信号与系统特性判别

信号特性的判别

周期性：$f(t)=f(T+t)$或$f[n]=f[n+N]$

- 对于T，无特别要求。对于N，要求N是非零正整数

系统特性的判别

- h(t)<冲激响应>是δ(t)的系统响应,δ(t)只在t=0时有值

线性：输入$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$,输出$y(t)=ay_1(t)+by_2(t)$

- 已知一组$x_1(t),y_1(t)$求$x_2(t)$或$y_2(t)$
- 这种题的关键就是:线性⇔输入之间的关系=输出之间的关系
- 由线性特性有：输入信号的线性组合与输出信号的线性组合形式一样！！！

时不变性：输入$x(t)=x_1(t-t_0)$,输出$y(t)=y_1(t-t_0)$

- 对于分段的信号，如果时移改变了其分段区域，也视为时变

因果性：输出只取决于此时和此前的输入

- (t+1)是未来,(t-1)是过去
- 如果h(t)u(t)=h(t),则是因果

无记忆性：输出只取决于此时的输入
稳定性：输入有界，输出有界
可逆性：输入不同，输出不同

- $h(t)*h_{inv}(t)=\delta(t)$
- $h[n]*h_{inv}[n]=\delta[n]$

奇异信号

冲激函数的性质

在图上画冲激信号的时候，向上标正强度，向下标负强度
对信号突变（跳跃）处求导时会有冲激出现

❶尺度变换：$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

❷筛选特性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

❸由❶❷ $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(at-t_0)dt=\frac{1}{|a|}f(\frac{t_0}{a})$

❹冲激信号的能量：$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at-t_0)dt=\frac{1}{|a|}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(t))dt=0;\Delta=b^2-4ac\le 0;\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(t))dt=\frac{2}{\sqrt{\Delta}};\Delta=b^2-4ac>0;\end{cases}$

❺将❸推广到更一般：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(g(t))dt=f(g^{-1}(0))\cdot\delta(g(t))$的能量

❻冲激偶：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$

❼$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta'(t-t_0)\qquad$(乘积函数的导数)

阶跃函数

用阶跃函数去表示分段函数

$$u(t)*u(t)=tu(t)$$

$$u[n]*u[n]=(n+1)u[n+1]$$

$$\int_{-\infty}^{t}u(\tau-a)dt=(t-a)\cdot u(t-a)$$

卷积的性质

- 交换率：$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$
- 分配律：$y(t)=x(t)*\{h_1(t)+h_2(t)\}=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$
- 结合律：$y(t)=x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*\{h_1(t)*h_2(t)\}$

相关函数的卷积表示

- $r(t)=f_1(-t)*f_2(t)$

1.熟记卷积公式
2.熟悉卷积公式的逆用

$$卷积公式\begin{cases} f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\cdot h(t-\tau)dt \\ \\ f[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]*h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]f[n-k] \end{cases}$$

卷积逆用：

$$\sum_{k=-\infty}^{n}f[k]=f[n]*u[n] \qquad \{\sum_{k=0}^{n}f[k]\}\cdot u[n]=\{f[n]\cdot u[n]\}*u[n]$$

$$\{\sum_{k=0}^{n}x[k]\cdot h[n-k]\}\cdot u[n]=\{x[n]\cdot u[n]\}*\{h[n]\cdot u[n]\}$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=f(t)*u(t) \quad \{\int_{0}^{t}f(\tau)d\tau\}u(t)=[f(t)\cdot u(t)]*u(t)$$

$$\{\int_{0}^{t}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau\}u(t)=\{x(t)\cdot u(t)\}*\{h(t)\cdot u(t)\}$$

$$时移特性\begin{cases} f(t-t_0)*h(t-t_1)=y(t-t_0-t_1) \\ \\ f[n-n_0]*h[n-n_1]=y[n-n_0-n_1] \end{cases}$$

$$尺度变换：x(at)*h(at)=\frac{1}{|a|}y(at)$$

有限长度卷积

有限卷积和的快速解法
注意一点就是：最后的结果中n=0的位置，利用的就是卷积的时移特性判断。
原理实际上就是z变换。

其中长度为L,M的两组序列相卷积，最后得到的序列长度最大为L+M-1
image-20220731101543290

希尔伯特变换

$$x(t)\leftrightarrow \hat{x}(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}$$

