ = \frac{n\theta}{n+1}$$

独立与不相关的判定

分布判独立

- 独立的传递：==X,Y相互独立⇒f(X),g(Y)相互独立==
  证明需要任意，否定只需要存在一个不相等

$$X与Y相互独立 \Leftrightarrow \forall x, y, F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall i, j, p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y, F(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$分布律独立的\text{必要条件}:中间那部分必定任意两行成比例$$

数字特征判不相关

五个充要条件：
$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = EX \cdot EY \Leftrightarrow D(X \pm Y) = DX + DY$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY \begin{cases} \neq 0 \Leftrightarrow X与Y相关 \Rightarrow X与Y不独立 \\ = 0 \Leftrightarrow X与Y不相关, 通过 \begin{cases} 分布推断 \begin{cases} X, Y独立 \\ X, Y不独立 \end{cases} \\ 反证法 \end{cases} \end{cases}$$

独立不相关之间联系

❶独立一定不相关，相关一定不独立
❷如果(X,Y)服从二维正态分布,则X,Y独立 $\Leftrightarrow$ X,Y不相关
❸如果X与Y均服从$0-1$分布,则X,Y独立 $\Leftrightarrow$ X,Y不相关

T函数

常用于正态的积分

$$T(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}e^{-t^2}dt$$

$$T(\alpha+1)=\alpha T(\alpha)$$

$$\text{初始条件}:T(1)=1\qquad T(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=T(n)=(n-1)!$$

相关系数和协方差

$$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

$$\text{公式法}:Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$$

表示随机变量之间线性相关程度

ρ_{XY}定义.

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}\begin{cases}=0\Leftrightarrow X,Y\text{不线性相关}\\ \neq 0\Leftrightarrow X,Y\text{线性相关}\end{cases}$$

切比雪夫不等式

设随机变量X的数学期望与方差存在,则对任意$\varepsilon>0$

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

依概率收敛

设随机变量X与随机变量序列$\{X_n\}(n=1,2,3\cdots)$,如果$\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0\text{或}\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$$

则称随机变量序列$\{X_n\}$依概率收敛于随机变量X,记为:

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X(P)\text{或}X_n\xrightarrow{P}X(n\to\infty)$$

其中的X换做常数a也成立

大数定律-均值的稳定性

伯努利大数定律:频率依概率收敛于概率

假设μ_n是n重伯努利试验中事件A发生的次数, 在每次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$, 则$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$, 即对$\forall\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$$

切比雪夫大数定律

$$\begin{cases}❶\text{相互独立的随机变量}\\ ❷\text{方差}DX_i\text{存在且一致有上界}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$$

辛钦大数定律

$$\begin{cases}❶\text{相互独立的随机变量}\\ ❷\text{同分布}\\ ❸\text{期望}EX_i=\mu\text{存在}\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1\quad\forall\varepsilon>0$$

中心极限定理-万物终结于正态

$$\text{不论}X_i\overset{iid}{\sim}F(\mu,\sigma^2),\mu=EX_i,\sigma^2=DX_i$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{n\to\infty}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$$

$$\text{即：}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\overset{n\to\infty}{\sim}N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\Phi(x)$$

统计量

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本,则相应的统计量定义如下：

❶样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

❷样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

样本标准差：$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

❸样本k阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$

❹样本k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=2,3,\cdots)$

❺顺序统计量：将样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的n个观测量按其取值从小到大的顺序排列,得：$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$

随机变量$X_{(k)}(k=1,2,\cdots,n)$称为第k顺序统计量,其中$X_{(1)}$是最小观测量,而$X_{(n)}$是最大观测量：

$$X_{(1)}=min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\qquad X_{(n)}=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

统计量的分布

- $\chi^2(2)=E(\frac{1}{2})$

1.正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\quad X\sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$2.\chi^2分布：\begin{cases}X_i\overset{iid}{\sim}N(0,1)\\X=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\end{cases}\Rightarrow X\sim\chi^2(n)\quad 其中n为自由度$$

$$3.t分布：\begin{cases}X\sim N(0,1)\quad Y\sim\chi^2(n)\\X与Y相互独立\end{cases}\Rightarrow t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}服从自由度为n的t分布$$

记$t\sim t(n)\qquad t$分布概率密度函数$f(x)$是偶函数

$$4.F分布：\begin{cases}X\sim\chi^2(n_1)\quad Y\sim\chi^2(n_2)\\X与Y相互独立\end{cases}\Rightarrow F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}服从自由度为(n_1,n_2)的F分布$$

记$F\sim F(n_1,n_2)$

正态总体下的常用结论

- 可用于参数估计值的期望与方程求解
- 正态总体下的样本方差和样本均值相互独立

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差,则

❶$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$,即$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$

