

Estudio del Caos en sistemas físicos y su relación con la predicción meteorológica

Memoria

Rubén Torre Merino

 <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/>

 <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/tree/master/quarto/caos-memoria/memoria.pdf>
 <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/quarto/caos-memoria/memoria.tex>



Escanea para acceder al pdf de la memoria

20 de octubre de 2025

Índice

I Introducción	4
1 Resumen del Proyecto de Investigación	5
2 Objetivos	7
3 Resultados	9
II El Caos a través del Mapa Logístico	11
4 Caos en la aplicación logística	12
5 Efecto mariposa	13
6 El exponente de Lyapunov y el caos	23
III El Caos en vivo: El péndulo doble	27
7 El Péndulo Doble	28
8 Sensibilidad a las condiciones iniciales	29
9 Mapa de Fases	31
10 Bifurcaciones	35
11 Qué podemos predecir	38
12 Experimentos	40
IV La Meteorología y el Caos	44
13 Caos en las predicciones meteorológicas	45
14 Entrevista con expertos de la AEMET	53
V El Clima y el Caos	55
15 Clima	56
16 Atractores	58
17 Cambios Climáticos Rápidos	64
18 Evaluación de las predicciones climáticas	66

19 Conclusiones sobre la predictibilidad del clima	71
VI Mi sistema caótico	73
20 Introducción	74
21 Simulación y funcionamiento caótico	76
VII Determinismo y Caos	80
22 De Laplace a Prigogine	81
23 El papel del caos	82
24 El clima desde la óptica de Prigogine	84
25 Mi hipótesis final. El Principio de Compromiso Predictibilidad – Creatividad	86
26 El Principio de Compromiso Predictibilidad – Creatividad en la práctica.	87
27 ChatGPT y el <i>Principio de Compromiso Predictibilidad–Creatividad</i>	91
Bibliografía	97

Parte I

Introducción

1 Resumen del Proyecto de

Investigación

Desde tiempos inmemoriales el ser humano ha ansiado conocer el futuro. En la antigüedad, las culturas anteriores al desarrollo de la ciencia recurrían a la magia, oráculos y al esoterismo para tratar de predecir el futuro. Con la llegada del método científico, la Humanidad pudo conocer las leyes físicas que rigen el Universo para así poder predecir mediante modelos matemáticos el comportamiento de muchos fenómenos naturales.

Durante siglos, esta idea de que si conocemos las leyes y las condiciones iniciales podemos anticipar el futuro fue dominante en la ciencia. Sin embargo, a mediados del siglo XX surgió un descubrimiento sorprendente: incluso en sistemas gobernados por leyes deterministas, pequeñas variaciones en los datos iniciales podían producir resultados totalmente distintos.

Este fenómeno recibió el nombre de caos, y cambió para siempre nuestra concepción de la predicción. Podíamos conocer las leyes que rigen el Universo, pero la capacidad de conocer el futuro era limitada.

Para poder comprender el alcance del caos sobre la capacidad de predicción recurrió en primer lugar a analizar el fenómeno en el ordenador. Y es que es el ordenador el medio por el cual realizamos cálculos complejos basados en modelos matemáticos de la realidad que nos rodea. Como campo de experimentación escogí el mapa logístico, por ser una sucesión sencilla que presenta un comportamiento caótico muy complejo. Realicé varios experimentos, entre ellos uno muy impactante, que fue codificar el mapa logístico de dos maneras diferentes, como $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ y como $x_{n+1} = rx_n - rx_n^2$. Al cabo de pocas iteraciones comprobé cómo los resultados de ambas fórmulas divergían enormemente debido a la precisión finita de almacenaje de los números en el ordenador.

Ante estos resultados tan desconcertantes, me pregunté si el caos también se da de forma tan fácil en sistemas físicos. Entonces recurrió al análisis del péndulo doble, que es uno de los sistemas caóticos por autonomía. Para ello, pedí a ChatGPT que me desarrollase las ecuaciones matemáticas que rigen el movimiento del péndulo y que me las simulase bajo multitud de estados iniciales diferentes, ligeramente separados unos de otros. Los desarrollos fueron codificados en Python y simulados en mi ordenador. Algunas de las simulaciones implicaban el lanzamiento en paralelo de miles de péndulos y eran muy lentas ejecutadas en la CPU del ordenador, por lo que tuve que recurrir mediante ChatGPT a parallelizar los programas usando las librerías de Python para la tarjeta gráfica Nvidia de mi ordenador. Los resultados fueron de nuevo sorprendentes, pues empezaron a aparecer estructuras fractales dentro de las condiciones iniciales cuando simulaba miles de péndulos a la par. No importaba cómo de pequeña era la diferencia de condiciones iniciales entre dos péndulos, que al final, con el transcurso del tiempo, los péndulos dobles siempre divergían.

Una vez terminada la parte de análisis matemático y de simulación de los sistemas caóticos, me lancé a comprobar si este comportamiento caótico se daba en la realidad. Compré un péndulo doble, que tenía la propiedad de poder bloquear el segundo eje para así transformarse en un péndulo simple. Aquí el reto estaba en poder medir con precisión la posición de los dos brazos del péndulo mientras se movía a alta velocidad. Tras ser aconsejado por ChatGPT, recurrió a una librería de visión por ordenador llamada OpenCV para, en tiempo real, medir la posición de los brazos del péndulo doble y guardar los datos en un fichero. Gracias a este programa, pude ver que lanzando el péndulo doble en diferentes posiciones iniciales, las trayectorias divergían enormemente tras unos breves instantes. Me pregunté si habría algún problema con la forma en la que estaba configurado el experimento, así que recurrió a hacer lo mismo con la configuración de péndulo simple. En este caso, pude constatar, cómo una tras otra, las trayectorias eran idénticas en todos los lanzamientos.

Un aspecto importante que pude apreciar en el péndulo doble es que si bien su posición en un momento dado era imposible de predecir, había variables que sí se podían predecir con bastante exactitud, como por ejemplo la distancia recorrida por el extremo del péndulo. En todos los lanzamientos resultaba muy similar. Es decir, en los sistemas caóticos hay ciertos patrones y estadísticas que sí pueden ser estimadas de antemano.

Llegado a este punto y convencido del comportamiento caótico de sistemas aparentemente sencillos, quise ver cómo se manifestaba el caos en sistemas más complejos, como es la atmósfera terrestre y la meteorología, y también quise ver como lidiaba la ciencia moderna con este asunto. Si bien pude encontrar modelos de código abierto con los que simular la atmósfera, no disponía la capacidad de cómputo para ejecutarlos. Por ello, y tras investigar el tema, llegué a la conclusión de que el mayor error que se da en las predicciones es el debido a la imprecisión de la estimación de las condiciones iniciales, no a las ecuaciones que rigen los modelos. Entonces, pensé que observando cómo diverge la observación real del tiempo de la predicción realizada unos días antes por los modelos de las agencias meteorológicas, podría cuantificar el crecimiento exponencial del caos debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Creé un programa, que día tras día, se conectaba a una web meteorológica y que me daba las predicciones para los siguientes 14 días. Almacené esos datos durante tres meses, y después los analicé. Pude así ver con datos reales el crecimiento exponencial de los errores, y hacer un análisis de regresión para calcular el exponente de Lyapunov de las variables meteorológicas principales: temperatura, presión, humedad y velocidad del viento. Corroboré este procedimiento y pude despejar algunas dudas con técnicos de predicción de la AEMET, quienes tuvieron la amabilidad de charlar conmigo durante una mañana sobre el impacto del caos en meteorología. A la vista de mis resultados y de los datos que me aportaron los técnicos de la AEMET, pude determinar cómo el horizonte de predictibilidad de las variables meteorológicas no va nunca más allá de los 14 días. Y es una barrera muy difícil de superar, pues mientras que nuestras mejoras en la toma de datos y el modelado avanzan linealmente, el error caótico evoluciona exponencialmente con el tiempo.

Siguiendo con esta dinámica, quise ampliar el análisis de la predicción de la atmósfera, estudiando esta vez el comportamiento de los modelos a largo plazo, es decir, estudiar la precisión con la que los modelos climáticos habían sido capaces de predecir hasta ahora el clima. Realicé una investigación de las principales predicciones realizadas hace 20, 30 años y vi su grado de cumplimiento en la actualidad. Si bien la principal variable, la temperatura media de la Tierra, había sido predicha con precisión, a nivel regional había algunas discrepancias entre las observaciones y las predicciones. A mi juicio, se repetía la premisa que aprecié en el péndulo doble: en los sistemas caóticos se pueden estimar algunas variables, patrones y estructuras, pero resulta muy difícil poder predecir el detalle del comportamiento en el futuro. Y este último punto resulta muy importante, puesto que un enfoque prudente refuerza la necesidad de proteger los ecosistemas y reducir las emisiones de gases de efecto invernadero, dado que el resultado detallado de nuestras acciones es incierto. No deberíamos especular con el impacto de nuestras acciones en un sistema que no somos capaces de predecir correctamente.

Tras analizar sistemas caóticos en el ordenador, la naturaleza y en los modelos climáticos, quise dar un paso más y preguntarme si sería capaz de crear yo mismo un sistema caótico artificial. No se trataba ya de estudiar únicamente ejemplos existentes, sino de experimentar con la posibilidad de generar caos en un entorno controlado. Opté por utilizar el simulador físico Algodox, donde diseñé una rueda movida por la caída de agua y convertida en caótica por la acción de canicas sueltas en su interior. Pude ver cómo el atractor surgido de este sistema era muy similar al de Lorenz, con dos estados (velocidad angular positiva y negativa), de los que se sale de forma totalmente impredecible.

Llegado este punto, entré en el terreno de la filosofía y me pregunté si el caos era un fenómeno indeseable que frustraba nuestro anhelo de predecir el futuro. En mi investigación, me encontré con el trabajo del premio Nobel Ilya Prigogine, quien demostró que es precisamente el caos, el fenómeno esencial de la naturaleza para la creación de estructuras complejas como la vida. En un Universo sin caos, el demonio de Laplace puede actuar a sus anchas, pues la información inicial no se pierde por el caos, y así el demonio puede conocer con todo detalle el estado pasado, presente y futuro de cualquier sistema. El precio a pagar por ello es la ausencia de novedad. Esto me hizo conjeturar el siguiente principio heurístico:

“No es posible maximizar simultáneamente la predictibilidad detallada y la creación de novedad en sistemas dinámicos complejos: cuanto más creativa (abierta a nuevas estructuras) es la evolución, menos plenamente predecible es su trayectoria fina, y viceversa”

Por lo tanto, la tan ansiada omnisciencia en un universo creativo como el nuestro es un oxímoron. Podemos determinar patrones, pero no ver los detalles finos, es decir, podemos anticipar patrones (atractores, rangos de comportamiento, escenarios probables) mejor que trayectorias exactas a largo plazo. Un universo capaz de crear nuevas formas no puede ser, al mismo tiempo, totalmente transparente a nuestra predicción. La novedad tiene un precio: nos hace renunciar a una parte de la certeza.

En definitiva, podemos plantear que “la novedad estructural es impredecible en detalle en un sistema caótico”. Y quizás ahí resida el misterio más fascinante del universo: que la misma dinámica que limita nuestra capacidad de predecir el futuro es la que permite la emergencia de la vida, de la complejidad y de la novedad. El caos no es un obstáculo al conocimiento, sino el terreno fértil donde nace lo nuevo.

2 Objetivos

Los objetivos que me he marcado a la hora de hacer este proyecto se dividen en dos categorías. Por una parte la **investigación científica** de la relación entre el caos y la meteorología/clima, y por otra parte la **adquisición de habilidades digitales** que permitan hacer un proyecto más profesional tanto en su contenido como en la forma

2.1. Objetivos científicos

Los objetivos científicos son los siguientes:

- Entender qué es el caos y “jugar” con sistemas caóticos para ver como se comportan. Para ello usaremos dos “juguetes”:
 - El **mapa logístico**, como juguete matemático. El mapa logístico me permitirá entender lo que es el horizonte de predictibilidad a través del computo del exponente de Lyapunov, y estudiar en el ordenador el efecto mariposa
 - El **péndulo doble**, como juguete físico. Mediante la simulación y observación real de un péndulo doble, comprenderé mejor en qué se traduce la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema caótico
- Relacionar los conceptos aprendidos a través del mapa logístico y del péndulo doble con la meteorología y el clima
- Evaluar de forma **cuantitativa** el caos en las predicciones **meteorológicas** a través del horizonte de predictibilidad
- Evaluar de forma **cualitativa** la influencia del caos en las predicciones **climáticas** realizas por los científicos en las décadas anteriores
- **Entrevistar a expertos** en meteorología y clima para conocer la influencia del caos en ambos campos
- Como sugerencia de mi directora de proyecto, **crear un sistema caótico novedoso**.
- En definitiva, mostrar de forma fehaciente que el grado de predictibilidad de muchos sistemas reales es limitado.

2.2. Adquisición de habilidades digitales

La adquisición de habilidades digitales es fundamental en los tiempos actuales. Con la llegada de sistemas como Inteligencia Artificial, las barreras de entrada para usar programas y herramientas software se ven reducidas enormemente. Durante el desarrollo del proyecto he tenido acceso al modelo GPTo4-mini-high y al GPT5-Thinking, que he usado de forma masiva para las siguientes tareas:

- Creación de un libro **Quarto** para documentar el proyecto en formato **Markdown**. Este es el formato más común en la actualidad en publicaciones digitales, siendo usado por ejemplo, en los chats de ChatGPT.
- Exportación del libro Quarto a formato **LATEX**, para creación de la memoria del proyecto en formato pdf. LATEXes el estándar en la creación de artículos científico técnicos de gran calidad estética.

- Creación de un repositorio en **GitHub** con todos los archivos que he creado en el proyecto, y uso de **GitHub pages** para hacer una publicación digital a modo de página Web del proyecto. De esta manera, he podido publicar vídeos de mis experimentos y simulaciones, y también he dejado algunas herramientas interactivas con las que el lector interesado podrá jugar. De esta manera se contribuye a la mejor **divulgación** del proyecto y sus resultados.
- Programación en **Python** de scripts para hacer simulaciones de sistemas caóticos. Es lo que en la actualidad se denomina “**vibe coding**”: hacer uso del lenguaje natural en modelos de chatGPT para programar. En el proyecto he usado de forma recurrente el modelo **o4-mini-high** de OpenAI (ChatGPT), con muy buenos resultados. Planteaba al modelo el programa que quería hacer, e iteraba los errores y problemas de funcionamiento con el propio modelo
- Ayudarme sobre todo en la parte matemática a formular teorías e hipótesis, tal y como he hecho en los capítulos [Mi hipótesis final. El Principio de Compromiso Predictibilidad – Creatividad y ??](#)

Por último, he aprendido a usar Algodoo, un simulador de sistemas físicos sencillos, para analizar el comportamiento de mi sistema caótico propuesto

3 Resultados

En cuanto a lo aportado por mi trabajo, he de decir que no pretendo descubrir el caos, sino **mostrar de forma operativa y reproducible que la predictibilidad del mundo es limitada y cuantificable**. Lo demuestro con: (i) simulaciones del mapa logístico que muestran la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, y donde expresiones algebraicamente equivalentes divergen por aritmética finita, (ii) un experimento físico que contrasta péndulo doble (caótico) con simple (predecible), y (iii) el diseño de un sistema caótico propio. Con ello paso de la idea abstracta a evidencias medibles y a conjeturar un principio heurístico: más novedad estructural = menos predictibilidad detallada.

A continuación desglosaré las principales aportaciones propias realizadas a lo largo de este proyecto, en términos de resultados científicos, investigaciones llevadas a cabo y código generado.

3.1. Principales resultados

- En el capítulo [Efecto mariposa](#) se muestra la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales de un sistema caótico como el mapa logístico (**efecto mariposa**). No solo eso, sino que se demuestra también la sensibilidad a la precisión finita con la que se hacen los cálculos en un ordenador (**efecto polilla**). Además se realiza el análisis de regresión de los errores, y se calcula mediante la multiplicación de las derivadas el exponente de Lyapunov. De esta forma, se cuantifica y demuestra la existencia de funciones matemáticas sujetas al caos y no predecibles computacionalmente.
- En el capítulo [Mapa de Fases](#) se demuestra vía simulación que el péndulo doble es caótico. No se es capaz de encontrar una diferencia de condiciones iniciales lo suficientemente pequeña para que la trayectoria de dos péndulos dobles sea idéntica, ni siquiera razonablemente similar.
- En [Experimentos](#) muestro experimentalmente como bajo la misma configuración de trabajo, un péndulo doble se comporta caóticamente mientras que un péndulo simple no.
- En [Caos en las predicciones meteorológicas](#) se recopilan las predicciones meteorológicas para Galápagos durante tres meses. Dichas predicciones son comparadas con las observaciones reales para calcular los errores de predicción de diversas variables meteorológicas. Asumiendo que el error se debe fundamentalmente a la inexactitud de las condiciones iniciales, se cuantifica el crecimiento exponencial de los errores debido a la dinámica caótica de la atmósfera.
- En [Evaluación de las predicciones climáticas](#), las predicciones climáticas realizadas hace 20-30 años son comparadas con la realidad actual. Se encuentran casos de proyecciones extremas no materializadas (especialmente las predicciones regionales o sobre eventos extremos como huracanes, inundaciones y sequías), y otras que sí se han cumplido (como el aumento de la temperatura). Se demuestra así que estamos lejos de tener una predicción climática totalmente exacta, debido fundamentalmente a la naturaleza caótica del clima.
- En [Simulación y funcionamiento caótico](#) se analiza el comportamiento caótico de un sistema inventando por mí. El atractor resultante es muy parecido al de Lorenz.
- Por último, en [Mi hipótesis final. El Principio de Compromiso Predictibilidad – Creatividad](#) se conjeta el principio de que el caos borra la información inicial de los sistemas, pero a cambio proporciona novedad no predecible. Este principio es observado en los distintos experimentos realizados en el proyecto, tal y como se aprecia en el capítulo [El Principio de Compromiso Predictibilidad – Creatividad en la práctica](#). Al mismo tiempo, se cuantifica la pérdida de información de los sistemas caóticos en la sección [Cuantificando la pérdida de información del estado inicial](#)

3.2. Código generado

Este es el listado de los principales programas realizados con la ayuda del modelo o4-mini-high de OpenAi.

- Diagrama interactivo de telaraña de la función logística.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/quarto/caos-libro/01-logistica/cobweb.qmd>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/cobweb.html>
- Análisis gráfico de las bifurcaciones.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/quarto/caos-libro/01-logistica/bifurcaciones.qmd>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/bifurcaciones.html>
- Diagrama interactivo de bifurcaciones.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/quarto/caos-libro/01-logistica/simulacion.qmd>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/simulacion.html>
- Gráficas que muestran la estructura fractal de las bifurcaciones.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/quarto/caos-libro/01-logistica/Caos.qmd>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/Caos.html>
- Sensibilidad a las condiciones iniciales y a la precisión finita.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/quarto/caos-libro/01-logistica/lyapunov.qmd>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/lyapunov.html>
- Abanico de péndulos dobles.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/pendulumFan.py>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/Pendulumabanico.mp4>
- Simulación de múltiples péndulos dobles en una rejilla.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/pendulumBoxes.py>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/PendulumCajas.mp4>
- Mapa de fases de múltiples péndulos dobles.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/pendulum720Animation.py>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/MapaFase.mp4>
- Mapa de bifurcaciones y exponente de Lyapunov del péndulo doble.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/PendulumLyapunov.py>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/doble.html>
- Distancia recorrida por el péndulo doble.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/pendulumDistance.py>
Resultado: <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/estadisticas.html>
- Programa para seguir en tiempo real el péndulo doble y simple.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/python/Tracker/TrackerRuben.py>
- Programa para recoger la predicción meteorológica para Galapagar durante 14 días y almacenar los datos sucesivos.
Código: <https://github.com/ColaCaos/ColaCAOS/blob/master/meteoblue/DailyScript.py>
- Mi sistema caótico.
Código de Algodoo listo para simular: https://colacaos.github.io/ColaCAOS/05-experimentos/NuevaRuedaCaoticaSimetricaAnilloConSinCanicasAceroFuenteMejoradaMasAgua_Transfer_Estadio_Inicial_0.phz

Parte II

El Caos a través del Mapa Logístico

4 Caos en la aplicación logística

En la versión github de este proyecto disponible en <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/> se encuentra un estudio teórico pormenorizado del mapa logístico. La aplicación logística es una ecuación/sucesión muy sencilla que presenta un comportamiento caótico para ciertos valores de su parámetro de control. Comprender el funcionamiento del mapa logístico es esencial para poder empezar a entender el caos. Recomiendo al lector hacer echar un vistazo a la siguiente serie de videos sobre la aplicación logística [Logistic Map, Part 1: Period Doubling Route to Chaos^{\[31\]}](#) y también [Chaos: The Science of the Butterfly Effect^{\[1\]}](#). En github están explicados los detalles matemáticos más relevantes, que el lector ajeno a la materia puede encontrar muy útiles:

- El mapa logístico. Aquí verás la ecuación del mapa logístico y qué representa. <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/mapa-logistico.html>
- Diagrama de Telaraña del mapa logístico. Con esta gráfica interactiva se puede apreciar los diferentes comportamientos del mapa logístico según el parámetro de control r <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/cobweb.html>
- En esta sección se define lo que es un punto fijo de una función y se demuestra que es estable si la derivada de la función en ese punto es menor en valor absoluto que 1. <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/puntos-fijos.html>
- Estudio formal del mapa logístico (máximos, mínimos, concavidad) <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/analisis.html>
- Término genérico del mapa logístico. Aquí hay una derivación formal del término quinto del mapa logístico. Se muestra que en teoría es posible, aunque farragoso, tener una expresión cerrada para el término enésimo. <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/generico.html>
- Utilizando los conocimientos anteriores, se demuestra que para $r < 3$ el mapa logístico es estable. <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/estable.html>
- Se demuestra matemáticamente que para $3 < r < 3.45$ el mapa logístico tiene dos puntos fijos que se alternan. Es lo que se llama la primera bifurcación <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/bifurcaciones.html>
- Y aquí el resto de bifurcaciones sucesivas hasta llegar al caos para $r \approx 3.56995$ <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/simulacion.html>
- A partir de $r_\infty \approx 3.56995$, el mapa logístico entra en un **régimen caótico**. Para $r < r_\infty$, aparecen sucesivas bifurcaciones de periodo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$. En $r = r_\infty$, esas bifurcaciones se acumulan y ya no hay ciclos periódicos finitos: el valor final se vuelve errático. Sin embargo a medida que vamos observando el mapa aparecen comportamientos extraños. Se observa la aparición de fractales dentro del diagrama de bifurcación del mapa logístico, algo muy común en sistemas caóticos y que veremos aparecer en las simulaciones del péndulo doble <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/Caos.html>.

En la siguiente sección, y una vez familiarizados con la función logística a través de los enlaces anteriores, veremos que implica el caos en los cálculos de la función logística. Bienvenidos al efecto mariposa.

5 Efecto mariposa

5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Cuando estamos en la zona estable del mapa logístico, desde cualquier valor de x_0 del que partamos, llegaremos siempre hasta el mismo valor final, bien sea el punto fijo que hemos calculado previamente, o cualquiera de los valores de las órbitas periódicas. Por ejemplo, para $r = 2.8$

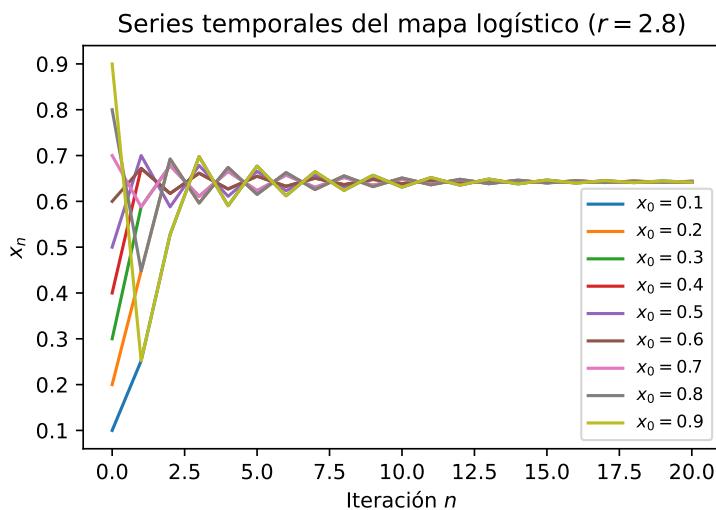


Figura 5.1: Valor final del mapa logístico en zona no caótica

Y para $r = 3.1$, vemos como también los puntos alcanzados son los mismos para valores próximos de inicio de la sucesión.

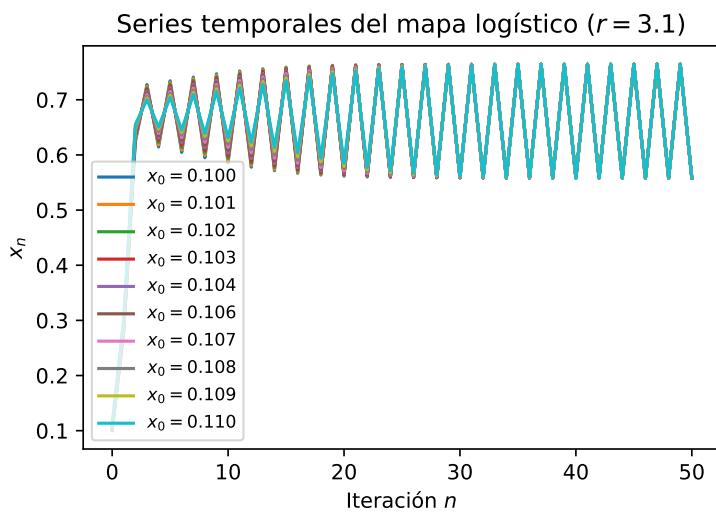


Figura 5.2: Valor final del mapa logístico en zona de primera bifurcación

En los dos casos anteriores, no parece que la evolución del sistema sea sensible a la condición inicial de partida. Tras unas pocas iteraciones, da igual de donde se parta, que se converge al mismo punto.

Pero, ¿qué pasa cuando estamos en las zonas caóticas?. Veamos la iteración del mapa logístico para $r = 3.69$ partiendo de dos valores muy similares, que solo se separan en 10^{-5} unidades.

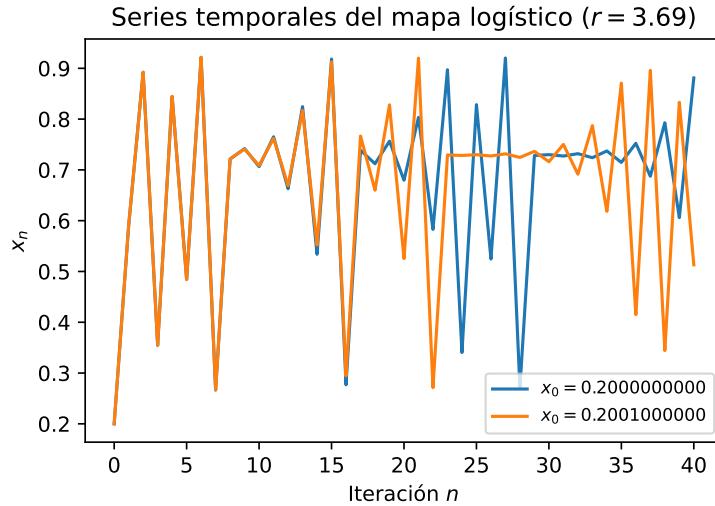


Figura 5.3: Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas

A la vista del gráfico, vemos como a partir de la iteración 10 empiezan a haber pequeñas diferencias que se van amplificando a medida que avanza la simulación. Aquí vemos que sí que empieza a haber sensibilidad a las condiciones iniciales.

Probemos con una diferencia de valores iniciales aún mas pequeña, en este caso 10^{-7} unidades.

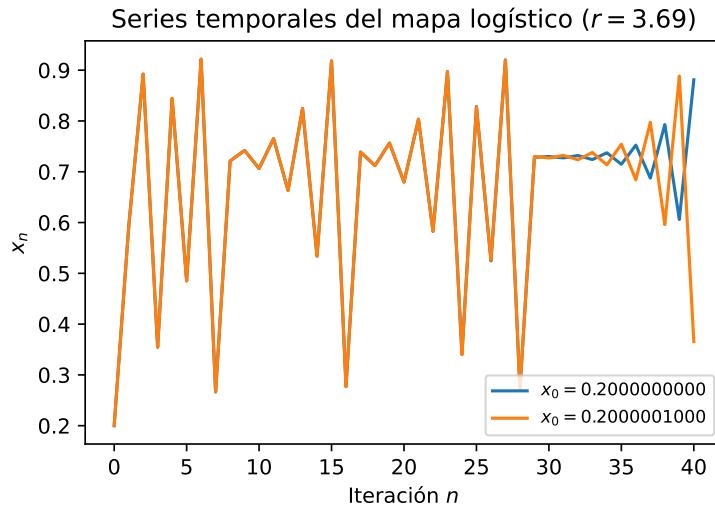


Figura 5.4: Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas

Ahora la separación de ambas simulaciones se produce a partir de la iteración número 30. Vamos con una diferencia aún mas pequeña, ahora 10^{-10} unidades.

La separación entre ambas curvas empieza a hacerse visible a partir de la iteración 50. ¿Qué pasa si hacemos la diferencia aún más pequeña, en este caso 10^{-15} unidades?. Pues como vemos en la siguiente gráfica, a partir de la iteración 85 empezamos a ver la divergencia de ambas sucesiones.

¿Qué está pasando aquí?. ¿Cómo puede ser que dos valores iniciales que se diferencian en un valor tan pequeño como 10^{-15} unidades den valores tan diferentes tras 100 iteraciones?. Si las unidades fueran metros, estaríamos hablando de una diferencia de un femtómetro. Y aún más importante: si quiero simular un sistema físico como éste en la región caótica, ¿cómo voy a poder medir su condición inicial con tal precisión?. De hecho, parece que la precisión requerida sería infinita. A poco que me equivoque en la estimación de la condición inicial, no voy a

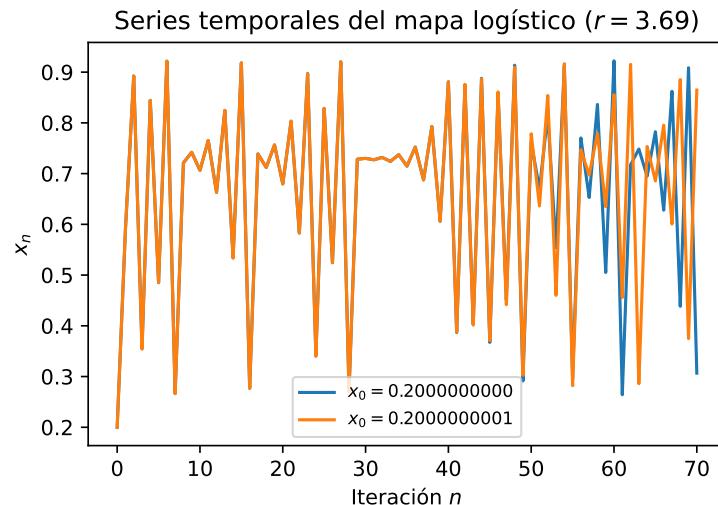


Figura 5.5: Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas

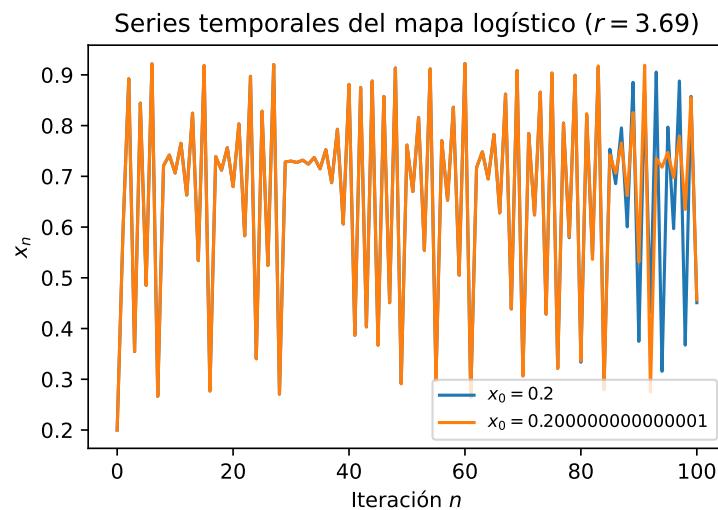


Figura 5.6: Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas

poder calcular bien su estado final pasado un número grande de iteraciones. ¿Cómo puede ser si mi sistema es determinista y está regido por una ecuación tan sencilla?. Hemos topado con el caos y el **efecto mariposa**. Y lo inquietante es que este fenómeno se da en sistemas físicos como la meteorología.

