Estudio del Caos en sistemas físicos y su relación con la predicción meteorológica

Rubén Torre Merino

Table of contents

1 ColaCaos

¿Has oído hablar alguna vez de la teoría del caos? Es posible que te suene la famosa idea de que «el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un huracán en Texas». Esta afirmación es una metáfora del efecto mariposa, un concepto fundamental dentro de la teoría del caos que describe cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un sistema pueden dar lugar a diferencias enormes en su evolución.

El origen de esta idea se remonta a 1972, cuando el meteorólogo y matemático Edward Lorenz presentó una conferencia titulada «Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?» en la 139ª reunión de la American Association for the Advancement of Science (AAAS). Lorenz, que investigaba modelos meteorológicos, descubrió que pequeñas diferencias en los datos iniciales podían generar predicciones climáticas completamente distintas. Su trabajo sentó las bases de la teoría del caos y revolucionó la comprensión de los sistemas físicos.

La inspiración para este trabajo me vino de este video de Veritasium.

Si tienes tiempo y ganas también te recomiendo este video de PBS. Mucho más largo pero con mayor detalle

Pero, ¿qué significa realmente el caos? Aunque solemos asociarlo con desorden y aleatoriedad, en matemáticas y física el caos tiene un significado más profundo. Un sistema caótico no es simplemente impredecible, sino que sigue leyes deterministas, pero con una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Esto significa que, aunque podamos conocer las reglas que rigen su comportamiento, su evolución se vuelve imposible de predecir a largo plazo debido a la amplificación de pequeñas incertidumbres.

En este blog exploraremos cómo la teoría del caos y en especial sus consecuencias en la predicción del tiempo meteorológico. A través de ejemplos, experimentos y reflexiones, descubriremos cómo el caos no es simplemente desorden, sino una forma compleja de organización que rige muchos aspectos del mundo que nos rodea.

También abordaremos las implicaciones filosóficas del caos. Si la teoría del caos es correcta, a pesar de estar trabajando con sistemas cuyas ecuaciones son deterministas, no podremos conocer con certeza el estado final del sistema, por mucho que nos empeñemos en conocer con mas precisión las condiciones iniciales del sistema. Esto sugiere una limitación fundamental en muchos aspectos del conocimiento que la humanidad puede tener de su futuro. A pesar de la mejora de los medios técnicos disponibles por la Humanidad, y del avance científico, tenemos una limitación establecida por el Caos, que nos proyecta un Horizonte de Predictibilidad que no podemos pasar. Es un limite similar al de la velocidad de la luz, o al horizonte de sucesos de un agujero negro. Nunca vamos a poder ver más allá del Horizonte de Predictibilidad.

Por lo tanto, teniendo claras estas limitaciones, ¿Cómo pueden los científicos hacer predicciones sobre el clima de la Tierra a 10, 20 o 100 años vista, si el horizonte de predictibilidad del tiempo meteorológico no es mayor de 2 semanas?

Para concluir, he de confesar que no me he podido resistir a hacer el juego de palabras fácil con Cola «Caos», así que, la pregunta que intentaré responder, es ¿Puede una persona agitando su taza de Cacao por la mañana provocar un huracán al otro lado del océano a la semana siguiente?

Part I

Introducción

Part II

El Caos a través de la Función Logística

2 El Mapa Logístico

2.1 Introducción

El mapa logístico es una de las ecuaciones en diferencia más clásicas de la teoría del caos:

$$x_{n+1} = r\, x_n\, (1 - x_n)$$

donde:

- $x_n \in [0, 1]$ es la población normalizada.
- r regula la tasa de crecimiento.

Se le llama "mapa", porque n teoría de sistemas dinámicos, un mapa es simplemente una regla o función que toma un valor (o un punto en el espacio de estados) y lo "mapea" al siguiente valor. Algo similar a una función. El nombre "logístico" procede de la ecuación logística que modela el crecimiento de poblaciones con un límite ("capacidad de carga").

Se trata, a grosso modo, de una sucesión en el que el siguiente valor depende del anterior. De este tipo, hemos visto bastantes en el bachillerato, como:

2.1.1 Sucesión aritmética

- Definición recursiva: $a_{n+1} = a_n + d$, donde d es la diferencia constante.
- Término general: $a_n = a_0 + n\, d$.
- Comportamiento: crecimiento o decrecimiento uniforme.

2.1.2 Sucesión geométrica

- Definición recursiva: $a_{n+1} = q\, a_n$, donde q es la razón constante.
- Término general: $a_n = a_0\, q^n$.
- Comportamiento: decae si $|q| < 1$, es constante si $|q| = 1$, crece o alterna si $|q| > 1$.

2.1.3 Sucesiones lineales de orden superior

- Ejemplo: Fibonacci
  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, con $F_0 = 0,\ F_1 = 1$.

- Tienen fórmula cerrada y crecen de forma suave y predecible.

¿Qué tiene de especial el mapa logístico?. Lo veremos a continuación. Como primera pista, hay que observar que se trata de una ecuación no lineal, lo cual es un factor común de los sistemás caóticos. Una ecuación no lineal es aquella en la que la incógnita:

- Aparece con potencias distintas de uno,
- O bien se combina consigo misma (productos, potencias),
- O involucra funciones no lineales (exponenciales, trigonométricas...).

2.2 Relevancia

Su relevancia radica en que, a partir de una ecuación muy elemental, se observa toda la complejidad característica del caos: bifurcaciones, ciclos de periodo en expansión y dependencia sensible a las condiciones iniciales. Además su popularidad se debe a que esta ecuación modela muy bien diversos sistemas físicos como pueden ser:

1. Dinámica de poblaciones
2. Modelos económicos de oferta y demanda
3. Reacciones químicas oscilantes
4. Circuitos con realimentación

El caso más paradigmático de estudio es el primero, es decir, la evolución de la población de animales, plantas o células con el tiempo. ¿Por qué se emplea la función logística para ello?. Porque al principio, la población crece rápidamente pero después debido a la falta de recursos del entorno se suelen producir colapsos poblaciónanales.

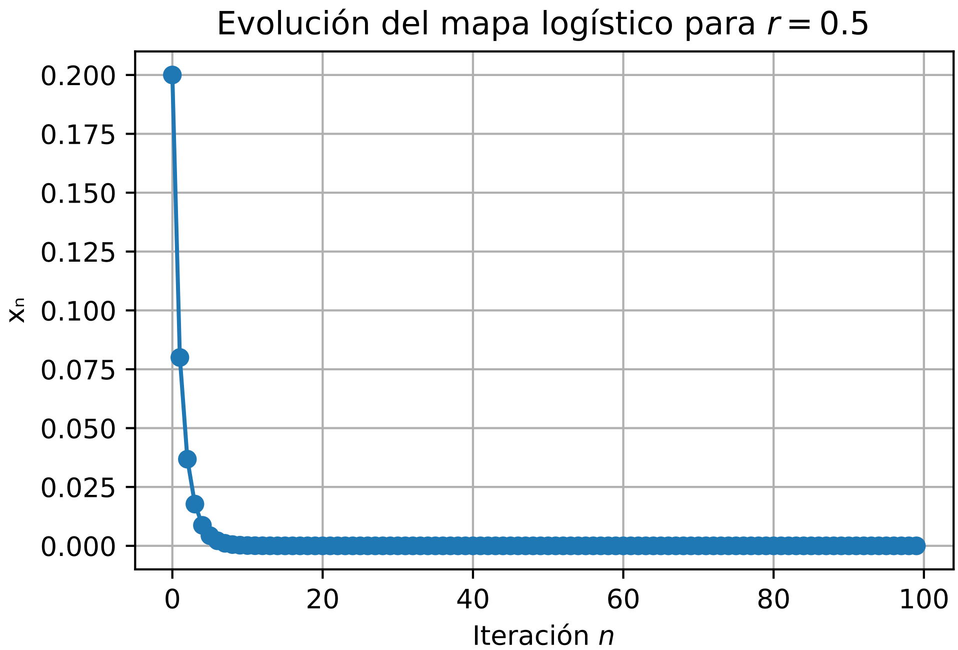
Para valores de r menor que uno, la población final tiende a cero, lo que resulta lógico, dado que la población inicial no crece.

Para valores de r entre 1 y 3, la secuencia x_n converge a un único valor fijo, que además es estable.

