Geraden und Dreiecke in der Ebene

Aufgabe 1

In welchem Punkt schneidet die Gerade g_1, die durch die Punkte P und Q festgelegt ist, die Gerade g_2, die durch die Punkte R und S verfäuft?

Aufgabe 2

Nimmt man die x-Achse als dritte Gerade hinzu, ergibt sich zusammen mit den Geraden g_1 und g_2 ein Dreieck.

2.1 Bestimme den Umfang dieses Dreiecks.

2.2 Bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

2.3 Bestimme die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Beispiel

Gegeben seien folgende Punkte:

$$P\,(7 \mid 6) \quad Q\,(4 \mid 15) \qquad R\,(-5 \mid -16) \quad S\,(12 \mid 18)$$

Daraus müssen zunächst die Geradenparameter m und b der beiden Geraden ermittelt werden:

$$\text{aus } P \text{ und } Q \quad \rightsquigarrow \quad g_1 : f(x) = m_1 \cdot x + b_1$$

$$\text{aus } R \text{ und } S \quad \rightsquigarrow \quad g_2 : f(x) = m_2 \cdot x + b_2$$

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Schritt 1: Aufstellen der Geradengleichungen

Die Steigung m lässt sich aus den Koordinaten zweier Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ berechnen, die auf der Geraden liegen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mit den Punkten $P\,(7 \mid 6)$ und $Q\,(4 \mid 15)$ erhält man:

$$m_1 = \frac{6 - 15}{7 - 4} = \frac{-9}{3} = -3$$

Wichtig ist hierbei, dass der Punkt mit der kleineren x-Koordinate den Index 1 erhält!

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Schritt 1: Aufstellen der Geradengleichungen

Die Steigung m lässt sich aus den Koordinaten zweier Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ berechnen, die auf der Geraden liegen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mit den Punkten $P\,(7 \mid 6)$ und $Q\,(4 \mid 15)$ erhält man:

$$m_1 = \frac{6 - 15}{7 - 4} = \frac{-9}{3} = -3$$

Wichtig ist hierbei, dass der Punkt mit der kleineren x-Koordinate den Index 1 erhält!

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts
Schritt 1: Aufstellen der Geradengleichungen

Sobald man die Steigung m ermittelt hat, kann man mit einem der beiden bekannten Punkte den y-Achsenabschnitt b bestimmen

Verwendet man zum Beispiel Punkt $Q\,(4 \mid 15)$, erhält man für b:

$$\begin{aligned} & y = m \cdot x + b && \mid Q \text{ und } m \text{ einsetzen} \\ \Rightarrow\quad & 15 = -3 \cdot 4 + b \\ \Leftrightarrow\quad & 15 = -12 + b && \mid +12 \\ \Leftrightarrow\quad & 27 = b \end{aligned}$$

Damit ist die Funktionsgleichung der ersten Gerade ermittelt:

$$g_1 : f(x) = -3x + 27$$

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Schritt 1: Aufstellen der Geradengleichungen

Sobald man die Steigung m ermittelt hat, kann man mit einem der beiden bekannten Punkte den y-Achsenabschnitt b bestimmen

Verwendet man zum Beispiel Punkt $Q\,(4 \mid 15)$, erhält man für b:

$$\begin{aligned} & y = m \cdot x + b && \mid Q \text{ und } m \text{ einsetzen} \\ \Rightarrow\quad & 15 = -3 \cdot 4 + b && \\ \Leftrightarrow\quad & 15 = -12 + b && \mid +12 \\ \Leftrightarrow\quad & 27 = b && \end{aligned}$$

Damit ist die Funktionsgleichung der ersten Gerade ermittelt:

$$g_1 : f(x) = -3x + 27$$

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Schritt 1: Aufstellen der Geradengleichungen

Sobald man die Steigung m ermittelt hat, kann man mit einem der beiden bekannten Punkte den y-Achsenabschnitt b bestimmen