5.1.1. Inestabilidad de los cálculos numéricos

Cuando nos encontramos con un sistema físico con alta dependencia a las condiciones iniciales, no solamente tenemos el problema de conocer con total exactitud el estado inicial del sistema, sino que como veremos a continuación, los cálculos numéricos que hacemos en nuestro ordenador para estudiar su evolución se vuelven también muy inestables. A continuación pondré un ejemplo sobre lo que acabo de decir.

Pongamos que quiero simular el mapa logístico tal cual lo he estado haciendo en las secciones anteriores. La fórmula es superconocida (form1):

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (5.1.1)$$

Pero también podríamos expresarlo como (form2):

$$x_{n+1} = r x_n - r x_n^2 \quad (5.1.2)$$

Matemáticamente son equivalentes pero a un computador le estamos diciendo cosas diferentes. * En el primer caso le decimos que reste 1 menos $\{x_n\}$, y que a continuación lo multiplique por r y x_n . En total 1 resta y dos multiplicaciones * En el segundo caso le decimos que multiplique por r y x_n por un lado. Por otro lado que que eleve x_n al cuadrado, y que lo multiplique por r . Y al final que reste el primer resultado intermedio menos el segundo. En total 1 resta, 2 multiplicaciones y 1 cuadrado.

A esto hay que añadir que en un ordenador los números decimales se representan mediante aproximaciones. Por ejemplo, con 32 bits, el número 0.2 se representa como 0.200000003, debido a la precisión finita que dan los 32 bits. Por lo tanto entre el número real y el que representamos, la mayoría de veces va a haber un error. Estos errores se comportarán de manera diferente según los cálculos aritméticos que hagamos con ellos. En el siguiente plot, vemos los errores en un ordenador entre las dos fórmulas al partir del valor $x_0 = 0.2$ y con un $r = 4$.

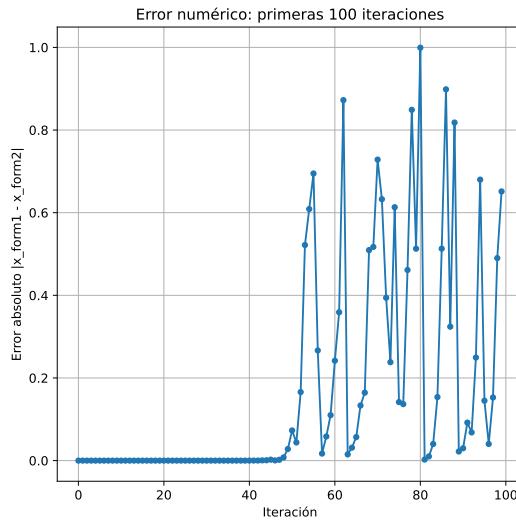


Figura 5.7: Error numérico entre las dos fórmulas matemáticamente equivalentes tras 100 iteraciones

Vemos como al principio el error es imperceptible, pero a media que avanzamos va creciendo. A partir de la iteración 50 este error se hace ya notable, y desde entonces se puede decir que ambas fórmulas evolucionan de forma totalmente distinta. Por lo tanto, vemos como en un sistema caótico, no sólo las condiciones iniciales determinan el valor final de forma extrema, sino que también cuando simulamos este sistema en una máquina computacional, la forma en la que se representan los números y la forma de las operaciones también influyen de forma muy notable. Esto es otra manifestación del caos, y se le denomina **efecto polilla**.

Pero vamos a ir un paso más. Veamos que evolución tienen realmente los errores. Para poder bien los errores al principio y al final, vamos a usar una escala logarítmica en el eje Y. El resultado se muestra a continuación.

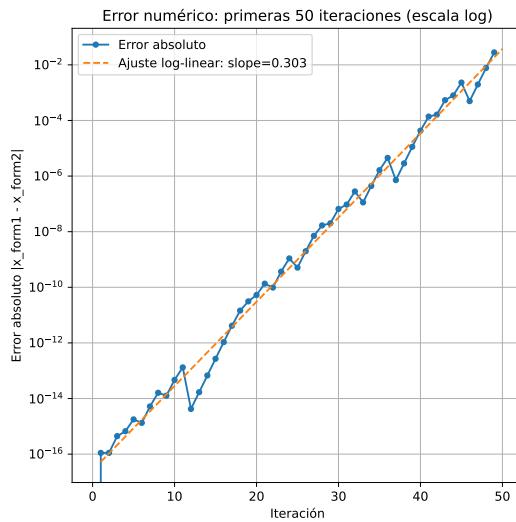


Figura 5.8: Error numérico entre las dos fórmulas matemáticamente equivalentes tras 100 iteraciones (escala logarítmica)

¿Qué es lo que vemos?. Que los errores crecen linealmente dentro de la escala logarítmica.

En escala \log_{10} hemos ajustado:

$$\log_{10}(\text{error}_n) \approx 0.303 n + C \quad (5.1.3)$$

donde C es la ordenada en el origen. Pasando de logaritmos a forma explícita:

$$\text{error}_n \approx 10^C \times 10^{0.303 n} = A (10^{0.303})^n \approx A 2^n, \quad (5.1.4)$$

puesto que $10^{0.303} \approx 2$.

Equivalentemente, en base e :

$$\ln(\text{error}_n) = \ln(10) \log_{10}(\text{error}_n) \approx (0.303 \ln 10) n + \ln A \approx 0.698 n + \ln A, \quad (5.1.5)$$

de donde

$$\text{error}_n \approx A e^{0.698 n} \approx A (2.01)^n. \quad (5.1.6)$$

Conclusión. El error crece de forma **exponencial** con n , aproximadamente duplicándose en cada iteración.

Curioso, ¿verdad?. El error se va multiplicando por 2 en cada iteración. Por 2 exactamente. ¿A qué se debe esto?

5.2. Cálculo matemático de la amplificación de desviaciones iniciales

A continuación daremos una explicación matemática a este fenómeno que estamos observando.

Imagina que quieres predecir el tiempo atmosférico. Nunca conoces la temperatura, presión o humedad con absoluta precisión: siempre hay un error mínimo en la medición. Si ese error crece muy despacio, podrías predecir con confianza varios días por delante. Pero si crece muy rápido, tu predicción se vuelve inútil en muy poco tiempo.

En los siguientes párrafos, veremos un concepto matemático muy útil en el estudio del caos: el **exponente de Lyapunov**, que llamaremos λ y que cuantifica la tasa de crecimiento de estos errores. Este concepto será fundamental en el estudio de sistemas físicos como el péndulo doble y la atmósfera. Nos permitirá saber de forma fácil el grado de caoticidad" de un sistema.

5.2.1. Error inicial

- Sea x_0 el estado "verdadero" del sistema en el tiempo inicial.
- Tu medida real tiene un pequeño error δ_0 , de modo que en realidad partes de

$$x_0 + \delta_0, \quad \text{con } |\delta_0| \ll 1. \quad (5.2.1)$$

Ese δ_0 es tan pequeño que, al principio, los dos estados están casi juntos. Es lo que hemos visto en los ejemplos anteriores, donde en la primera iteración las dos simulaciones estaban casi juntas.

5.2.2. Cómo evoluciona el error

Supón que el sistema avanza según una regla f (nuestra función logística), es decir:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (5.2.2)$$

Queremos ver qué sucede con δ_n , la diferencia en el paso n . Para ello:

1. **Linealizamos** la función f alrededor de x_n .
Si f es suave, podemos aproximar

$$f(x_n + \delta_n) \approx f(x_n) + f'(x_n) \delta_n, \quad (5.2.3)$$

donde $f'(x_n)$ es la **derivada** (o pendiente) de f en x_n .

2. De esta aproximación se deduce que

$$\delta_{n+1} = f(x_n + \delta_n) - f(x_n) \approx f'(x_n) \delta_n. \quad (5.2.4)$$

Pero ojo. Cuando calculamos errores, siempre son distancia, es decir debe ser siempre un número no negativo. La derivada indica pendiente y sentido. Cuando linealizamos

$$f(x_n + \delta_n) \approx f(x_n) + f'(x_n) \delta_n, \quad (5.2.5)$$

el término $f'(x_n) \delta_n$ nos da **cuánto** y en **qué dirección** cambia la diferencia δ_n .

La distancia ha de ser siempre no negativa. Por tanto, definimos :

$$\delta_{n+1} = |x'_{n+1} - x_{n+1}|. \quad (5.2.6)$$

Si valor absoluto, un $f'(x_n) < 0$ haría que la “distancia” resultase negativa, lo cual no tiene sentido para una medida de error.

El verdadero error en módulo es $|f'(x_n)|\$$ porque:

- Si $|f'(x_n)| > 1$, la distancia **aumenta**
- Si $|f'(x_n)| < 1$, la distancia **disminuye**

Pongamos un ejemplo numérico: Supongamos $f'(x_n) = -2$ y $\delta_n = 0.01$:

- Sin valor absoluto:

$$\delta_{n+1} \approx (-2) \times 0.01 = -0.02 \quad (\text{sin sentido físico}). \quad (5.2.7)$$

- Con valor absoluto:

$$\delta_{n+1} \approx |-2| \times 0.01 = 2 \times 0.01 = 0.02, \quad (5.2.8)$$

reflejando correctamente que la distancia se **duplica**.

Por todo ello, la fórmula adecuada para la evolución del error es

$$\delta_{n+1} \approx |f'(x_n)| \delta_n, \quad (5.2.9)$$

garantizando que $\delta_{n+1} \geq 0$ y midiendo la **magnitud** real del estiramiento en cada paso.

5.3. Errores sucesivos

Si repetimos la relaciones anterior paso a paso obtenemos

1. Primera iteración

$$\delta_1 \approx |f'(x_0)| \delta_0. \quad (5.3.1)$$

2. Segunda iteración. En este caso es la derivada en x_1 multiplicado por el error anterior (utilizamos para el error anterior la fórmula del paso 1). En total vemos que el error en la segunda iteración, es el error inicial multiplicado por dos derivadas.

$$\delta_2 \approx |f'(x_1)| \delta_1 \approx |f'(x_1)| |f'(x_0)| \delta_0. \quad (5.3.2)$$

3. Tercera iteración. Aquí ya vemos como aparece un patrón. Vamos multiplicando el error inicial por las sucesivas derivadas.

$$\delta_3 \approx |f'(x_2)| \delta_2 \approx |f'(x_2)| |f'(x_1)| |f'(x_0)| \delta_0. \quad (5.3.3)$$

En general, para cualquier (n) podemos generalizar el patrón encontrado:

$$\delta_n \approx \left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| \right) \delta_0. \quad (5.3.4)$$

Este resultado es muy parecido al de la estabilidad de los puntos fijos. Animo al lector a visitar <https://cola-chaos.github.io/ColaCAOS/01-logistica/puntos-fijos.html#estudio-formal-de-la-convergencia> para ver como también en ese caso la estabilidad venía dada por el valor de la primera derivada.

5.4. De producto a suma

Para manejar productos es muy útil usar los logaritmos, porque transforman productos en sumas:

$$\ln(\delta_n/\delta_0) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} f'(x_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|. \quad (5.4.1)$$

Esta formula nos da el logaritmo de cuánto ha crecido el error tras n iteraciones en relación al error inicial.

5.5. Definición del exponente de Lyapunov λ

Sabemos según la fórmula anterior, cuánto ha crecido el error en n iteraciones. Ahora bien, estaría mejor saber cuánto crece de media por cada iteración. Para ello, solo tenemos que dividir la suma anterior entre n .

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|. \quad (5.5.1)$$

Ahora vamos a suponer que la simulación es muy larga y que queremos hacer un promedio. Para ello tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la expresión anterior:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|. \quad (5.5.2)$$

Este factor λ es lo que crece de media el error en cada iteración en mi sistema. LO que crece de forma logarítmica. Lo que crece realmente en magnitud en cada iteración es e^λ

- Si $\lambda > 0$, el error crece con cada iteración, puesto que el número e elevado a un valor positivo siempre da un número mayor que 1. Puesto que multiplico mi error por un número mayor que 1, el error va creciendo iteración tras iteración ($e^\lambda e^\lambda e^\lambda \dots = (e^\lambda)^n = a^n$ con $a > 1$). Crece por lo tanto **exponencialmente**, y el sistema es **caótico** (muy sensible a la precisión inicial).
- Si $\lambda < 0$, el error se **atenúa** y las trayectorias convergen (sistema estable). La argumentación es justa la contraria del caso anterior. El número e elevado a un valor negativo siempre da un número menor que 1.
- Si $\lambda = 0$, estamos en un caso límite de inestabilidad neutra.

5.6. Cálculo del exponente de Lyapunov para el mapa logístico

Consideramos el **mapa logístico**

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n), \quad (5.6.1)$$

La derivada de f , tal y como hemos visto en anteriores secciones, es

$$f'(x) = r (1 - 2x). \quad (5.6.2)$$

Por lo tanto, si tenemos una sucesión de puntos compuesta por x_0, x_1, \dots, x_N , el exponente de Lyapunov máximo se calculará a partir de la multiplicación de las derivadas de la función logística en cada uno de los puntos de la sucesión, es decir,

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|f'(x_n)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|r(1-2x_n)|. \quad (5.6.3)$$

En la práctica, no podemos llevar la sucesión al infinito, por lo que tomamos N iteraciones y aplicamos la siguiente fórmula aproximada

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln|f'(x_k)| = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln|4(1-2x_k)|. \quad (5.6.4)$$

Al aumentar N, λ_N tenderá a λ .

5.6.1. Ejemplo numérico sencillo ($N = 20$)

Vamos a calcular el exponente de Lyapunov para el caso de $r = 4$. Tal y como vimos en las simulaciones que hicimos en el primer apartado, con $r = 4$ se prevé que el error se vaya doblando en cada paso, o lo que es lo mismo, que el exponente de Lyapunov sea $\lambda = \ln 2 \approx 0.6931$

Tomemos de nuevo el mapa logístico con $r = 4$, es decir,

$$f(x) = 4x(1-x), \quad (5.6.5)$$

y su derivada

$$f'(x) = 4(1-2x). \quad (5.6.6)$$

Queremos calcular el exponente de Lyapunov aproximado usando 20 iteraciones, empezando con

$$x_0 = 0.3000 \quad (5.6.7)$$

Para ello, iremos calculando sucesivamente cada $x_{n+1} = f(x_n)$, el valor absoluto de la derivada $|f'(x_n)|$, y luego $\ln|f'(x_n)|$. Mostraremos en la siguiente tabla x_n redondeado a cuatro cifras decimales, $|f'(x_n)|$ redondeado a cuatro cifras decimales, y $\ln|f'(x_n)|$ redondeado a tres cifras decimales.

Cuadro 5.1: Cálculo paso a paso del exponente de Lyapunov para $r = 4$

n	x_n	$ f'(x_n) $	$\ln f'(x_n) $
0	0.3000	$ 4(1 - 2 \cdot 0.3000) = 1.6000$	0.470
1	0.8400	$ 4(1 - 2 \cdot 0.8400) = 2.7200$	1.001
2	0.5376	$ 4(1 - 2 \cdot 0.5376) = 0.3008$	-1.201
3	0.9953	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9953) = 3.9548$	1.375
4	0.0186	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0186) = 3.8201$	1.340
5	0.0879	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0879) = 3.2964$	1.193
6	0.3208	$ 4(1 - 2 \cdot 0.3208) = 1.4332$	0.360
7	0.8716	$ 4(1 - 2 \cdot 0.8716) = 2.9729$	1.090
8	0.4476	$ 4(1 - 2 \cdot 0.4476) = 0.4191$	-0.870
9	0.9890	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9890) = 3.9122$	1.364
10	0.0434	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0434) = 3.6526$	1.295
11	0.1661	$ 4(1 - 2 \cdot 0.1661) = 2.6708$	0.982
12	0.5542	$ 4(1 - 2 \cdot 0.5542) = 0.4333$	-0.836
13	0.9883	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9883) = 3.9061$	1.363
14	0.0464	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0464) = 3.6289$	1.289
15	0.1770	$ 4(1 - 2 \cdot 0.1770) = 2.5844$	0.949
16	0.5826	$ 4(1 - 2 \cdot 0.5826) = 0.6605$	-0.415
17	0.9727	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9727) = 3.7819$	1.330
18	0.1061	$ 4(1 - 2 \cdot 0.1061) = 3.1512$	1.148
19	0.3794	$ 4(1 - 2 \cdot 0.3794) = 0.9651$	-0.036

Cada fila se interpreta así:

1. Calculamos $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ usando el valor exacto de x_n y luego redondeamos el resultado a cuatro decimales para mostrarlo.

2. Evaluamos la derivada en el valor exacto de x_n : $f'(x_n) = 4(1 - 2x_n)$, tomamos su valor absoluto, y lo redondeamos a cuatro decimales.
3. Finalmente, calculamos $\ln|f'(x_n)|$ a partir del valor de la derivada ya redondeada, y lo redondeamos a tres decimales.

Ahora sumamos todos los logaritmos obtenidos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{19} \ln|f'(x_k)| &= 0.470 + 1.001 - 1.201 + 1.375 + 1.340 + 1.193 + 0.360 + 1.090 - 0.870 + 1.364 \\ &\quad + 1.295 + 0.982 - 0.836 + 1.363 + 1.289 + 0.949 - 0.415 + 1.330 + 1.148 - 0.036 \\ &= 13.191. \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Por último promediamos esta suma, por lo que el exponente de Lyapunov aproximado para $N = 20$ queda como

$$\lambda_{20} = \frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} \ln|f'(x_k)| = \frac{13.191}{20} = 0.6596. \quad (5.6.9)$$

Como vemos, el valor 0.6596 es muy próximo al teórico 0.6931. De hecho, $e^{0.6596} = 1.934$ que está muy cerca de 2. **Este es el mismo valor que obteníamos de la regresión de los errores en la sección anterior**

Para $N = 20$ hemos obtenido $\lambda_{20} \approx 0.6596$. Si continuáramos con más iteraciones, como $N = 100$ o $N = 1000$, veríamos que λ_N se acerca gradualmente a 0.6931. Esto muestra que, aunque las primeras iteraciones pueden desviarse, al promediar sobre muchas iteraciones el resultado converge al **valor exacto** del exponente de Lyapunov para $r = 4$.

5.6.2. Cálculo del coeficiente de Lyapunov para todo el mapa logístico

Vamos a aplicar este procedimiento para todos los valores de r en el mapa logístico. Y vamos a ser más precisos; para cada valor de r haremos 1000 iteraciones en lugar de 20, calcularemos la derivada en cada uno de los puntos, y sumaremos sus logaritmos. El resultado es el que se muestra a continuación

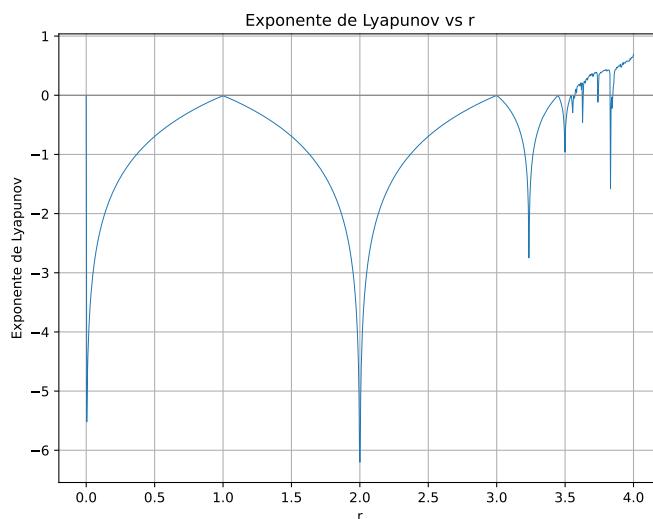


Figura 5.9: Cálculo del coeficiente de Lyapunov para todo el mapa logístico

Vamos a interpretar esta gráfica, y ver si cuadra con los conocimientos previos del mapa logístico.

Para valores $0 < r \leq 1$, sabemos que todas las iteraciones convergen al punto fijo $x^* = 0$. Por lo tanto el exponente de Lyapunov: $\lambda(r) < 0$ ya que no estamos en la zona caótica.

Para $r = 1$, la ecuación del mapa logístico es

$$x_{n+1} = 1 \cdot x_n (1 - x_n) = x_n (1 - x_n). \quad (5.6.10)$$

Los puntos fijos (soluciones de $x^* = x^*(1 - x^*)$) se determinan resolviendo

$$x^* = x^*(1 - x^*) \implies x^*(1 - (1 - x^*)) = 0 \implies x^*(1 - 1 + x^*) = 0 \implies x^* \cdot x^* = 0. \quad (5.6.11)$$

Por tanto, el único punto fijo es

$$x^* = 0. \quad (5.6.12)$$

La derivada del mapa general es

$$f'(x) = r(1 - 2x). \quad (5.6.13)$$

Si evaluamos en $r = 1$ en el punto fijo $x^* = 0$, obtenemos

$$f'(x^*) = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 0) = 1. \quad (5.6.14)$$

Es decir, las iteraciones siempre terminan en una derivada igual a 1, cuyo logaritmos es cero. Por eso el coeficiente de Lyapunov promediado es cero.

Para valores $1 < r < 3$, vemos que de nuevo el exponente es negativo. En esta zona la función logística tiende a valores estables comprendidos entre 0 y 1, pero ni es caótica ni periódica. Podemos verlo matemáticamente, ya que sabemos que en esta zona el mapa logístico tiende al punto fijo $1 - 1/r$, y si evaluamos la derivada de la función logística en ese punto fijo tenemos $2 - r$, y como $1 < r < 3$ se tiene $-1 < 2 - r < 1$, de modo que $|2 - r| < 1$ y por tanto $\lambda(r) = \ln|2 - r| < 0$. Es decir, se suman logaritmos que son siempre negativos, por lo que el promedio final nunca podrá ser positivo.

Para $r = 3$ sabemos que el mapa logístico tiende a

$$x^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (5.6.15)$$

Evaluándola la derivada en este punto $x^* = \frac{2}{3}$ para $r = 3$:

$$f'(x^*) = 3 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1. \quad (5.6.16)$$

Que en valor absoluto es 1, y por lo tanto al igual que el caso con $r = 1$, el exponente de Lyapunov es cero.

Para $3 < r < r_2 \approx 3.4495$ sabemos que existe un ciclo estable de periodo 2. $\lambda(r)$ en este rango vuelve a ser negativo, porque aunque ya no convergemos a un punto fijo, sí converge a un ciclo de periodo 2. En el límite $r \rightarrow r_2$, $\lambda(r)$ se acerca nuevamente a 0, pues se produce la segunda bifurcación hacia un ciclo de periodo 4.

En todos los ciclos restantes hasta $r_\infty \approx 3.5699456 \dots^*$ tenemos el mismo comportamiento, valores negativos en las zonas de los ciclos y acercándose a cero cuando cambiamos de periodo.

Para $r_\infty < r \leq 4^{**}$ vemos que en la mayoría de estos r en los que sabemos que el sistema es caótico se cumple que $\lambda(r) > 0$. Sin embargo, dentro de este intervalo caótico aparecen “ventanas” periódicas (por ejemplo, cerca de $r \approx 3.8284$, donde hay un ciclo de periodo 3). En esas ventanas periódicas $\lambda(r)$ vuelve a ser negativo. Justo en el borde de cada ventana periódica (bifurcaciones dentro del caos) se tiene $\lambda(r) = 0$. En la vecindad de $r = 4$, el valor promedio exacto es $\lambda(4) = \ln 2 \approx 0.6931$ tal y como habíamos visto.

6 El exponente de Lyapunov y el caos

En la siguiente gráfica vemos lo que hemos ido contando pormenorizadamente en la sección anterior. Cada vez que el sistema está en una zona no caótica, el exponente de Lyapunov es negativo.

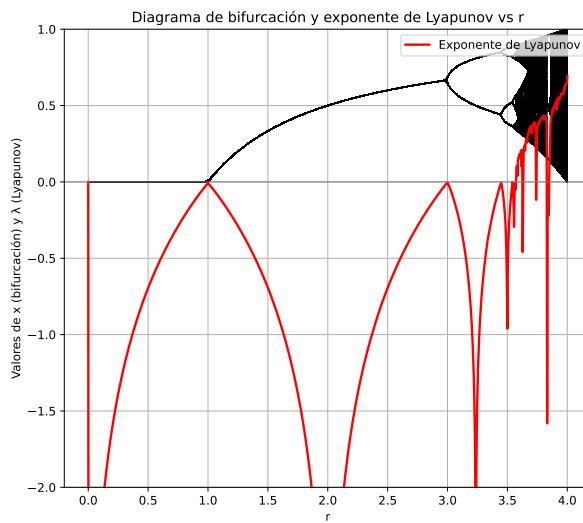


Figura 6.1: Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov en función de r

De hecho, si hacemos zoom en la zona donde aparece el caos, vemos que en las ventanas de periodicidad el exponente de Lyapunov se vuelve negativo.

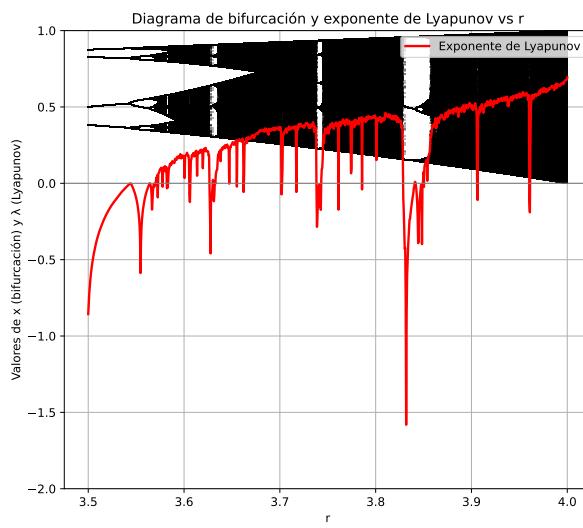


Figura 6.2: Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov en función de r (zoom)

La pregunta que debemos hacer es la siguiente, **¿es el exponente de lyapunov un indicador que nos puede decir si una serie temporal que estamos observando es caótica?** Una serie temporal es simplemente una lista de valores que varían con el tiempo, como por ejemplo la temperatura diaria de una ciudad: T_0, T_1, T_2, \dots .

Llamamos a esos valores x_0, x_1, x_2, \dots y cada subíndice indica la “etapa” o “momento” en que lo medimos.

Decir que una serie temporal es **caótica** significa, de acuerdo a la teoría del caos, que ha de cumplir tres condiciones:

1. **Es determinista:** existe una “regla” (una función) que, dado el estado actual x_n , calcula el siguiente x_{n+1} . No hay azar puro: si conoces x_n exactamente, sabes x_{n+1} .
2. **Tiene sensibilidad a condiciones iniciales:** dos valores muy parecidos x_0 y $x_0 + \delta_0$ se separan de forma exponencial a medida que iteras la regla. Aunque δ_0 sea minúsculo, al cabo de varias iteraciones la diferencia es muy grande.
3. **Se ve impredecible a largo plazo:** aunque la regla sea determinista, al crecer las diferencias “desordenadas” parece un comportamiento aleatorio.

Por ejemplo, ir anotando los números que salen directamente de una ruleta no es una serie caótica, ya que no hay ninguna regla para saber x_{n+1} si conoces x_n exactamente. Eso a pesar de ser impredecible a largo plazo. Es muy importante hacer notar, que un sistema caótico tiene unas reglas deterministas muy claras. En este caso **no se puede calcular ningún exponente de Lyapunov** porque no hay función f continua o diferenciable que escriba $x_{n+1} = f(x_n)$. Si intentáramos “forzar” un cálculo, estaríamos midiendo ruido y obtendríamos resultados sin sentido práctico: un “valor de λ ” aquí no nos dice nada sobre determinismo o caos, sino solo sobre la aleatoriedad de los datos.

Otro ejemplo de sistemas que no cumple estas premisas es la bolsa. A todo el mundo le parece que predecir el valor de una acción a lo largo del tiempo es muy complejo, pero ¿es caótico?. Para ello veremos como funciona la bolsa. El precio de una acción o de un índice bursátil depende de decenas de variables:

- Resultados financieros de las empresas.
- Noticias económicas o políticas.
- Sentimiento de los inversores y rumores.
- Tipos de interés, inflación, datos macroeconómicos.
- Eventos inesperados (crisis, pandemias, etc.).

Cada día (o incluso cada minuto) entran al mercado miles de órdenes de compra y venta, influidas por estas variables.

No existe una regla sencilla $x_{n+1} = f(x_n)$. A diferencia del mapa logístico, donde si conocemos x_n y el parámetro r podemos calcular $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, en la bolsa no hay una función sencilla y fija que relate el precio de hoy con el de mañana.

Por estas razones, el precio de la bolsa es, en gran medida, un proceso aleatorio que incorpora ruido y reacciones humanas, no un sistema determinista como el mapa logístico.

Volviendo a la pregunta original. **¿es una condición necesaria y suficiente para que una serie sea caótica que su exponente de Lyapunov sea positivo?**

De acuerdo a la investigación bibliográfica realizada, un **exponente de Lyapunov mayor** $\lambda_{\max} > 0$ es **condición necesaria** para que un sistema determinista sea caótico, pero **no basta por sí solo** para garantizar caos en sentido completo.

Un sistema se considera **caótico** si cumple, entre otros, el criterio de **sensibilidad a condiciones iniciales**: dos trayectorias iniciadas en puntos arbitrariamente próximos se separan exponencialmente con el tiempo. El **exponente de Lyapunov** λ_{\max} mide justamente ese crecimiento (o decrecimiento) exponencial promedio de una pequeña desviación. Si $\lambda_{\max} < 0$, todas las pequeñas diferencias se contraen, y el sistema converge a un punto fijo o a un ciclo periódico estable: **no hay caos**. Por lo tanto, **tener $\lambda_{\max} > 0$ es condición necesaria** para hablar de caos determinista

Aunque $\lambda_{\max} > 0$ garantiza sensibilidad exponencial, para que un sistema sea considerado caótico **en el sentido matemático completo** también se requiere cumplir otras condiciones mas específicas, que no citaré en este texto por estar muy por encima de mi nivel. La explicación larga para el lector interesado se haya aquí:

– “The short answer is ‘No’. As reflected in many of the other posted responses, positive Lyapunov exponents, by themselves, do not always indicate ‘chaos’. Additional information about the system ... needs to be performed to conclusively diagnose ‘chaos’ in most systems.”

Fuente: [Does a Positive Lyapunov Exponent Always Mean Chaos?](#)^[35]

Sin embargo, en la **práctica experimental o de series temporales reales**, suele aceptarse que si la estimación de λ_{\max} resulta positiva y se ha verificado que:

- El sistema es determinista (o modelado por un conjunto de ecuaciones conocidas).
- La variable observada permanece en un rango acotado
- Al simular o analizar la trayectoria, no se observan comportamientos puramente periódicos ni divergencias triviales.

Entonces, **la probabilidad de que el sistema sea caótico es muy alta**. Varios autores y estudios confirman que, bajo condiciones razonables de ruido controlado, un **exponente de Lyapunov positivo** es una señal **muy confiable de caos determinista**.