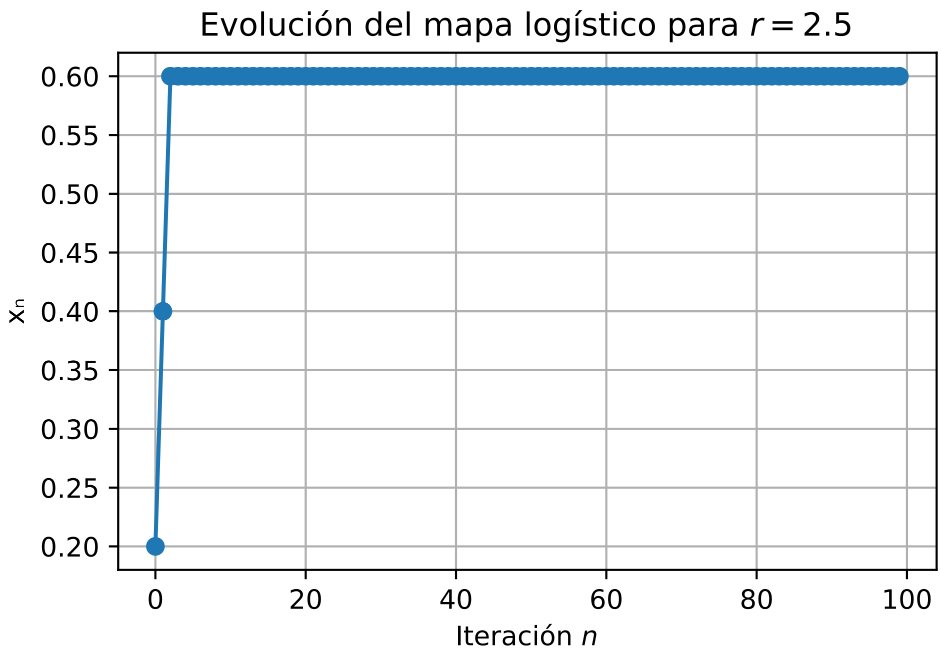
Pero al aumentar r por encima de 3, llega la primera sorpresa. Primero aparece un ciclo doble (dos valores alternantes), luego ciclos de periodo 4, 8, 16... y así sucesivamente, hasta que el comportamiento se vuelve aparentemente aleatorio, o mejor dicho caótico. A lo largo del proyecto iremos distinguiendo claramente entre el término aleatorio y el término caótico.

2.3 Simulación en Python

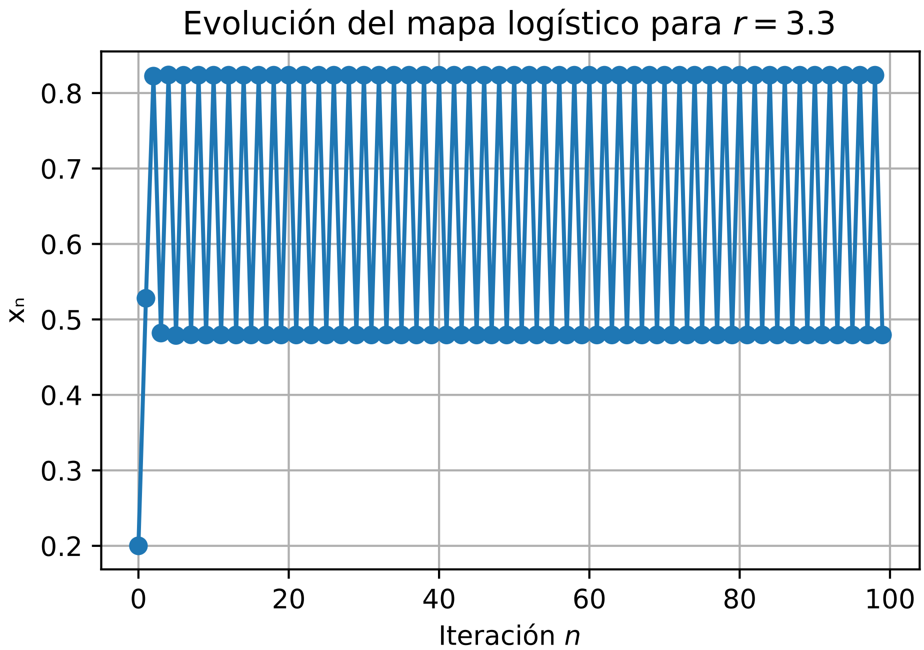
Vamos a refrendar lo anteriormente dicho con simulaciones de la función logística. Como veremos a continuación, para valores de r menores de 1, el valor final de x_n tiende a cero.



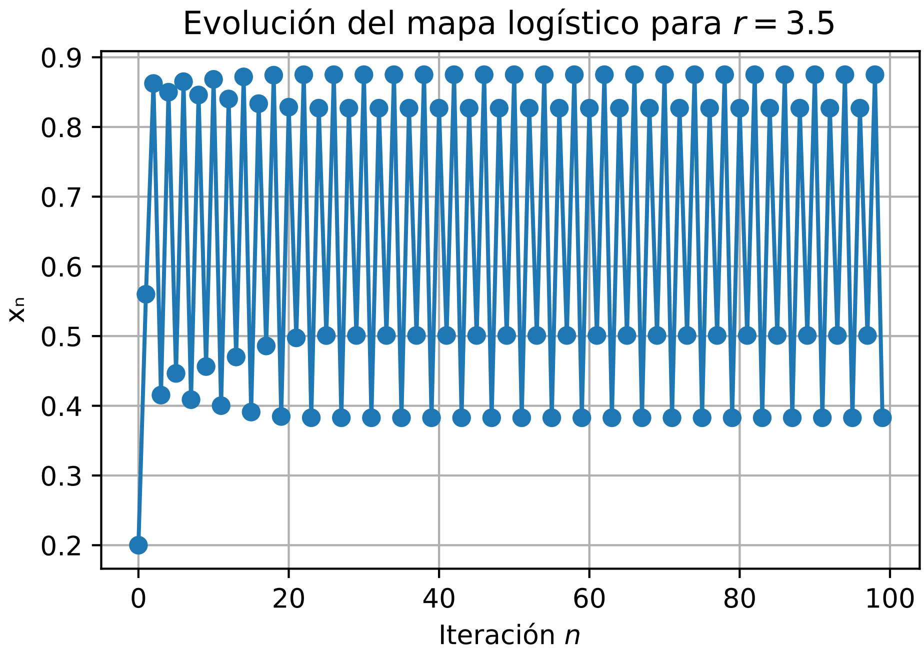
Para valores de r entre 1 y 3, el valor final de x_n tiende a un punto estable



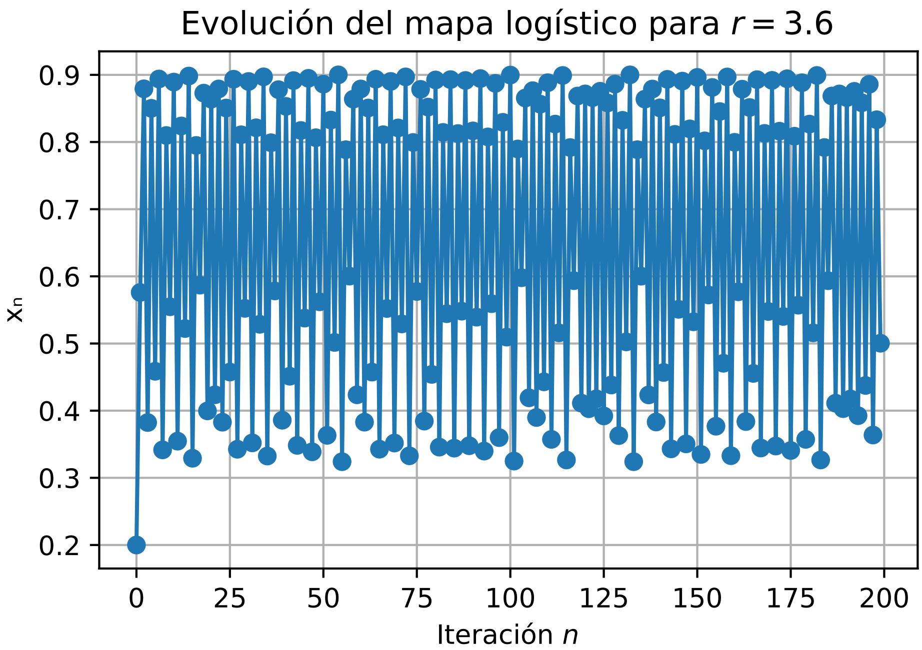
Para valores de r entre 3 y 3.449, el valor final de x_n tiende a dos puntos estables. Es decir, la población tiene un número de elementos alternantes, que se podría deber a la escasez/abundancia periódica de recursos.