傅里叶

傅里叶级数的性质

傅里叶级数FS:

- 均方逼近

$$\begin{cases} x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \\ \\ a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{cases}$$

离散傅里叶级数DFS:

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\Omega_0n}$$
$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\Omega_0n}$$

$$\sum_{k=<N>}\text{：表示一个周期里的累加}$$

	周期信号	傅里叶级数系数
信号	$f(t)$	a_k
共轭信号	$f^*(t)$	a_k^*
实数信号	$f(t)$	$a_k=a_{-k}^*$
实数偶信号	$f(t)=f(-t)$	$a_k=a_{-k}\quad a_k=a_k^*$
实数奇信号	$f(t)=-f(-t)$	$a_k=-a_{-k}\quad a_k=-a_k^*$
时移	$f(t-t_0)$	$e^{-jk\omega_0t_0}a_k$
时间反转	$f(-t)$	a_{-k}
时域尺度变换	$f(at)$	a_k
时域相乘	$f(t)g(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_lb_{k-l}$

- 离散帕斯瓦尔定理是功率相等
- 连续帕斯瓦尔定理是能量相等

$$\text{帕斯瓦尔定理：}\quad\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

使用FT求FS

$$\text{取一个周期的图像使用写出}X(\omega)\text{然后用}\omega=k\omega_0\text{代替}$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\qquad a_k=\frac{\omega_0}{2\pi}X(jk\omega_0)$$

傅里叶变换

- 模与相角

傅里叶变换FT:

$$\begin{cases}x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\\ \\ X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\end{cases}$$

离散傅里叶变换DFT:

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$
$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

傅里叶变换性质

- 时同频异

$$线性：a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

$$时移特性：f(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

$$频移特性：e^{j\omega_0 t}f(t)\leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

$$尺度变换：f(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

$$共轭对称性：(和FS完全一样)$$
$$f(t)是实信号：F(\omega)=F^*(-\omega)\quad F(-\omega)=F^*(\omega)$$

$$f(t)是实偶信号：F(\omega)=F(-\omega)=F^*(\omega)\quad F(\omega)实偶$$

$$f(t)是实奇信号：F(\omega)=-F(-\omega)=-F^*(\omega)\quad F(\omega)虚奇$$

$$实信号f(t)的偶部:Re\{F(\omega)\}$$

$$实信号f(t)的奇部:jIm\{F(\omega)\}$$

$$对偶性：F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$时域卷积：f(t)*h(t)\leftrightarrow F(\omega)H(\omega)$$

$$时域微分：\frac{d^nf(t)}{dt^n}\leftrightarrow (j\omega)^nF(\omega)$$

$$时域积分：\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

$$帕斯瓦尔定理：\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

$$幅度调制特性：f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

$$频域微分：(-jt)^nf(t)\leftrightarrow \frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$$

$$频域积分：\frac{f(t)}{-jt}+\pi f(0)\delta(t)\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega}F(\theta)d\theta$$

信号变换后最高频率

$$记信号x(t)和g(t)的最高频率分别为\omega_x,\omega_g$$

$$则x(at)的最高频率：\omega=a\omega_x$$

$$x(t)\cdot g(t)的最高频率：\omega=\omega_x+\omega_g$$

$$x(t)*g(t)的最高频率：\omega=min\{\omega_x,\omega_g\}$$

傅里叶常用变换对

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \xRightarrow{\text{微分特性}} \delta^n(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \xRightarrow{\text{积分特性}} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \xRightarrow{sgn(t)=-u(-t)+u(t)} sgn(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \xRightarrow{\text{对偶特性}} 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \xRightarrow{\text{频移特性}} e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \xRightarrow{\text{欧拉公式}} sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \xRightarrow{\text{欧拉公式}} cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \pi(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$$

$$e^{-\alpha t}u(t), Re\{\alpha\} > 0 \leftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha} \xRightarrow{\text{频域微分特性}} te^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega+\alpha)^2}$$

$$e^{-\alpha|t|}, Re\{\alpha\} > 0 \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

$$g_\tau(t) = \begin{cases} A, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \leftrightarrow A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \xRightarrow{\text{对偶特性}} \frac{1}{2\pi}A\omega_c Sa(\frac{\omega_c t}{2}) \leftrightarrow g_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} A, & |\omega| < \frac{\omega_c}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_c}{2} \end{cases}$$

$$\text{周期信号}: f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega - k\omega_0)$$