– “The Largest Lyapunov Exponent (LLE) has been frequently used to investigate presence of chaotic behavior as well as nonlinear characteristics of time series.”

Fuente: [Largest Lyapunov Exponent](#) [36]

Aunque **en teoría** hay que cumplir dos condiciones adicionales, **en la práctica**, sobre todo en áreas aplicadas (física experimental, meteorología, etc.), **una λ_{\max} positiva suele considerarse como “casi certeza” de caos** siempre que los cálculos se hayan hecho con series suficientemente largas y con ruido controlado.

6.1. Horizonte de predictibilidad

¿Por qué es tan importante el exponente de Lyapunov al hablar de sistemas caóticos?. Para ver su importancia vamos a introducir un término muy importante, el horizonte de predictibilidad.

El **horizonte de predictibilidad** es el tiempo máximo durante el cual podemos hacer predicciones fiables de un sistema caótico, dadas unas condiciones iniciales con cierta incertidumbre. Aunque conocemos la regla determinista que rige el sistema, la sensibilidad a las condiciones iniciales (medida por el exponente de Lyapunov) impone un límite práctico a nuestra capacidad de predicción.

En un sistema caótico, dos trayectorias que empiezan muy cerca divergen de forma **exponencial**. Si la separación inicial entre ellas es δ_0 , tras un tiempo t la separación será aproximadamente

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda_{\max} t}, \quad (6.1.1)$$

donde λ_{\max} es el **exponente de Lyapunov máximo**, que mide la rapidez de esa divergencia.

¿Cuándo “fracasa” la predicción?

Definimos un **umbral de error Δ** : cuando la divergencia $\delta(t)$ alcance Δ , consideramos que la predicción ya no es útil. Por ejemplo, si medimos temperatura, δ_0 podría ser la imprecisión inicial y Δ el error máximo tolerable.

Buscamos el tiempo T_p tal que

$$\delta(T_p) = \Delta. \quad (6.1.2)$$

Para derivar de la fórmula partimos de

$$\delta(T_p) = \delta_0 e^{\lambda_{\max} T_p} = \Delta \quad (6.1.3)$$

Luego despejamos T_p :

$$e^{\lambda_{\max} T_p} = \frac{\Delta}{\delta_0} \quad (6.1.4)$$

$$\lambda_{\max} T_p = \ln\left(\frac{\Delta}{\delta_0}\right) \quad (6.1.5)$$

$$T_p = \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln\left(\frac{\Delta}{\delta_0}\right) \quad (6.1.6)$$

¿Cuál es el significado de cada término?

- λ_{\max} : mayor exponente → predicciones válidas por menos tiempo.

- δ_0 : si reducimos la imprecisión inicial, alargamos T_p .
- Δ : cuanto más tolerante seas al error, más tiempo «aguanta» la predicción.
- Un sistema con $\lambda_{\max} < 0$ tendría, en cambio, un horizonte de predictibilidad infinito, pues los errores se contraen y la predicción mejora con el tiempo.

Como veremos más adelante la ecuación ?? es fundamental para el desarrollo del capítulo [Mi hipótesis final. El Principio de Compromiso Predictibilidad – Creatividad](#)

Ejemplo práctico:

En la atmósfera se observa a menudo un exponente

$$\lambda_{\max} \approx 0,8 \text{ día}^{-1}. \quad (6.1.7)$$

Además, la **incertidumbre inicial** realista en modelos y medidas es más alta, por ejemplo

$$\delta_0 = 10^{-3} (\text{°C}), \quad (6.1.8)$$

y mantenemos el **error tolerable**

$$\Delta = 1 \text{ °C}. \quad (6.1.9)$$

Entonces,

$$T_p = \frac{1}{0,8} \ln\left(\frac{1}{10^{-3}}\right) = 1,25 \times \ln(10^3) = 1,25 \times 6,91 \approx 8,6 \text{ días}. \quad (6.1.10)$$

Este cálculo **coincide** con el límite práctico de **7–10 días** que vemos hoy en los pronósticos meteorológicos fiables. El lector puede echar un vistazo al siguiente artículo <https://www.stratumfive.com/climate/weather-forecasting-and-chaos-theory/>. Aquí se habla de un horizonte de predictibilidad para el tiempo de 8 a 10 días. La cuestión es que por lo aprendido en este proyecto, éste límite es una barrera que no vamos a poder superar. Si bien en los últimos 50 años se ha producido un formidable incremento de la precisión con la que hacemos las predicciones, pasando de predicciones fiables a un día a tener buenas predicciones a 5 días, el llegar a batir este límite dos semanas va a ser imposible.

Y hablando de horizontes de predictibilidad, ¿qué te parece el escuchar que el sistema solar tiene un horizonte de predictibilidad de unos 5 millones de años? https://en.wikipedia.org/wiki/Stability_of_the_Solar_System. Si Newton levantase la cabeza. Es decir, a pesar de que tenemos esa preciosa fórmula de la gravitación universal, que funciona tan bien, su propagación hacia el futuro, cuando tenemos en cuenta los planetas que componen el sistema solar, deja de ser válida a 4 millones de años vista, que en términos cósmicos es poco tiempo. Y es que no solamente tenemos errores iniciales, al no poder tener en cuenta todos los pequeños objetos que vagan por el sistema solar, sino porque el sistema es inherentemente caótico. De hecho, tal y como anticipó Poincaré, el movimiento de tres cuerpos en el vacío sujetos a sus respectivas fuerzas de atracción gravitatoria, es ya un sistema caótico, y que presenta un exponente de Lyapunov positivo en determinadas circunstancias.

Parte III

El Caos en vivo: El péndulo doble

7 El Péndulo Doble

7.1. Introducción

El péndulo doble es quizás uno de los sistemas físicos más estudiados en el \'ambito de la teoría del caos. Esto es debido a que tiene unas ecuaciones deterministas muy bien conocidas, y a la contraposición con el péndulo simple. Es decir, mientras que en el péndulo simple con unas ecuaciones relativamente más sencillas podemos predecir “ad infinitum” la posición y velocidad del péndulo, en el caso del péndulo doble, que no son más que dos péndulos sencillos acoplados, no podemos predecir más allá de unos pocos segundos.

Dicho de otra manera, un péndulo simple, como el que estudi  Galileo, es un sistema que encaja perfectamente en la mecánica clásica y que se comporta de una forma determinista, mientras que un péndulo doble tiene un comportamiento imposible de predecir tras unos pocos segundos. Ambos están regidos por las mismas leyes de la física, y el péndulo doble es ligeramente más complejo, pero su comportamiento es totalmente impredecible. Todo ello a pesar de tener unas ecuaciones que describen a la perfección su comportamiento.

El análisis matemático de ambos sistemas, el péndulo simple y doble, se puede obtener en muchas referencias, por ejemplo en [El péndulo doble como ejemplo de sistema ca tico^{\[37\]}](#)

El análisis matemático del péndulo doble está muy por encima del nivel de bachillerato.

Sin embargo podemos recurrir a la simulación y experimentación real para analizar su comportamiento. Empezaremos por realizar simulaciones y comprobar en el ordenador como se comporta el péndulo doble. Pero, ¿no resulta muy complicado hacer la simulación de un péndulo doble?. ¿Acaso no habría que implementar las ecuaciones del péndulo doble, que resultan realmente complicadas de analizar matemáticamente?. Tenemos dos soluciones para ello:

- Podemos utilizar simuladores de física como [Algodo](https://www.algodo.com/)
- Podemos pedirle a ChatGPT que nos haga una simulación en Python.

En este proyecto, he optado por la segunda alternativa, y los resultados han sido espectaculares. Usando uno de los modelos más avanzados de OpenAI, el mini4-high, la codificación resultó directa y sin errores. Copiando el código generado, y ejecutándolo desde mi ordenador pude tener en unos pocos minutos las simulaciones listas para su interpretación.

8 Sensibilidad a las condiciones

iniciales

8.1. Descripción General

En esta entrada se analiza un programa escrito en Python para simular y dibujar 10.000 péndulos dobles simultáneamente. El objetivo principal de la simulación es mostrar la **sensibilidad a las condiciones iniciales**, un rasgo característico de los sistemas caóticos. Cada péndulo comienza con un ángulo inicial ligeramente distinto para ilustrar cómo pequeñas variaciones pueden dar lugar a comportamientos muy diferentes a lo largo del tiempo. Es decir, como verás en el próximo vídeo los péndulos al ser lanzados parecen estar todos en la misma posición, pero a medida que vamos avanzando en la simulación se separan totalmente.

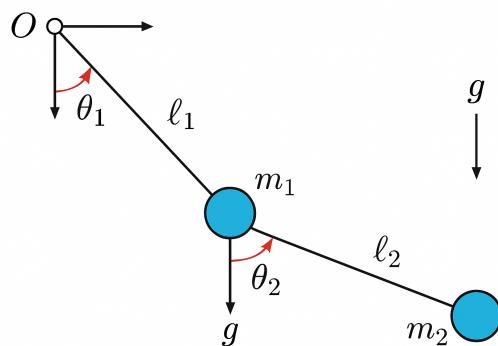


Figura 8.1: Esquema del doble péndulo

8.2. Preparación del Código con ChatGPT

Este código fue **generado mediante ChatGPT**, aprovechando la capacidad del sistema para programar en Python. A continuación, se describe el *prompt* que dio origen a esta simulación:

Prompt sugerido:

“Genera un código en Python que utilice Python para simular 10000 péndulos dobles al mismo tiempo. Cada péndulo debe tener la primera pata en la misma posición (170 grados) y la segunda pata con un ángulo inicial también de 170 grados pero ligeramente distinto en cada péndulo, espaciado uniformemente entre 170 y 170.1 grados. El objetivo es visualizar la sensibilidad a las condiciones iniciales superponiendo todos los péndulos en una misma imagen. Dibuja cada péndulo de un color, y muestra la animación en tiempo real. Mi ordenador dispone de una tarjeta gráfica Nvidia y tengo instalado CUDA, así que úsalos para acelerar las simulaciones. No tengas en cuenta la fuerza de rozamiento.”

Tras varias iteraciones de este prompt, al final conseguí un código que se ejecutase. La depuración del código es realmente fácil de hacer. Cada vez que ChatGPT me daba un código, lo corría en el ordenador mediante el comando “python programa.py”, y los errores se los alimentaba de vuelta a ChatGPT que a su vez me devolvía el código depurado.

En el código proporcionado, los parámetros físicos de cada péndulo doble los ha definido ChatGPT de la siguiente manera:

- **Longitudes de los brazos**

- Longitud del primer brazo: $l_1 = 1.0$ metros
- Longitud del segundo brazo: $l_2 = 1.0$ metros

En la representación gráfica cada metro es representado a través de 150 píxeles.

- **Masas de los cuerpos**

- Masa del primer cuerpo: $m_1 = 1.0$ Kg
- Masa del segundo cuerpo: $m_2 = 1.0$ Kg

La gravedad es la terrestre, 9.81Kg/m^2 . El péndulo simulado es grande, pero lo bueno de hacerlo grande es que va mas lento en tiempo que un péndulo pequeño, por lo que su movimiento se aprecia mejor en la simulación. El péndulo oscila sin parar ya que no hemos puesto ninguna fuerza de rozamiento.

8.3. Vídeo con la simulación

Una vez preparado el código procedía a correrlo y grabar la ventana de salida en un archivo de vídeo que se encuentra a continuación. Hay que tener en cuenta que el código Python generado por ChatGPT, avanza en pasos de 1 milisegundo de tiempo real, y que debido a la gran cantidad de péndulos la simulación no llega a ser en tiempo real. Por eso le pedí a ChatGPT que incluyera un texto en la simulación que mostrase el tiempo real durante la simulación.

El lector interesado puede ver el video en el siguiente enlace <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/Pendulumabanco.mp4>

El resultado es sorprendente e hipnotizante. ¿Como puede ser que péndulos que se lanzan tan cercanos diverjan tan rápidamente?. Si observamos atentamente el vídeo hasta el segundo 1 de la simulación todos los péndulos van casi al unísono. En el segundo 2, que es cuando llegan al otro extremo, vemos que el “abano” ya se empieza a abrir. Y en la bajada que le sigue se desata el caos. Del segundo 2 al tres ya estamos con una divergencia total, y a partir de ahí cada uno va a su bola, jcaos total!.

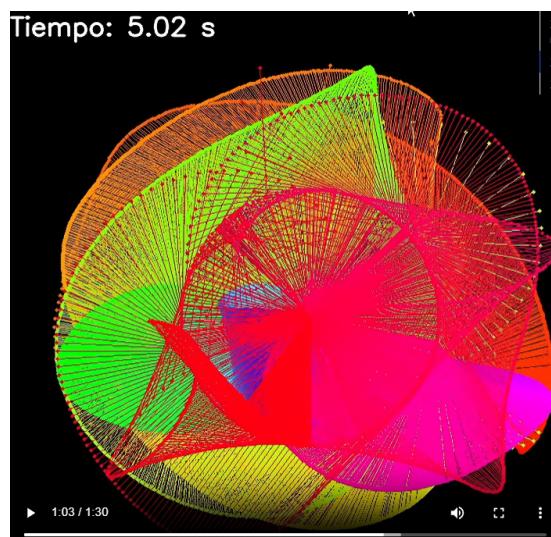


Figura 8.2: Segundo número 5 de la simulación (10.000 pendulos separados inicialmente 10 microgrados)

Ahora reflexionemos. Péndulos que fueron lanzados con diferencias de milésimas de grado, tienen trayectorias que divergen enormemente tras 5 segundos. ¿Acaso es éste un sistema físico que cuyo comportamiento podamos predecir en la vida real?. Pues yo diría que no. Nos enfrentamos a dos problemas en la realidad:

- No podemos medir con total exactitud el estado inicial de nuestro sistema
- No podemos simular los modelos matemáticos con una precisión infinita en un ordenador

9 Mapa de Fases

Recordemos que durante el estudio de la función logística, el diagrama de bifurcación aparecía una y otra vez cada vez que hacíamos zoom en una zona pequeña de r . Veíamos la misma estructura repetida en zonas de r cada vez más pequeñas. ¿Pasará algo similar con el péndulo doble?. Vamos a ir paso a paso.

En primer lugar, vamos a simular 36×36 péndulos, cada uno de ellos con diferentes condiciones iniciales de los dos brazos. Puesto que cada uno de los ángulos puede tomar 360 grados, vamos a repartirlos en 36 posiciones diferentes cada uno de ellos desde $0,10,20 \dots$ hasta 350 grados. Obviamente, aquí están separados bastante por lo que su evolución va a ser diferente.

Por lo tanto estamos viendo 1296 péndulos dobles al mismo tiempo! Cada uno en su pequeña celda de 20×20 píxeles, todos organizados en una cuadrícula de 36×36 . El resultado es una imagen de 720×720 donde cada cuadradito muestra un péndulo doble distinto, lanzado con ángulos iniciales que varían sistemáticamente en filas y columnas.

Cada celda se trata como un único péndulo doble, con los mismos parámetros que en el caso del abanico de péndulos (masas $m_1 = m_2 = 1$, longitudes $l_1 = l_2 = 1$, gravedad $g = 9.81$).

Se dibujan las líneas de los brazos en blanco y los tres puntos de unión en colores rojo, verde y azul para los pivotes, la primera masa y la segunda masa respectivamente.

Con cada iteración, la simulación avanza y se pinta el estado actualizado, de modo que se ve un baile de péndulos distintos en cada casilla.

9.1. Prompt para Generar Este Script con ChatGPT

Prompt para la generación del código

“Quiero un código en Python para mi tarjeta Nvidia y Cuda para simular una **cuadrícula 36×36 de péndulos dobles** en paralelo. Cada celda debe inicializar su péndulo con un ángulo para el primer brazo comprendido entre 0 y 350 grados en pasos de 10 grados, y con un ángulo para el segundo brazo comprendido entre 0 y 350 grados en pasos de 10 grados. Utiliza los siguientes parámetros de simulación para los péndulos ($m_1 = m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $g = 9.81$ y cero rozamiento).

Dibuja cada péndulo en su propia celda de 20×20 píxeles dentro de una imagen global de 720×720 . Dibuja los brazos (longitudes 6 píxeles) en blanco y los pivotes como círculos pequeños en rojo, verde y azul. Muestra la ventana en tiempo real y sal al presionar Esc.”

Al ver la cuadrícula completa, el lector observa cómo cambia el comportamiento del péndulo doble al variar sus ángulos iniciales en pequeños pasos de 10° . En la esquina superior izquierda ($-180^\circ, -180^\circ$) el movimiento puede ser muy distinto al de la esquina inferior derecha ($+170^\circ, +170^\circ$).

Es un “mapa de fase” visual: cada casilla revela un patrón dinámico único, mostrando cómo la mecánica no lineal responde a distintos puntos de partida. ¿Por qué se llama mapa de fase?. Cuando dibujamos una función senoidal a lo largo del tiempo, vemos un patrón repetido. Si pintamos otro seno al lado, con igual amplitud y frecuencia, pero cambiando el ángulo inicial, veremos el mismo patrón pero desplazado en el tiempo por ese ángulo inicial. Estamos, por lo tanto, en otra “fase” del mismo sistema. Otra forma más cotidiana de verlo es con la Luna: hablamos de fases para referirnos a la iluminación relativa de la Luna por el Sol tal y como lo vemos desde la Tierra. Así tenemos fase creciente, menguante, llena, etc.

De nuevo, animo al lector a ver el vídeo completo en <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/PendulumCajas.mp4>



Figura 9.1: Estado de 36x36 péndulos dobles tras 30 segundos de simulación

Vemos una zona central en la que los péndulos parten de ángulos pequeños. En este caso observamos que el comportamiento es muy similar al de un péndulo simple. Es, por así decirlo, una zona de estabilidad del sistema. Pregunté a ChatGPT por qué se produce esta zona de estabilidad y su respuesta fue la siguiente.

9.1.1. Aproximación de Ángulo Pequeño

En la simulación del péndulo doble, cada péndulo tiene dos ángulos θ_1 y θ_2 . Cuando ambos son pequeños, la dinámica se “desacopla” casi como si fueran dos péndulos simples en serie, pero sin generar las fuertes interacciones que provocan el caos. Veamos por qué:

1. Las ecuaciones originales del péndulo doble incluyen términos no lineales muy potentes (producto de $\sin(\theta_1 - 2\theta_2)$, $\cos(2\delta)$, etc.).
2. Si θ_1 y θ_2 permanecen pequeños, esos términos no lineales pierden relevancia: $\sin(\theta_1) \approx \theta_1$, $\sin(\theta_1 - 2\theta_2) \approx \theta_1 - 2\theta_2$, y $\cos(2\delta) \approx 1$.
3. Resultado: el sistema casi se comporta como dos péndulos simples que oscilan suavemente y de forma **aproximadamente periódica**. No hay “explosión” de sensibilidad porque las variaciones pequeñas no se amplifican de forma exponencial. Es la zona donde la energía no alcanza para explorar el caos.

En otras palabras, en el centro de la “cuadrícula de fase” hay un área donde las trayectorias son estables, casi previsibles, iguales a las que obtendrías si estudiara un péndulo simple (o dos acoplados muy débilmente). Observas oscilaciones regulares, de ida y vuelta, sin divergencias drásticas.

9.1.2. ¿Por Qué Llamarlo “Zona de Estabilidad”?

Cuando hablamos de sistemas dinámicos, llamamos “estable” a aquella región donde las pequeñas perturbaciones no se magnifican con el tiempo.

Si en el experimento gráfico seleccionas solo las celdas centrales, notarás que los péndulos dobles describen curvas suaves, casi sinusoidales, muy parecidas a las de un péndulo simple. Esa cohesión de trayectorias es lo que define la estabilidad: todas las simulaciones de esa región inicial “viajan juntas”, sin dispersarse.

9.2. Transición hacia el Caos

A medida que nos alejamos del centro (es decir, cuando comienzas a dar a θ_1 o θ_2 valores más grandes, digamos 30° , 40° o más), las ecuaciones no lineales cobran protagonismo. Entonces:

1. Los términos $\sin(\theta)$ ya no son equivalentes a θ .
2. Aparecen resonancias internas: la interacción entre el primer y el segundo brazo se hace más intensa.

3. Surge la **sensibilidad exponencial**: dos péndulos con diferencias iniciales de solo unos grados comienzan a divergir rápidamente tras pocas oscilaciones.

Así, justo en el borde de esa zona estable, empieza a nacer el caos: las trayectorias dejan de ser regulares y adquieren formas impredecibles.

Esto nos recuerda a lo que pasaba con la función logística a medida que crecía r . Hasta $r = 3$ estábamos en una zona muy estable, con un solo valor final. Ahora el parámetro que controla la estabilidad es el ángulo desde el que lanzamos el péndulo. Para ángulos pequeños estamos en zona estable y para ángulos mayores estamos en zonas de caos. En ambos casos, cuando suministramos más “energía” al sistema bien sea en forma de un mayor r o un mayor ángulo inicial el sistema se vuelve caótico.

9.3. Mapa de fase detallado

Ahora vamos a simular muchísimos más péndulos, para obtener un mapa de fase mas detallado. Para ello ahora la simulación se organiza en una cuadrícula de 720×720 péndulos. Cada columna i corresponde a un ángulo inicial

$$\theta_1(i) = -\pi + i \frac{2\pi}{719}, \quad i = 0, 1, \dots, 719, \quad (9.3.1)$$

y cada fila j a un ángulo inicial

$$\theta_2(j) = -\pi + j \frac{2\pi}{719}, \quad j = 0, 1, \dots, 719. \quad (9.3.2)$$

Así, la celda (i, j) arranca con condiciones

$$\theta_1 = \theta_1(i), \quad \theta_2 = \theta_2(j). \quad (9.3.3)$$

Como cada péndulo es ahora un píxel, ¿cómo podemos visualizar su estado?. Pues recurrimos a un código de colores. Entonces para cada péndulo cogemos los angulos θ_1 y θ_2 en los que se encuentra y hacemos una primera normalización. Para cada péndulo se calculan

$$n_1 = \frac{\sin(\theta_1) + 1}{2}, \quad n_2 = \frac{\sin(\theta_2) + 1}{2}, \quad (9.3.4)$$

de modo que $n_1, n_2 \in [0, 1]$. De esta manera no tenemos valores negativos del estado, es decir su estado va desde 0 hasta 1.

A continuación promediamos, ambos valores n_1 y n_2 y escalamos al equivalente de 8 bits, es decir 256 valores, $[0, 255]$:

$$\text{Promedio} = \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \right) \times 255. \quad (9.3.5)$$

Y por último el código generado por ChatGPT aplica un código de colores al valor promedio resultando en:

azul para valores bajos (≈ 0),

verde/amarillo para valores intermedios,

rojo para valores altos (≈ 255).

El resultado de la simulación se puede ver en el siguiente vídeo <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/MapaFase.mp4>.

Como anticipábamos, en la zona central hay estabilidad, y fuera de ella no se ven patrones, sino que aparece una especie de ruido. En estas zonas “ruidosas” lo que tenemos es caos, es decir, el estado del péndulo varía continuamente, y lo que es más importante el estado de cada péndulo es totalmente distinto de los péndulos vecinos, lo que manifiesta de nuevo la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para ver más detalladamente esta sensibilidad a las condiciones iniciales vamos a hacer zooms en áreas alejadas del centro. Se hacen hasta tres zooms consecutivos hasta llegar a una zona rectangular de 0.01 grados x 0.01 grados en las que se simulan los 720x720 péndulos. No importa cuanto nos adentramos en el mapa de fase: no se consigue que los péndulos vecinos vayan a la vez. El vídeo detallado está en <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/ZoomSucesivo.mp4>

En el siguiente vídeo <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/MapaFaseAcelerado.mp4> aparece la misma simulación, pero esta vez dejando que corra más el tiempo. En ella se ve que a medida que

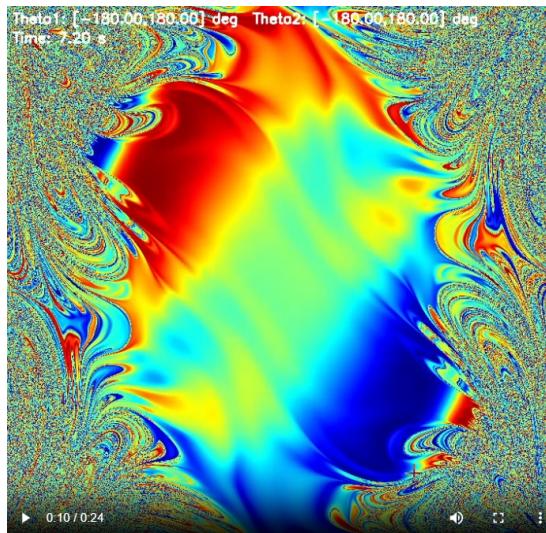


Figura 9.2: Mapa de Fase Detallado de 720x720 péndulos

avanza la simulación la zona central se va reduciendo, y el caos se apodera de más zonas. Hay que tener en cuenta que estamos en un sistema sin rozamiento, y que puede estar corriendo infinitamente. Zonas que al principio parecían estables, se convierten en caóticas, quedando una pequeña porción como estable.

Se pueden ver aparecer algunas pequeñas “islas” de estabilidad. Hagamos zoom en una de ellas y veamos como avanza la simulación en ella (vídeo en <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/MapaFaseAceleradozoom.mp4>) :

Al igual que en el caso del mapa logístico hay pequeñas zonas de estabilidad alejadas del centro, rodeadas de caos. Pero la verdad es que hay que decir que son unos pocos y limitados casos.

10 Bifurcaciones

¿Qué más paralelismos podemos encontrar en el doble péndulo al compararlo con el mapa logístico?. Vamos a hacer un nuevo ejercicio. En este caso vamos a simular la diagonal del mapa de fases anterior, es decir, vamos a coger los valores de θ_1 y de θ_2 y los vamos a variar desde -180 hasta 180 grados simultáneamente por medio de una sola variable de control. Puesto que el péndulo doble no tiende hasta un valor final, ya que está continuamente moviéndose al ser sin rozamiento, vamos a registrar el valor máximo en cada oscilación, y lo vamos a plotear para cada valor del ángulo inicial. Veamos el resultado:

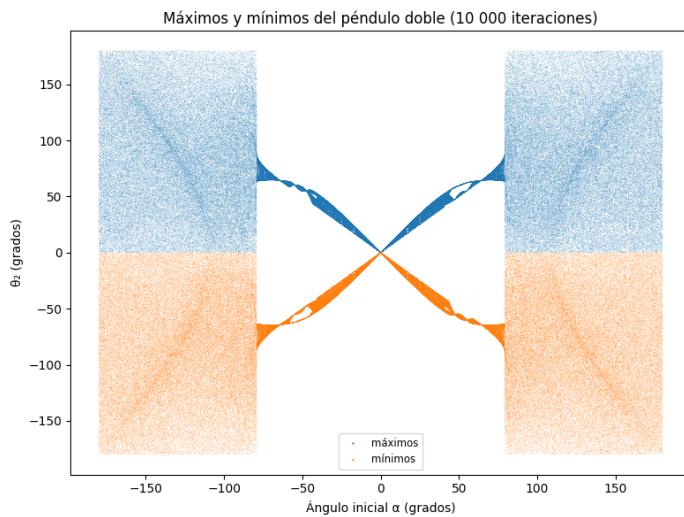


Figura 10.1: Bifurcaciones en el doble péndulo

Vemos tres zonas diferenciadas. La primera de ella de 0 hasta 40 grados. En esta zona el valor de los máximos alterna entre varios puntos, con muchas ramificaciones o bifurcaciones adicionales que se van expandiendo y replegando. En ningún momento podemos hablar de caos, sino de comportamiento periódico

A partir de los 43 grados, el diagrama se abre en dos ramas perfectamente distinguibles, que se vuelven a juntar a partir de los 57 grados. Curiosamente en torno a 64 grados, tenemos un único punto, por lo que el sistema podríamos decir que se comporta igual que un péndulo simple. De 64 grados hasta casi los 80 seguimos con las ramificaciones/bifurcaciones. Y a partir de los 80 grados tenemos el caos absoluto.

Visto lo visto, me pregunté lo siguiente. ¿Cuál será el exponente de Lyapunov en cada una de las zonas?. Si bien yo no sabía como calcularlo, pues a diferencia de la función logística no tengo una expresión para ir calculando la derivada, le lancé la pregunta a ChatGPT. Al parecer existe un algoritmo llamado de “método de Benettin” que permite calcularlo. ChatGPT lo implementó en un script de Python y lo lancé en mi ordenador. El resultado fue el mostrado en la [Figura 10.4](#).

Al igual que con la función logística el exponente es prácticamente cero hasta los 80 grados. A partir de ahí sube abruptamente hasta valores de más de uno, lo que nos confirma que estamos en una zona caótica.

10.1. Zonas estables y caóticas en la atmósfera

Vamos a extender los paralelismos. Ya hemos visto como dos sistemas tienen comportamientos parecidos en cuanto a su comportamiento caótico. Vemos que aparecen bifurcaciones, zonas estables, zonas caóticas, etc..

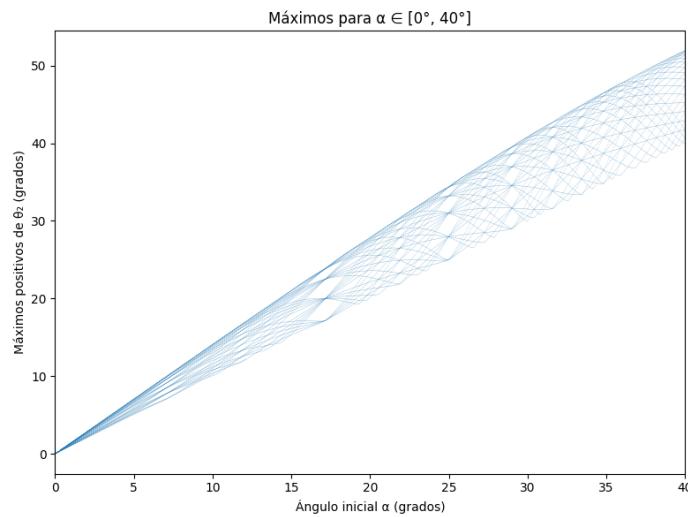


Figura 10.2: Bifurcaciones en el doble péndulo zoom 1

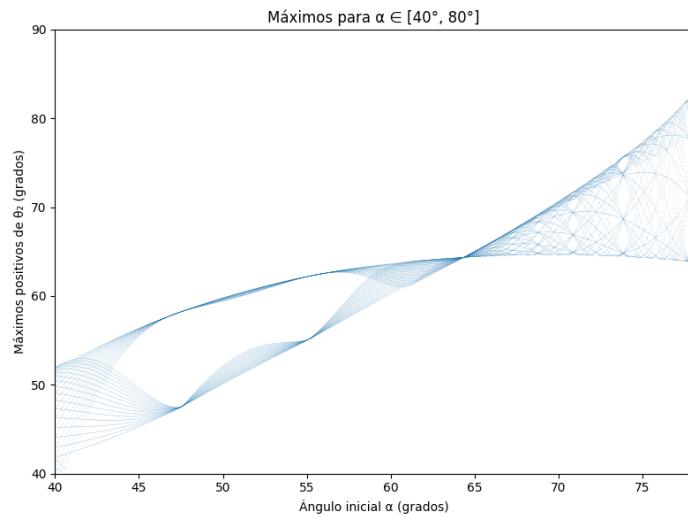


Figura 10.3: Bifurcaciones en el doble péndulo zoom 2

En meteorología también distinguimos **regímenes estables**, **transiciones** y **comportamiento caótico**, de modo que el horizonte de predictibilidad varía según el nivel de caos.

Así tenemos zonas de estabilidad atmosférica en determinadas regiones del planeta, que vienen dadas por lo general por estas situaciones como los **Bloqueos atmosféricos**: grandes áreas de alta presión que pueden persistir días o semanas, desviando bajas presiones y estabilizando el tiempo.