Para valores de r entre 3 y 3.544, el valor final de x_n tiende a cuatro puntos estables. Es curioso ver como la población final alterna entre 4 números distintos de individuos.



Y a partir de $r = 3.56995$ no hay ningún punto estable. Se dice que el sistema en este punto se convierte en caótico



Curioso, ¿verdad?. En la siguiente sección podrás experimentar con diferentes valores de r y diferentes valores iniciales, para ver cuál es el estado final del sistema. Después en sucesivas secciones, iremos explicando formalmente con ayuda de las matemáticas por qué ocurre ésto.

3 Diagrama de telaraña

3.1 Introducción

En sistemas discretos iterativos, un “diagrama cobweb” o “diagrama de telaraña” es una representación gráfica que ilustra cómo evoluciona la secuencia

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

paso a paso. Facilita la visualización de convergencia, ciclos y caos.

3.2 Construcción del diagrama Cobweb

1. Dibujamos las curvas:
   - $y = f(x)$
   - $y = x$

2. Partimos de un valor inicial x_0 en el eje horizontal.

3. Trazamos verticalmente desde $(x_0, 0)$ hasta $(x_0, f(x_0))$.

4. Desde $(x_0, f(x_0))$ traza horizontalmente hasta la recta $y = x$, llegando a $(f(x_0), f(x_0))$. Este valor es x_1.

5. Repite el proceso usando x_1 para obtener x_2, y así sucesivamente.

Al unir los segmentos verticales y horizontales se forma la “telaraña” que muestra la evolución $x_0 \to x_1 \to x_2 \to ...$. Así vemos la evolución del sistema.

3.3 ¿Para qué sirve?

- **Convergencia a punto fijo**: si la telaraña se aproxima a un punto de intersección entre $y = f(x)$ y $y = x$. En la siguiente sección analizaremos el término “punto fijo”
- **Detección de ciclos**: patrones periódicos (por ejemplo, saltos entre dos puntos indican un ciclo de periodo 2).

- **Observación de caos**: en funciones no lineales como el mapa logístico, con ciertos parámetros la telaraña no se estabiliza y refleja sensibilidad a condiciones iniciales.

Aquí dejo un diagrama interactivo, en el que se observan la función logística $y = f(x) = rx(x-1)$, la función $y = x$, y el diagrama de telaraña.

El usuario puede jugar con el valor de r y de x_0 (el valor inicial de población), y ver la evolución de la población después de 100 iteraciones del mapa logístico.

```
Unable to display output for mime type(s): text/html
```

4 Puntos fijos de una función

4.1 ¿Qué es un punto fijo?

Un **punto fijo** de una función f es un valor x^* que satisface

$$x^* = f(x^*)$$

Intuitivamente, si comenzamos en x^* y aplicamos la función, nos quedamos en el mismo punto. En la sección anterior vimos que en el diagram interactivo graficábamos también la función $y = x$. Si nuestra función \$f(x)=x" cruza en algún momento la función $y = x$, entonces tenemos un punto fijo en nuestra función.

La pregunta que hay que hacerse, es la siguiente. Si hacemos iteraciones sucesivas de nuestro mapa/función, ¿convergemos a un punto fijo?. Para responder esta cuestión, vamos a hacer uso de la derivada de la función que estamos estudiando.

4.2 Estudio formal de la convergencia

Para ver si la sucesión x_n converge al punto fijo x^* que define la ecuación $x^* = f(x^*)$, en primer lugar vamos a definir el **error**:

$$e_n = x_n - x^*,$$

Es decir, e_n es lo que dista el resultado en la iteración n de la sucesión.

La función f se puede aproximar alrededor de x^* por medio de su derivada primera:

$$f(x_n) \approx f(x^*) + f'(x^*)\,(x_n - x^*)$$

y usando $f(x^*) = x^*$, obtenemos

$$e_{n+1} \approx x_{n+1} - x^* = f'(x^*)\,e_n$$

Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces $|e_{n+1}| < |e_n|$ y por tanto $|e_n| \to 0$, garantizando que $x_n \to x^*$.

4.3 Ejemplo: $f(x) = \cos(x)$

Si algún día te aburres, coge una calculadora y empieza a apretar sucesivas veces la función coseno. Verás que acabarás teniendo en el display de la calculadora el valor 0.739. No es magia. El valor $x^* \approx 0.739085$ es el punto fijo de la función coseno.

Veamoslo más formalmente. Consideremos la iteración

$$x_{n+1} = \cos(x_n), \quad x_0 = 0.$$

Los primeros valores son:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \cos(0) = 1, \\
x_2 &= \cos(1) \approx 0.540302, \\
x_3 &= \cos(x_2) \approx 0.857553, \\
x_4 &= \cos(x_3) \approx 0.654290, \\
x_5 &= \cos(x_4) \approx 0.793480, \\
x_6 &= \cos(x_5) \approx 0.701369, \\
x_7 &= \cos(x_6) \approx 0.763960, \\
x_8 &= \cos(x_7) \approx 0.722102, \\
x_9 &= \cos(x_8) \approx 0.750417, \\
x_{10} &= \cos(x_9) \approx 0.731404,
\end{aligned}
$$

Vemos que los valores van oscilando, pero rápidamente se aproximan al punto fijo

$$x^* \approx 0.739085,$$

que satisface $x^* = \cos(x^*)$ (la ecuación $x^* = \cos(x^*)$ no tiene solución en forma de fórmula elemental, pues es una ecuación transcendental).

Además, la derivada en este punto es menor que 1, lo que confirma que es un punto de atracción de la función.

$$f'(x) = -\sin(x), \quad |f'(x^*)| = |\sin(x^*)| < 1,$$

por lo que la iteración converge a x^*.

Si vuelves a la sección anterior, verás que para valores de r entre 1 y 3, el mapa logístico converge al punto fijo de la función logísitica. Siempre, independientemente del valor de x_0 que elijas.

Curiosamente, a partir de $r = 3$ la derivada de la función logística en el punto de corte con $y = x$ pasa a tener un valor mayor en valor absoluto que 1, por lo que en este momento el punto de corte deja de ser un punto fijo.

En la siguiente sección, calcularemos formalmente los puntos fijos de la función logística y estudiaremos formalmente como se comporta la sucesión.

5 Estudio formal del mapa logístico

En los siguientes apartados vamos a desentrañar desde un punto de vista matemático como se comporta el mapa logístico. Ya hemos visto en los apartados anteriores, vía simulación, que el comportamiento es muy errático dependiendo del valor de r. Veamos por qué.

Para empezar veremos la función logística y la analizaremos como haríamos con cualquier otra función para ver su forma. Para ello, recurrimos a las técnicas habituales de analisis de funciones.

5.1 Dominio y ceros

- Por definición, el **Dominio** es: $0 \leq x \leq 1$
- En este dominio los **Ceros** de la función están en:
  - $f(0) = r \cdot 0 \cdot (1 - 0) = 0$
  - $f(1) = r \cdot 1 \cdot (1 - 1) = 0$

5.2 Derivada y monotonía

Para conocer los máximos y mínimos primero hemos de calcular la derivada,

- Derivada:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

- La derivada tiene una raíz en $x = 1/2$, independientemente del valor de r. Por lo tanto, el signo de $f'(x)$:
  - Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, entonces $f'(x) > 0$ **creciente**
  - Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $f'(x) = 0$
  - Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $f'(x) < 0$ **decreciente**

De acuerdo al estudio de la derivada, tenemos un punto crítico en $x = \frac{1}{2}$. Puesto que la derivada pasa a ser creciente a decreciente en este punto, tenemos un máximo. La función, pues, tiene un valor máximo:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{r}{4}$$

Observar que si $r > 4$ entonces el máximo de la función es mayor que 1. Esto no puede darse, ya que la función logística normaliza los recursos máximos disponibles a 1. Por lo tanto, para que no se excedan (cosa que no puede ocurrir físicamente), el valor de r siempre se establece por debajo de 4.