补充周期冲激串的傅里叶变换

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta(t-kT) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{1-(-1)^k\}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

sa函数全时域积分

$$1.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin(\omega_c t)}{t}dt=\pi$$

$$2.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin^2(\omega_c t)}{t^2}dt=\pi\omega_c$$

$$3.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin^3(\omega_c t)}{t^3}dt=\frac{3}{4}\pi\omega_c^2$$

$$4.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin^4(\omega_c t)}{t^4}dt=\frac{2}{3}\pi\omega_c^3$$

![[iPad-FT 1.png|800]]

方波与三角变换对

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau\\ 0, & |t|>\tau\end{cases}\quad\leftrightarrow\quad 2\frac{Sin(\omega\tau)}{\omega}$$

$$g(t)=k\frac{sin\ \omega_c t}{t}\Rightarrow G(j\omega)=\begin{cases}k\pi, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$x(t)=k(\frac{sin\ \omega_c t}{t})^2\Rightarrow X(j\omega)=\begin{cases}a|\omega|+b, & |\omega|<2\omega_c\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$a=-\frac{\pi}{2}k\qquad\qquad b=\omega_c\pi k$$

$$x(t)=\begin{cases}a|t|+b, & |t|<2\tau\\ 0, & 其他\end{cases}\Rightarrow X(j\omega)=-4a\cdot\frac{sin^2(\tau\omega)}{\omega^2}$$

频域梯形变换对

$$f(t)=k\frac{sin(\omega_1 t)sin(\omega_2 t)}{t^2}\qquad 其中:\omega_1\geq\omega_2$$

$$F(j\omega)=\begin{cases}k\pi\omega_2 & |\omega|<\omega_1-\omega_2\\ -\frac{k\pi}{2}|\omega|+\frac{k\pi(\omega_1+\omega_2)}{2} & \omega_1-\omega_2\leq|\omega|\leq\omega_1+\omega_2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

信号的频域分析

无失真传输系统

$$h(t)=K\delta(t-t_0)\leftrightarrow H(\omega)=Ke^{-j\omega t_0}$$

$$|H(\omega)|=K\qquad\varphi_H(\omega)=-\omega t_0$$

也就是无失真系统的幅频特性曲线是常数直线，相频特性曲线是过原点的斜线。

线性相位系统与系统的群时延

- 系统相频特性曲线是关于ω的线性函数称为线性相位系统

$$\varphi_H(\omega)=-\omega\tau_0\quad \tau_0\text{为常数}$$

很明显无失真系统是线性相位系统

色散：系统对于信号的不同频率具有不同的延时的现象
群时延τ(ω)

$$\tau(\omega)=-\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega}$$

求解频率响应表达式

幅度响应表达式

```
graph TB
分别求分子和分母的模值表达式-->分子模除以分母的模
```

相频响应表达式

```
graph TB
分别求分子和分母的tan表达式-->分ω的取值象限确定分子分母对应的arc表达式-->分子arc式-分母arc式
```

根据复数坐标确定其所在象限并以此限定$\angle H(j\omega)$的范围

1. $tan(\angle H(j\omega))=\omega$
   ![[Pasted image 20221116124850.png|800]]
2. $tan(\angle H(j\omega))=\frac{1}{\omega}$
   ![[Pasted image 20221116124249.png|800]]
3. $tan(\angle H(j\omega))=\frac{\omega}{\omega^2-a}$
   ![[Pasted image 20221116124658.png|800]]

采样与内插

对信号进行采样
从时域分析：

$$\text{冲激信号的特性：}f(t)\delta(t-\tau)=f(\tau)\delta(t-\tau)$$

$$\therefore \text{若有周期冲激串信号：}p(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lT_s)$$

$$\text{一系列间隔}T_s\text{的}f(t)\text{的冲激}\quad y(t)=f(t)p(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(lT_s)\delta(t-lT_s)$$