Verwendet man zum Beispiel Punkt $Q\,(4 \mid 15)$, erhält man für b:

$$\begin{aligned} && y &= m \cdot x + b && \mid Q \text{ und } m \text{ einsetzen} \\ \Rightarrow && 15 &= -3 \cdot 4 + b && \\ \Leftrightarrow && 15 &= -12 + b && \mid +12 \\ \Leftrightarrow && 27 &= b && \end{aligned}$$

Damit ist die Funktionsgleichung der ersten Gerade ermittelt:

$$g_1 : f(x) = -3x + 27$$

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Schritt 1: Aufstellen der Geradengleichungen

Aus den Punkten $R\,(-5 \mid -16)$ und $S\,(12 \mid 18)$ ergibt sich die Steigung von g_2:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - (-16)}{12 - (-5)} = \frac{34}{17} = 2$$

Zur Bestimmung des y-Achsenabschnitts von g_2 eignet sich Punkt $S\,(12 \mid 18)$ etwas besser, weil dessen Koordinaten keine negativen Vorzeichen besitzen.

$$\begin{aligned} && y &= m \cdot x + b && \mid S \text{ und } m \text{ einsetzen} \\ \Rightarrow && 18 &= 2 \cdot 12 + b && \\ \Leftrightarrow && 18 &= 24 + b && \mid -24 \\ \Leftrightarrow && -6 &= b && \end{aligned}$$

Damit ist die Funktionsgleichung der zweiten Gerade ermittelt:

$$g_2 : f(x) = 2x - 6$$

Zur Bestimmung des y-Achsenabschnitts von g_2 eignet sich Punkt $S\,(12 \mid 18)$ etwas besser, weil dessen Koordinaten keine negativen Vorzeichen besitzen.

$$
\begin{aligned}
& y = m \cdot x + b && \mid S \text{ und } m \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & 18 = 2 \cdot 12 + b && \\
\Leftrightarrow \quad & 18 = 24 + b && \mid -24 \\
\Leftrightarrow \quad & -6 = b &&
\end{aligned}
$$

Damit ist die Funktionsgleichung der zweiten Gerade ermittelt:

$$g_2 : f(x) = 2x - 6$$

Den Schnittpunkt beider Geraden erhält man nun als Lösung des Gleichungssystems:

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = y = -3x + 27 \\ f(x) = y = 2x - 6 \end{array} \right.$$

Da beide Gleichungen bereits nach y aufgelöst sind, bietet sich zur Lösung das *Gleichsetzungsverfahren* an, also:

$$-3x + 27 = 2x - 6$$

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts
Schritt 2: Lösen des linearen Gleichungssystems

Den Schnittpunkt beider Geraden erhält man nun als Lösung des Gleichungssystems:

$$\left|\begin{array}{l} f(x) = y = -3x + 27 \\ f(x) = y = 2x - 6 \end{array}\right.$$

Da beide Gleichungen bereits nach y aufgelöst sind, bietet sich zur Lösung das *Gleichsetzungsverfahren* an, also:

$$-3x + 27 = 2x - 6$$

Die x-Koordinate des Schnittpunkts erhält man durch das Auflösen der Gleichung nach x:

$$
\begin{aligned}
& -3x + 27 = 2x - 6 && \mid +3x \\
\Leftrightarrow\quad & 27 = 5x - 6 && \mid +6 \\
\Leftrightarrow\quad & 33 = 5x && \mid : 5 \\
\Leftrightarrow\quad & 6{,}6 = x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts

Schritt 3: Berechnen des zugehörigen Funktionswertes

Die y-Koordinate des Schnittpunkts erhält man durch das Einsetzen der x-Koordinate in eine der beiden Geradengleichungen:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 2x - 6 \\
\Rightarrow \quad & f(6{,}6) = 2 \cdot 6{,}6 - 6 = 7{,}2
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist also der Punkt $C(6{,}6 \mid 7{,}2)$.

Aufgabe 1: Bestimmen des Schnittpunkts
Schritt 3: Berechnen des zugehörigen Funktionswertes

Die y-Koordinate des Schnittpunkts erhält man durch das Einsetzen der x-Koordinate in eine der beiden Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} & f(x) = 2x - 6 \\ \Rightarrow \quad & f(6{,}6) = 2 \cdot 6{,}6 - 6 = 7{,}2 \end{aligned}$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist also der Punkt $C(6{,}6 \mid 7{,}2)$.