5.3 Concavidad

- Segunda derivada:

$$f''(x) = -2r$$

- Como $r > 0$, $f''(x) < 0$ en todo el dominio **cóncava hacia abajo**

5.4 Rango de la función

De acuerdo, al estudio anterior, la función es siempre positiva, con valores entre 0 y $\frac{r}{4}$

Si vamos a la sección con el diagrama de telaraña, veremos efectivamente esta forma de la función.

5.5 Resumen gráfico

- Parábola invertida con vértice en $\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{4}\right)$
- Crece de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$, luego decrece hasta $x = 1$

6 Término genérico del mapa logístico

En las sucesiones aritméticas y geométricas es fácil expresar el termino enésimo de la sucesión en función del primer término de la misma. Veamos:

Término general de la sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

donde: - a_1 es el primer término. - d es la diferencia común. - n es la posición del término.

Término general de la sucesión geométrica

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

donde: - a_1 es el primer término. - r es la razón común. - n es la posición del término.

¿Podemos hacer lo mismo con el mapa logístico?. Hagamos las primeras iteraciones.

$$x_1 = r\,x_0\,(1-x_0)$$

$$x_2 = r^2\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))$$

$$x_3 = r^3\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))\,(1-r^2\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0)))$$

$$x_4 = r^4\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))\,(1-r^2\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0)))\,(1-r^3\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))\,(1-r^2\,x_0$$

$$\begin{aligned} x_5 = r^5\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))\,(1-r^2\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))) \\ \times\ (1-r^3\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))\,(1-r^2\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0)))) \\ \times\ (1-r^4\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0))\,(1-r^2\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x_0\,(1-x_0)))\,(1-r^3\,x_0\,(1-x_0)\,(1-r\,x \end{aligned}$$

Como podemos ver, sí que podemos ir expresando los sucesivos términos en función de solamente x_0 y de r, pero a medida que iteramos, la expresión se vuelve muy complicada. A pesar de todo, hay que destacar que la función es **puramente determinista**. Es decir, se podría formular el valor de la iteración enésima en función de los valores de x_0 y de r.

7 Estabilidad del mapa logístico

7.1 Puntos fijos

Tal y como habíamos visto anteriormente, un **punto fijo** x^* satisface:

$$f(x^*) = x^*.$$

Para encontrar los puntos fijos de la función logística, resolvemos:

$$r\,x\,(1 - x) = x.$$

Llevando todos los términos a un lado:

$$r\,x\,(1 - x) - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x\big(r\,(1 - x) - 1\big) = 0.$$

De aquí se obtienen dos soluciones:

$$x_1 = 0$$

y x_2 tal que $r\,(1 - x_2) - 1 = 0$, es decir:

$$1 - x_2 = \frac{1}{r} \implies x_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

7.2 Evaluación de la derivada en los puntos fijos

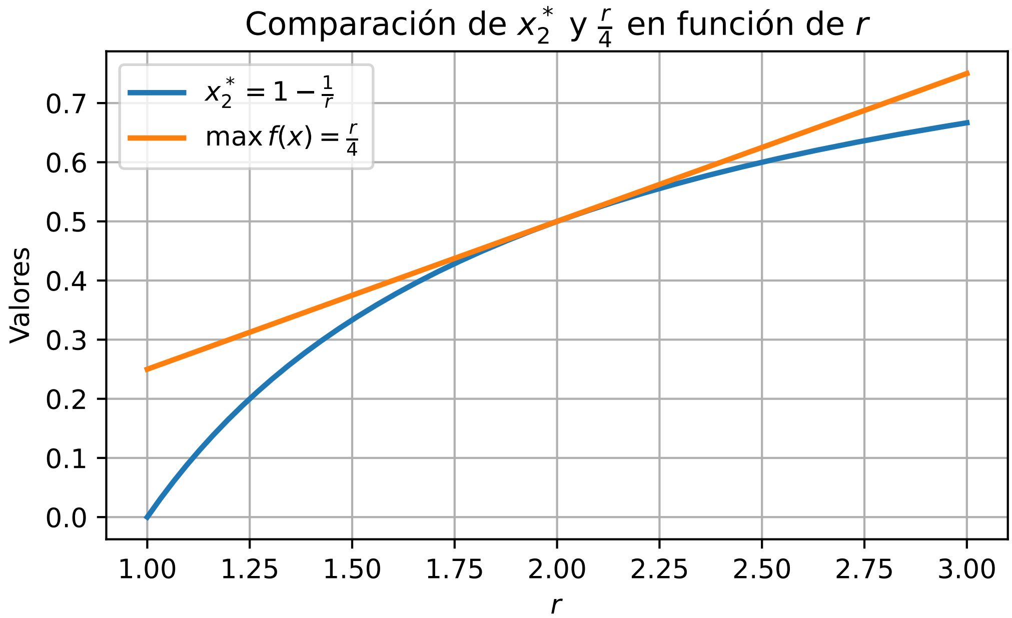
La derivada de la función logística es:

$$f'(x) = r(1 - 2x).$$

Y además, de la sección sobre los puntos fijos sabemos que un punto fijo es estable si $|f'(x^*)| < 1$.

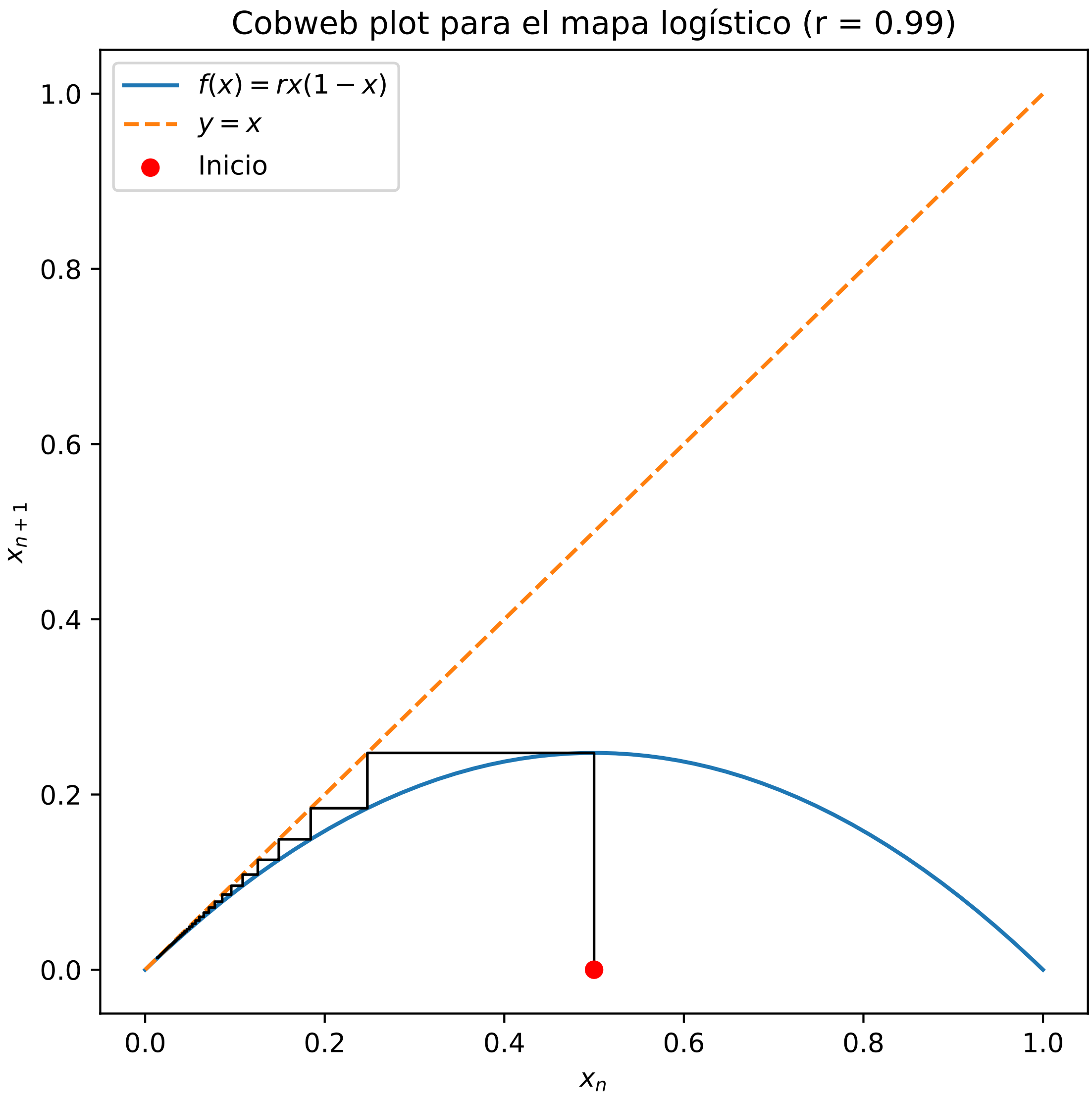
- **En $x_1^* = 0$:** $f'(0) = r$. Estable si $0 < r < 1$. Es decir, para valores de r comprendidos entre 0 y 1, el valor de $x = 0$ es un punto fijo. Lo que ocurre es bien sencillo. Como ya comentamos anteriormente, puesto que la población va decreciendo tras cada iteración, acaba convergiendo en $x = 0$. Gráficamente también es fácil verlo. Si vamos al diagrama de telaraña, y ponemos un $r < 1$, veremos que la función lógistica solamente toca a la recta $y = x$ en $x = 0$
- **En $x_2^* = 1 - 1/r$:** $f'(x_2^*) = 2 - r$. Estable si $|2 - r| < 1 \to 1 < r < 3$. Aquí vemos que el mapa logístico converge a un punto, que es el punto fijo. Es lo que habíamos visto ya en las soluciones. De nuevo, animo al lector a probarlo en el diagrama de telaraña interactivo. Con cualquier valor de x_0 que pongan para valores de r entre 1 y 3, siempre se convergerá a un punto que es $x_2^* = 1 - 1/r$.