从频域分析：

对于周期信号的FT, 应该先求FS :

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_T p(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_s}\int_T \sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lT_s)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_T \delta(t-lT_s)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_s}$$

$$\therefore p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_s t} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t}$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

时域相乘,频域卷积性质

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega - k\omega_s)$$

所以可以看出，采样之后的频谱是无穷次原始信号==周期分之一倍==频移之后的叠加。

采样定理

奈奎斯特采样定理:

- 采样频率$\omega_s \geq 2\omega_0$

带通采样定理:

- $\frac{2\omega_H}{m} \leq \omega_s \leq \frac{2\omega_L}{m-1} \quad m = [\frac{\omega_H}{B}]$,B为频谱带宽,$\omega_L, \omega_H$分别为最低与最高频率
- 当信号最低频率为0时，带通采样定理⇔奈奎斯特采样定理

对信号进行内插

- 只需要$\frac{\omega_s}{2}$截至频率的滤波器就可以还原信号x(t)
  内插公式

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(lT_s)sa[\frac{\pi(t-lT_s)}{T_s}]$$

从频域上看，当k=0时，其恰好只是大小为原频谱的$\frac{1}{T}$倍。所以如果使用一个恰当的低通滤波器就可以将原信号恢复出来。

$$H(\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|<\frac{\omega_s}{2}\\ 0, & |\omega|>\frac{\omega_s}{2}\end{cases} \qquad X(\omega)=H(\omega)Y(\omega)$$

$$频域相乘,时域卷积:x(t)=h(t)*y(t)=h(t)*f(t)p(t)$$

$$=T_s\frac{sin(\frac{\omega_s t}{2})}{\pi t}*\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(lT_s)\delta(t-lT_s)$$

$$=T_s\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(lT_s)\frac{sin(\frac{\omega_s(t-lT_s)}{2})}{\pi(t-lT_s)}$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(lT_s)sa(\frac{\omega_s(t-lT_s)}{2})$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(lT_s)sa[\frac{\pi(t-lT_s)}{T_s}]$$

拉普拉斯变换

- 表达式一定要带上收敛域

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

拉斯变换的性质

- 时同频异！！！
  这里只列举几种常用性质

$$\text{时移性质：} f(t-t_0) \quad \leftrightarrow \quad e^{-st_0}F(s)$$

$$\text{频移性质：} f(t)e^{s_0 t} \quad \leftrightarrow \quad F(s-s_0)$$

$$\text{尺度变换：} f(at) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})$$

$$\text{时域卷积：} f(t)*h(t) \quad \leftrightarrow \quad F(s)H(s)$$

$$\text{时域微分：} \frac{df(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad sF(s) \quad \text{对于双边成立}$$

$$\text{时域积分：} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s}F(s)$$

$$s\text{域微分：} -tf(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dF(s)}{ds}$$

$$\text{初值定理：} f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \quad 0\text{时刻无冲激}$$

$$\text{终值定理：} f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad sF(s)\text{收敛域包含虚轴}$$

拉斯变换表

右边信号

可以看到，只要知道最简单的冲激变换对，加上一些性质就可以推出所有的变换对关系。以下都是右边信号的变换对。

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \xRightarrow{\text{时移性质}} \delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \xRightarrow{\text{积分性质}} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \xRightarrow{\text{频域微分}} tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \xRightarrow{\text{频移性质}} e^{s_0t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0}$$

$$e^{-b|t|} = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$e^{s_0t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0} \xRightarrow{\text{频移性质}} e^{-b|t|} \leftrightarrow \frac{-2b}{s^2-b^2} \qquad -b<\sigma<b$$

$$cos\omega t = \frac{1}{2}\{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\}$$
$$sin\omega t = \frac{1}{2j}\{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\}$$

$$e^{s_0t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0} \xRightarrow{\text{欧拉公式}} cos(\omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{s_0t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_0} \xRightarrow{\text{欧拉公式}} sin(\omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