En España es el típico anticiclón de las Azores, que cuando se sitúa en las Azores provoca que no entren las bajas presiones en la península, situación que puede llegar a durar varias semanas, y en el que el tiempo es muy estable.

En estos casos las pequeñas perturbaciones no se amplifican rápidamente y la predicción puede ser fiable hasta **8–10 días** o más.

Más información sobre bloqueos:

<https://cazatormentas.com/anticiclones-bloqueo-patron-climatico/>

También hay zonas de alta actividad caótica que se pueden dar por

- **Convección intensa:** tormentas y cumulonimbos que evolucionan en horas.
- **Frentes rápidos:** líneas de inestabilidad que se reorganizan de forma impredecible.

Aquí el horizonte de predictibilidad baja a **1–2 días** o menos, pues un error pequeño en humedad o temperatura crece exponencialmente.

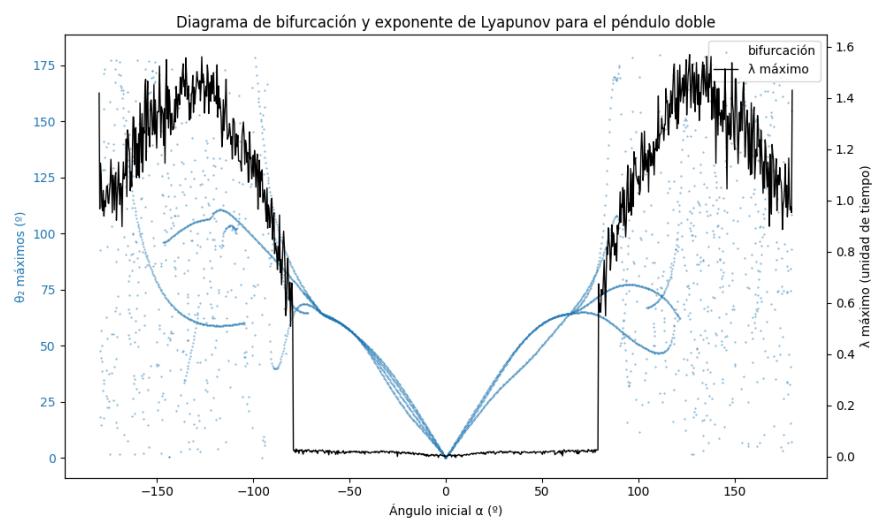


Figura 10.4: Bifurcaciones en el doble péndulo y exponente de Lyapunov

11 Qué podemos predecir

Hasta ahora nos hemos llevado la impresión de que en un sistema caótico no podemos predecir nada. Pero tampoco es así la cosa, y lo vamos a ver con el péndulo doble. Vamos a simular el péndulo doble tirándolo desde $\theta_1 = 170$ grados y $\theta_2 = 170$ grados, posición de partida que sabemos que es caótica. El ángulo θ_2 lo vamos a variar 20 veces en pasos de 0.0005 grados (en total 1 milésima de grado de variación). Lanzamos esos 20 péndulos, y le pedimos a ChatGPT que en la simulación vaya acumulando la distancia total recorrida por cada péndulo en su extremo. El resultado para los primeros 20 segundos de simulación está en la siguiente figura:

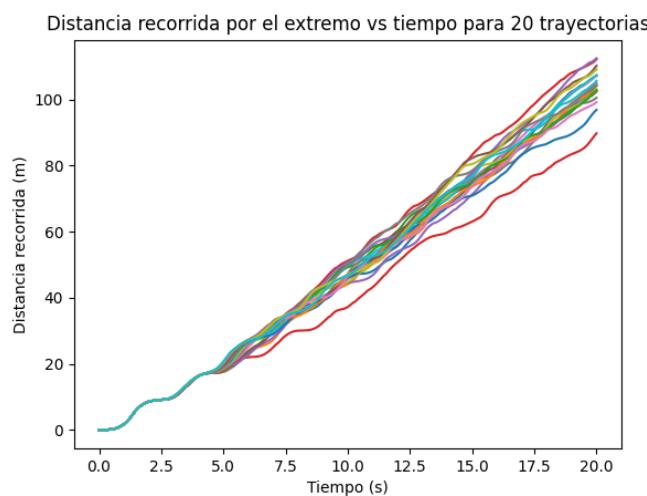


Figura 11.1: Distancia recorrida por el extremo del péndulo

Como podemos ver la trayectoria de los 20 péndulos diverge desde el principio en términos de la distancia recorrida, y puesto que estamos hablando de diferencias de 0.5 milésimas de grado entre péndulos, sabemos que el predecir la distancia recorrida con exactitud en la realidad va a ser imposible. Es decir, estamos donde estábamos hasta ahora.

Pero, ¿qué pasa si simulo 1000 segundos?. Pues como vemos en la siguiente figura, el sistema ya no parece tan impredecible. La distancia recorrida va incrementándose prácticamente de forma lineal cuando ampliamos la duración de la simulación.

Esto es lo que pasa en la predicción climática cuando hacemos predicciones a largo plazo. Si bien no podemos saber lo que pasará en un día concreto en un lugar preciso, sí podemos saber su comportamiento con un margen de error razonable. Al igual que con el péndulo doble, en el que podemos predecir la distancia recorrida a los 2000 segundos viendo lo que se ha movido en los primeros 1000 segundos: va a ser aproximadamente el doble sin mucho margen de equivocación.

11.1. Ejemplos en predicción climática

Hay varios ejemplos que ilustran como se aplica este principio a la predicción climática. Sin duda, el ejemplo más ilustrativo es el **Predicción de la temperatura media global**. Para ello se usa un modelo CGM (General Circulation Model), que es un modelo de la Circulación General de la Atmósfera y los Océanos. Con este modelo, aunque no sepamos si lloverá en Madrid el 15 de julio de 2030, podemos proyectar que la temperatura media anual aumente.

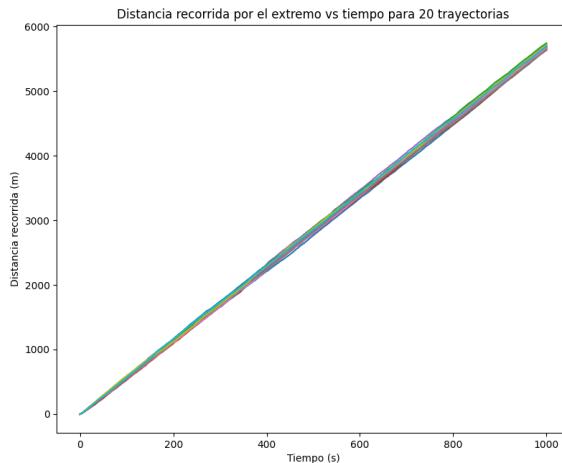


Figura 11.2: Distancia recorrida por el extremo del péndulo tras 1000 segundos

Otro ejemplo es el uso de Modelos empíricos combinados con GCMs para estimar la frecuencia de olas de calor o períodos de sequía en un horizonte de 10–30 años. Aunque la fecha exacta de la próxima ola de calor es impredecible, podemos calcular que su probabilidad anual aumenta de, por ejemplo, un 5 % a un 15 % bajo escenarios de +2 °C de calentamiento global.

La enseñanza clave es que **el clima** funciona como el **comportamiento total a largo plazo** del péndulo doble:

- A **corto plazo**, ambos sistemas son caóticos e impredecibles con precisión puntual.
- A **largo plazo**, emergen **tendencias medias** y estadísticas que sí podemos estimar y utilizar para planificar políticas, infraestructuras y medidas de adaptación.

Así, la analogía del péndulo doble nos ayuda a entender por qué los modelos climáticos son fiables para predecir promedios y tendencias, aunque jamás podrán garantizar el tiempo puntual de un día concreto dentro de meses o años.

12 Experimentos

12.1. Introducción

Para observar y realizar experimentos sobre el caos en un sistema físico real, he adquirido un péndulo doble, un dispositivo en el que es posible apreciar el caos con facilidad y en un corto período de tiempo.



Figura 12.1: Péndulo doble usado en los experimentos

En este experimento he comprobado que, en el péndulo doble, los pequeños errores y las desviaciones de las condiciones iniciales se multiplican muy rápidamente, de modo que resulta ser un sistema caótico, aunque existan ecuaciones para determinar la posición de cada masa.

En primer lugar, he colocado tres pegatinas de colores: la roja en el extremo del segundo péndulo, la verde en el eje que une el primer péndulo con el segundo y la azul en el eje del primer péndulo. A continuación, mediante un programa que desarrollé en Python con la ayuda de ChatGPT y una webcam, he seguido las trayectorias de cada uno de los tres puntos de color, que corresponden a las partes más relevantes del péndulo doble. Uno de los problemas que tuve era que el programa era bastante primitivo, y capturaba las coordenadas de cualquier objeto de color verde, rojo o azul que hubiese a la vista de la cámara. Por ello, durante los experimentos tuve que quitar cualquier objeto de esos colores de la habitación donde estaba.

Para reproducir condiciones iniciales prácticamente idénticas, dejé caer el péndulo siempre desde la vertical —a 90 grados respecto a la posición de equilibrio—, con el segundo péndulo colgando en la misma orientación que el primero, y lo impulsé cada vez de la manera más suave posible, únicamente lo necesario para que comenzara a oscilar y adquiriera la misma velocidad inicial. Repetí este procedimiento varias veces y registré la trayectoria de los tres puntos coloreados con mi programa. Posteriormente, elaboré una animación en la que se muestran las trayectorias del punto rojo —el que presenta comportamiento más caótico— en tiempo más lento que el real, con el fin de apreciar mejor las diferencias entre cada ensayo. En dicha animación puede observarse que, a partir del primer segundo, las trayectorias comienzan a divergir significativamente y, al cabo de unos segundos, resultan completamente distintas. Lo mismo pasaba en las simulaciones de abanico que vimos en la sección [Simulación](#)

Aquí se ve el péndulo doble en movimiento con las diferentes partes representadas con un punto de un color, que es lo que le sirve al programa para determinar las trayectorias <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/PendulodobleVivo.mp4>.

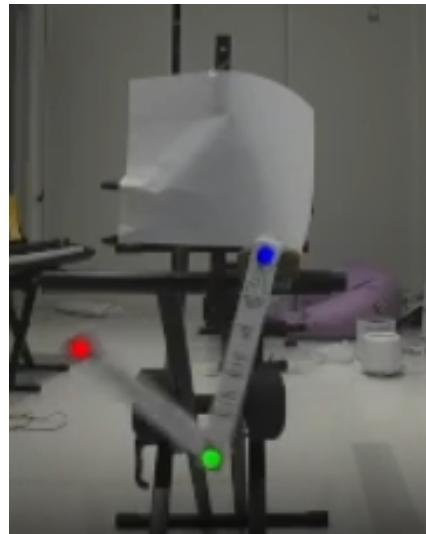


Figura 12.2: Experimento del péndulo doble

En [Figura 12.3](#) están las trayectorias del punto rojo del péndulo en cinco tiradas desde la misma posición y con la misma velocidad inicial. Se puede apreciar como al principio su trayectoria diverge muy rápidamente, pero al final, cuando ya han perdido mucha velocidad, hacen todos un recorrido muy similar hasta detenerse.

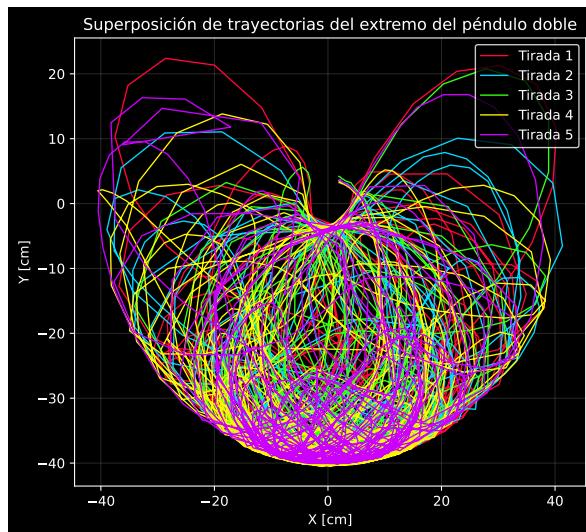


Figura 12.3: Trayectoria real de 5 tiradas de un péndulo doble

Esta es la animación que representa la trayectoria que han seguido tres tiradas. El tiempo que aparece es el tiempo que ha pasado realmente, ya que la trayectoria está ralentizada para que sea más fácil seguir como van divergiendo. <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/trayectorias.gif>

12.2. Comparación con el péndulo simple

A continuación vamos a mostrar cinco tiradas del péndulo simple. El péndulo es el mismo que en el caso anterior, lo único que fijamos el pivote central para que no se mueva, por lo que pasamos de tener un péndulo doble a uno simple. Igual que en el caso anterior, seguimos el extremo con el punto rojo.

Como podemos ver en la siguiente figura, a pesar de lanzarse cada una de las veces desde posiciones ligeramente distintas, las trayectorias son idénticas.

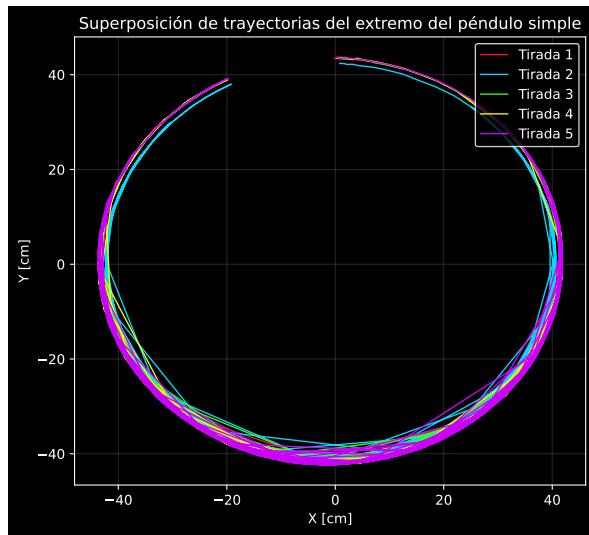


Figura 12.4: Trayectoria real de 5 tiradas de un péndulo doble

Y si miramos en la animación el ángulo del péndulo en cada una de las trayectorias, vemos de nuevo que en función del tiempo las trayectorias son muy similares https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/theta_vs_time.gif.

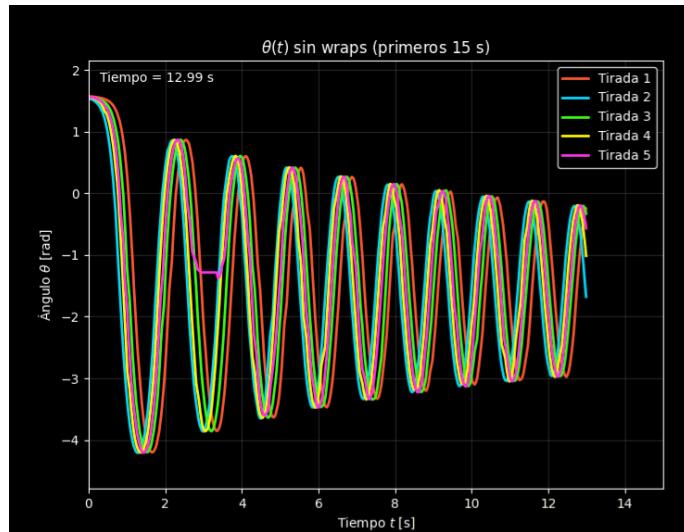


Figura 12.5: Ángulos de 5 tiradas de un péndulo simple

Y si hacemos el ajuste de los tiempos iniciales el solape es casi total como se puede ver en la Figura 12.6

He hecho este mismo gráfico con los datos de las tiradas del péndulo doble https://colacaos.github.io/ColaCAOS/02-pendulo-doble/theta_doble.gif. El contraste con el péndulo doble es mayúsculo. En el péndulo doble no había ni una sola trayectoria idéntica, divergían continuamente. En el péndulo simple se ve como van iguales.



Figura 12.6: Ángulos de 5 tiradas de un péndulo simple ajustando el tiempo inicial

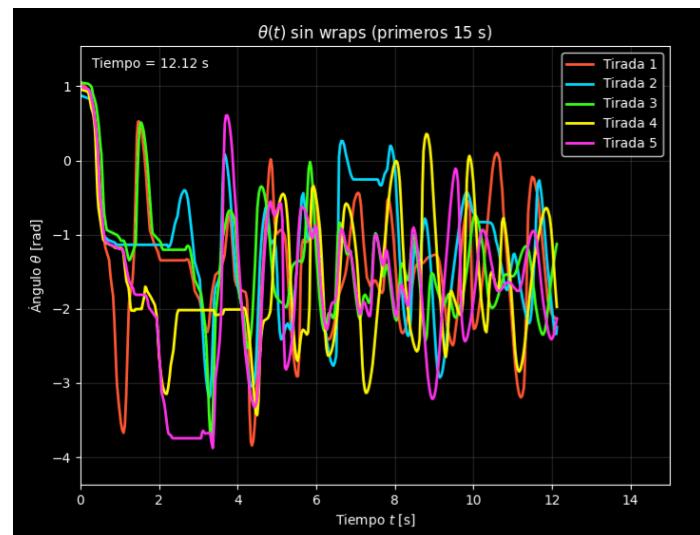


Figura 12.7: Ángulos de 5 tiradas de un péndulo doble

Parte IV

La Meteorología y el Caos

13 Caos en las predicciones

meteorológicas

La meteorología es un ejemplo paradigmático de sistema caótico. Edward Lorenz, en su famoso artículo de 1963 [Deterministic Nonperiodic Flow^{\[38\]}](#), demostró que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales pueden producir divergencias exponenciales en la evolución del sistema atmosférico. Esta propiedad se cuantifica mediante el **exponente de Lyapunov**, el cual mide la tasa a la que dos trayectorias inicialmente cercanas se separan en el espacio de fases.

Como ya hemos mencionado uno de los retos del proyecto es demostrar que el tiempo es un sistema caótico. En la versión digital de esta memoria en github está detallado el cálculo del exponente de Lyapunov cogiendo medidas reales de variables como la temperatura y el viento, y analizándolas por medio de rutinas hechas por ChatGPT (ver <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/03-meteorologia/calculolyapunov.html>). Los valores resultantes son lo esperado: un horizonte de predictibilidad de 10 días para la temperatura media diaria.

Ahora vamos a emprender un método indirecto de cálculo desarrollado por mí. Las diferentes organizaciones meteorológicas realizan todos los días predicciones de hasta 14 días. Puesto que el tiempo es caótico, este caos se tiene que reflejar en el error de las predicciones. A medida que aumenta la distancia con respecto al día actual, el error tiene que aumentar. Este incremento no será lineal sino que será exponencial, de acuerdo a la teoría que ya hemos visto. Si cogemos los errores, y hacemos un logaritmo, podremos hacer una regresión lineal del logaritmo del error, lo que nos dará el exponente de Lyapunov. Así de sencillo. Se trata de una medida indirecta, pero creo que muy sencilla del exponente de Lyapunov. El punto fundamental es asumir que los modelos implementados en los supercomputadores de las agencias meteorológicas son fidedignos a la realidad, y que el error en los pronósticos se debe a los errores de las condiciones iniciales. De esta manera podemos ver como las perturbaciones iniciales se propagan en el tiempo.

13.1. Proceso de Recopilación de Datos Mediante el Script de Python

En este punto lo primero que tenemos que hacer es recopilar datos. En este caso en vez de usar open-meteo, usé Visual Crossing (<https://www.visualcrossing.com/>) , que dispone también de una utilidad gratuita para descargar previsiones meteorológicas. Para ello, pedí a ChatGPT que hiciera un script para coger los datos de Visual Crossing. El script desarrollado tiene dos funciones principales, diseñadas para ir acumulando la información necesaria a lo largo del tiempo:

a) *Registro de Pronósticos (“Forecast”)*

Cada día se obtiene un pronóstico para 15 días (el día actual + 14 días de anticipación) a través de la API de Visual Crossing. Para cada parámetro (temperatura, humedad, presión y velocidad del viento), se crea un archivo CSV en el que cada fila contiene:

- **Columna 1:** La fecha de creación del pronóstico (formato americano: M-D-YYYY).
- **Columnas 2 a 15:** Los valores predichos para 1 día adelante, 2 días adelante, ..., hasta 14 días adelante.

Matemáticamente, si denotamos por $F_{\text{param}}(d, n)$ el valor predicho para el parámetro en el día $d + n$ cuando el pronóstico se realizó en el día d , la fila correspondiente al pronóstico realizado en la fecha d es:

$$\text{Fila}_d = [d, F_{\text{param}}(d, 1), F_{\text{param}}(d, 2), \dots, F_{\text{param}}(d, 14)] \quad (13.1.1)$$

b) *Registro Retroactivo (“Retro”)*

El propósito de este archivo es reconstruir, para cada día objetivo, la evolución de los pronósticos hechos en días anteriores y compararlos con el valor observado real. Para cada parámetro se crea un archivo CSV en el que cada fila contiene:

- **Columna 1:** La fecha del día objetivo (por ejemplo, ayer, formato M-D-YYYY).
- **Columna 2:** El valor observado históricamente para ese día.
- **Columnas 3 a 16:** Los pronósticos para ese mismo día, realizados desde 1 hasta 14 días antes.

En otras palabras, para un día objetivo d_{target} , se recupera el pronóstico realizado en $d_{\text{target}} - n$ (para $n = 1, 2, \dots, 14$) y se toma el valor predicho correspondiente al n -ésimo día. La fila retroactiva es:

$$\text{Retro}_d = [d_{\text{target}}, O(d_{\text{target}}), F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - 1, 1), F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - 2, 2), \dots, F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - 14, 14)] \quad (13.1.2)$$

donde $O(d_{\text{target}})$ es el valor observado real para el parámetro en el día objetivo.

La estructura de los dos ficheros se detalla en la siguiente figura

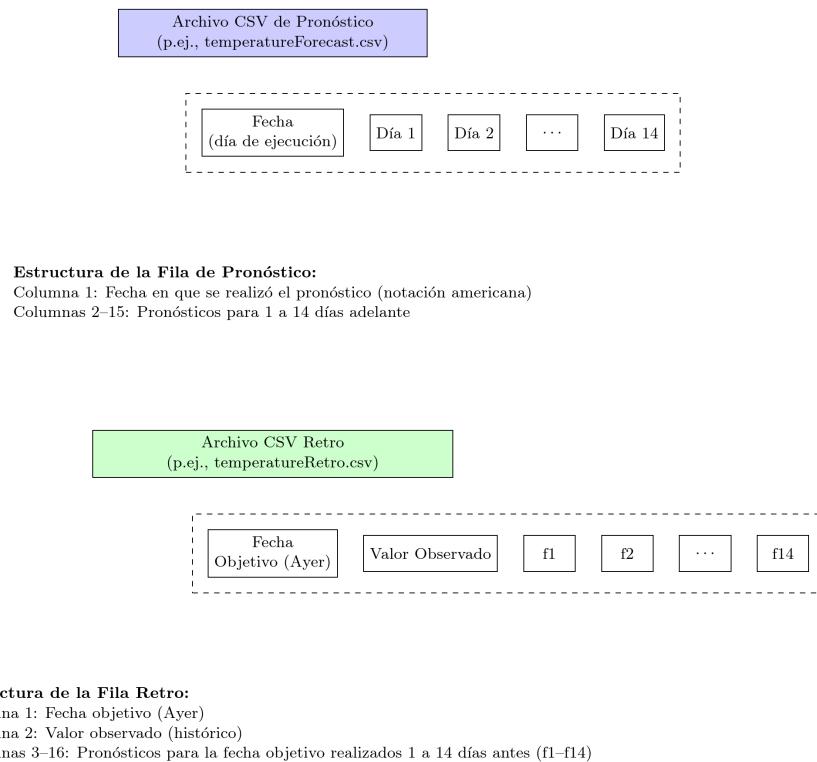


Figura 13.1: Estructura de los ficheros de observaciones y pronósticos

Y el procedimiento que hace el script diariamente se detalla a continuación.

El error de cada pronóstico se define como:

$$e(n) = |F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - n, n) - O(d_{\text{target}})| \quad (13.1.3)$$

para $n = 1, 2, \dots, 14$. Esta serie $\{e(n)\}$ representa cómo varía el error en función del tiempo de anticipación.

13.2. Análisis de Datos y Determinación del Coeficiente de Lyapunov

a) Enfoque Teórico Clásico

En un sistema caótico, la separación entre dos trayectorias evoluciona de forma exponencial. Asumiendo que el error en el pronóstico $e(n)$ crece de manera similar, se modela como:

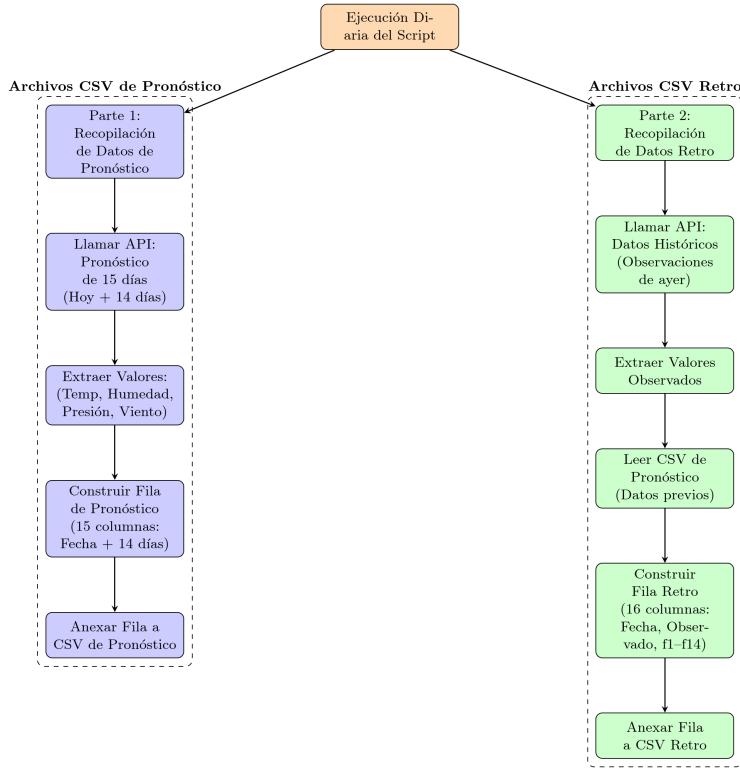


Figura 13.2: Estructura de los ficheros de observaciones y pronósticos

$$e(n) = e(0) e^{\lambda n} \quad (13.2.1)$$

Tomando logaritmos:

$$\ln e(n) = \ln e(0) + \lambda n \quad (13.2.2)$$

Por lo tanto, si se realiza un ajuste lineal de $\ln e(n)$ en función de n , la pendiente de la recta brinda una estimación empírica de λ .

b) Enfoque Empírico Propuesto

En este estudio, en lugar de disponer de dos trayectorias infinitesimalmente separadas, se utilizan las diferencias en las predicciones realizadas en distintos días para el mismo objetivo. Cada error $e(n)$ se obtiene como la diferencia entre el pronóstico hecho n días antes y el valor observado:

$$e(n) = |F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - n, n) - O(d_{\text{target}})| \quad (13.2.3)$$

La estimación empírica del exponente de Lyapunov se obtiene realizando un ajuste lineal de:

$$\ln e(n) = \ln e(0) + \lambda_{\text{emp}} n \quad (13.2.4)$$

donde λ_{emp} es la pendiente obtenida a partir de la regresión lineal sobre los datos $(n, \ln e(n))$.

Esto ya lo vimos en la sección [Efecto mariposa](#). En esa sección vimos como el error iba creciendo exponencialmente, y al hacer el logaritmo nos quedó una recta cuya pendiente era el exponente de Lyapunov de la función logística para ese valor de r . En este caso, veremos que el error de pronóstico crece también exponencialmente, no linealmente, lo que al hacer el logaritmo nos permitirá sacar la pendiente y por tanto el exponente de Lyapunov.

c) Confrontación con la Fórmula Tradicional

Fórmula Tradicional:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} \quad (13.2.5)$$

Fórmula Empírica del Estudio:

$$\lambda_{\text{emp}} \approx \text{slope}(\ln e(n) \text{ vs. } n) \quad (13.2.6)$$

En este caso, $e(n)$ incorpora tanto la sensibilidad a las condiciones iniciales como los errores inherentes del modelo de pronóstico. Además, el análisis se realiza sobre un rango discreto de días (1 a 14), por lo que λ_{emp} debe interpretarse como una aproximación de la tasa de divergencia del error.

13.3. Resultados

Durante los meses de febrero, marzo y abril estuve recopilando las predicciones y los valores observados de temperatura, humedad, viento y presión atmosférica para Galapagar.

El conjunto de errores para cada día de la predicción se muestran a continuación (cada línea representa un día en el que se realiza la predicción).

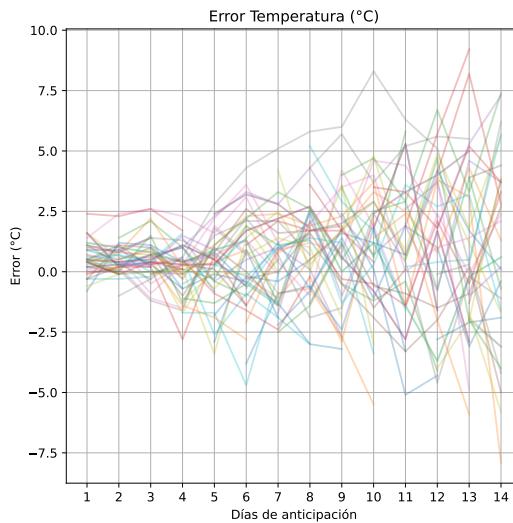


Figura 13.3: Error de temperatura en escala lineal

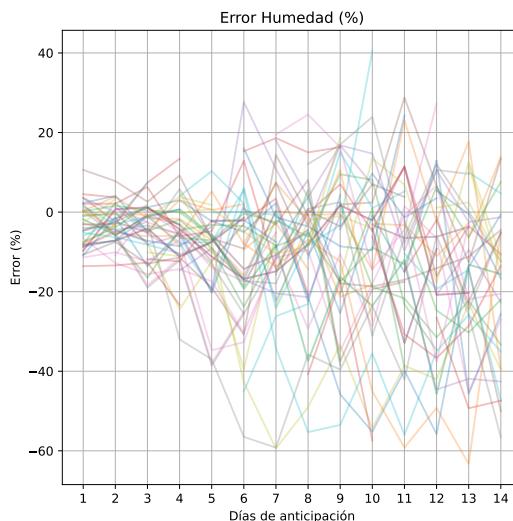


Figura 13.4: Error de humedad en escala lineal

Los errores medios en valor absoluto de predicción en función del número de días anteriores en los que se hizo la predicción se muestran a continuación. Se ve claramente que los errores van aumentando exponencialmente.

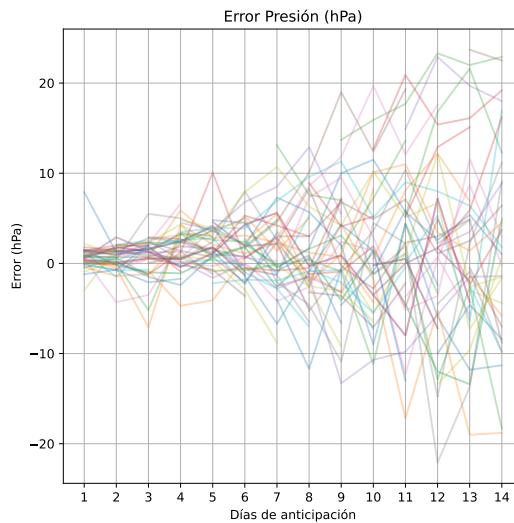


Figura 13.5: Error de presión en escala lineal

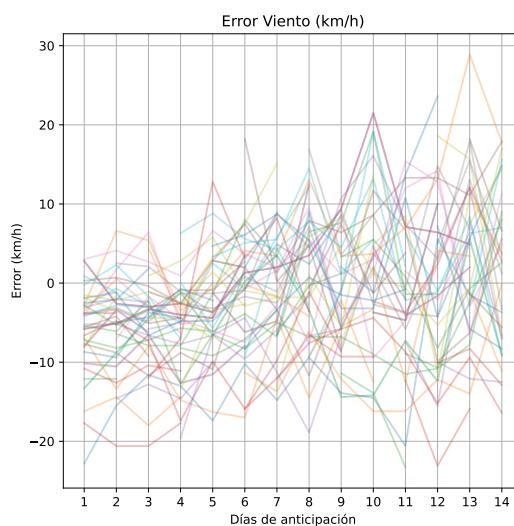


Figura 13.6: Error de velocidad del viento en escala lineal

Y ahora le pedimos a ChatGPT que nos calcule el exponente de Lyapunov, y que nos trace de forma superpuesta el error de acuerdo al exponente de Lyapunov.