❷$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

❸$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2\sim\chi^2(n-1)\quad\mu$未知时用$\overline{X}$代替

❹$\overline{X}$与S^2相互独立,$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)\quad\sigma$未知时用$S$代替

$$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$$

矩估计与最大似然估计

- 矩估计是利用$\overline{X}=EX$构建方程
- 最大似然估计要理解其意义
  - 已经发生A事件，使得A事件发生概率最大的参数
  - 所以有驻点时候用驻点，没有驻点时候用定义
  - 一定要知道概率密度或离散事件概率

估计值小写 — 估计量大写

矩估计：估计值小写 — 估计量大写

$$(1)\text{对于一个参数}\begin{cases}❶\text{用一阶矩建方程：令}\overline{X}=EX\Rightarrow\overset{\wedge}{\theta}\\ \qquad\text{其中}\overline{X}\text{是已知的},EX\text{中含有参数}\theta\\ \\ ❷\text{如果}❶\text{不能用},\text{令}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)\end{cases}$$

$$(2)\text{含两个参数},\text{用一阶矩与二阶矩建立两个方程},\text{即}\begin{cases}❶\overline{X}=EX\\ \\ ❷\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)\end{cases}$$

最大似然估计：

$$(1)\text{写似然函数}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)\\ \\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\end{cases}$$

$$(2)\text{求参数}\begin{cases}❶\text{若似然函数有驻点},\text{则令}\frac{dL}{d\theta}=0\text{或}\frac{dlnL}{d\theta}=0,\text{解出}\overset{\wedge}{\theta}\\ ❷\text{若似然函数无驻点(单调)},\text{则用定义求}\overset{\wedge}{\theta}\\ ❸\text{若似然函数为常数},\text{则用定义求}\overset{\wedge}{\theta},\text{此时}\overset{\wedge}{\theta}\text{不唯一}\end{cases}$$

(3)最大似然估计量的不变性原则

设$\overset{\wedge}{\theta}$是总体分布中未知参数θ的最大似然估计，函数$u=u(\theta)$具有单值的反函数

$\theta=\theta(u)$，则$\hat{u}=u(\overset{\wedge}{\theta})$是$u(\theta)$的最大似然估计

估计量的评价

无偏性

$$\text{对于估计量}\overset{\wedge}{\theta},\text{若}E\overset{\wedge}{\theta}=\theta,\text{称}\overset{\wedge}{\theta}\text{是}\theta\text{的无偏估计量}$$

有效性

在无偏估计的前提下

$$\text{若}E\overset{\wedge}{\theta}_1=\theta,E\overset{\wedge}{\theta}_2=\theta,\text{即}\overset{\wedge}{\theta}_1,\overset{\wedge}{\theta}_2\text{均是}\theta\text{的无偏估计量},\text{当}D\overset{\wedge}{\theta}_1<D\overset{\wedge}{\theta}_2\text{时}$$
$$\text{称}\overset{\wedge}{\theta}_1\text{比}\overset{\wedge}{\theta}_2\text{有效}$$

一致性

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X^2)\Rightarrow S\xrightarrow{P}\sigma$

1.一致性也叫相合性
2.只针对大样本$n \to \infty$成立，因为要满足依概率收敛
3.联系切比雪夫大数定律和辛钦大数定律
4.切比雪夫不等式

$$当\overset{\wedge}{\theta} \xrightarrow{P} \theta时,称\overset{\wedge}{\theta}为\theta的一致(相合)估计$$

$$\forall \varepsilon > 0,验证是否有下式成立：$$
$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overset{\wedge}{\theta}-\theta| \geq \varepsilon\} = 0或\lim_{n\to\infty} P\{|\overset{\wedge}{\theta}-\theta| < \varepsilon\} = 1$$

假设检验

α越小H_0成立可能性越大

$$原假设：H_0 \qquad 对立假设：H_1 \quad 主要看对立假设,是否拒绝它$$

$$步骤\begin{cases} ❶由\sigma已知或未知+H_1确定拒绝域 \\ \\ ❷看是否题给样本均值落入拒绝域中\begin{cases} ❶在拒绝域中 \Rightarrow 拒绝H_0 \\ ❷不在拒绝域中 \Rightarrow 接受H_0 \end{cases} \end{cases}$$

![[Pasted image 20221007224625.png|700]]
![[Pasted image 20221007224726.png|700]]

置信区间的定义

$$若\theta的置信区间为(a,b)的置信度为\alpha：P\{a < \theta < b\} = \alpha$$

两类错误

$$\begin{cases} 1.第一类错误：P\{拒绝H_0|H_0为真\} \\ \\ 2.第二类错误：P\{接受H_0|H_0为假\} \end{cases}$$

概率论Tips

二维正态分布参数顺序

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho) \quad 注意顺序$$