左边信号

$$\text{利用尺度的变换的特例}: f(-t) \leftrightarrow F(-s)$$
$$u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s}$$

$$u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s} \xRightarrow{\text{频移性质}} e^{s_0t}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-s_0}$$

补全一些不常见的拉斯变换

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-sT}} \qquad \sigma>0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\delta(t-kT) \leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-sT}} \qquad \sigma>0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}u(t-kT) \leftrightarrow \frac{1}{s(1-e^{-sT})} \qquad \sigma>0$$

$$|sin\ \pi t|\cdot u(t) = sin\ \pi t\{u(t)-u(t-1)\} * \sum_{k=0}^{+\infty}\delta(t-k)$$

![[Pasted image 20221104162823.png]]

收敛域

- 如果H(s)是有理式，则收敛域不包含任何极点
- 如果f(t)是时限信号且绝对可积，则收敛域是全s域

收敛域的取值问题：

右边信号

- 极点实部的右侧

左边信号

- 极点实部的左侧

通过**LTI**系统之后

- 通过LTI系统之后系统的输出信号y(t)收敛域一定包含输入信号X(s)的收敛域和H(s)收敛域的交集

收敛域与信号因果稳定关系

- 收敛域位于最右侧极点的右侧⇒右边信号⇏因果信号
- 收敛域包含虚轴⇒信号稳定

零极图

- 极点可以是复数根，所以不要使用函数作图判断
- 实数信号的零极点共轭出现

全通系统

- 零极点关于虚轴一一对称

$$\text{形如}:H(s)=\frac{(s+a_1)(s-a_2)}{(s-a_1)(s+a_2)}$$

最小相位系统

- 零极点都位于s的左半平面

$$H(s)=\frac{N(s)}{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}\quad a_i>0$$

复指数信号的**LTI**响应

$$x(t)=e^{s_0t}$$

$$y(t)=\begin{cases} e^{s_0t}H(s_0) & s_0\text{位于}H(s)\text{收敛域内}\\ \\ \text{不存在} & s_0\text{不在}H(s)\text{收敛域内}\end{cases}$$

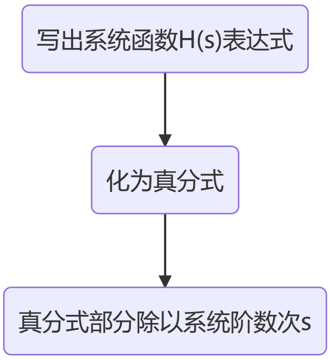
LTI系统的框图描述

- 不要在表达式中出现常数项，如果出现，就将其合并到某一有理式项当中
- 框图转换成流图的方法

1. 将加法器合并之后画成节点
2. 小方框都改写成横线箭头，其方框内容重写到箭头上
3. 反馈支路画成曲线，其它支路画成直线。箭头不再线段尾端而是在线段中间

框图的三种形式

直接：H(s)直接当做整体画框图
级联：H(s)表示为两个部分相乘，各部分单独画框图，一路相连
并联：H(s)表示为两个部分相加，各部分单独画框图，分出n路，最后汇合为一路



![[Pasted image 20221104172505.png]]

梅森公式

- 对于Δ_k只要和第k条前向通路有任何联系的回路都要去掉

$$H(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}p_k\Delta_k$$

$$n:从x(t)\to y(t)的单向路径条数$$

$$\Delta=1-\sum L_a+\sum L_bL_c-\sum L_dL_eL_f+\cdots$$

$$\sum L_a:所有单独回路增益之和;\quad \sum L_bL_c:两个互不接触的回路增益乘积之和$$

$$\sum L_dL_eL_f:三个互不接触的回路增益乘积之和$$

$$p_k:第k条从x(t)\to y(t)的单向路径的总增益$$

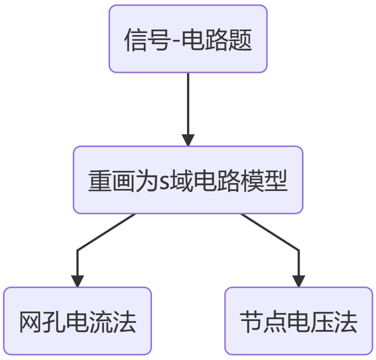
$$\Delta_k=\Delta-(\Delta中与第k条通路有接触的部分)$$