Tal y como se muestra en la siguiente figura, a medida que el factor de crecimiento de la población crece, el número final de individuos aumenta de forma constante. Como vemos, el valor final de población, siempre está por debajo del valor máximo de la función logística. Solmente coincide el valor final con el máximo en r=2. ¿Qué quiere decir esto?. Que la población puede que en las primeras iteraciones alcance el valor máximo $r/4$, pero al final se estabilizar en un valor menor que es igual a $x_2^* = 1 - 1/r$.

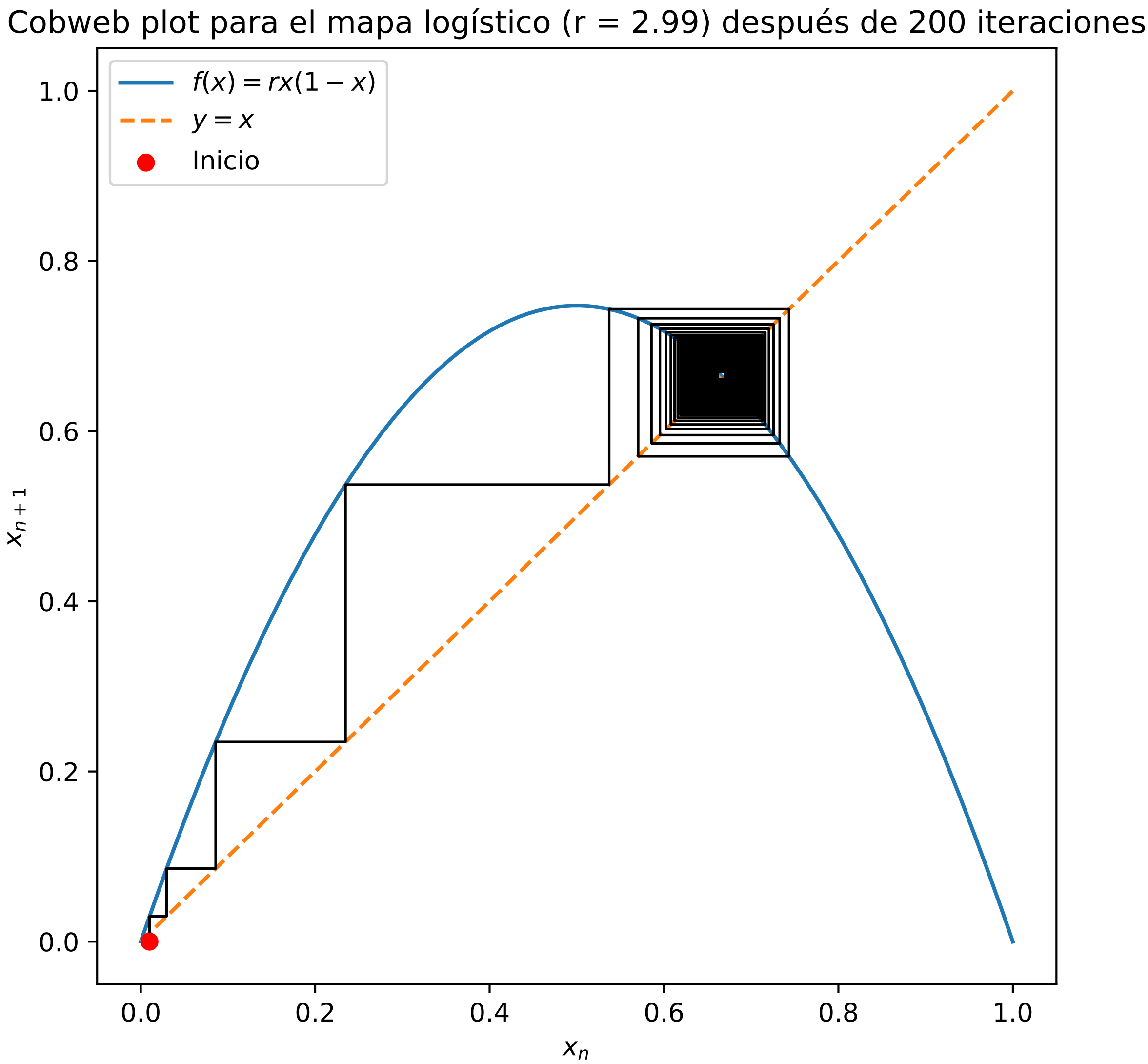


Añadamos unos gráficos para verlo mejor.