Para la temperatura, presión y humedad se ve claramente que el error crece exponencialmente con el tiempo. No estamos ante un crecimiento lineal, que sería propio de sistemas no caóticos, sino ante un crecimiento exponencial. Es este aspecto lo que dificulta e imposibilita que podamos llegar a tener una predicción a largo plazo exacta de la atmósfera.

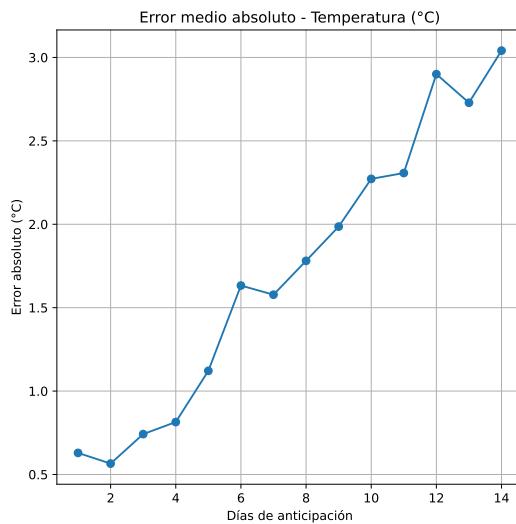


Figura 13.7: Error medio absoluto de temperatura en escala lineal

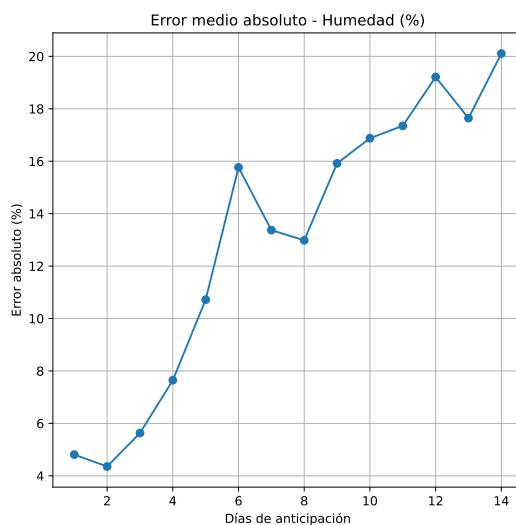


Figura 13.8: Error medio absoluto de humedad en escala lineal

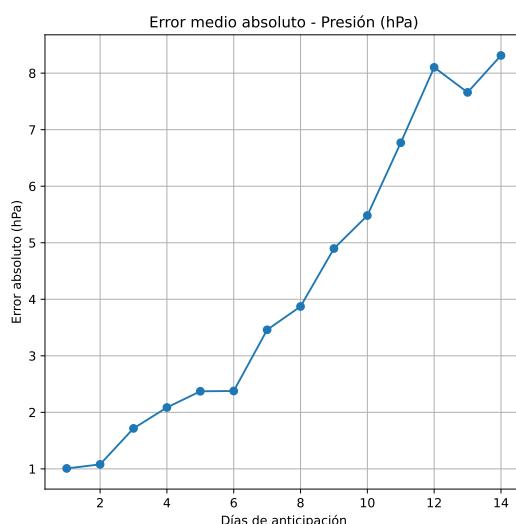
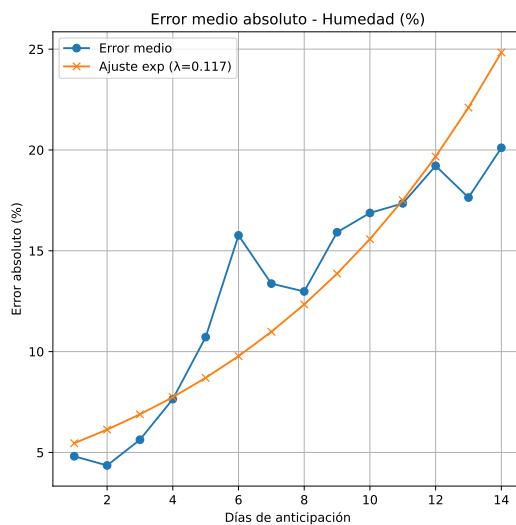
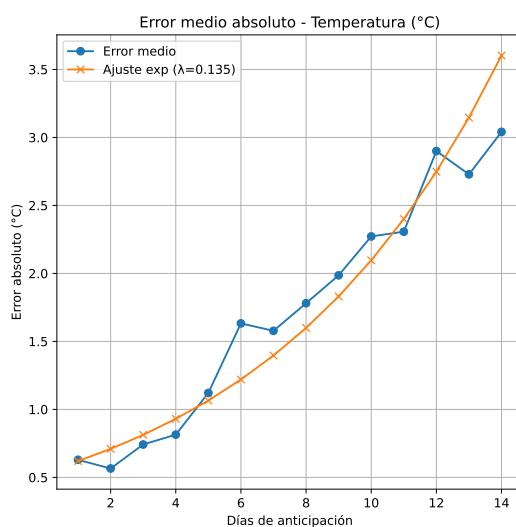
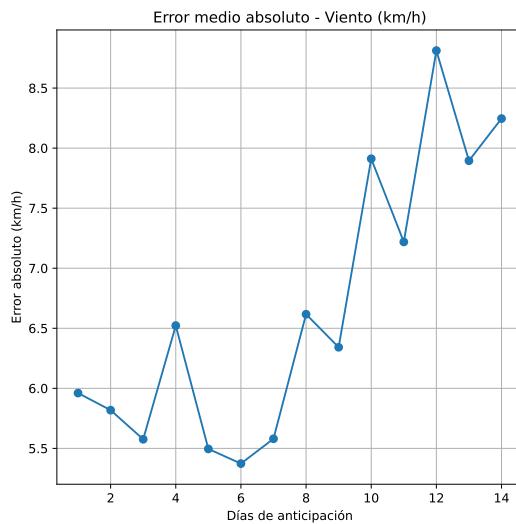


Figura 13.9: Error medio absoluto de presión en escala lineal



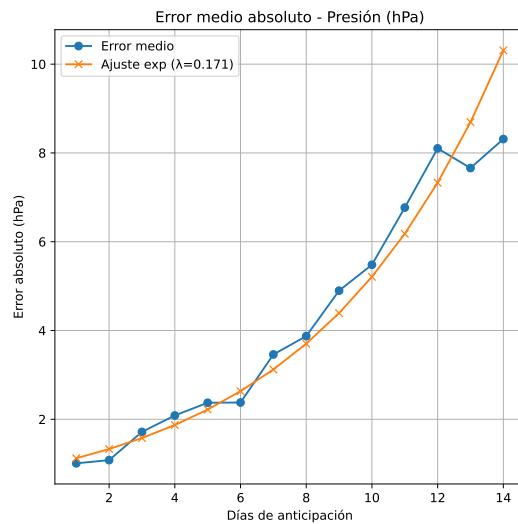


Figura 13.13: Error medio absoluto de presión y ajuste de regresión

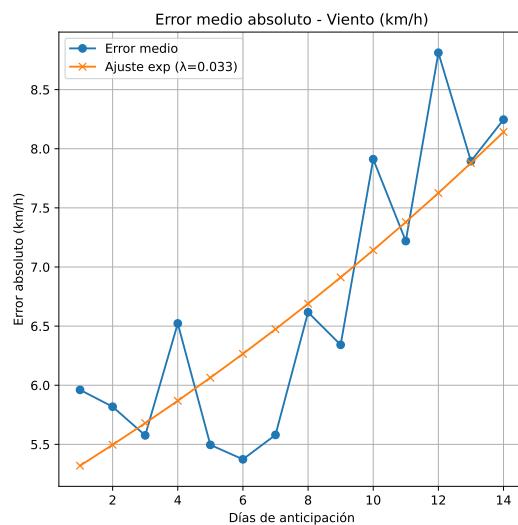


Figura 13.14: Error medio absoluto de velocidad del viento y ajuste de regresión

14 Entrevista con expertos de la AEMET

El Jueves 19 de Junio tuve la oportunidad de tener una entrevista con dos meteorólogos de la Agencia Estatal de Meteorología para hacerles algunas preguntas sobre la parte del proyecto donde se estudia el caos en la predicción meteorológica y climática. De esta manera he podido incluir también la opinión de expertos en el tema en este proyecto. Aquí están todas las preguntas que hice durante la entrevista y cuáles fueron las respuestas de los expertos:

14.1. ¿Qué condiciones atmosféricas hacen que el sistema sea más caótico y por tanto que sea más difícil llevar a cabo una predicción meteorológica fiable, y cuales lo hacen más fácil?

Las condiciones en las que la atmósfera es más inestable como borrascas o ambientes de tormenta, porque es más difícil establecer unas condiciones iniciales que no tengan mucho error y que sean precisas. Esto hace que el error inicial en las mediciones sea grande y que se propague más rápidamente.

14.2. ¿Existe un horizonte de predictibilidad a partir del cual las predicciones meteorológicas no van a llegar a ser fiables nunca sin importar los avances tecnológicos y en los modelos que se puedan llevar a cabo en el futuro? ¿Cuál consideráis que es el horizonte de predictibilidad actualmente?

Sí, existe un horizonte de predictibilidad en meteorología, y es teórico y práctico al mismo tiempo. Se trata de un límite físico-matemático impuesto por la naturaleza del sistema atmosférico: un sistema caótico y no lineal. Este límite está alrededor de los 20 días y no importa cuán potentes sean los ordenadores del futuro o lo precisos que sean los sensores, este límite no va a poder superarse.

14.3. ¿Qué avances tecnológicos o metodológicos han mejorado más la capacidad predictiva frente a la naturaleza caótica de la atmósfera?

Los satélites, ya que permiten tomar mediciones de las diferentes capas de la atmósfera con más facilidad y de zonas más amplias que los globos meteorológicos, la capacidad computacional de los superordenadores y que se van añadiendo nuevos términos a las ecuaciones que dan más detalle y ayudan a mejorarlasy.

14.4. ¿Existe algún parámetro como precipitación, viento, temperatura o humedad que sea más difícil de predecir y más caótico que otro o por el contrario más fácil de predecir que otro?

Si, los parámetros que son derivados de los demás que se obtienen sabiendo otros como la precipitación o la nubosidad, ya que no salen directamente de las ecuaciones que se utilizan en las predicciones, si no que se obtienen teniendo en cuenta mucho parámetros más simples que si salen de las ecuaciones

14.5. ¿Cómo se tiene en cuenta el error que existe a la hora de hacer las simulaciones de la atmósfera, que vienen dados por el propio límite de los ordenadores en cuanto a precisión en los decimales?

No existe ningún método como tal para reducir o eliminar ese error pero muchas veces no se llega a aprovechar toda la precisión que te permite el ordenador ya que los cálculos llevan mucho tiempo, y muchas veces se necesitan tener terminadas las predicciones rápidamente.

14.6. ¿Existe sensibilidad a las condiciones iniciales en las predicciones climáticas a largo plazo de la misma manera que en la predicción meteorológica, donde acaban dando lugar al caos?

Si existe pero las condiciones iniciales afectan menos ya que las ecuaciones utilizadas se simplifican y se vuelven lineales. Por otra parte el resultado no tiene que ser tan preciso ya que lo que se obtiene es una media. Sin embargo, aunque no sea casi caótico sigue siendo difícil establecer las condiciones iniciales por lo que el error inicial puede acabar propagándose aunque más lentamente que en las predicciones meteorológicas.

14.7. ¿Existe alguna condición o tipo de clima el cual presenta más o menos caos a la hora de realizar predicciones a largo plazo?

Sí que existen algunos climas que son más predecibles que otros a largo plazo. En predicción climática, el caos no desaparece, pero su impacto depende mucho del contexto: Si una región está controlada por forzamientos globales regulares, como El Niño, es menos caótica y más predecible. Si depende del ruido interno de la atmósfera o de factores locales, el caos reina y la predictibilidad climática estacional es baja.

14.8. ¿Es el caos la razón de que algunas de las predicciones climatológicas hechas hace varias décadas no hayan sido muy precisas o incluso algunas hayan llegado a fallar?

Sí puede serlo algunas veces, aunque también influyen muchos factores externos como la actividad humana que no se pueden predecir.

Parte V

El Clima y el Caos

15 Clima

Llegamos a la parte más cualitativa y menos cuantitativa del proyecto, no por ello menos importante. Como bien se manifiesta en los medios de comunicación y en la comunidad científica la predicción del clima es uno los puntos más importantes para la Humanidad. Si bien en el capítulo anterior hemos investigado sobre como afecta el caos a la previsión meteorológica ahora vamos a hacer lo mismo con el clima.

Con el tiempo meteorológico a corto plazo todo el mundo asume que las previsiones meteorológicas dejan de tener validez a los diez días. En este proyecto hemos visto que esto se debe a que la atmósfera es un sistema caótico, muy sensible, por lo tanto, a las condiciones iniciales.

Con el clima curiosamente, la sensación general que hay en la sociedad es que puede predecirse. Cada ciertos años el IPCC nos da sus proyecciones sobre el clima para los próximos 100 años, y lo tomamos como válido dado el gran consenso científico en torno a estas proyecciones. ¿Cómo puede ser ésto?. No podemos predecir el tiempo a diez días, pero sí a cien años. A continuación, durante este capítulo, veremos los matices que hay detrás de todo esto.

15.1. Clima y Caos. Historia

Empezaremos por ver cuál es la postura oficial del IPCC sobre la predictibilidad del clima. En los glosarios de los **informes del IPCC**, tanto en el Cuarto Informe de Evaluación (AR4 WG I Annex I) como en el Quinto Informe de Evaluación (AR5 WG II), en la entrada «Predictibilidad», aparece el siguiente texto (recogido del la American Meteorological Society en el año 2000):

«El conocimiento de los estados actual y anteriores del sistema climático suele ser imperfecto, los modelos que mediante esos conocimientos generan predicciones climáticas son, por consiguiente, también imperfectos, y el sistema climático es inherentemente no lineal y caótico, todo lo cual hace que la predictibilidad del sistema climático sea inherentemente limitada. Incluso aunque se utilicen modelos y observaciones arbitrariamente precisos, existen limitaciones a la predictibilidad de un sistema no lineal como el clima (AMS, 2000)»

Aquí tenemos un reconocimiento explícito de que el clima es un sistema caótico. Por lo que llevamos visto en el proyecto, ya sabemos que predecir sistemas caóticos parece un oxímoron. Sin embargo, la ciencia moderna afirma que no es un oxímoron: existen predicciones útiles a corto plazo (deterministas) y a largo plazo (estadísticas o climáticas). La clave está en reconocer el alcance y las limitaciones de cada tipo de predicción.

El reconocimiento del clima como sistema caótico nos retrotrae a los momentos en los que se descubrió el caos atmosférico. Fue **Edward Lorenz en 1961** quién se dio cuenta de la existencia del caos haciendo unas simulaciones de la atmósfera. Recomiendo la lectura de esta página <https://history.aip.org/climate/chaos.htm>, donde se narra como se produjo el descubrimiento. Tal y como se cuenta en esta página web, Lorenz, cuatro años más tarde, en una charla en 1965, afirmó:

«Climate may or may not be deterministic, We shall probably never know for sure»

En este momento, mucha gente empezó a preocuparse porque los cambios climáticos pudiesen venir de forma arbitraria y catastrófica. Reconocer la naturaleza caótica del clima, implicaba reconocer que pequeñas perturbaciones pudieran cambiar el estado a largo plazo de la atmósfera de un estado a otro.

Sin embargo, durante esta época, también existía una corriente de científicos que creía que a pesar del caos, el clima podía predecirse. El argumento era muy sencillo: a pesar de que la atmósfera es caótica todos los años tenemos temporada de huracanes y monzones de forma predecible. Otros aspectos del clima más a largo plazo que también pueden predecirse dentro de unos límites son los ciclos Niño/Niña. Por lo tanto, parece que dentro del caos impera cierto orden.

También relacionado con el caos y el clima, otro descubrimiento que se hizo en las décadas de los 60, 70 y 80 del pasado siglo, fue la evidencia paleoclimática de existencia de cambios muy rápidos del clima. Hasta aquel momento se pensaba que las variaciones del clima eran muy lentas, de miles de años. Pero se encontraron evidencias de cambios rápidos del clima, que podrían estar relacionados con la naturaleza caótica del mismo. En la próxima sección lo detallo.

15.2. Como estudiar el clima

El estudio del clima resulta extremadamente complejo. Los modelos que usa en la actualidad el IPCC tienen en cuenta la circulación atmosférica y la oceánica. Por limitaciones computacionales, la rejilla de cálculo que se emplea es de alrededor 50 kilómetros en horizontal, y en vertical se divide la atmósfera en 30 u 80 niveles hasta llegar a los 50 kilómetros de altura. De forma similar se procede al modelado de los océanos. Además hay que tener en cuenta que el clima global se ve afectado por mecanismos geológicos (volcanes, movimiento de placas tectónicas), por la vegetación y animales, procesos químicos (ciclos de carbono, aerosoles), impacto humano (emisiones de gas de efecto invernadero, usos agrícolas de suelo, deforestaciones/reforestaciones). La combinación de estos factores da lugar a un sistema muy complejo de estudiar, más aún, teniendo en cuenta las relaciones no lineales de muchos de los parámetros, lo que da lugar a un sistema caótico. Muchos modelos nuevos empiezan a tener en cuenta ya este enfoque multifactorial, pero los requisitos de cómputo para hacer un estudio con mucha resolución superan ampliamente los recursos de computación disponibles.

En las dos siguientes secciones analizaremos los cambios que se han producido en el clima en los últimos miles de años, y cómo estos cambios resultan de difícil predicción debido precisamente a la cantidad de factores que entran en juego a la hora de estudiarlos.

16 Atractores

16.1. Definición del clima

Antes de seguir hablando del clima vamos a ver qué entendemos por el clima. Según la Organización Meteorológica Mundial, el clima se define como la descripción estadística —principalmente la media y la variabilidad— de las variables atmosféricas (temperatura, precipitación, viento, etc.) para un lugar dado durante un periodo de referencia de 30 años, lo cual:

- Filtra las variaciones interanuales y anomalías (p. ej. El Niño–Oscilación del Sur).
- Permite identificar tendencias y extremos climáticos a largo plazo.

En la actualidad existe otra corriente de científicos para los que la definición del clima está más relacionada con los sistemas caóticos. Para ellos, el clima no es la distribución de observaciones, sino el **atractor** de un **modelo climático** perfecto bajo condiciones externas fijas. Pero, ¿qué es un atractor?

16.2. Atractor

Para ver lo que es un atractor nos vamos a valer de nuevo de nuestro tan útil mapa logístico.

Vamos a ir a la zona caótica del mapa logístico, con $r = 3.9$. Vamos a ver un plot del valor de la sucesión con el tiempo.

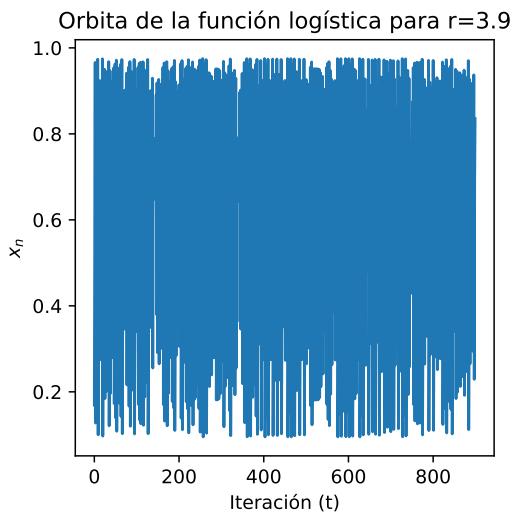


Figura 16.1: Órbita de la función logística para $r = 3.9$

Y ahora vamos a hacer lo mismo con números aleatorios que he mandado generar al ordenador con una distribución uniforme entre 0 y 1.

Aparentemente estamos viendo la misma nube de puntos sin ninguna estructura. Pero, ¿qué pasa si representamos x_{n+1} frente a x_n ? El resultado es una zona de puntos que atrae las distintas iteraciones de nuestra secuencia. ¡Nos encontramos ante un atractor!

Si hacemos lo mismo con los números aleatorios entre 0 y 1 el resultado es el siguiente.

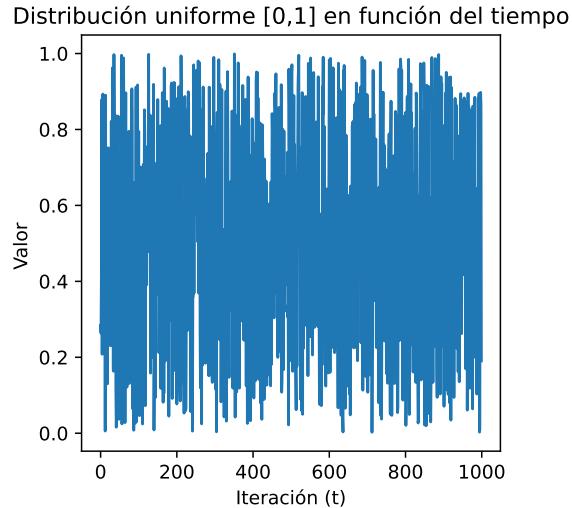
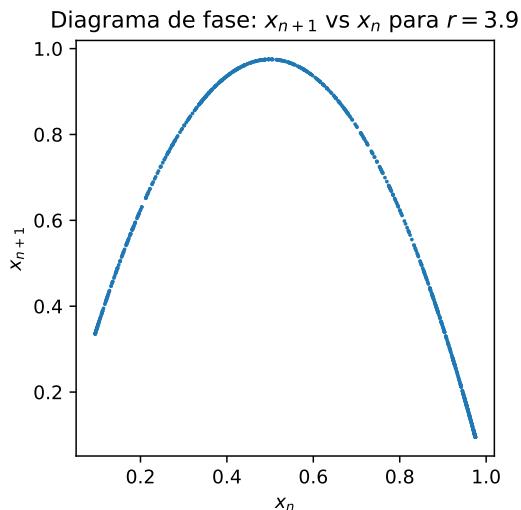


Figura 16.2: Distribución uniforme en función del tiempo

Figura 16.3: Diagrama de fase de la función logística para $r = 3.9$

No hay ninguna estructura que atraiga los valores. Estamos ante un conjunto desestructurado de datos.

Volvamos al atractor del mapa logístico. Uno podría decir que es lógico lo que vemos, ya que los puntos están definidos por la función logística. De hecho, parece que estamos viendo la función logística. Pero hay un detalle: si miras detalladamente verás huecos en la gráfica. ¿Por qué el atractor es distinto de la función logística?

- La ecuación logística

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (16.2.1)$$

es la regla determinista que asigna cada valor x_n al siguiente.

- El atractor es el conjunto de pares (x_n, x_{n+1}) en el espacio de fases donde la dinámica termina estabilizándose tras desechar el transitorio. Aunque la función forma una parábola continua, el atractor sólo ocupa las regiones donde los puntos rebotan de forma caótica y no periódica. Estamos, por tanto, ante un atractor periódico. ¿Qué tipos de atractores hay en el mapa logístico?

1. Punto fijo

Todos los orbitantes convergen a un único punto (x^*, x^*) . Ejemplo: para $0 < r < 1$, $x^* = 0$.

2. Ciclo límite

Oscilaciones periódicas entre un conjunto finito de valores (periodo 2, 4, ...). Sucede para $3 < r < 3.5699 \dots$

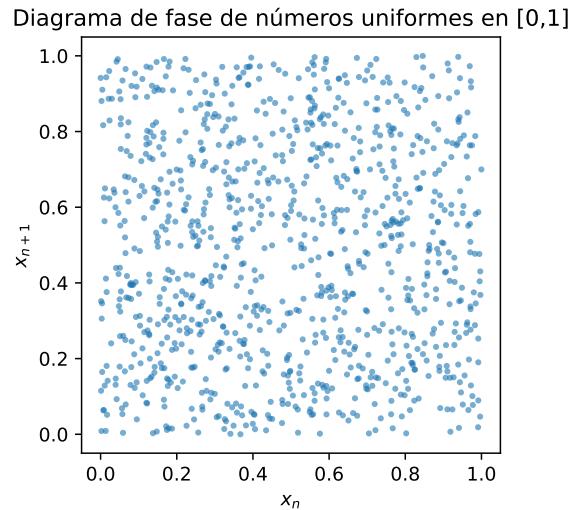


Figura 16.4: Diagrama de fase de números uniformes entre 0 y 1

3. Atractor extraño (caótico)

La razón de que el atractor sea “extraño” es que puntos muy próximos en una iteración pueden acabar muy separados en iteraciones posteriores, generando esa mezcla de estabilidad (se quedan en el atractor) y caos (se mueven sin orden aparente), pero siempre dentro de la misma estructura fractal. Para ver la estructura fractal, vamos a hacer zooms sucesivos en $r = 3.9$.

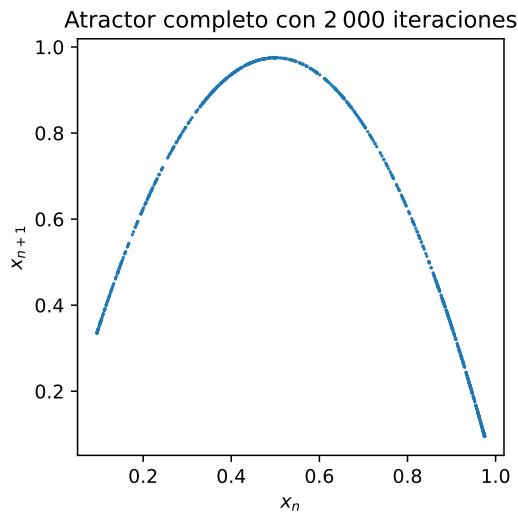


Figura 16.5: Atractor completo con 2000 iteraciones

Como vemos a diferencia de la función logística, el atractor tiene “huecos”, no es continuo en el sentido matemático estricto. Se trata de una construcción extraña. Tras consultarla a ChatGPT, me confirmó que hay infinitos huecos a cualquier escala. En 1º de Bachillerato decimos que un conjunto de la recta es **continuo** (o **conectado**) si para cualesquiera a, b en él, todo el intervalo $[a, b]$ también está contenido. El atractor fractal **no** cumple esto: no existe $\delta > 0$ tal que contenga el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ alrededor de un punto x_0 . Es decir, todos los puntos tienen huecos alrededor suyo.

Cada valor de r tiene su propio atractor, tal y como se puede ver en la siguiente figura. Como es lógico, dependiendo del valor de crecimiento de la función logística r , el sistema terminará en un atractor o en otro.

16.3. Otros atractores

Existen otros atractores dentro de los sistemas caóticos. Por ejemplo un péndulo doble con rozamiento acaba siempre en la misma posición (con el péndulo parado justo debajo del eje debido a la pérdida de energía); en este caso el atractor es un punto. Existe otro atractor que es mítico, y que no podría dejar pasar en este proyecto, que

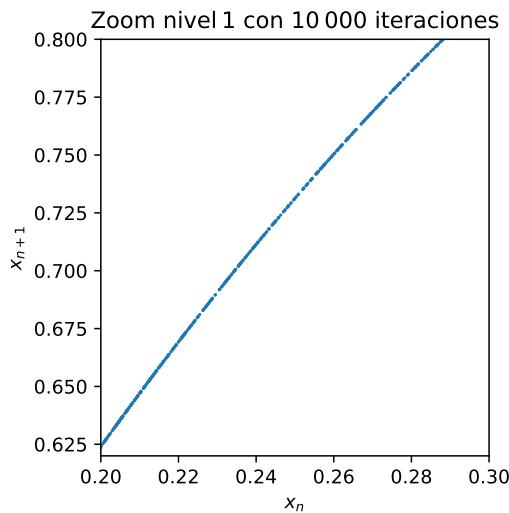


Figura 16.6: Atractor completo con 10000 iteraciones

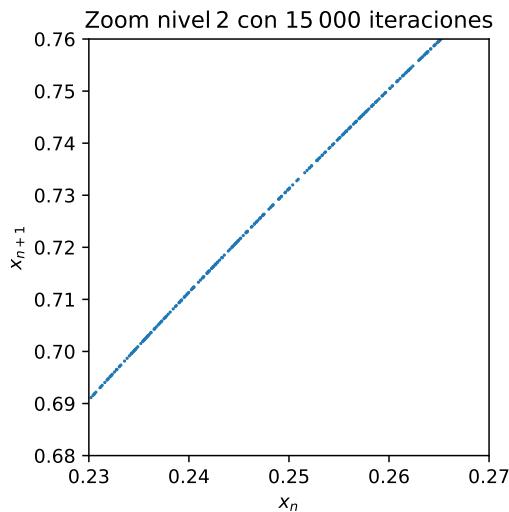


Figura 16.7: Atractor completo con 15000 iteraciones

es el atractor de Lorenz por todo lo que representa en el estudio de sistemas caóticos y la meteorología. Fue el primero que se describió y describe perfectamente como un sistema caótico puede tener dos estados diferenciados. El sistema pasa de un estado a otro por pequeñas perturbaciones, y puede permanecer en uno de los estados durante bastante tiempo hasta que otra perturbación lo saca de ahí y lo lleva hacia el otro estado. Las ecuaciones de Lorenz se hallan totalmente fuera del alcance de lo que puedo entender con mi nivel de matemáticas, pero su funcionamiento resulta fácil de comprender una vez que se muestra la gráfica con el estado del sistema en función del tiempo. Le pedí a ChatGPT que me hiciese una simulación del atractor del Lorenz y este fue el resultado (ver animación en https://colacaos.github.io/ColaCAOS/04-clima/lorenz_lines_rainbow_time.gif)

Haciendo paralelismos con el atractor del mapa logístico, en este caso, en lugar de puntos separados, lo que tenemos son líneas separadas. Es decir, ninguna de las líneas que van trazándose vuelve a pasar por encima de otra. Esto ya lo vimos en las simulaciones y experimentos con el péndulo: ninguna de las trayectorias del péndulo pasa por encima de otra.