系统函数转化为微分方程

- N(s):方程右侧，与输入相应
- D(s):方程左侧，与输出相应

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

信号中电路题综合



电路中各物理量关系式

$$\begin{cases} v_R(t) = R \cdot i_R(t) \\ \\ v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \\ \\ v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_C(t) dt \end{cases}$$

从s域看电路中各物理量关系

$$\begin{cases} V_R(s) = R \cdot I_R(s) \\ \\ V_L(s) = sL \cdot I_L(s) - L \cdot i_L(0^-) \\ \\ V_C(s) = \frac{1}{sC} \cdot I_C(s) + \frac{v_c(0^-)}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_R(s) = \frac{1}{R} \cdot V_R(s) \\ \\ I_L(s) = \frac{1}{sL} \cdot V_L(s) + \frac{i_L(0^-)}{s} \\ \\ I_C(s) = sC \cdot V_C(s) - C \cdot v_c(0^-) \end{cases}$$

无初始条件下的简单替换

$$R_c = \frac{1}{sC} \qquad R_L = sL$$

电容与电感在s域的等价模型

并联等价适合节点分析法
串联等价适合网孔分析法
![[Pasted image 20221105154319.png]]
![[Pasted image 20221105154336.png]]

网孔电流法

- 以网孔的电流为待求量
- 电路中独立网孔的数量=方程的数量
- 所有网孔选择同一个方向，同顺时针或同逆时针

核心公式

- 自回路电阻×自回路电流-互回路电阻×互回路电流=电压提升值
- 电压提升：由"-"→"+"流过电压源为提升值

Z变换

Z变换表达式由于常写作负幂次，所以要特别注意在零极图原点处可能出现的零点

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f[n]z^{-n}$$
$$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint F(z)z^{n-1}dz$$

筛除非整数倍的点

$$f[m]=f[m]\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{-\frac{2\pi}{M}jmk}$$

$$\text{表示只有}m=kM\qquad k=0,\pm1,\cdots\text{的点非零}$$

Z变换性质

$$\text{时移性质：}f[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}F(z)$$

$$z\text{域尺度变换：}z_0^nf[n]\leftrightarrow F(\frac{z}{z_0})$$

$$\text{时域反转特性：}f[-n]\leftrightarrow F(\frac{1}{z})$$

$$\text{时域展宽特性：}f_1[n]\leftrightarrow F(z^N)$$

$$f_1[n]=\begin{cases}f[\frac{n}{N}], & n\text{为}N\text{的整数倍}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\text{时域卷积特性：}f[n]*h[n]\leftrightarrow F(z)H(z)$$

$$\text{时域差分：}f[n]-f[n-1]\leftrightarrow(1-z^{-1})F(z)$$

$$\text{时域累加：}\sum_{m=-\infty}^{n}f[m]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}F(z)$$

$$z\text{域微分性质：}-nf[n]\leftrightarrow z\frac{dF(z)}{dz}$$

$$\text{初值定理：}f[n_0]=\lim_{z\to\infty}[z^{n_0}F(z)],\quad f[n]=0,n<n_0$$

$$\text{终值定理：}f[\infty]=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})F(z)],\quad(1-z^{-1})F(z)\text{收敛域包含单位圆}$$

Z变换常用变换对

$$1 \leftrightarrow \delta[n] \quad 时域累加 \Rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \leftrightarrow u[n]$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} \leftrightarrow u[n] \quad z域尺度变换 \Rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \leftrightarrow a^n u[n]$$

$$\frac{1}{1-az^{-1}} \leftrightarrow a^n u[n] \quad 频域微分性质 \Rightarrow \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \leftrightarrow na^{n-1}u[n]$$

$$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \leftrightarrow na^{n-1}u[n] \quad 时移特性 \Rightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2} \leftrightarrow (n+1)a^n u[n+1]$$

$$1 \leftrightarrow \delta[n] \quad 时移特性 \Rightarrow z^{-n_0} \leftrightarrow \delta[n-n_0]$$