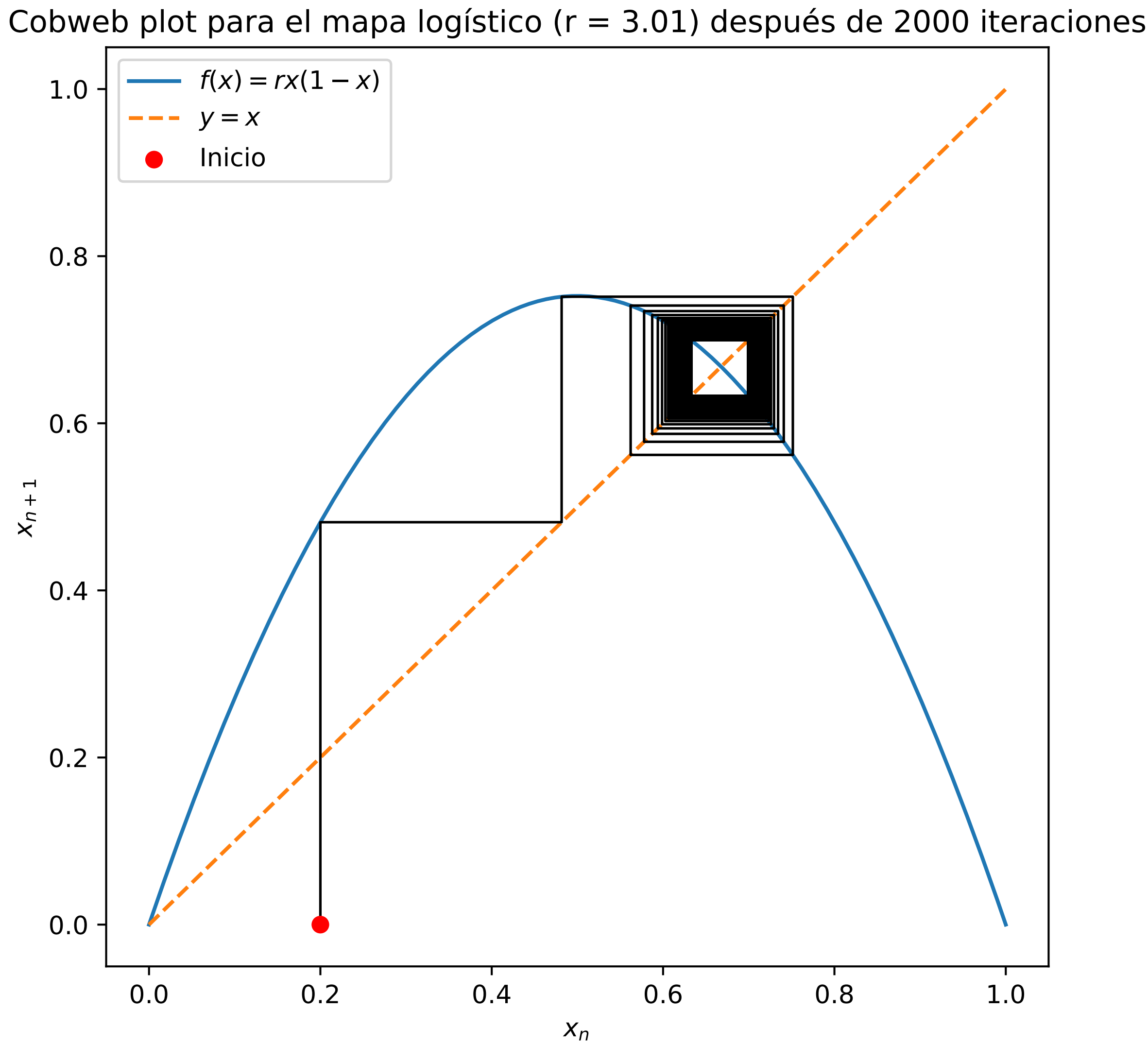
En este primero, vemos para un valor de $r = 0.99$ como la población va decreciendo iteración tras iteración hasta llegar al punto fijo $x = 0$



En este segundo vemos como efectivamente la sucesión converge al punto fijo (el cruce de la función con la recta $y = x$), a pesar de que el valor de r está cerca de 3. Pero puesto que sigue siendo menor de 3, el punto fijo actúa como atractor, y después de 200 iteraciones acaba convergiendo.



Pero, ¿qué pasa cuando subimos por encima de $r = 3$?. Pues que la derivada en el punto fijo ya no es menor en valor absoluto que 1, y por lo tanto el punto fijo ya no atrae las iteraciones. El punto fijo, sigue siendo punto fijo, es decir, si introducimos su valor, la función vuelve ahí; pero desde cualquier otro punto, ya no va a converger hacia ese valor. En este caso, vemos que para $r = 3.01$? la sucesión orbita entre dos puntos. Es decir, la población final alterna entre dos valores distintos de individuos. Biológicamente, sucede porque la tasa de crecimiento r es lo bastante alta para que, cuando la población se acerca a la capacidad máxima del entorno, en la siguiente generación haya un colapso por exceso de competencia (o agotamiento de recursos), y luego vuelva a recuperarse.



Aunque el mapa logístico es un modelo muy sencillo, en laboratorio y a veces en campo se han visto oscilaciones de "alto-bajo" de periodo 2 parecidas a las predichas para$r \approx 3$. Algunos ejemplos son:

- Moscas de la carne (Lucilia cuprina). En los famosos experimentos de Nicholson sobre poblaciones de mosca de la carne en frascos, al mantenerlas en condiciones constantes y con alta fecundidad, la densidad adulta pasaba de un pico alto un año a un valle bajo al siguiente, repitiéndose cada dos generaciones.
- Escarabajos del trigo (Tribolium confusum). Gurney y Nisbet cultivaron colonias de Tribolium en el laboratorio controlando sólo la tasa de natalidad por suministro de alimento. Se observó un ciclo bienal: una generación con números muy altos y la siguiente bastante más baja, en perfecta alternancia.
- Daphnia en estanques experimentales. Algunos estudios con pulgas de agua (Daphnia) en estanques cerrados, variando la concentración de alimento, han mostrado también ciclos aproximados de dos generaciones cuando la tasa de crecimiento es lo bastante alta.
- Peces capelán (Mallotus villosus). En poblaciones silvestres de capelán del Atlántico Norte, los registros de capturas han evidenciado picos de abundancia que tienden a repetirse cada dos años, lo cual coincide con su periodo de madurez y un efecto de "sobrepoblación–agotamiento de recursos".

En todos estos casos la dinámica de periodo 2 refleja una sobrecorrección: tras un año de “boom” la población agota alimento o espacios de puesta, con lo que la siguiente generación cae muy por debajo de la capacidad de carga, y después se recupera, iniciando de nuevo el ciclo

En el siguiente apartado, analizaremos formalmente lo que ocurre en la primera bifurcación del mapa logístico.

8 Primera bifurcación

Tal y como vimos en la sección anterior cuando $r > 3$ el valor final de la sucesión logística alterna entre dos valores finales. Vamos a hacer un análisis matématico para explicar por qué pasa ésto.

8.1 Primera bifurcación: duplicación de período en $r = 3$. Análisis matemático

En $r = 3$, la derivada en el punto fijo $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ se vuelve -1, lo cual genera una órbita de período 2, tal y como hemos visto en el apartado anterior.

Surgen dos nuevos puntos p y q que no son puntos fijos, sino puntos de período 2 tales que:

$$f(p) = q, \quad f(q) = p$$

Es decir, si al mapa logístico se le alimenta con un valor p, da como resultado un valor q, que al ser metido otra vez en el mapa logístico da el valor p inicial.

Esto significa que:

$$f(f(p)) = p$$

Lo cual implica que p es un punto fijo del mapa iterado f^2 (esta notación significa la composicion de una función con sigo misma $f^2() = f \circ f = f(f())$, no el cuadrado de la función)

Dado que $f(x) = rx(1 - x)$, podemos escribir:

$$f(p) = rp(1 - p)$$

Entonces:

$$f(f(p)) = r \cdot f(p) \cdot (1 - f(p)) = r \cdot [rp(1 - p)] \cdot [1 - rp(1 - p)]$$

Queremos encontrar los puntos de período 2, así que igualamos:

$$f(f(p)) = p$$

Hay que observar, que la resolución gráfica es sencilla. Simplemente hay que dibujar la función $f^2() = f \circ f = f(f())$ y la función $y = x$, y encontrar los cruces de ambas. Se cortarán en dos puntos, que serán los puntos entre los que alternará el mapa logístico.

Sigamos con la resolución analtíca. Para ello, desarrollamos completamente $f(f(p)) = p$:

$$r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) = p$$

Pasando todo al mismo lado:

$$r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) - p = 0$$

Factorizamos p:

$$p\left[r^2(1-p)(1-rp(1-p)) - 1\right] = 0$$

Una de las soluciones es $p = 0$ (punto fijo trivial), pero las otras soluciones corresponden a los puntos de período 2.