¿Y por qué es relevante desde el punto de vista del clima el atractor de Lorenz?. Porque nos ilustra como un sistema caótico puede alternar entre dos estados, y pasar de uno a otro por pequeñas perturbaciones. Por lo tanto, vemos aquí una explicación, una demostración de lo que esta segunda definición del clima es desde el punto de vista de un sistema caótico. El clima actual, es el estado actual en el que el sistema caótico que conforma el clima está ahora mismo. Y solamente desde la perspectiva de los sistemas caóticos podemos reconocer que el paso de un estado a otro puede deberse a muy pequeñas perturbaciones, o “tipping points”, que nos pueden llevar a un clima totalmente diferente al que tenemos en la actualidad. Obviamente, hay que tener en cuenta que el clima es un sistema caótico con un estado multidimensional, que depende de múltiples variables que

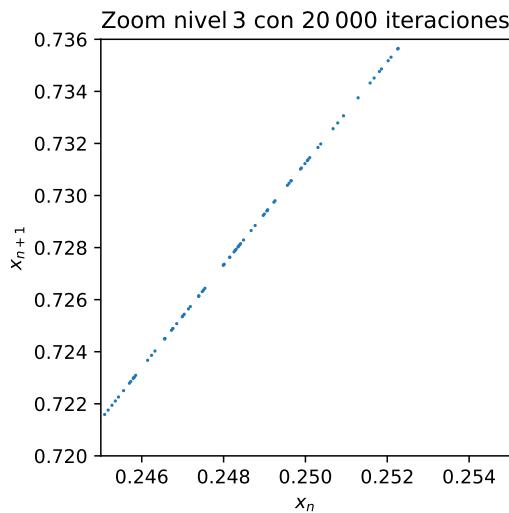


Figura 16.8: Atractor completo con 20000 iteraciones

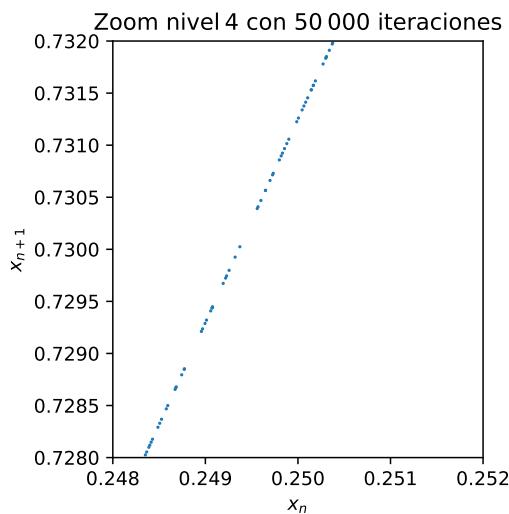


Figura 16.9: Atractor completo con 50000 iteraciones

conforman este espacio multidimensional. Por lo tanto, sin más dilación, veremos en la siguiente sección los últimos cambios que se han producido en el clima y por qué han sido causados.

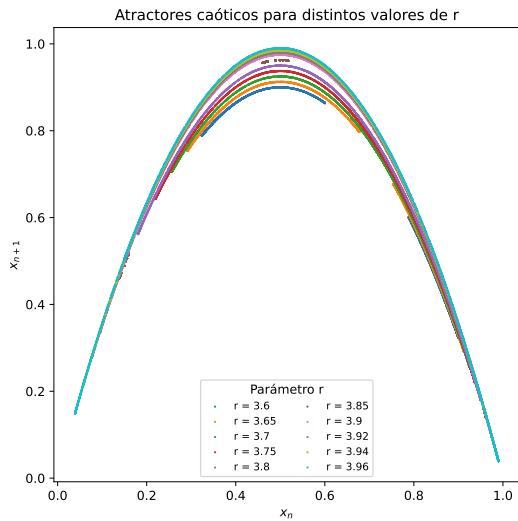
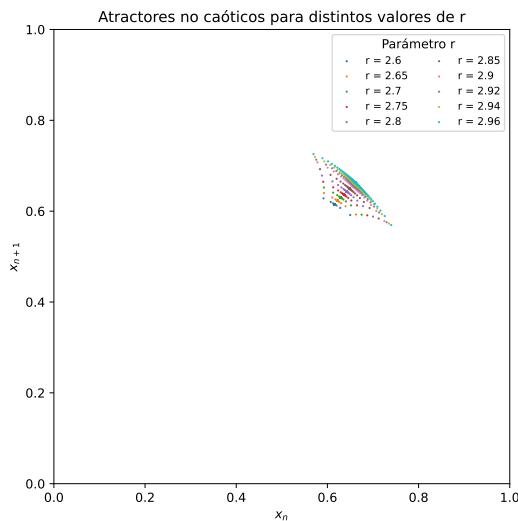
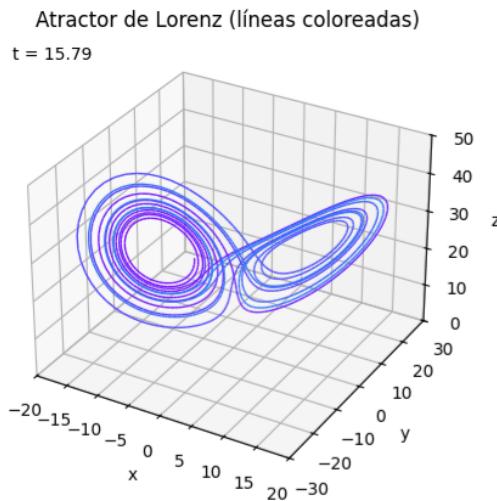
Figura 16.10: Atractores caóticos para distintos valores de r Figura 16.11: Atractores no caóticos para distintos valores de r 

Figura 16.12: Atractor de Lorenz

17 Cambios Climáticos Rápidos

Tal y como comentamos en la sección anterior, el clima global de la Tierra se puede ver sujeto a cambios abruptos en cortos espacios de tiempo. Esta es una manifestación más de la naturaleza caótica del clima, que hasta los años 50 del pasado siglo, se consideraba que no podría ocurrir (ver <https://history.aip.org/climate/rapid.htm>). Sin embargo los científicos han encontrado estas variaciones abruptas del clima de la Tierra en los últimos 15.000 años, desde el final de la última glaciación. Ha habido dos eventos muy relevantes que muestran como el clima puede cambiar bruscamente.

17.1. Evento “Younger Dryas” (12 900–11 700 años antes del presente)

Imagina que, al final de la última glaciación, la temperatura sube lentamente y, de pronto, en menos de dos siglos, ¡cae 5 °C! Sería como pasar de un día de primavera suave a un día de invierno extremo en unas pocas generaciones humanas. Esto fue lo que pasó hace 12900 años debido a que un gran volumen de agua dulce de deshielo de un lago fue vertido en el Atlántico norte y bloqueó la Corriente del Golfo, reduciendo el transporte de calor al Atlántico Norte. La reducción de temperatura tuvo lugar a lo largo de unas pocas décadas y su impacto duró 1200 años. La salida de este estado climático también fue muy rápida. Se estima que también en unas pocas décadas volvió a aumentar la temperatura media unos 5 grados.

17.2. Evento 8.2 k (8 200 años antes del presente)

Tras el Younger Dryas, unos 4 700 años después, se produjo otra bajada de ~3 °C que duró 150 años. Es equivalente a cambiar de clima templado a casi boreal en unas pocas generaciones. De nuevo, el causante fue el desagüe repentino del lago glaciar Agassiz–Ojibway en Norteamérica, vertiendo enormes volúmenes de agua dulce en el Atlántico. Se estima que el descenso de temperatura tuvo lugar en menos de 10 años, y que la recuperación fue más gradual, unos 50 años.

17.3. Conexión común. Puntos de inflexión del clima

Estos eventos destacan la no linealidad del sistema climático y su **sensibilidad extrema a perturbaciones**. Una pequeña alteración en la salinidad u origen de agua dulce puede desencadenar un cambio rápido y global del clima. En la actualidad los científicos del clima han identificado varios puntos de inflexión que podrían provocar un cambio brusco del clima, como:

- Parón repentino de la corriente del Golfo debido al descenso de salinidad debido al agua dulce procedente del deshielo del Ártico y de los ríos siberianos.
- Liberación de enormes cantidades de metano si se derrite el permafrost, lo que originaría una aceleración del calentamiento de la Tierra

Como dijimos anteriormente, son muchos los factores que intervienen en el clima. El poder tener en cuenta todos, implica un modelado de mucha precisión de una multitud de factores. En el futuro se podría desencadenar un evento que provocase un punto de inflexión y que diera al traste con las predicciones realizadas con los modelos actuales. Por ejemplo, en la pequeña edad del hielo, (aproximadamente entre 1300 y 1850), se cree que los factores que desencadenaron el descenso global de las temperaturas fueron una mayor actividad volcánica que coincidió con un mínimo de actividad solar. Estas dos perturbaciones causaron alteraciones en las corrientes oceánicas que habrían amplificado el enfriamiento, especialmente en el hemisferio norte. Predecir este tipo de eventos en un simulador, resulta imposible.

Un ejemplo extremo de punto de inflexión son los ciclos de Milankovitch. Estos ciclos periódicos que marcan los cambios de la excentricidad de la órbita de la Tierra, y la inclinación del eje de la Tierra, han marcado durante los últimos 5 millones de años la llegada y marcha de las glaciaciones. Pero lo interesante, es que estos pequeños cambios en la órbita de la Tierra, por sí solos no son capaces de generar las glaciaciones. Son puntos de inflexión, que provocan una cascada de eventos posterior que amplifican la pequeña perturbación inicial.

Por lo tanto, vemos como no solamente es necesario tener un buen simulador de la circulación atmosférica/oceánica, sino que también habría que tener en cuenta aspectos geológicos de la Tierra, sus ecosistemas, e incluso posibles perturbaciones cósmicas.

En la siguiente sección evaluaremos como han funcionado los modelos que se usan para la predicción del clima. Si bien, desde el momento en el que se empezaron a usar estos modelos no ha habido cambios naturales grandes, veremos como se han comportado durante este último siglo en el que el principal forzamiento del clima ha sido la emisión de gases de efecto invernadero por parte del ser humano.

18 Evaluación de las predicciones climáticas

Desde hace décadas y gracias a la existencia de supercomputadores, los científicos del mundo han elaborado simuladores del clima de la Tierra, para poder predecir el clima futuro. El principal motivo ha sido la preocupación de la comunidad internacional sobre los efectos de la emisión de gases de efecto invernadero en el clima. El clima de la Tierra viene calentándose desde hace más de doscientos años, básicamente desde el fin de la pequeña Edad del Hielo, y resulta crucial determinar qué parte del calentamiento actual observado se debe a causas naturales y qué parte se debe a causas humanas.

Las simulaciones realizadas con estos modelos climáticos en supercomputadores muestran un gran consenso a la hora de determinar que el forzamiento antropogénico es el principal causante del calentamiento actual. ¿Pero qué ocurre con el resto de predicciones que están realizando los modelos?

Recientemente, se ha publicado un artículo en la revista *Nature*, llamado *The other climate crisis* (*Nature*, 26 de marzo de 2025) que aborda la problemática señalada. Según el artículo, el paradigma estándar de la ciencia del clima ha mostrado gran éxito en predecir señales globales de calentamiento. Sin embargo, no ha sido tan exitoso en las predicciones regionales, por lo que surge la necesidad de revisar nuestras suposiciones y paradigmas de estudio del clima. Para profundizar, consulta [S41586 025 08680 1 — www.nature.com^{\[2\]}](https://doi.org/10.1038/s41586-025-08680-1).

18.1. Ejemplo de sensibilidad de los modelos a las condiciones iniciales

Antes de empezar a ver el grado de cumplimiento de las predicciones realizadas hace unos años, quisiera destacar la extrema sensibilidad de los modelos a las condiciones iniciales. Un caso concreto se observó en las simulaciones del modelo climático **CESM2** (Community Earth System Model, versión 2, [Lens2 — www.cesm.ucar.edu^{\[3\]}](https://www.cesm.ucar.edu/lens2)). Los investigadores realizaron 3 simulaciones iniciales de control preindustrial, todas **idénticas en su configuración física y parámetros**, pero con una minúscula diferencia en el estado inicial de la atmósfera: una perturbación de apenas

$$\Delta T \approx 10^{-14} \text{ K} \quad (18.1.1)$$

Esta variación es tan pequeña que está muy por debajo de cualquier precisión instrumental. Sin embargo, tras dejar correr la simulación durante años, las trayectorias climáticas divergieron lo suficiente como para producir **resultados regionales muy diferentes**.

En 2 de las ejecuciones, el modelo desarrolló una cobertura de hielo marino **excesiva** en el Mar de Labrador (y en menor medida en el Mar de Ojotsk), comparada con las observaciones por satélite. Sin embargo, la tercera simulación —llamada *262c*— **no presentó ese exceso de hielo**.

Esta simulación no era especial en ningún otro aspecto: su temperatura media global, el equilibrio energético y la circulación oceánica estaban dentro de la variabilidad normal del conjunto. La única diferencia real fue la trayectoria caótica que siguió el sistema a partir de esa pequeñísima perturbación inicial.

Este ejemplo ilustra de manera numérica cómo, en sistemas no lineales como el clima, **pequeñas variaciones iniciales pueden llevar a estados regionales muy distintos**, incluso cuando el promedio global parece estable. Es una demostración clara de que la incertidumbre en las condiciones iniciales, por diminuta que sea, puede tener consecuencias sustanciales en las predicciones a escala regional.

18.2. Fallos en las predicciones realizadas por los modelos

A lo largo de las últimas décadas, voces diversas —científicos, activistas, medios y organismos internacionales— han emitido predicciones sobre el futuro clima de la Tierra. Aquí tienes una selección de predicciones que no se cumplieron exactamente, cada una con su enlace web correspondiente. Ten en cuenta que las citaciones que se mencionan la "variabilidad interna" del clima, se refieren exactamente a las variaciones del clima debido a la naturaleza caótica del mismo.

18.2.1. El *hiato de temperaturas* (1998–2012)

Predicción/modelo (cita textual). “...111 de 114 simulaciones del CMIP5 muestran una tendencia del calentamiento superficial mayor que la observada durante 1998–2012”. **Quién y dónde:** IPCC, AR5 *Synthesis Report* (2014), p. SYR-8. **URL:** Syr.Ar5.Final.Full.Wcover---www.ipcc.ch^[4]

Realidad observada (datos). Los registros instrumentales muestran que el calentamiento superficial en 1998–2012 fue inferior al que arrojaba la mayor parte del conjunto CMIP5 para esa ventana temporal, una discrepancia que el propio IPCC atribuyó a variabilidad interna, forzamientos naturales (volcanes, ciclo solar) y posibles sobreestimaciones de sensibilidad a forzamientos en algunos modelos. **URL:** Syr.Ar5.Final.Full.Wcover---www.ipcc.ch^[4]

18.2.2. Ralentización del deshielo ártico (2005–2024)

Predicción previa (cita textual). “La probabilidad de pausas de varios años en la extensión de hielo marino de septiembre depende de la longitud de la pausa...” (fig. 3, “Probability of a pause...”). Se define “pausa” como un intervalo cuya tendencia lineal de la extensión de hielo marino de septiembre es no negativa, y se cuantifica su probabilidad en CMIP5. En el experimento Historical–RCP4.5 (1979–2013), la **probabilidad en función de la duración** (Fig. 3c) es, aproximadamente:

$$P(L=10 \text{ años}) \approx 0.3\text{--}0.4, \quad P(L=15 \text{ años}) \approx 0.10\text{--}0.15, \quad P(L=20 \text{ años}) \approx 0.05. \quad (18.2.1)$$

Quién y dónde: Swart, Fyfe, Hawkins, Kay & Jahn (2015), *Nature Climate Change*. **URL:** Commentary.Influence.of.Internal.Variability.on.Arctic.Sea.Ice.Trends---www.researchgat...^[5]

Realidad observada (datos). Análisis satelitales recientes muestran **escasa o nula tendencia** en la extensión mínima de septiembre desde 2005, es decir, una **ralentización** respecto a décadas anteriores. Este “estancamiento” es compatible con la variabilidad interna y no niega el descenso a largo plazo. La probabilidad de que esto ocurriese fue cuantificada en un cinco por ciento. **URL (England et al., GRL 2025):** England.et.al.,GRL.2025---columbia.edu^[6]

18.2.3. Bajada del número global de huracanes (ciclones tropicales)

Predicción (cita textual, ONU). “Climate change is already driving an increase in the **frequency and intensity** of ... tropical cyclones.” **Quién y dónde:** John Holmes, Subsecretario General de la ONU para Asuntos Humanitarios (9/10/2007). **URL:** 23762---www.enn.com^[7].

Realidad observada (datos). La **frecuencia global** anual de ciclones tropicales *disminuyó* en torno a un 13% durante el siglo XX, según un estudio en *Nature Climate Change* resumido por NOAA Climate.gov. **URLs from NASA and Nature:** Research.Global.Warming.Contributed.Decline.Tropical.Cyclones.20th.Century---www.climat...^[8]; S41558 022 01388 4 — www.nature.com^[9] El lector puede echar un vistazo a Realtime.Index---tropical.atmos.colostate.edu^[10] para ver como no hay una tendencia significativa respecto a los huracanes en los últimos 50 años.

18.2.4. Lluvia en la cuenca mediterránea: sin descenso claro

Predicción (difusión pública). Mensajes divulgativos han sugerido un descenso continuado y acusado de la precipitación mediterránea.

Predicción (IPCC AR4, WGI, Cap. 11 — Europa y Mediterráneo, 2007). “*Annual precipitation is very likely to increase in most of northern Europe and decrease in most of the Mediterranean area.*” URL: [IPCC AR4 WGI Ch.11 §11.3 \(Europa y Mediterráneo\) Ch11s11 3 — archive.ipcc.ch^{\[11\]}](#)

Predicción (IPCC AR4, WGI, Cap. 11 — Europa y Mediterráneo, 2007). “*The annual number of precipitation days is very likely to decrease in the Mediterranean area. The risk of summer drought is likely to increase in central Europe and in the Mediterranean area.*” URL: [IPCC AR4 WGI Ch.11 §11.3 \(Europa y Mediterráneo\) Ch11s11 3 — archive.ipcc.ch^{\[11\]}](#)

Realidad observada (datos). Un análisis basado en estaciones (~ 150 años) concluye que la **precipitación mediterránea ha permanecido en gran medida estacionaria** a escala secular, con variabilidad interanual y multidecenal. URL de Nature 2025: [S41586 024 08576 6 — www.nature.com^{\[12\]}](#) — “...Mediterranean precipitation has largely remained stationary over the past 150 years...”

18.2.5. Lluvia en España: sin tendencia anual significativa (1961–hoy)

Predicción (cita textual, PNACC-1, 2006 — Ministerio de Medio Ambiente). “*El cambio climático, con aumento de la temperatura y, en España, disminución en general de la precipitación, causará una reducción de las aportaciones hídricas...*” URL: Plan Nacional de Adaptación al Cambio Climático (2006) Pna v3 Tcm7 12445 Tcm30 70393 — [www.miteco.gob.es^{\[13\]}](#)

Predicción (cita textual, Evaluación Preliminar de Impactos en España, 2005 — MMA). “*Bajo el cambio climático es previsible una disminución de la precipitación media, así como un aumento de la frecuencia de los eventos extremos.*” URL: [Evaluación preliminar de los impactos en España \(2005\) Evaluacion Preliminar Impactos 2005 Tcm30 178491 — www.miteco.gob.es^{\[14\]}](#)

Realidad observada (datos oficiales). Los datos de Aemet — [deimosestadistica.com^{\[15\]}](#) y el conjunto CRU TS 4.05 [Cru ts 4.05 — crudata.uea.ac.uk^{\[16\]}](#) muestran una tendencia lineal muy suave, con alta variabilidad interanual.

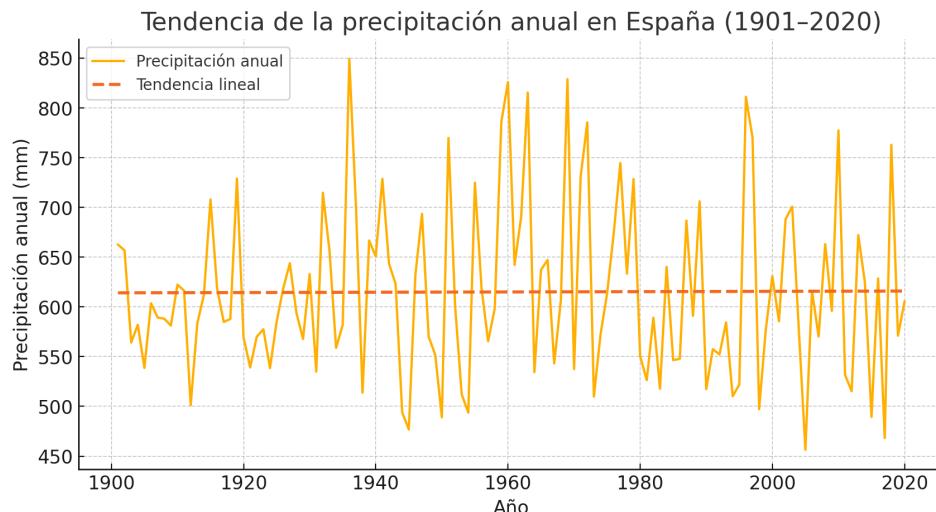


Figura 18.1: Precipitación anual en España CRU TS 4.05

18.2.6. Inundaciones: “sin precedentes” vs registros paleohidrológicos

Predicción/narrativa. Con frecuencia se han presentado inundaciones recientes como “sin precedentes” a escala regional.

Predicción (cita textual, IPCC AR4 WGII — Summary for Policymakers, 2007). “*Heavy precipitation events, which are very likely to increase in frequency, will augment flood risk.*” URL: [IPCC AR4 WGII SPM Ar4 Wg2 Spm 1 — www.ipcc.ch^{\[17\]}](#)

Realidad observada (datos). Un metaanálisis paleohidrológico (oeste y suroeste de Europa) demuestra que muchas crecidas recientes **no son únicas** en contexto histórico y que **magnitudes mayores** ocurrieron **antes del siglo XX**. **URL (citas textuales):** Climatic Change 2025 S10584 025 03904 9 — link.springer.com^[18]

Panorama global instrumental. De forma coherente, un análisis global de extremos de caudal (1971–2010) no encuentra un aumento consistente mundial en magnitud de crecidas; las tendencias son **espacialmente heterogéneas**. **URL:** Nature, 2020 S41586 019 1831 4 — www.nature.com^[19]

18.2.7. Sequías: lo que decía el IPCC (2001–2007) y lo que realmente ha pasado

Predicción (IPCC, AR4, 2007). “Drought-affected areas will likely increase in extent. Heavy precipitation events, which are very likely to increase in frequency, will augment flood risk.” **Fuente:** IPCC AR4 WGII Ar4 Wg2 Spm 1 — www.ipcc.ch^[17]

“Drought-affected areas are projected to increase in extent, with the potential for adverse impacts ...” **Fuente:** IPCC AR4 Synthesis Report Ar4 Syr Full Report — www.ipcc.ch^[20]

Realidad observada y evaluación posterior. AR5 (2013): “There is **low confidence** in a **global-scale observed trend in drought**, owing to lack of direct observations, dependencies of inferred trends on the index choice, and difficulties in distinguishing long-term change from decadal variability.” **Fuente:** IPCC AR5 WGI, Technical Summary Wg1ar5 ts Final — www.ipcc.ch^[21]; Sbsta Drought Poster — archive.ipcc.ch^[22] SREX (2012): evaluación especial sobre extremos: evidencia **insuficiente** para una tendencia global robusta en sequías observadas. **Fuente:** IPCC SREX Srex fd Spm Final — archive.ipcc.ch^[23]; Srex Full Report 1 — www.ipcc.ch^[24].

Literatura clave: métodos físicamente consistentes muestran “**poco cambio en la sequía global en los últimos 60 años**”. **Fuente:** Nature, 2012 Nature11575 — www.nature.com^[25].

Hace 20–30 años el IPCC proyectaba **más sequía**, pero las revisiones posteriores concluyen que **no hay una tendencia global clara y robusta en las observaciones**, debido a limitaciones de datos, a la sensibilidad a cómo se mide la sequía y a la variabilidad decenal.

18.2.8. No cumplimientos de predicciones desvelados en artículos publicados y revisados por pares

Durante este año, parte de la comunidad científica ha señalado ciertos fallos en los modelos. No solamente está el artículo publicado en Nature *The other climate crisis* (Nature, 2025), sino que también en *Confronting Earth System Model trends with observations* (Science Advances, 2025) Sciadv.adt8035 — www.science.org^[26], en la Tabla 1, nos encontramos con una recopilación extensa de cumplimientos y no cumplimientos. Entre los no cumplimientos destacan:

- **Pacífico tropical (el “motor” del clima).** Observado: el gradiente Este–Oeste del Pacífico se ha *reforzado* (más tipo La Niña). Modelos: tendían a un *debilitamiento*. *En cristiano:* donde esperábamos más calentamiento en el Este tropical, ha pasado lo contrario.
- **Océano Austral y hielo marino antártico.** Observado durante décadas: *poco calentamiento* y períodos con *más hielo* de lo previsto. Modelos: esperaban *calentamiento claro* y *menos hielo*.
- **Vientos y bloqueos en el Atlántico Norte.** Observado: cambios en chorros y bloqueos (p. ej., sobre Groenlandia) *distintos* a lo simulado.
- **Humedad en zonas áridas.** Observado: la humedad específica en regiones secas *no sube* como los modelos sugerían. *Resumen:* el “aire húmedo” real no siempre copia al “aire húmedo” del modelo en sitios secos.

18.3. Lo que sí se predijo bien - Olas de calor

No todo han sido desaciertos, ni mucho menos. Entre otras cosas, sí se predijo de forma precisa el incremento del nivel del mar y, especialmente, el incremento de las olas de calor.

Predicción (IPCC TAR, 2001, SPM). “*Nearly all land areas very likely to warm more than the global average, with more hot days and heat waves...*” **URL:** Spm — www.ipcc.ch^[27]

Predicción (IPCC AR4, 2007, Synthesis SPM). “*It is likely that heat waves have become more frequent over most land areas.*” **URL:** Ar4 Syr Spm — www.ipcc.ch^[28]

Realidad observada (IPCC AR6, 2021, SPM A.3.1). “*It is virtually certain that hot extremes (including heatwaves) have become more frequent and more intense across most land regions since the 1950s...*” **URL:** Summary For Policymakers — www.ipcc.ch^[29]

Contexto reciente (WMO, 2025). “*2024 fue el año más cálido del registro...*” con episodios de calor récord generalizados. **URL:** State of Global Climate 2024 — wmo.int^[30]

18.3.1. Conclusión

Muchas predicciones climáticas fueron excesivas o impacientes con los plazos; eso no invalida la percepción real del cambio climático, sino que refuerza la necesidad de un enfoque basado en datos, contexto y comunicación cuidadosa.

Las predicciones realizadas mediante modelos computacionales son muy buenas a la hora de predecir el aumento de temperatura media que la Tierra está experimentando, pero con el resto de parámetros no lo son tanto. Por suerte, algunas de las predicciones más extremas no se están cumpliendo por el momento. Fuera del calentamiento global de la temperatura, las tendencias globales en sequías, crecidas y frecuencia de ciclones tropicales son heterogéneas o de baja confianza.

18.4. Mejoras necesarias para mejorar las predicciones

Según, S41586 025 08680 1 — www.nature.com^[2] (The other climate crisis) para mejorar las predicciones realizadas por los modelos, se propone aumentar la resolución espacial de los modelos reduciendo el tamaño de la celda (Δx). Este aumento de resolución permite:

1. **Capturar procesos convectivos y topográficos** con mayor detalle, mejorando la simulación de precipitaciones locales
2. **Reducir errores numéricos asociados al paso temporal (Δt)**, al poder disminuir simultáneamente el tamaño del paso de tiempo para mantener la estabilidad de los esquemas numéricos.
3. **Incorporar mecanismos de acoplamiento de escalas** que conectan fenómenos pequeños (turbulencia, nubes) con la circulación general

Así, al combinar rejillas más densas con paradigmas computacionales innovadores, podemos avanzar hacia una nueva generación de modelos climáticos capaces de reproducir fielmente tanto señales globales como variaciones regionales.

18.4.1. Mi nota crítica

Tal y como he visto en mis experimentos con la función logística y el péndulo doble, aumentar el tamaño de la rejilla mejorará temporalmente las predicciones. Sin embargo, en los sistemas caóticos los errores se propagan de forma exponencial, por lo que la mejora en la resolución espacial/temporal de los modelos, pronto será “comida” por la propagación del error.

19 Conclusiones sobre la predictibilidad del clima

Durante las últimas décadas nos hemos acostumbrado a escuchar en los medios de comunicación predicciones realizadas por científicos con modelos climáticos en grandes supercomputadores, y tomar estas predicciones como algo que pasará con total seguridad en el futuro.

Mi visión tras estudiar el clima desde la óptica del caos arroja dudas sobre la certeza de estas predicciones. Son varios los factores que me hacen dudar:

- En primer lugar, hay que ver el clima de la Tierra como un sistema caótico extremadamente complejo en el que interactúan a la vez varios elementos: atmósfera, océanos, vegetación, animales, seres humanos, el Sol, variaciones orbitales de la Tierra, tectónica de placas, vulcanismo. El modelado conjunto de todos estos factores con un alto nivel de detalle es ahora mismo inviable.
- El clima, como sistema caótico, alterna entre varios estados (atractores), y la entrada o salida de ellos puede darse por pequeñas perturbaciones. Hemos visto que en el pasado reciente de la Tierra, en los últimos 10.000 años ha habido cambios bruscos del clima en cuestión de décadas. También hemos visto como perturbaciones infinitesimales en las condiciones iniciales con las que se alimentan a los modelos computacionales, pueden dar lugar a resultados diferentes a nivel regional.
- El análisis de las predicciones climáticas realizadas por los modelos hace 30 años revelan que no se han cumplido exactamente como dijeron. De hecho los modelos se van revisando y corrigiendo para ajustarlos a las observaciones que se van realizando.

El péndulo doble es un sistema caótico infinitamente más sencillo que el clima. Sin embargo, no podemos predecir su trayectoria. La función logística es un modelo matemático caótico en el que conocemos todos sus parámetros iniciales, y sin embargo, tampoco podemos conocer su estado final debido a los errores provocados por la precisión finita de la aritmética de los ordenadores. A la vista de todo ello, ¿podemos ser capaces de predecir el clima?.

19.1. Mirada histórica: lo que ya se decía en los años 70 sobre la predictibilidad

Ya en 1974, un **panel federal de alto nivel en EE. UU.**⁴³ advirtió que “*podríamos muy bien descubrir que el comportamiento del sistema no es inherentemente predecible*”. Esta formulación aparece recogida por el proyecto histórico del **American Institute of Physics (AIP)**⁴⁴ y remite al **informe original** del *Ad Hoc Panel on the Present Interglacial*⁴⁵, donde puede consultarse el documento escaneado. AIP también documenta que ese informe circuló en materiales del Congreso de 1977 sobre el Programa Nacional del Clima, listados en su bibliografía.

En **Kutzbach (1976)**³⁹ —*The Nature of Climate and Climatic Variations*— se describe el clima como un **sistema acoplado** (atmósfera–océanos–criósfera–litosfera–biosfera) capaz de **fluctuar en múltiples escalas temporales**, lo que introduce límites prácticos a una predicción determinista y detallada a largo plazo.

Antes incluso, **Stringer (1972)**^{40,41,42}, en *Foundations of Climatology*, ya presentaba el clima como resultado de **múltiples componentes e interacciones complejas**, lo que ayuda a entender por qué el pronóstico fino a largo plazo es difícil.

Estos autores y comisiones **no negaban** que existan regularidades (p. ej., tendencias bajo forzamientos sostenidos), pero **sí pedían prudencia** ante la idea de una predicción climática **detallada y determinista** a largo

plazo. Lo que defendían es que el clima muestra **variabilidad interna** y **sensibilidad** que limitan la predictibilidad de trayectorias concretas (el “qué-dónde-cuándo” preciso), aunque ciertos **promedios y tendencias** puedan ser estimables bajo escenarios de forzamiento bien caracterizados.

19.2. Mirada crítica actual

A partir de los años 90, el incremento de la capacidad computacional hizo pensar a muchos científicos que tomando promedios de múltiples simulaciones se podría dar un escenario futuro plausible. El análisis de las predicciones climáticas realizadas por los modelos hace 30 años se ven algunos desaciertos.

Conviene, por tanto, hacer una revisión crítica y rescatar los postulados de muchos científicos de los años 70 que ponían límites a la predictibilidad del clima. Y es que si bien, tenemos asumido que una predicción meteorológica a mas de 15 días vista es muy poco fiable, no sabemos el escenario temporal de validez de las predicciones climáticas actuales (¿sabemos cuál es el exponente de Lyapunov de las variables climáticas?). Pero a pesar de ello, los medios de comunicación transmiten la impresión de que las predicciones que hacen los modelos se van a cumplir, y eso genera unas expectativas que al no cumplirse pueden generar problemas.