$$\frac{1}{1-e^{j\Omega}z^{-1}} \leftrightarrow e^{j\Omega n}u[n] \quad 欧拉公式 \Rightarrow \frac{1-cos(\Omega)z^{-1}}{1-2cos(\Omega)z^{-1}+z^{-2}} \leftrightarrow cos(\Omega n)u[n]$$

$$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}z^{-1}} \leftrightarrow e^{-j\Omega n}u[n] \quad 欧拉公式 \Rightarrow \frac{sin(\Omega)z^{-1}}{1-2cos(\Omega)z^{-1}+z^{-2}} \leftrightarrow sin(\Omega n)u[n]$$

长除法

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

$$F(z) = \dots f[-n]z^n + \dots f[-1]z + f[0] + f[1]z^{-1} + \dots f[n]z^{-n} \dots$$

可以看到如果我们使用长除法将F(z)写成了一堆关于z的幂次表达式，则其前系数与函数值是一一对应的，对于有限值点的求解将十分便捷。

不同情况下的长除

- ==右降左升==
- 右边信号：将被除数和除数写做降幂形式
- 左边信号：将被除数和除数写做升幂形式

使用Z变换求DFT与DFS

求DFT：

$$Tips: z变换的收敛域包含单位圆 \Rightarrow 其离散傅里叶变换存在$$

$$❶做该函数的Z变换: F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]z^{-n}$$

$$❷令 z = e^{j\Omega} \Rightarrow F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-j\Omega n}$$

求DFS：

$$❶取一个周期的函数做z变换: F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n]z^{-n}$$

$$❷令 z = e^{jk\Omega_0}, 并除N得: a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} f[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

系统稳定性的判别

1.对于连续时间系统,拉斯变换收敛域包含虚轴

h(t)绝对可积$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$

2.对于离散时间系统,z变换收敛域包含单位圆

h[n]绝对可和$\sum_{-\infty}^{+\infty}|h[t]|dt<+\infty$

$$\text{系统稳定}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{离散时间系统:收敛域包含单位圆}\\ \\ \text{连续时间系统:收敛域包含虚轴}\end{cases}$$

劳斯-赫尔维茨准则

- 前提要求特征多项式各个系数为正

关键字:

系统特征多项式

劳斯-赫尔维茨准则

双线性变换

$$\begin{array}{l}1.\text{系统特征多项式:系统函数的分母部分}D(s)\text{或}D(z),\text{要求正幂次}\\ 2.\text{对于拉斯变换}D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0\\ 3.\text{写出罗斯}-\text{霍维茨阵列:}\begin{matrix}a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots\\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots\\ -\frac{\begin{vmatrix}a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}}{a_{n-1}} & -\frac{\begin{vmatrix}a_n & a_{n-4}\\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}}{a_{n-1}} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{matrix}\\ \\ \text{一共有}n+1\text{行,如果第一列元素不变号,则系统稳定}\\ \\ \text{对于}Z\text{变换需要多一步,先进行双线性变换}z=\frac{\lambda+1}{\lambda-1},\text{剩余相同}\end{array}$$

如果第一列出现0,用ε代替该0,且$\varepsilon\to 0^+$

离散傅里叶变换

离散傅里叶级数或变换未必有基波分量！！！

对于正弦信号求解傅里叶级数，直接用欧拉公式展开

信号震荡频率

$$\begin{array}{l}\text{信号频率越靠近奇数倍的}\pi:\pm\pi,\pm3\pi\cdots,\text{ 其震荡频率越高}\\ \text{信号频率越靠近偶数倍的}\pi:0,\quad\pm2\pi\cdots,\text{ 其震荡频率越低}\end{array}$$

频谱

三角波卷积三角波

$$f(t)=\begin{cases}-|t|+1 & |t|<1\\ \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$g(t)=f(t)*f(t)=\begin{cases}-\frac{|t|^3}{6}+t^2-2|t|+\frac{4}{3} & 1<|t|<2\\ \\ \frac{|t|^3}{2}-t^2+\frac{2}{3} & 0<|t|\le 1\\ \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

![[Pasted image 20221103175506.png|700]]