Expandimos el polinomio:

$$f(f(p)) = r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) = p$$

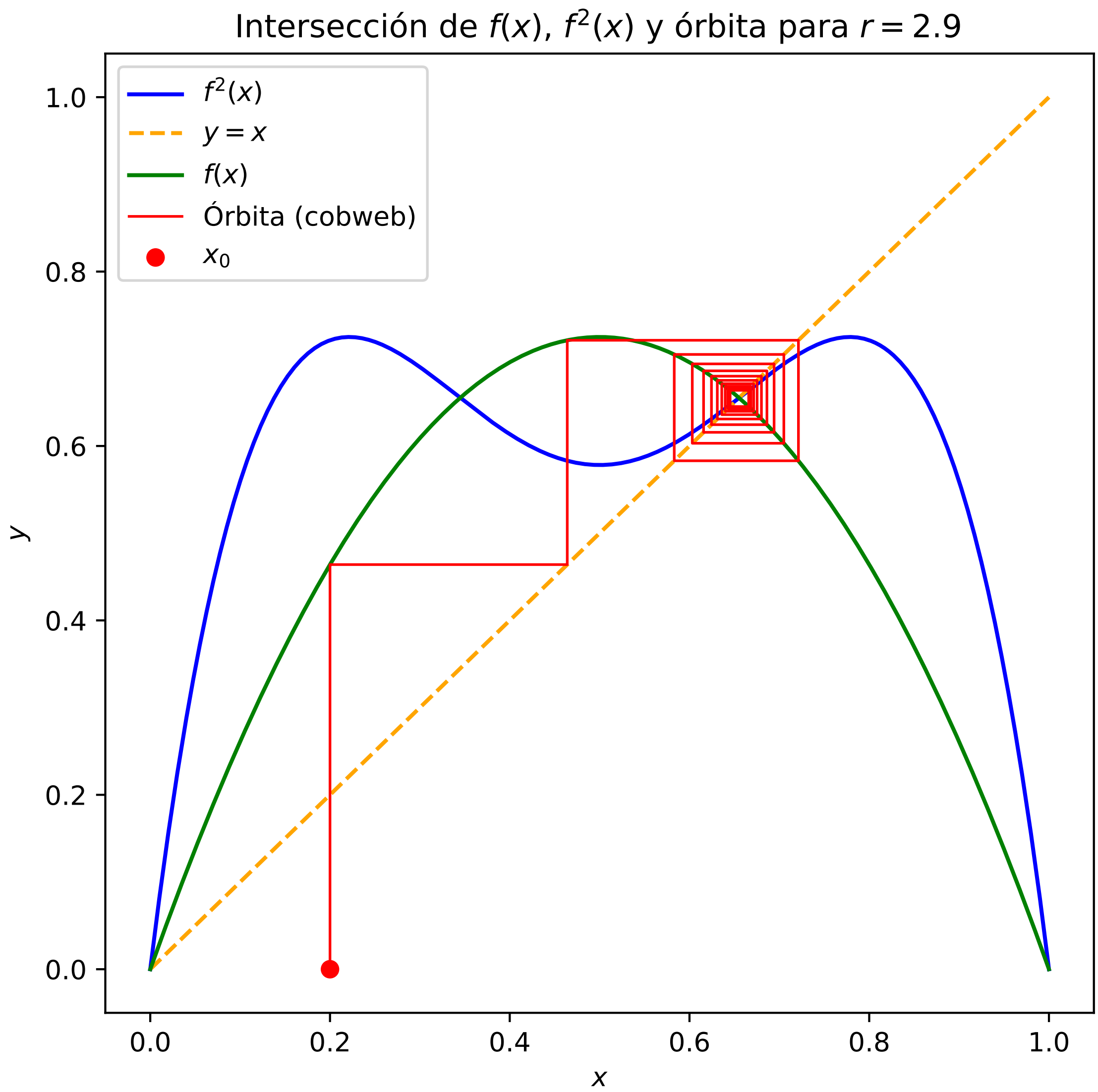
Expandimos paso a paso:

1. $f(p) = rp(1-p)$
2. $1 - f(p) = 1 - rp(1-p)$
3. $(1-p)(1-rp(1-p)) = 1 - p - rp(1-p) + rp^2(1-p)$
4. Multiplicamos todo por r^2p
5. Resulta en un polinomio de cuarto grado en p

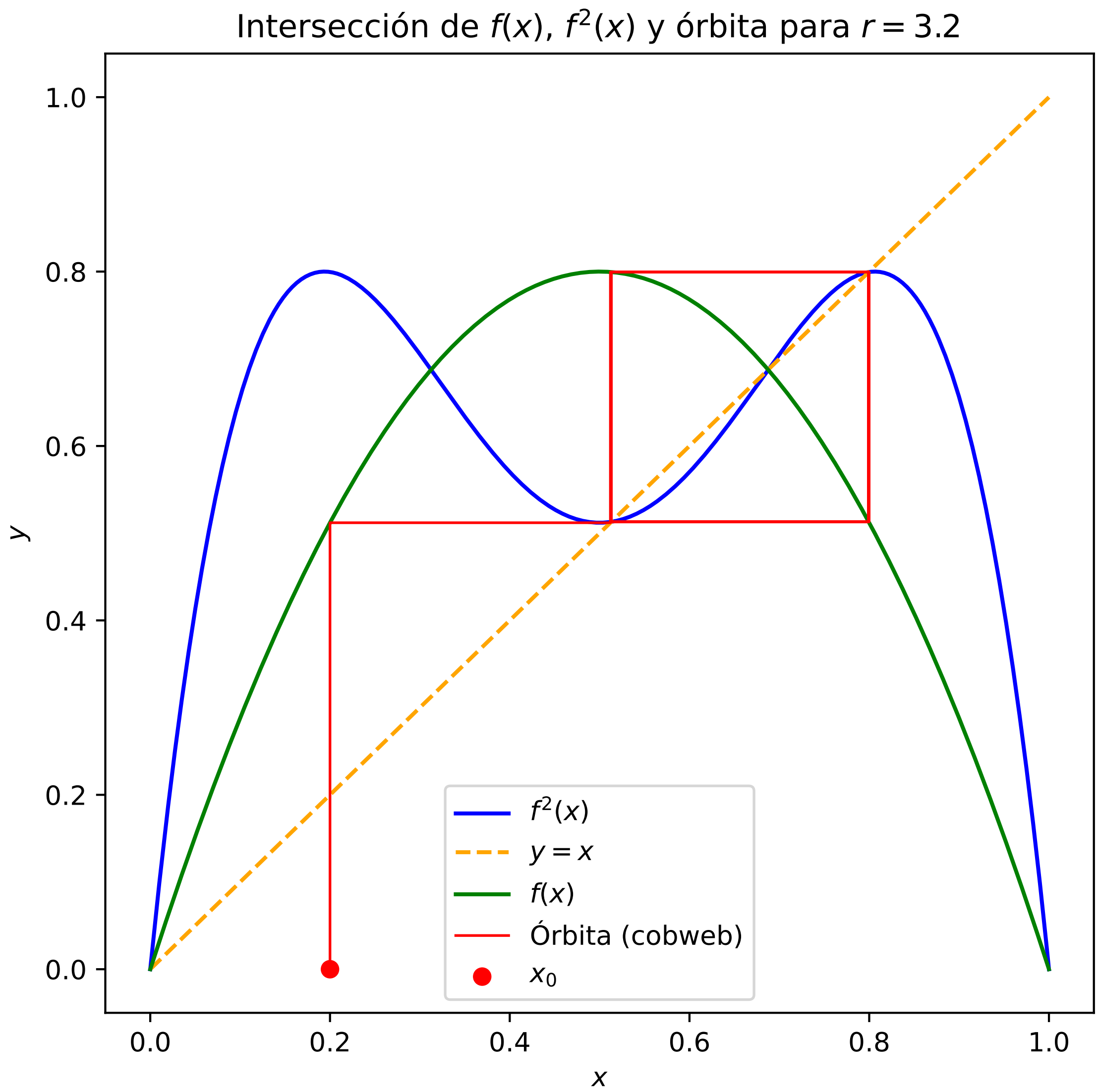
Este polinomio tiene hasta 4 raíces reales, de las cuales dos corresponden a los nuevos puntos de período 2. Las otras dos pueden ser los puntos fijos ya conocidos o raíces no relevantes dinámicamente.

8.2 Análisis gráfico

Vamos a proceder al análisis gráfico. Para empezar vamos a poner un mapa logístico con $r = 2.9$. Sabemos que para este valor la sucesión converge a un punto. Esto lo vemos porque la función logística corta con la recta $y = x$ en un punto cuya pendiente en valor absoluto es menor que 1, y porque además en ese punto corta también la segunda iterada $f \circ f$. La recta $y = x$ solo corta en un punto a la segunda iterada, por lo tanto no hay alternancia entre dos puntos.



Y ahora veamos lo que pasa cuando $r = 3.2$. En este caso, la segunda iteración corta con la recta $y = x$ en dos puntos. Tal y como vemos en el diagrama de telaraña son estos dos puntos entre los que oscila el valor final del mapa logístico.