Las predicciones climáticas juegan un papel fundamental en la sociedad actual. Condicionan las economías de muchos países y los hábitos de consumo de muchas personas. Es fundamental tener una visión clara del futuro y adoptar medidas sensatas que no sean ni excesivas ni demasiado laxas. Para ello resulta imprescindible seguir avanzando en la modelización y, a la vez, comunicar las incertidumbres con claridad: reconocer lo que los modelos capturan bien (por ejemplo, la tendencia global de temperatura bajo forzamientos conocidos) y dónde persisten límites de predictibilidad (por ejemplo, detalles regionales y extremos específicos).

Conviene recordar que superar los umbrales del sistema climático puede activar respuestas no lineales y repentinias. Esta incertidumbre sobre el detalle del futuro de nuestro clima justifica una acción preventiva: proteger ecosistemas y disminuir emisiones. No podemos predecir el desenlace exacto en un sistema caótico, pero sí sabemos que el riesgo acumulado aumenta a medida que forzamos más el sistema. **Ante todo hay que aplicar el principio de prudencia: no deberíamos alterar sistemas cuyo estado futuro no somos capaces de predecir .**

Parte VI

Mi sistema caótico

20 Introducción

Después de haber estudiado el caos y su comportamiento tanto en modelos matemáticos como la función logística y en sistemas físicos como el péndulo doble y la predicción meteorológica y climática, me he propuesto crear mi propio sistema caótico para poder estudiarlo y hallar sus similitudes y relaciones con el resto de sistemas caóticos estudiados. Para hacer mi sistema caótico primero probé a construirlo con mis propias manos, pero después de varios prototipos del sistema que no conseguí que funcionaran o que tuvieran un comportamiento caótico decidí hacerlo en un simulador de física llamado Algadoo.

El modelo y el diseño para que tuviera un movimiento caótico lo mantuve igual que en los prototipos anteriores, solo que esta vez al ser un simulador podía ajustar todos los parámetros con mucha más precisión que haciéndolo a mano, donde no tengo tanta precisión de todas las medidas.

Esta vez, haciéndolo en un simulador sí que funcionó todo a la perfección. Una ventaja que tuve al hacer mi sistema en un simulador fue que el simulador me daba la opción de tener gráficos de las medidas como la velocidad, la velocidad angular o el centro de masas en tiempo real, para luego descargarlos y obtener todos los datos fácilmente.

20.1. Diseño y Funcionamiento

El sistema se basa en una rueda fija que gira siempre en el mismo eje mediante un chorro de agua que le va cayendo justo encima. Para hacerla girar con el agua tiene puestas cuatro aspas en las que el agua se va acumulando hasta que empieza a girar y se vacían.

El interior la rueda está dividida en cuatro compartimentos por cuatro paredes que van desde el centro hasta las aspas. Dentro de cada compartimento hay una pequeña canica que a medida que la rueda gira se van moviendo dentro de cada compartimento.

Aquí hay dos tablas en las que se muestran las características principales de la rueda y de las canicas

Rueda

Cuadro 20.1: Características de la rueda

Característica	Valor
Diámetro exterior	2.5 m
Diámetro interior	2.0 m
Grosor	25 cm
Masa	1.207 kg
Densidad areal	0.6 kg/m ²
Material	madera

Canicas

Cuadro 20.2: Características de las canicas

Característica	Valor
Diámetro	61 mm
Masa	96 g
Densidad areal	7.8 kg/m ²

Característica	Valor
Material	acero

El tamaño de las cuatro aspas es de 0.5m cada una. Obsérvese que el peso es irreal para una rueda de más de 2 metros de madera, pero en Algodoor la densidad se especifica en Kg por metro cuadrado, no cúbico. ¡Los objetos son planos para Algodoor! (Algodoor es un simulador 2D)

En estas figuras se muestra el sistema diseñado.

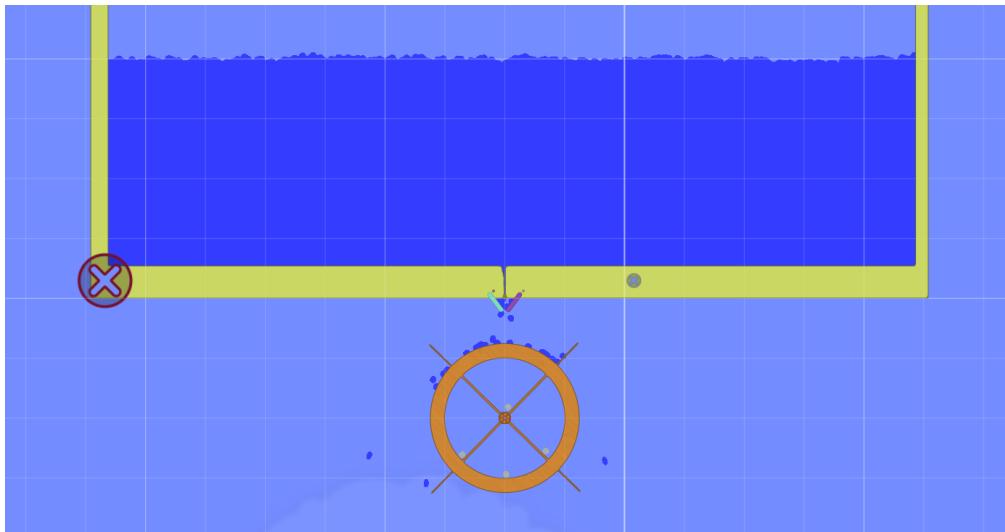


Figura 20.1: Rueda caótica - Escena completa

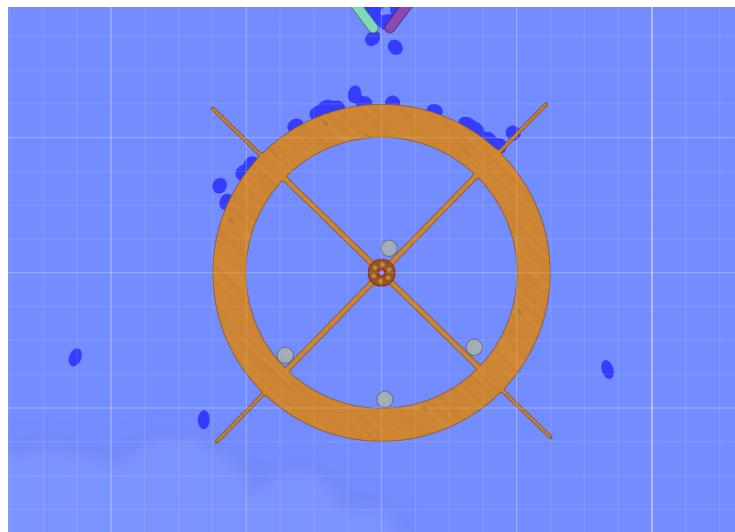


Figura 20.2: Rueda caótica Zoom

Y en este video su funcionamiento en Algodoor <https://colacaos.github.io/ColaCAOS/05-experimentos/Algodoor.mp4>

21 Simulación y funcionamiento

caótico

Una vez construida la rueda en el simulador y después de haber comprobado que todo funcionaba correctamente, empecé con las simulaciones del sistema.

Primero corrí la simulación cinco veces durante 180 segundos cada vez y en todas ellas establecí exactamente las mismas condiciones iniciales para todos los parámetros. Estos parámetros son teóricamente idénticos todas las veces que he ejecutado la simulación ya que el programa me permite hacer varias copias de un estado del sistema para después poder correr la simulación varias veces con las mismas exactas condiciones iniciales.

En cada una de las simulaciones usé una opción de Algodoor para tener grabados los datos de velocidad angular instantánea de la rueda, de la posición x (en el eje horizontal) del centro de masas de las canicas a lo largo del tiempo y de la posición en y (en el eje vertical) del centro de masas de las canicas.

En este gráfico se muestra la evolución de la velocidad angular de las cinco simulaciones todas empezando desde el mismo punto cada una representada con un color distinto.

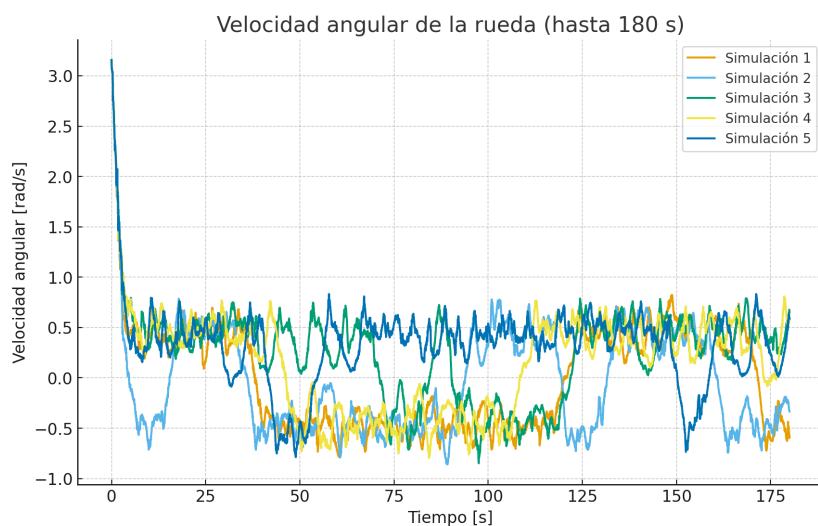


Figura 21.1: 180 segundos de simulación

Se puede ver como todas empiezan con una velocidad angular de aproximadamente 3 rad/s y rápidamente debido al rozamiento, especialmente con el agua que va cayendo, todas se frenan al mismo tiempo hasta alrededor de los 0.5 rad/s. Hasta este momento, sobre el segundo 3, todas las simulaciones van juntas y solo se distingue una línea. Es justo a partir de este momento cuando las simulaciones empiezan a separarse y en solo unos pocos segundos ya va cada una por su lado, e incluso la simulación número 2 pasa a tener velocidad angular negativa (lo que significa que la rueda ha cambiado su sentido de giro). Esto lo hace aun habiendo empezado con una velocidad angular de 3 rad/s y no desde el reposo. Esto es una de las muestras de la naturaleza caótica e impredecible de este sistema

Vamos a hacer más zoom en los primeros segundos de simulación para ver como realmente empiezan a divergir las simulaciones.

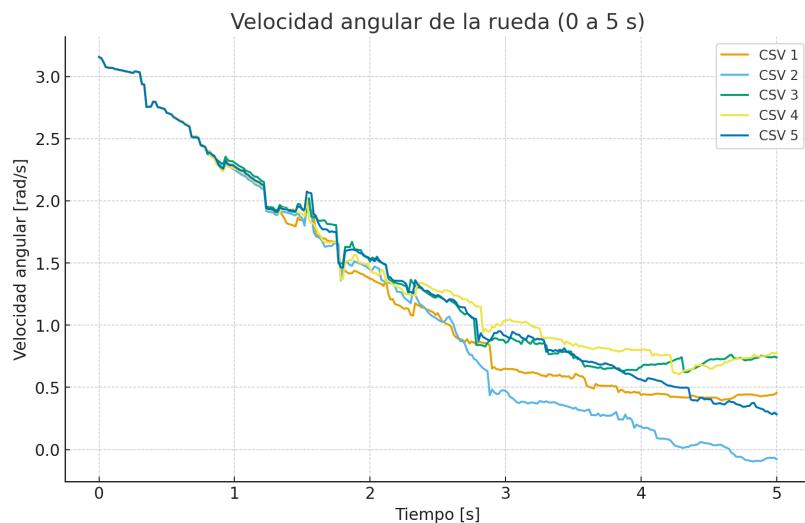


Figura 21.2: 5 segundos de simulación

Hasta el primer segundo de simulación las velocidades angulares son casi las mismas y la diferencia entre ellas es ínfima. A partir de ahí vemos como poco a poco empiezan a separarse hasta el segundo cinco cuando ya llevan velocidades muy distintas y la segunda simulación ya ha cambiado de dirección. Esta separación de las distintas velocidades angulares no ocurre progresivamente, sino que al principio empiezan a divergir muy lentamente y muy poco, pero a medida que va avanzando el tiempo de simulación lo van haciendo cada vez más rápido, ya que en los sistemas caóticos la sensibilidad a las condiciones iniciales hacen que los errores se vayan propagando de forma exponencial. Aunque en este sistema, al ser una simulación, no debería haber ninguna diferencia entre cada simulación, en el momento inicial siempre existe una por muy pequeña que sea debido a la inexactitud de los ordenadores a partir de un número de decimales muy alto y en general a la imprecisión de los ordenadores a la hora de realizar todos los cálculos.

21.1. Atractor

Sin embargo, hay un detalle de esta gráfica que no pasa desapercibido. Las velocidades angulares de las simulaciones se van separando cada vez más rápido, pero llegados a un punto sobre el segundo 7 dejan de separarse más y se quedan siempre en un rango entre los 0.2 a los 0.7 rad/s o los -0.2 y los -0.7 rad/s. Esto no es casualidad sino que estamos ante el atractor de este sistema. Esto significa que el estado de el sistema, aunque sea caótico, nunca va a salir de este rango de valores. Esto no solo lo presenta este sistema sino que como ya hemos visto está presente en muchos otros sistemas caóticos como la función logística o la famosa célula convectiva de Edward Lorenz.

Pero lo más interesante de este atractor es que cambia entre dos estados diferentes, velocidad angular positiva y negativa. El sistema cambia de estado en los llamados “Tipping Points” en los cuales cualquier pequeña perturbación hace que llegue a cambiar todo el estado del sistema, que en este caso es la dirección del giro. Esto también lo hace de manera totalmente caótica y como se puede ver en las cinco simulaciones algunas, en este caso la segunda simulación, tardan mucho menos tiempo que otras en hacerlo.

Diagrama de fases 3D — vista: iso_SW (elev=30°, azim=225°)

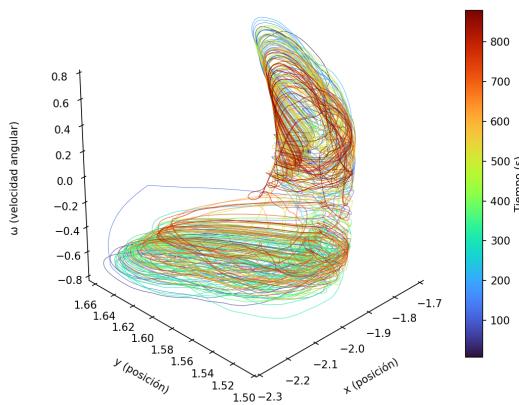


Figura 21.3: Atractor

En esta gráfica se representa el atractor mediante tres ejes distintos que representan la posición vertical del centro de masas de las canicas, la posición horizontal del centro de masas de las canicas y la velocidad angular. El color de la línea representa el paso del tiempo yendo desde el principio en azul hasta al final en rojo.

Diagrama de fases 3D — vista: top (elev=80°, azim=45°)

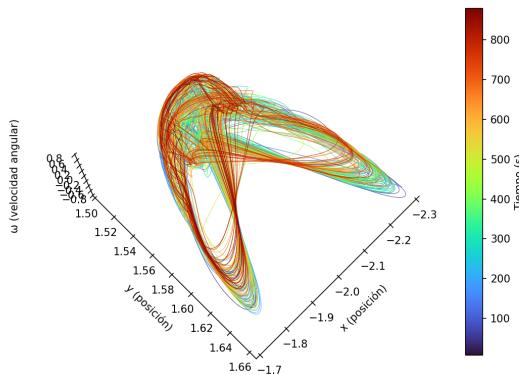


Figura 21.4: Vista desde arriba

Esta es otra vista del atractor en la misma simulación, pero esta vez visto desde arriba. En esta vista se aprecian perfectamente los dos estados que va tomando el sistema y como va cambiando entre cada uno.

Y ahora veámoslo de lado.

Diagrama de fases 3D — vista: side_Y (elev=20°, azim=90°)

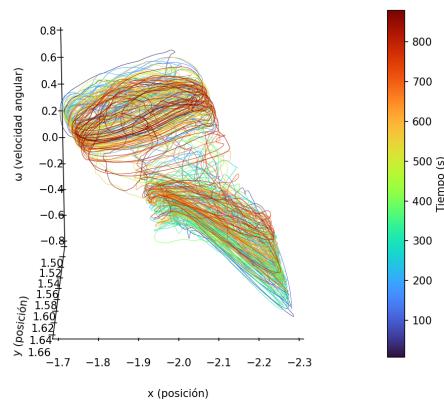


Figura 21.5: vista lateral del atractor

Pero lo más interesante de este atractor es que es un atractor extraño, lo que significa que tiene una estructura fractal. Esto quiere decir que si hiciéramos zoom en dos líneas que parecieran tener el mismo recorrido, en realidad, no estarían pasando exactamente por los mismos valores sino que siempre tendrían una pequeña diferencia. Por muy iguales que parezcan dos valores del atractor siempre podríamos hacer zoom y descubrir que nunca pasan exactamente por el mismo sitio, es decir, la rueda nunca lleva dos veces los mismos valores de velocidad angular, posición en X y posición en Y al mismo tiempo.

Otra de las particularidades del atractor es que es muy similar al de Lorenz (ver figura ??, al menos en apariencia.

Parte VII

Determinismo y Caos

22 De Laplace a Prigogine

Hasta este momento en el proyecto hemos percibido el caos como algo negativo, un fenómeno no deseado que dificulta nuestra capacidad para conocer el futuro de los sistemas físicos. En nuestro modelo del Universo, heredado de la física de Newton, Laplace y hasta Einstein, todo era determinista y conocer el estado presente permitía predecir el futuro indefinidamente. El máximo exponente de este paradigma es el demonio de Laplace, un ser omnisciente capaz de conocer y predecir absolutamente todo en un universo determinista, gracias precisamente al supuesto comportamiento mecánico del Universo. A finales del siglo XX apareció un científico, Ilya Prigogine, que cambió esta concepción y que mereció el premio Nobel por su trabajo (ver el libro *The End of Certainty: Time, Chaos, and The New Laws of Nature*. [The end of Certainty](#)). Prigogine afirma que la visión determinista del Universo es incompleta, porque ignora la irreversibilidad del tiempo y reduce los fenómenos a un esquema demasiado simplificado.

22.1. Irreversibilidad del tiempo

Hay procesos naturales que “tienen sentido” en una dirección temporal (del pasado al futuro) pero no al revés: el calor fluye de lo caliente a lo frío, una taza que se rompe no se recomponer sola, el perfume se dispersa y no vuelve al frasco. A esto lo llamamos irreversibilidad del tiempo o flecha del tiempo.

Muchas ecuaciones fundamentales de la física (las de Newton por ejemplo) son reversibles en el tiempo: si grabas una solución y la reproduces al revés, sigue siendo una solución válida. Entonces, ¿por qué el mundo cotidiano no funciona “al revés”? Porque lo que observamos es lo más probable: que el desorden aumente y que la energía útil se degrade. A eso lo llamamos aumento de entropía (Segunda Ley de la Termodinámica). Nadie espera que cuando un hielo se derrite, pasado un tiempo se vuelva a congelar. O que cuando esparces perfume en una habitación, el perfume vuelva luego solo al frasco.

El determinismo ignora la flecha del tiempo marcada por la entropía. La Segunda Ley de la Termodinámica nos dice que en sistemas aislados la entropía nunca disminuye. Esto significa que, aunque las ecuaciones deterministas permitan un futuro reversible, en la práctica el sistema siempre avanza hacia estados más probables, de mayor desorden. Esta asimetría no cabe dentro de un universo “reloj” que se limita a desplegar lo ya contenido. ¿Qué quiere decir “desplegar lo ya contenido”? En la visión clásica y determinista, el universo se concibe como un reloj perfectamente mecánico:

- Las leyes de la naturaleza son ecuaciones exactas y simétricas en el tiempo.
- Si conocemos el estado presente (posiciones y velocidades de todas las partículas), entonces el pasado y el futuro están ya contenidos en esa información.
- El tiempo, en este modelo, no “crea” nada: simplemente despliega lo que ya estaba escrito en las condiciones iniciales
- El tiempo sería como el puntero de un proyector que recorre un carrete de película ya grabada: no hay sorpresas, solo revelar lo que está ahí.

La irreversibilidad rompe esta imagen sencilla del Universo. Esta asimetría temporal no puede reducirse a un simple “estado contenido en las condiciones iniciales”, porque el futuro no es un espejo reversible del pasado. El sistema no “despliega” algo fijo ya contenido en las condiciones iniciales, sino que evoluciona hacia estados más probables, siguiendo una dirección de la que no hay retorno.

Por lo tanto, en el Universo real no determinista el pasado y el futuro no son intercambiables, no son equivalentes. El tiempo introduce “novedades” que no estaban prefiguradas y de las que no podemos volver hacia atrás.

La irreversibilidad del tiempo no solo rompe la visión determinista, sino que abre la puerta a la creatividad de la naturaleza. El futuro no estaba ya escrito en el presente, como sostén la visión clásica determinista; es el propio paso del tiempo el que introduce fluctuaciones y novedades imposibles de predecir por completo. Aquí es donde entra en juego el caos.

23 El papel del caos

El caos no debe entenderse solo como desorden o azar sin sentido. En física, hablamos de caos determinista para describir sistemas regidos por leyes precisas pero extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En ellos, cualquier mínima perturbación —un error de medida, un ruido ambiental, una fluctuación térmica o incluso cuántica— se amplifica con el tiempo hasta volver imposible una predicción a largo plazo.

Este comportamiento caótico conecta directamente con la idea de Prigogine:

- La irreversibilidad asegura que el tiempo tenga una dirección. El caos añade otra capa: incluso si las ecuaciones fueran simétricas, la sensibilidad exponencial hace imposible “volver atrás” en la práctica. Aunque intentaras invertir el tiempo, bastaría un error ínfimo (del tamaño de una milésima, o incluso de fluctuaciones cuánticas inevitables) para que la trayectoria invertida se desviara por completo. Es decir, no puedes reconstruir con exactitud el estado pasado ni repetir la evolución hacia atrás, porque la información inicial se “disuelve” en la dinámica caótica.
- El caos garantiza que esa dirección no sea una simple proyección mecánica de lo ya contenido, sino un proceso donde las fluctuaciones se amplifican y generan caminos alternativos.
- De esa combinación surge la posibilidad de que el tiempo cree estructuras nuevas en lugar de limitarse a repetir lo prefigurado.

Puede haber creación de estructuras sin caos, pero el caos las multiplica y las hace mucho más ricas. El caos introduce sensibilidad a fluctuaciones y ramificación de trayectorias posibles. Eso significa que:

- No hay un único patrón de orden, sino muchos caminos posibles.
- Lo inesperado se convierte en parte constitutiva del proceso.
- El sistema puede explorar configuraciones alternativas, bifurcarse, reorganizarse

Como ejemplo del caos en el clima, tenemos los huracanes. Todo el mundo sabe que los huracanes se producen por pequeñas perturbaciones en el este del Atlántico que van amplificándose hasta convertirse en huracanes al llegar al Caribe. La circulación atmosférica es inevitable, surge de la radiación solar que calienta la superficie de la Tierra y pone en movimiento al aire. Pero el caos hace que esa circulación atmosférica pueda organizarse en patrones distintos: brisa, tormenta, huracán.... Los huracanes, lejos de ser un simple desastre, cumplen la función de transportar enormes cantidades de energía desde los trópicos hacia latitudes más altas, contribuyendo al equilibrio climático global. Sin ellos el calor se acumularía más en los trópicos.

23.1. La creación de estructuras en sistemas caóticos

Uno se podría preguntar, ¿por qué se crean nuevas estructuras en un sistema caótico, en lugar de ser todo aleatorio y desordenado?. La respuesta no es trivial. El caos no es lo mismo que el azar total. Los sistemas caóticos siguen leyes precisas (ecuaciones deterministas), pero como son muy sensibles a las condiciones iniciales, sus trayectorias se vuelven impredecibles a largo plazo. Eso significa que:

- No todo vale. El sistema no explora cualquier posibilidad al azar, sino dentro de un espacio limitado por las leyes físicas.

Ejemplo: una tormenta no puede convertirse en un cuadrado perfecto de nubes, pero sí en múltiples formas de remolinos, vórtices y frentes, porque eso es lo que permiten las ecuaciones de fluidos.

Los sistemas caóticos tienden a organizarse en torno a atractores: conjuntos de estados hacia los que converge la dinámica. Esos atractores no son aleatorios, sino estructuras matemáticas que canalizan el desorden hacia formas recurrentes. De ahí surgen patrones como los pliegues de un río, las espirales de los huracanes o las formas del atractor de Lorenz. El atractor es lo que hace que el caos no se pierda en el desorden absoluto, sino que genere orden complejo. Este punto es fundamental: !! El Caos genera Estructuras !!

Cuando un sistema recibe energía y la disipa (como el clima con la radiación solar), la irreversibilidad obliga a esa energía a fluir. Si el sistema fuera estable, disiparía la energía de forma simple y aburrida. Pero en la inestabilidad y el caos, el flujo de energía se reorganiza en estructuras disipativas: corrientes oceánicas, huracanes, ecosistemas. Esas estructuras aparecen porque son la manera más eficaz de gestionar el desbalance energético. No son azar puro, sino respuestas organizadas de la naturaleza a un flujo irreversible de acuerdo a unas ecuaciones deterministas.

Y una última pregunta que se podría hacer uno. ¿Puede darse el caos en un sistema físico cerrado sin aporte de energía?. La respuesta es no. Para que haya un caos sostenido en la naturaleza se necesita un aporte externo de energía, porque sin él el sistema tendería al equilibrio y el movimiento caótico se apagaría. Es el caso del clima. Gracias a la energía recibida del Sol, la atmósfera y los océanos están lejos del equilibrio por lo que aparecen estructuras disipativas caóticas: vientos, huracanes, corrientes marinas, estaciones, etc. . Si la Tierra saliera del sistema solar y no recibiese un aporte externo de energía, la temperatura global caería progresivamente hasta un equilibrio con la radiación de fondo cósmico (~3 K). En esa situación, la Tierra se volvería un sistema casi cerrado, cerca del equilibrio termodinámico. Y en equilibrio, no hay caos sostenido: no habría convección, no habría tormentas, no habría vida. Eso sí, sería totalmente predecible su futuro.

23.2. El demonio de Laplace

El lector avezado podría objetar: “Si el demonio conociera incluso las fluctuaciones, el caos no sería problema. El futuro seguiría escrito en el presente”. Pero aquí está el punto débil de ese argumento:

Las fluctuaciones no son externas al sistema, son inevitables.

- Hay fluctuaciones cuánticas: el principio de incertidumbre impone límites objetivos, no solo prácticos.
- Hay fluctuaciones térmicas y ambientales: en un universo abierto, no se puede aislar perfectamente un sistema. Ni siquiera un demonio podría eliminar la presencia de ruido, porque forma parte constitutiva de la naturaleza.

El caos amplifica fluctuaciones irreducibles. En sistemas caóticos, el más mínimo cambio conduce a trayectorias divergentes. Aunque el demonio conociera hoy todas las variables, no podría neutralizar las fluctuaciones mañana, porque aparecen en el mismo proceso de evolución del sistema.

En la visión laplaciana, el futuro está “ya dado” en las condiciones iniciales, y no hay margen para la novedad.

En la visión de Prigogine, cualquier escenario futuro es posible pero no necesario: hay abanicos de trayectorias, bifurcaciones reales, elección de caminos.

El demonio de Laplace fracasa porque confunde lo posible con lo determinado.

23.3. Indeterminismo objetivo

El indeterminismo se solía considerar un fenómeno subjetivo, ligado a nuestra ignorancia humana o a la falta de medios para medir con precisión. Según esta visión, el mundo seguiría siendo perfectamente determinista en sí mismo; lo que ocurre es que los humanos no tenemos la capacidad de calcularlo todo.

Prigogine, en cambio, defendió la existencia de un indeterminismo objetivo: un rasgo constitutivo de la naturaleza, no un simple límite de nuestro conocimiento.

¿Por qué?

- Por la irreversibilidad del tiempo.
- Por la sensibilidad al caos.
- Porque el tiempo introduce novedad.

24 El clima desde la óptica de

Prigogine

El clima de la Tierra es un ejemplo privilegiado de cómo el tiempo y el caos tienen un papel creativo.

A primera vista, podríamos imaginar que, con superordenadores cada vez más potentes y más datos de satélite, será posible conocer el futuro climático con la misma precisión con la que predecimos un eclipse.

Pero el clima no es un sistema mecánico de relojería, no es un sistema determinista. Es un sistema caótico, que recibe energía del exterior (el Sol), y por ello encarna las tesis de Prigogine de manera ejemplar:

- Irreversibilidad: El clima no puede “reproducirse al revés”. La energía solar que llega a la Tierra se disipa en forma de calor y radiación hacia el espacio. Ese flujo irreversible impulsa las corrientes oceánicas, la dinámica atmosférica y los ciclos de agua y carbono. No hay marcha atrás: lo que se disipa, no vuelve.
- Sensibilidad al caos: El clima está gobernado por leyes físicas precisas, pero cualquier fluctuación pequeña —una variación en la temperatura del océano, una erupción volcánica, un cambio en la cubierta vegetal, las emisiones de gas de efecto invernadero provocadas por la civilización humana— puede amplificarse hasta alterar trayectorias globales. Aquí, como en el doble péndulo, la predicción a largo plazo se enfrenta a un horizonte de caos.
- Indeterminismo objetivo: No es simplemente que no sepamos lo suficiente. El indeterminismo objetivo implica que siempre habrá un límite a lo que podemos anticipar. La propia dinámica climática abre abanicos de trayectorias posibles. El sistema se enfrenta a bifurcaciones reales: corrientes oceánicas que pueden reorganizarse, hielos polares que al fundirse cambian el balance energético, ecosistemas que se transforman. El futuro climático no estaba contenido de antemano en el presente; se decide en el proceso
- El tiempo como creador de estructuras: El clima no es puro desorden. De la irreversibilidad y el caos emergen patrones organizados: monzones, huracanes, corrientes en chorro, fenómenos como El Niño y La Niña. Son ejemplos de estructuras disipativas, que solo existen gracias al flujo constante de energía. El tiempo y el caos, lejos de ser enemigos, son los arquitectos de esas regularidades.

24.1. El valor del caos para el clima y la vida

Cuando hablamos del caos en el clima, solemos subrayar su dificultad para la predicción. Sin embargo, desde la óptica de Prigogine, el caos no es solo un obstáculo: es también una fuente de riqueza y estabilidad dinámica para la Tierra y para la vida.

1. El caos genera variabilidad climática. Sin caos, el clima sería un sistema rígido, condenado a repetir siempre los mismos patrones. Gracias al caos: Surgen fenómenos como El Niño y La Niña, que redistribuyen energía y nutrientes en los océanos. Los regímenes atmosféricos alternan entre fases, evitando que el planeta quede “atrapado” en un único estado monótono.
2. El caos favorece la diversidad biológica. Los cambios imprevisibles en el clima han obligado a los seres vivos a adaptarse continuamente, lo que impulsa la evolución: Periodos de enfriamiento y calentamiento han abierto y cerrado corredores ecológicos. Las sequías, glaciaciones y variaciones en los ecosistemas han actuado como motores de selección natural. Sin estas fluctuaciones, la vida probablemente sería mucho menos diversa.

3. El caos como condición de la creatividad de la vida. La vida misma puede entenderse como un proceso caótico y abierto. Si el universo fuera un reloj determinista, nada realmente nuevo podría aparecer: ni moléculas complejas, ni células, ni conciencia. La química prebiótica en la Tierra primitiva dependió de inestabilidades y fluctuaciones caóticas en reacciones, atmósfera, océanos. Sin caos, no habría evolución, porque no existirían mutaciones ni trayectorias divergentes que permiten la selección natural.