Geraden und Dreiecke in der Ebene

Aufgabe 1

In welchem Punkt schneidet die Gerade g_1, die durch die Punkte P und Q festgelegt ist, die Gerade g_2, die durch die Punkte R und S verfäuft?

Aufgabe 2

Nimmt man die x-Achse als dritte Gerade hinzu, ergibt sich zusammen mit den Geraden g_1 und g_2 ein Dreieck.

2.1 Bestimme den Umfang dieses Dreiecks.

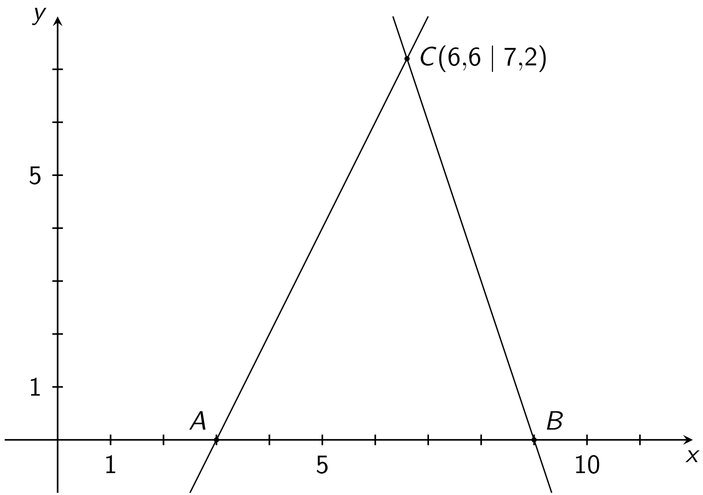
2.2 Bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

2.3 Bestimme die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs

- Zuerst werden die fehlenden Koordinaten der beiden Eckpunkte A und B des Dreiecks benötigt. Diese ergeben sich aus den **Nullstellen** der Geraden.
- Aus den Koordinatendifferenzen lassen sich dann die Längen der Dreiecksseiten mithilfe des Satzes von **Pythagoras** berechnen.

Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs
Schritt 1: Berechnen der Nullstellen



Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs

Schritt 1: Berechnen der Nullstellen

Die Nullstelle ist der Wert, den man für x einsetzen muss, damit als Ergebnis 0 herauskommt:

$$
\begin{aligned}
& g_1 : f(x) = -3x + 27 && \mid \text{setze } y = 0 \\
& 0 = -3x + 27 && \mid -27 \\
\Leftrightarrow\quad & -27 = -3x && \mid : (-3) \\
\Leftrightarrow\quad & 9 = x &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_2 : f(x) = 2x - 6 && \mid \text{setze } y = 0 \\
& 0 = 2x - 6 && \mid +6 \\
\Leftrightarrow\quad & 6 = 2x && \mid : 2 \\
\Leftrightarrow\quad & 3 = x &&
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs

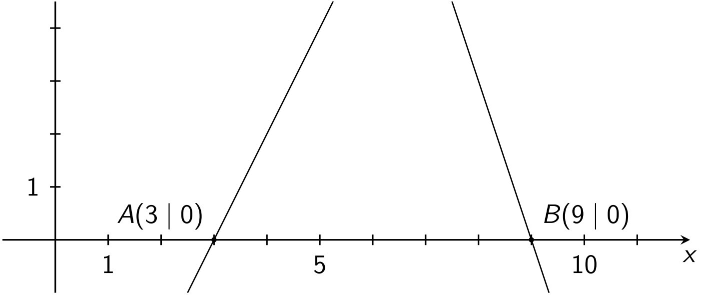
Schritt 1: Berechnen der Nullstellen

Die Nullstelle ist der Wert, den man für x einsetzen muss, damit als Ergebnis 0 herauskommt:

$$
\begin{aligned}
& g_1 : f(x) = -3x + 27 && \mid \text{setze } y = 0 \\
& 0 = -3x + 27 && \mid -27 \\
\Leftrightarrow \quad & -27 = -3x && \mid : (-3) \\
\Leftrightarrow \quad & 9 = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_2 : f(x) = 2x - 6 && \mid \text{setze } y = 0 \\
& 0 = 2x - 6 && \mid +6 \\
\Leftrightarrow \quad & 6 = 2x && \mid : 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 3 = x
\end{aligned}
$$

Die beiden Nullstellen lauten also 9 und 3. Die kleinere von beiden wird als x-Koordinate dem Punkt A zugeordnet und die größere von beiden dem Punkt B.



Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs
Schritt 2: Berechnen der Seitenlängen

Die Länge der Seite c ist nun einfach der Abstand zwischen den beiden Nullstellen:

$$c = B_x - A_x = 9 - 3 = 6$$

Um die Längen der (schrägen) Seiten a und b zu bestimmen, kann man den Satz des Pythagoras verwenden. Sobald man die Höhe des Dreiecks als Hilfslinie einzeichnet, wird die Situation klar:

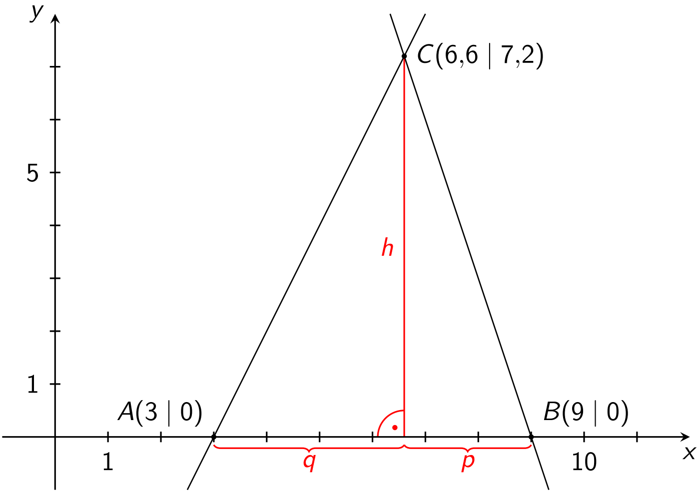
Die Länge der Seite c ist nun einfach der Abstand zwischen den beiden Nullstellen:

$$c = B_x - A_x = 9 - 3 = 6$$

Um die Längen der (schrägen) Seiten a und b zu bestimmen, kann man den Satz des Pythagoras verwenden. Sobald man die Höhe des Dreiecks als Hilfslinie einzeichnet, wird die Situation klar:

Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs

Schritt 2: Berechnen der Seitenlängen



Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs

Schritt 2: Berechnen der Seitenlängen

Aus den Punktkoordinaten erhält man die benötigten Längen:

$$\begin{aligned} a^2 &= p^2 + h^2 \\ &= (9 - 6{,}6)^2 + 7{,}2^2 \\ &= 2{,}4^2 + 7{,}2^2 \\ &= 57{,}6 \\ \Rightarrow \quad a &\approx 7{,}59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= q^2 + h^2 \\ &= (6{,}6 - 3)^2 + 7{,}2^2 \\ &= 3{,}6^2 + 7{,}2^2 \\ &= 64{,}8 \\ \Rightarrow \quad b &\approx 8{,}05 \end{aligned}$$

Zusammen ergeben a, b und c den Umfang des Dreiecks:

$$U_D \approx 7{,}59 + 8{,}05 + 6 = 21{,}64$$

Aufgabe 2.1: Bestimmen des Umfangs

Schritt 2: Berechnen der Seitenlängen

Aus den Punktkoordinaten erhält man die benötigten Längen:

$$\begin{aligned} a^2 &= p^2 + h^2 \\ &= (9 - 6{,}6)^2 + 7{,}2^2 \\ &= 2{,}4^2 + 7{,}2^2 \\ &= 57{,}6 \\ \Rightarrow \quad a &\approx 7{,}59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= q^2 + h^2 \\ &= (6{,}6 - 3)^2 + 7{,}2^2 \\ &= 3{,}6^2 + 7{,}2^2 \\ &= 64{,}8 \\ \Rightarrow \quad b &\approx 8{,}05 \end{aligned}$$

Zusammen ergeben a, b und c den Umfang des Dreiecks:

$$U_D \approx 7{,}59 + 8{,}05 + 6 = 21{,}64$$

Aufgabe 2.2: Bestimmen des Flächeninhalts

Alle Informationen, die man zur Bestimmung des Flächeninhalts benötigt, sind aus der letzten Aufgabe schon bekannt:

- Seite c ist die **Grundseite** des Dreiecks.
- Die y-Koordinate von Punkt C definiert die **Höhe**.