8.3 Analisis de estabilidad de la primera bifurcación

En primer lugar, vamos a calcular de nuevo de forma analítica precisa los puntos en los que se produce la oscilación. La función logística es

$$f(x) = rx(1 - x),$$

y su iteración doble se define como

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)).$$

Queremos hallar los valores de x que satisfacen

$$f^{(2)}(x) = x.$$

8.3.1 Expresión explícita de $(f^{(2)}(x))$

Primero calculamos

$$f(x) = rx - rx^2.$$

Luego

$$f(f(x)) = r(f(x))(1 - f(x)) = r(rx - rx^2)(1 - (rx - rx^2))$$

Por tanto

$$f^{(2)}(x) = r\,(rx - rx^2)\,(1 - rx + rx^2) = r^2\,x\,(1-x)\,(1 - rx + rx^2)$$

En vez de expresar la segunda iteración como un polinomio de grado 4, lo dejamos en función de dos monomios y un binomio.

8.4 Primera bifurcación: obtención de los puntos fijos de periodo 1 y 2

8.4.1 Definición de la función y de su iterada doble

La **función logística** es

$$f(x) = r\,x\,(1-x)\,.$$

Su **segunda iterada** (composición consigo misma) se escribe

$$f^{(2)}(x) = f\bigl(f(x)\bigr)\,.$$

Queremos resolver

$$f^{(2)}(x) - x = 0,$$

que es un polinomio de grado 4 en (x).

8.4.2 Puntos de periodo 1 (puntos fijos de (f))

Localizamos los puntos de **periodo 1**, es decir, las raíces de

$$f(x) - x = r\,x\,(1-x) - x = 0.$$

Factorizando:

$$r\,x\,(1-x) - x = x\bigl[r\,(1-x) - 1\bigr] = 0.$$

De aquí salen dos soluciones:

$$x = 0, \qquad x = \frac{r-1}{r}.$$

8.4.3 Construcción del polinomio de grado 4

Para la segunda iterada:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= r(f(x))(1 - f(x)) = r(r\,x - r\,x^2)[1 - (r\,x - r\,x^2)] \\ &= r^2\,x\,(1-x)\,(1 - r\,x + r\,x^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{(2)}(x) - x = r^2\,x\,(1-x)\,(1 - r\,x + r\,x^2) - x.$$

8.4.4 División polinómica para aislar el factor de periodo 2

Primero, observemos que si

$$x^*$$

es un punto fijo de

$$f$$

, es decir,

$$f(x^*) - x^* = 0,$$

entonces

$$f^{(2)}(x^*) - x^* = f(f(x^*)) - x^* = f(x^*) - x^* = 0.$$

Por tanto, toda raíz de

$$f(x) - x$$

es también raíz de

$$f^{(2)}(x) - x$$

, lo que en términos de polinomios equivale a afirmar que

$$f^{(2)}(x) - x \quad \text{es divisible por} \quad f(x) - x.$$

División polinómica paso a paso

Queremos dividir

$$P(x) \;=\; f^{(2)}(x) - x \;=\; -\,r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2-1)x$$

entre

$$D(x) \;=\; f(x) - x \;=\; -\,r\,x^2 + (r-1)x.$$

8.4.4.0.1 Paso 1.

Dividimos el término de mayor grado de (P(x)) entre el de (D(x)):

$$\frac{-\,r^3x^4}{-\,r\,x^2} \;=\; r^2x^2.$$

Multiplicamos y restamos:

$$r^2x^2 \cdot D(x) = -\,r^3x^4 + r^2(r-1)x^3,$$

$$P(x) - (r^2x^2 \cdot D(x)) = (r^3 + r^2)x^3 \;-\; r^2(r+1)x^2 \;+\; (r^2-1)x.$$

8.4.4.0.2 Paso 2.

Dividimos el nuevo término principal entre el de (D(x)):

$$\frac{(r^3 + r^2)x^3}{-\,r\,x^2} \;=\; -\,(r^2 + r)x.$$

Multiplicamos y restamos:

$$-\,(r^2 + r)x \cdot D(x) = -\,(r^3 + r^2)x^3 + (r^3 - r)x^2,$$

$$\left[(r^3 + r^2)x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2-1)x\right] - \left[-(r^3 + r^2)x^3 + (r^3 - r)x^2\right] = -\,(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x.$$

8.4.4.0.3 Paso 3.

Dividimos nuevamente:

$$\frac{-\,(r^2 + r)x^2}{-\,r\,x^2} \;=\; r + 1.$$

Multiplicamos y restamos:

$$(r+1) \cdot D(x) = -\,(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x,$$

$$\left[-(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x\right] - \left[-(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x\right] = 0.$$

8.4.4.0.4 Resultado.

El cociente es

$$Q(x) \;=\; r^2x^2 \;-\; (r^2 + r)x \;+\; (r+1),$$

y el resto es cero.

El **cociente** resultante es

$$Q(x) \;=\; r^2x^2 \;-\; (r^2 + r)x \;+\; (r+1),$$

y el resto es cero, tal como queríamos demostrar.

8.4.4.1 Paso 1

- Cociente parcial:

$$\frac{-r^3x^4}{-r\,x^2} = r^2x^2.$$

- Multiplicamos y restamos → nuevo dividendo.

8.4.4.2 Paso 2

- Cociente parcial:

$$\frac{(r^3+r^2)x^3}{-r\,x^2} = -(r^2+r)x.$$

- Multiplicamos y restamos → nuevo dividendo.

8.4.4.3 Paso 3

- Cociente parcial:

$$\frac{-(r^2+r)x^2}{-r\,x^2} = r+1.$$

- Multiplicamos y restamos → **resto cero**.

Cociente final:

$$Q(x) = r^2x^2 - (r^2+r)x + (r+1).$$

8.4.5 Solución de las raíces de periodo 2

Resolvemos

$$r^2x^2 - (r^2+r)x + (r+1) = 0$$

con la fórmula cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{(r^2+r) \pm \sqrt{(r^2+r)^2 - 4r^2(r+1)}}{2r^2} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}.$$

Así:

$$x_1 = \frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}, \qquad x_2 = \frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}.$$

> **Nota:** En (r=3) el discriminante ((r+1)(r-3)) se anula y ambas raíces confluyen en (x=2/3), coincidiendo con el punto fijo que pierde estabilidad.

Obsérvese, que para $r = 3$, no hay dos soluciones, sino una, que coincide con el punto estable $(x = 2/3)$. Ahora que tenemos la fórmula de los puntos finales, vamos a ver si estos dos puntos finales son estables. Para ello haremos lo mismo que para el caso $1 < r < 3$. Es decir, cuando estábamos en la región estable $1 < r < 3$, el punto de estabilidad final lo daba el cruce que la función logística con la recta $y = x$, imponiendo la condición adicional de que el valor absoluto de la derivada en ese cruce sea menor que 1. Ahora, haremos lo mismo, pero imponiendo la condición adicional sobre la derivada de la segunda iteración de la función.

8.4.6 Derivada de f y criterio de estabilidad

Supongamos que (x_1, x_2) es un ciclo de periodo 2, es decir

$$f(x_1) = x_2, \qquad f(x_2) = x_1.$$

Queremos ver qué pasa si en lugar de empezar exactamente en x_1 tomamos un punto "ligeramente" desviado:

$$x_1 + \delta,$$

con δ muy pequeño.

Al aplicar f alrededor de x_1, usamos la aproximación lineal:

$$f(x_1 + \delta) \approx f(x_1) + f'(x_1)\,\delta = x_2 + f'(x_1)\,\delta.$$

Así, tras una iteración, nuestro error (desviación) se amplifica o reduce por el factor $f'(x_1)$.

Ahora iteramos de nuevo, partiendo de

$$x_2 + f'(x_1)\,\delta.$$

Otra vez linealizamos en torno a x_2:

$$f\big(x_2 + f'(x_1)\,\delta\big) \approx f(x_2) + f'(x_2)\,\big(f'(x_1)\,\delta\big) = x_1 + \big[f'(x_2)\,f'(x_1)\big]\,\delta.$$

Después de dos pasos (una vuelta completa al ciclo de período 2), la desviación original δ se convierte en

$$\delta_{\text{nuevo}} = f'(x_2)\,f'(x_1)\,\delta.$$

Por tanto, **el factor que controla la estabilidad** del ciclo de período 2 es precisamente

$$\Lambda = f'(x_1)\,f'(x_2).$$

- Si $|\Lambda| < 1$, la desviación δ tiende a cero y el ciclo es **estable**.
- Si $|\Lambda| > 1$, la desviación crece y el ciclo es **inestable**.