Daraus ergibt sich hier eine Fläche von:

$$A_D = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{c \cdot C_y}{2} = \frac{6 \cdot 7{,}2}{2} = 21{,}6$$

Aufgabe 2.2: Bestimmen des Flächeninhalts

Alle Informationen, die man zur Bestimmung des Flächeninhalts benötigt, sind aus der letzten Aufgabe schon bekannt:

- Seite c ist die **Grundseite** des Dreiecks.
- Die y-Koordinate von Punkt C definiert die **Höhe**.

Daraus ergibt sich hier eine Fläche von:

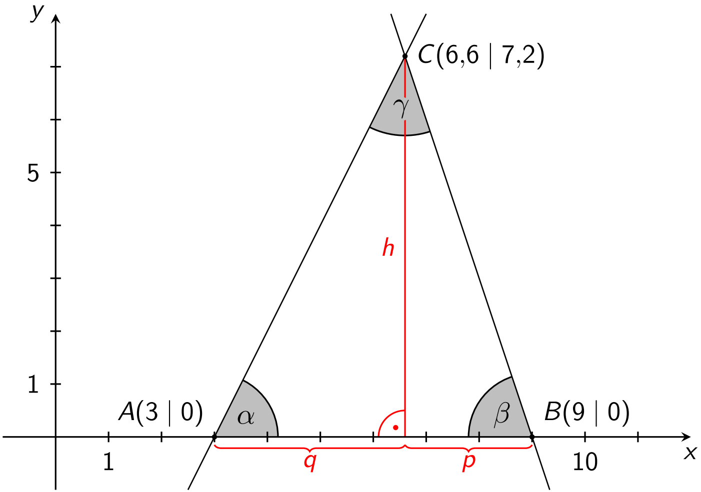
$$A_D = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{c \cdot C_y}{2} = \frac{6 \cdot 7{,}2}{2} = 21{,}6$$

Aufgabe 2.3: Bestimmen der Innenwinkel

Auch die Informationen, die man zur Bestimmung der Innenwinkel benötigt, sind schon aus Aufgabe 2.1 bekannt:

- Zunächst werden die Winkel α und β **trigonometrisch** aus p, q und h bestimmt.
- Der fehlende Winkel γ ergibt sich dann aus der **Innenwinkelsumme** von Dreiecken.

Aufgabe 2.3: Bestimmen der Innenwinkel



Aufgabe 2.3: Bestimmen der Innenwinkel

Die Winkel α und β erhält man z. B. aus der Umkehrung der Tangensfunktion:

$$\alpha = \text{arctan}\left(\frac{h}{q}\right) = \text{arctan}\left(\frac{7{,}2}{3{,}6}\right) \approx 63{,}43^\circ$$

$$\beta = \text{arctan}\left(\frac{h}{p}\right) = \text{arctan}\left(\frac{7{,}2}{2{,}4}\right) \approx 71{,}57^\circ$$

Den fehlenden dritten Winkel kann man leicht mithilfe der Innenwinkelsumme von Dreiecken bestimmen:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 45^\circ$$

Aufgabe 2.3: Bestimmen der Innenwinkel

Die Winkel α und β erhält man z. B. aus der Umkehrung der Tangensfunktion:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{q}\right) = \arctan\left(\frac{7{,}2}{3{,}6}\right) \approx 63{,}43^\circ$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{h}{p}\right) = \arctan\left(\frac{7{,}2}{2{,}4}\right) \approx 71{,}57^\circ$$

Den fehlenden dritten Winkel kann man leicht mithilfe der Innenwinkelsumme von Dreiecken bestimmen:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 45^\circ$$