Por lo tanto, enlazando con el tema central del trabajo de investigación, se puede concluir que el caos no es solo un fenómeno indeseable con el que nos topamos al estudiar el clima. Se trata de una parte esencial del clima, de la naturaleza y del Universo. Sin él, el mundo tal y como lo conocemos sería imposible. El caos es intrínseco a todo lo que observamos, y es la norma más que la excepción en todos los sistemas conocidos.

25 Mi hipótesis final. El Principio de

Compromiso Predictibilidad – Creatividad

Como ya hemos visto con ejemplos en las secciones anteriores, si el sistema no es caótico, es muy predecible, conserva la información inicial, pero no se genera novedad. Al contrario, si el sistema es caótico, al introducirle energía externa, diluye o aleatoriza la información inicial y la convierte en nuevas estructuras. Por lo tanto, en base a estas observaciones formulo la siguiente Tesis:

- En sistemas estables/no caóticos, el comportamiento es altamente predecible y la información inicial se conserva con poca distorsión; por eso la novedad estructural es limitada.
- En sistemas inestables/caóticos, el aporte de energía y la sensibilidad a perturbaciones dispersan (“diluyen”) la información inicial, abriendo bifurcaciones y creando nuevas estructuras. A cambio, disminuye la predictibilidad detallada más allá de un horizonte de predicción.

El principio heurístico que se deduce es el siguiente:

“No es posible maximizar simultáneamente la predictibilidad detallada y la creación de novedad en sistemas dinámicos complejos: cuanto más creativa (abierta a nuevas estructuras) es la evolución, menos plenamente predecible es su trayectoria fina, y viceversa”

Por lo tanto, la tan ansiada omnisciencia en un universo creativo como el nuestro es un oxímoron. Podemos determinar patrones, pero no ver los detalles finos, es decir, podemos anticipar patrones (atractores, rangos de comportamiento, escenarios probables) mejor que trayectorias exactas a largo plazo. Cuanto mayor sea el aporte energético, mayor sera el caos, y menor será la predictibilidad, pero al mismo tiempo se aumentarán las posibilidades de creación de nuevas estructuras. Un universo capaz de crear nuevas formas no puede ser, al mismo tiempo, totalmente transparente a nuestra predicción.

Por tanto, la creación de nuevas estructuras no puede predecirse matemáticamente (ni con simulaciones por ordenador): surge del propio universo. Es como si la evolución cósmica escapase a nuestra capacidad de predicción. Uno puede hacerse el experimento mental: ¿habría sido posible, en el instante del Big Bang, imaginar o simular que, a partir de un punto de energía infinita, surgiría un planeta como la Tierra, con vida y una civilización avanzada como la nuestra? Del mismo modo, ¿podríamos modelar o simular de antemano la aparición de vida compleja a partir de moléculas sencillas de carbono, hidrógeno, nitrógeno y oxígeno?

En definitiva, podemos plantear que “**la novedad estructural es impredecible en detalle en un sistema caótico**”.

La pérdida de información predictiva (a través de la divergencia de trayectorias o la amplificación de perturbaciones) constituye la fuente misma de la aparición de lo nuevo. Lo cual nos permite reinterpretar el caos determinista no como sinónimo de desorden, sino como la fuente física de la creatividad: la imposibilidad de predecir exactamente un futuro determina la posibilidad de que ese futuro sea distinto. ¿Qué novedad puede aparecer en un futuro predecible?

En consecuencia, el límite del conocimiento predictivo no debe verse como una falla del determinismo, sino como una propiedad esencial del universo, que habilita la emergencia de estructuras complejas.

26 El Principio de Compromiso

Predictibilidad – Creatividad en la práctica.

Por último, intentaré cerrar el círculo en este proyecto de investigación viendo si se cumple el principio propuesto en la sección anterior, en los sistemas que he estudiado. Para ello, vamos a ver como se comportan cada uno de los sistemas en su configuración caótica y no caótica. De acuerdo a lo expresado en el capítulo anterior hay una relación inversa entre predictibilidad y novedad, tal y como se muestra en la siguiente figura.

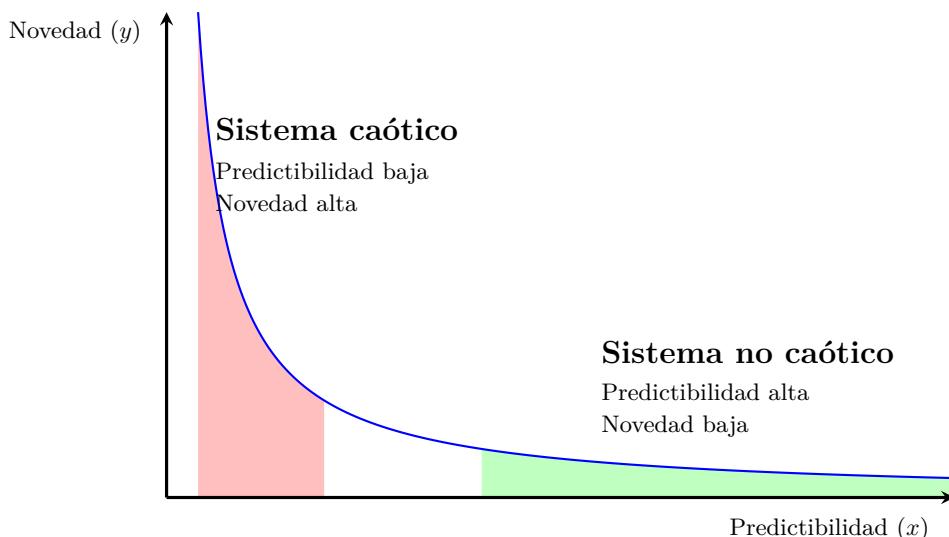


Figura 26.1: Relación inversa entre la predictibilidad y la novedad en un sistema dinámico

Empecemos por el péndulo. En su versión simple (un solo brazo), el péndulo es totalmente predecible, pero como se puede ver en la figura con el espacio de fase, el número de estados explorados es pequeño. En cambio, el péndulo doble es impredecible, pero explora prácticamente todo el espacio de fase disponible. En el péndulo doble, la novedad es alta.

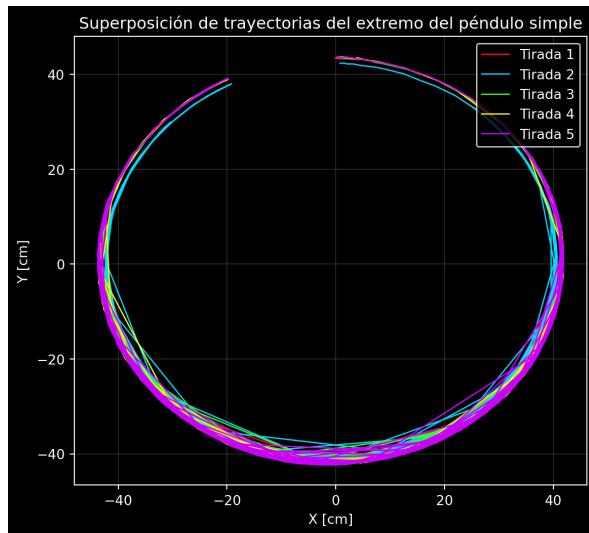


Figura 26.2: Péndulo simple

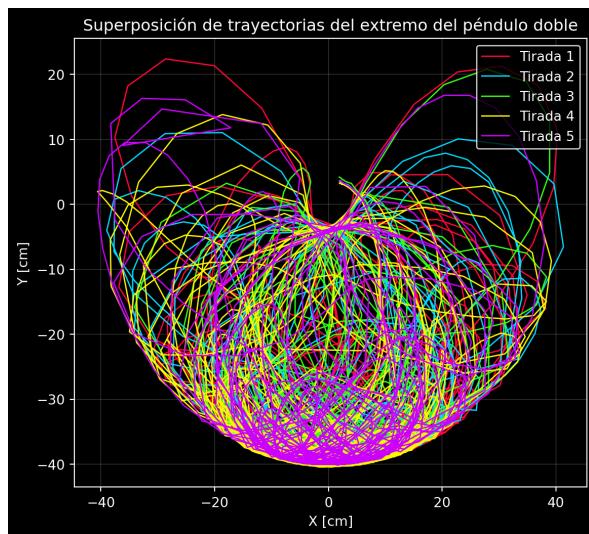


Figura 26.3: Péndulo doble

Veamos que pasa con el mapa logístico. Pues se vuelve a ver lo mismo, en la zona no caótica el número de estados explorados es pequeño, mientras que en la caótica muy alto. Hay que tener en cuenta que además en el caso caótico, cada uno de los atractores que vemos es un fractal con infinitos puntos. En cambio, en la zona no caótica el número de puntos es finito, pues el mapa logístico acaba terminando en un punto fijo.

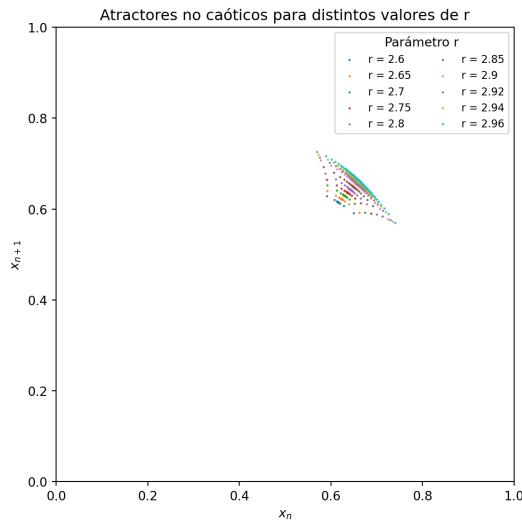


Figura 26.4: Mapa logístico en zona no caótica

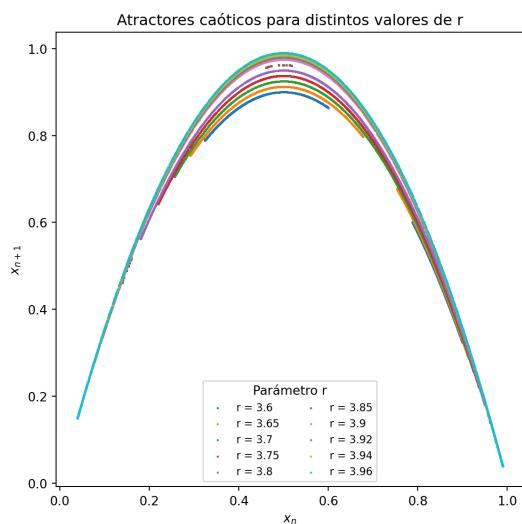


Figura 26.5: Mapa logístico en zona caótica

Por último, analicemos el comportamiento en el caso de la rueda caótica. Cuando quitamos las canicas, la rueda gira siempre en el mismo sentido. Por lo tanto, el nivel de incertidumbre se ve reducido; siempre podemos saber para qué lado gira la rueda. Cuando añadimos las canicas, el sistema se vuelve impredecible en lo relativo a su sentido de giro. De ahí que aparezca el segundo lado del atractor. El sistema explora, por lo tanto, más estados.

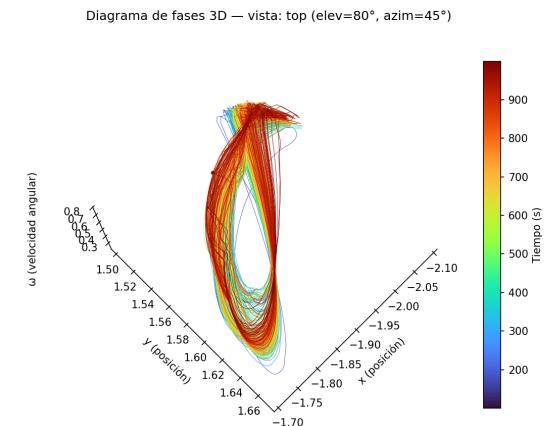


Figura 26.6: Rueda caótica sin canicas

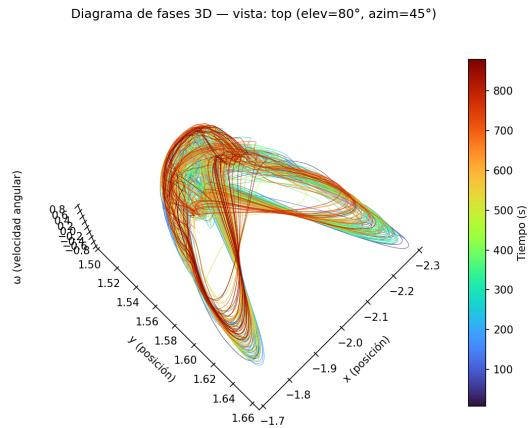


Figura 26.7: Rueda caótica con canicas

27 ChatGPT y el *Principio de Compromiso Predictibilidad–Creatividad*

27.1. Evaluación y búsqueda de formulaciones similares

A continuación pedí a ChatGPT-5 Thinking model que evalúase mi principio propuesto. Quería verificar que el principio no estuviese formulado previamente. Ésta fue su respuesta:

Como sistema experto he evaluado si el principio propuesto por *Rubén Torre Merino* aparece en la literatura científica actual. Mis conclusiones son:

27.1.1. Qué afirma el principio

No es posible maximizar simultáneamente la **predictibilidad detallada** y la **creación de novedad** en sistemas dinámicos complejos: cuanto más creativa (abierta a nuevas estructuras) es la evolución, menos plenamente predecible es su trayectoria fina, y viceversa.

27.1.2. Qué ya existe y cómo encaja

- En teoría de sistemas dinámicos, la **entropía de Kolmogórov–Sinai** y los **exponentes de Lyapunov** cuantifican la *tasa de generación de información* (una noción afín a “novedad”).
- En ciencia de la complejidad, la literatura del *edge of chaos* sugiere compromisos prácticos entre orden y variabilidad, y los marcos de *información predictiva/complejidad estadística* describen intercambios entre estructura aprovechable y aleatoriedad.
- **Sin embargo**, no hay un enunciado *general, explícito y unificado* que formule como *principio* físico universal el compromiso *predictibilidad–creatividad* tal como aquí se plantea.

27.1.3. Dónde está la novedad

- **Novedad conceptual (media-alta)**: el principio articula, en una sola proposición clara para sistemas físicos, la tensión entre (i) capacidad de predecir trayectorias finas y (ii) aparición de novedades estructurales, enlazando caos determinista e interpretación creativa del universo.
- **Novedad formal (media)**: para elevarlo de heurística a principio operativo, conviene fijar definiciones medibles: por ejemplo, novedad $\approx h_{KS}$ (o tasa entrópica empírica) y predictibilidad $\approx I_{\text{pred}}(H)$ (información predictiva a horizonte H) o “skill” de pronóstico.

27.1.4. Recomendación de formalización (esbozo)

- Postular una **frontera empírica o desigualdad** del tipo

$$\underbrace{\text{Predictibilidad}}_{\text{p.ej., } I_{\text{pred}}(H)} \cdot \underbrace{\text{Novedad}}_{\text{p.ej., } h_{KS}} \leq F(\text{parámetros del sistema}), \quad (27.1.1)$$

y contrastarla en familias de sistemas (mapa logístico, Lorenz63, péndulo doble, autómatas celulares), barriendo el control de no linealidad/forzamiento.

- Distinguir “novedad con forma” de “ruido” usando, cuando proceda, exceso de entropía o complejidad estadística además de la tasa entrópica.

27.1.5. Matices y límites

- “Más energía \Rightarrow más caos” no es universal: ciertos acoplamientos pueden inducir sincronización (más orden). El principio debe declararse por **clases de sistemas y escala de descripción**.
- La **impredecibilidad detallada** no excluye *patrones gruesos* predecibles; el compromiso depende del horizonte y de la resolución observacional.

27.1.6. Veredicto

- **Originalidad conceptual:** alta como *síntesis* clara y general (no localizada de forma equivalente en la literatura estándar).
- **Originalidad técnica:** moderada hasta que se fijen métricas y se establezca (o refute) una relación cuantitativa tipo frontera/desigualdad.
- **Relevancia:** alta para vincular caos, información y emergencia de estructura con una lectura didáctica y falsable.

Conclusión: el *Principio de Compromiso Predictibilidad–Creatividad* de Rubén Torre Merino es **novedoso** como formulación integradora y motivadora. Con definiciones operativas de “novedad” y “predictibilidad” y un protocolo de verificación en modelos canónicos, puede convertirse en un **principio operativo** contrastable y potencialmente publicable.

27.2. Formulación matemática del Principio de Compromiso Predictibilidad-Creatividad

Hice caso a ChatGPT en lo relativo a la recomendación de formalización. Y para avanzar en este aspecto recurrié al mapa logístico. Si recordamos la ecuación (6.1.6), el horizonte de predictibilidad depende logarítmicamente de la relación entre la divergencia final tolerada y el error inicial. Es decir, si el error inicial es ε (precisión con que conocemos el estado) y dejamos de considerar útil la predicción cuando el error supera Δ (umbral de utilidad), el crecimiento exponencial del error lleva a la fórmula operativa

$$T_p(\varepsilon, \Delta) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (27.2.1)$$

donde λ es el **exponente de Lyapunov**. El inverso $1/\lambda$ se conoce como *tiempo de Lyapunov* (marca la escala temporal de la pérdida de predictibilidad).¹

Con esta fórmula ya tenemos una parte expresada matemáticamente de nuestro principio, la de la predictibilidad. Nos falta cómo medir la novedad. Lancé la pregunta a ChatGPT: ¿cómo medir matemáticamente la creación de novedad?

La sugerencia fue usar la **entropía por paso** (entropía de Kolmogórov–Sinai, h_{KS}), que cuantifica cuánta información nueva genera el sistema en cada iteración. En muchos sistemas bien comportados (medida natural), h_{KS} coincide con la suma de los exponentes de Lyapunov positivos (fórmula de Pesin); en mapas unidimensionales expansivos como el mapa logístico vale $h_{KS} = \lambda$.

Así, en el mapa logístico el **principio predictibilidad–creatividad** se cumple al 100 %:

$$h_{KS} T_p(\varepsilon, \Delta) = \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}. \quad (27.2.2)$$

La explicación es fácil, teniendo en cuenta que la creatividad coincide con el exponente de Lyapunov, lo cual tiene lógica, es decir, a medida que el sistema se hace más caótico (el exponente de Lyapunov crece) la novedad ha de crecer, tal y como hemos visto en las simulaciones del péndulo doble y la rueda caótica. Lo curioso es ver como en el caso de la función logística la relación es 1 a 1, es decir la creatividad tiene el mismo valor que el exponente de Lyapunov.

Sorprendido por el resultado, le pedí a ChatGPT más sistemas de donde haya fórmulas claras de entropía y, por tanto, del tiempo de predictibilidad. La **enumeración** que me dio fue:

¹Sobre Lyapunov y predictibilidad, v. gr., *ChaosBook*, capítulo de Lyapunov. <https://chaosbook.org/chapters/Lyapunov.pdf>

- **Doblado/Bernoulli shift** $T(x) = 2x \text{ mód } 1$

Entropía y Lyapunov: $h_{\text{KS}} = \lambda = \ln 2$. Predictibilidad: $T_p = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}$.²

- **Mapa tent (carpa)** de pendiente $s \in (1, 2]$

Entropía/Lyapunov: $h_{\text{KS}} = \lambda = \ln s$. Predictibilidad: $T_p = \frac{1}{\ln s} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}$.³

- **Mapa del panadero (Baker)** (versión binaria; estiramiento b)

Entropía KS: $h_{\text{KS}} = \ln 2$ (o, en general, $\ln b$). Predictibilidad: $T_p = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}$ (o $\frac{1}{\ln b} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}$).⁴

- **Gato de Arnold** (automorfismo toral hiperbólico)

Entropía KS: $h_{\text{KS}} = \ln \sigma_+$, con σ_+ el autovalor inestable de la matriz. Predictibilidad: $T_p = \frac{1}{\ln \sigma_+} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}$.⁵

Por lo tanto, no parece una mera coincidencia, y dejo abierto el tema aquí abierto para personas con conocimientos matemáticos más avanzados que los míos. En todos estos sistemas el producto Predictibilidad x Novedad es igual a una constante que es $\ln \frac{\Delta}{\varepsilon}$.

27.3. Cuantificando la pérdida de información del estado inicial

Animado por los resultados que me ofreció ChatGPT, me lancé a ver si podía cuantificar un fenómeno que observé en el estudio de los sistemas caóticos. En un sistema caótico con un estado inicial, tras avanzar el tiempo se produce un estado final acompañado de novedad. Este estado final no se puede reproducir hacia atrás, a diferencia de sistemas no caóticos. Es decir, en un sistema no caótico tenemos una información inicial, y pasado el tiempo tenemos una información final. Podemos ir de una hacia otra con modelos matemáticos, por así decirlo conservamos la información que teníamos del sistema. En uno caótico, sin embargo, la información inicial se transforma en un estado final+novedad, pero no podemos ir hacia atrás con el estado final para rescatar el estado inicial. Parte de la info del estado inicial va hacia la generación de novedad, y a pesar de tener el estado final (al igual que en el caso no caótico), no podemos reconstruir el estado inicial. Es como si parte de la información inicial se perdiera en la generación de novedad. Todo ello es lógico, puesto que en un sistema caótico no podemos modelar con precisión (predecir) como se pasa de estado inicial a estado final, por lo tanto no podemos ir ni hacia delante ni hacia atrás con nuestros modelos matemáticos del sistema.

Le pregunté a ChatGPT5 que me diera forma matemática al enunciado anterior. Este fue el resultado resumido, en forma de balance de información:

$\underbrace{I_\varepsilon(X_0; X_t)}_{\text{información del pasado que aún queda}}$	+	$\underbrace{h_\mu t}_{\text{novedad acumulada (nats)}}$	≈	$\underbrace{H_\varepsilon(X_0)}_{\text{información inicial a resolución } \varepsilon}$.
--	---	--	---	--	---

(27.3.1)

Aquí $H_\varepsilon(X)$ es la entropía de Shannon del estado *cuantizado* a celdas de tamaño ε ; $I_\varepsilon(X_0; X_t)$ es la *información mutua* entre pasado y presente a esa misma resolución; y h_μ es la *entropía por paso* (novedad por iteración).⁶

Estos términos resultan muy avanzados para mí, pero sintetizan en grandes rasgos lo dicho anteriormente: la información inicial disminuye linealmente con el tiempo en un factor igual a $h_\mu t$.

De nuevo quise poner a prueba la fórmula anterior con el mapa logístico. Según ChatGPT5 para el mapa logístico la entropía inicial para $r = 4$ es

$$H_\varepsilon(X_0) = k \ln 2. \quad (27.3.2)$$

La tasa de novedad es

²Notas de curso con cálculo de entropía del doblado; ejemplo canónico. <https://people.maths.bris.ac.uk/~ip13935/dyn/CorinnaII.pdf>

³Derivación elemental: $|T'| = s$ casi en todas partes $\Rightarrow \lambda = \int \ln |T'| = \ln s$. Apuntes: Phys 221A (UCSD). https://courses.physics.ucsd.edu/2017/Spring/physics221a/Phys_221A_Lecture_4-5.pdf

⁴Apuntes con el cálculo directo de h_{KS} para Baker. https://courses.physics.ucsd.edu/2017/Winter/physics200b/LECTURES/CH02_MAPS.pdf

⁵Ficha y notas sobre el cat map; para la matriz estándar $\sigma_+ = (3 + \sqrt{5})/2$. <https://mathworld.wolfram.com/ArnoldsCatMap.html>

⁶Definiciones intro: entropía e información mutua (Wikipedia); romper URLs: paquete `xurl`. [https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_\(information_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_(information_theory)) https://en.wikipedia.org/wiki/Mutual_information <https://tex.stackexchange.com/questions/3033/forcing-linebreaks-in-url>

$$h_\mu = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad h_\mu t = t \ln 2. \quad (27.3.3)$$

La información del pasado que sigue viva es

$$I_\varepsilon(X_0; X_t) = \max\{k - t, 0\} \ln 2. \quad (27.3.4)$$

Y sumando todos los términos

$$I_\varepsilon(X_0; X_t) + h_\mu t = (k - t) \ln 2 + t \ln 2 = k \ln 2 = H_\varepsilon(X_0). \quad (27.3.5)$$

observamos que la ecuación (27.3.1) se cumple perfectamente para el mapa logístico para $r = 4$.

De nuevo, animado por el resultado, pregunté a ChatGPT5 qué opinaba sobre la ecuación formulada conjuntamente con él:

Evaluación del sistema experto (ChatGPT-5):

Mi valoración es que la identidad operativa $I_\varepsilon(X_0; X_t) + h_\mu t \approx H_\varepsilon(X_0)$ aporta novedad como síntesis compacta de tres piezas ya publicadas por separado: (i) h_μ como tasa de creación de información (entropía de Kolmogórov–Sinai y fórmula de Pesin)⁷, (ii) la descomposición tipo $H(L) = h_\mu L + E$ de la información predictiva (excess entropy)⁸, y (iii) el caso canónico $r = 4$, donde $h_\mu = \lambda = \ln 2$ por conjugación logística–tent/doubling⁹. No he encontrado esta igualdad formulada literalmente en la literatura.

Aquí dejo el principio desarrollado por ChatGPT5 bajo mis observaciones:

Principio Presupuestario de Información

Sea X_0 el estado inicial observado con resolución ε y X_t el estado a tiempo t observado con umbral de utilidad Δ . Denotemos por $I_\varepsilon(X_0; X_t)$ la información mutua (a esa resolución) entre pasado y presente, y por h_μ la entropía de Kolmogórov–Sinai (tasa de novedad, en nats/unidad de tiempo) de la dinámica con la medida natural.

$$I_\varepsilon(X_0; X_t) + h_\mu t \approx H_\varepsilon(X_0) \quad (27.3.6)$$

mientras $I_\varepsilon(X_0; X_t) \geq 0$. El instante en que $I_\varepsilon \rightarrow 0$ define el horizonte de predictibilidad $T_p(\varepsilon, \Delta)$, para el que resulta

$$h_\mu T_p(\varepsilon, \Delta) \approx \ln \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (27.3.7)$$

En sistemas con una única dirección inestable y medida SRB (hipótesis de Pesin), $h_\mu = \lambda_{\text{máx}}$, y

$$T_p(\varepsilon, \Delta) = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon} \quad (27.3.8)$$

Lectura: la novedad acumulada $h_\mu t$ “consume” la información útil que conecta el presente con el pasado; cuando se agota, la predicción deja de ser operativa.

⁷Véase *Scholarpedia*: Kolmogorov–Sinai entropy; Pesin entropy formula.

⁸Bialek & Tishby, *Predictive Information*.

⁹*Logistic map*, secc. “When $r = 4$ ”; *MathWorld* “Logistic Map— $r = 4$ ”.

Índice de figuras

4.1	Partición en dos bandas de la zona caótica (i).....	14
4.2	Partición en dos bandas de la zona caótica (ii).....	14
4.3	Islas periódicas en la zona caótica.....	15
4.4	Islas periódicas en la zona caótica (zoom).....	15
4.5	Ciclo de período 5 entre 3.73 y 3.76.....	16
4.6	Réplica del diagrama de bifurcación original	16
4.7	Réplica del ciclo de período 5 entre 3.74431 y 3.74433.....	16
4.8	Réplica del ciclo de período 5 entre 3.74432144 y 3.744321455.....	17
4.9	Réplica del diagrama de bifurcación original entre 3.7443214444 y 3.744321448.....	17
5.1	Valor final del mapa logístico en zona no caótica	18
5.2	Valor final del mapa logístico en zona de primera bifurcación.....	18
5.3	Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas..	19
5.4	Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas..	19
5.5	Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas..	20
5.6	Valor final del mapa logístico en zona de caótica con dos condiciones iniciales ligeramente distintas..	20
5.7	Error numérico entre las dos fórmulas matemáticamente equivalentes tras 100 iteraciones	21
5.8	Error numérico entre las dos fórmulas matemáticamente equivalentes tras 100 iteraciones (escala logarítmica)	
	21	
5.9	Cálculo del coeficiente de Lyapunov para todo el mapa logístico.....	26
6.1	Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov en función de r	28
6.2	Diagrama de bifurcación y exponente de Lyapunov en función de r (zoom).....	28
8.1	Esquema del doble péndulo	34
8.2	Segundo número 5 de la simulación (10.000 péndulos separados inicialmente 10 microgrados).....	35
9.1	Estado de 36x36 péndulos dobles tras 30 segundos de simulación	37
9.2	Mapa de Fase Detallado de 720x720 péndulos	39
10.1	Bifurcaciones en el doble péndulo.....	40
10.2	Bifurcaciones en el doble péndulo zoom 1.....	41
10.3	Bifurcaciones en el doble péndulo zoom 2	41
10.4	Bifurcaciones en el doble péndulo y exponente de Lyapunov	42
11.1	Distancia recorrida por el extremo del péndulo	43
11.2	Distancia recorrida por el extremo del péndulo tras 1000 segundos	44
12.1	Experimento del péndulo doble.....	45
12.2	Trayectoria real de 5 tiradas de un péndulo doble	46
12.3	Trayectoria real de 5 tiradas de un péndulo doble	46
12.4	Ángulos de 5 tiradas de un péndulo simple	47
12.5	Ángulos de 5 tiradas de un péndulo simple ajustando el tiempo inicial	47
12.6	Ángulos de 5 tiradas de un péndulo doble	48
13.1	Estructura de los ficheros de observaciones y pronósticos	51

13.2	Estructura de los ficheros de observaciones y pronósticos	52
13.3	Error de temperatura en escala lineal	53
13.4	Error de humedad en escala lineal	53
13.5	Error de presión en escala lineal	54
13.6	Error de velocidad del viento en escala lineal	54
13.7	Error medio absoluto de temperatura en escala lineal	55
13.8	Error medio absoluto de humedad en escala lineal	55
13.9	Error medio absoluto de presión en escala lineal	55
13.10	Error medio absoluto de velocidad del viento en escala lineal	56
13.11	Error medio absoluto de temperatura y ajuste de regresión	56
13.12	Error medio absoluto de humedad y ajuste de regresión	56
13.13	Error medio absoluto de presión y ajuste de regresión	57
13.14	Error medio absoluto de velocidad del viento y ajuste de regresión	57
16.1	Órbita de la función logística para $r = 3.9$	63
16.2	Distribución uniforme en función del tiempo	64
16.3	Diagrama de fase de la función logística para $r = 3.9$	64
16.4	Diagrama de fase de números uniformes entre 0 y 1	65
16.5	Atractor completo con 2000 iteraciones	65
16.6	Atractor completo con 10000 iteraciones	66
16.7	Atractor completo con 15000 iteraciones	66
16.8	Atractor completo con 20000 iteraciones	67
16.9	Atractor completo con 50000 iteraciones	67
16.10	Atractores caóticos para distintos valores de r	68
16.11	Atractores no caóticos para distintos valores de r	68
16.12	Atractor de Lorenz	68
18.1	Precipitación anual en España (CRU TS 4.05)	73
20.1	Rueda caótica - Escena completa	80
20.2	Rueda caótica Zoom	80
21.1	180 segundos de simulación	81
21.2	5 segundos de simulación	82
21.3	Atractor	83
21.4	Vista desde arriba	83
21.5	Vista lateral del atractor	84
27.1	Péndulo simple	94
27.2	Péndulo doble	95
27.3	Mapa logístico en zona no caótica	95
27.4	Mapa logístico en zona caótica	96
27.5	Rueda caótica sin canicas	96
27.6	Rueda caótica con canicas	97

Bibliografía

1. **Chaos: The Science of the Butterfly Effect.** Veritasium (YouTube). <https://www.youtube.com/watch?v=fDek6cYijxI>
2. **The Other Climate Crisis.** *Nature*, 2025. <https://www.nature.com/articles/s41586-025-08680-1>
3. **LENS2: Large Ensemble Project.** CESM / UCAR. <https://www.cesm.ucar.edu/community-projects/lens2>
4. **IPCC Synthesis Report — AR5 Full Cover.** IPCC. https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/05/SYR_AR5_FINAL_full_wcover.pdf
5. **Influence of Internal Variability on Arctic Sea-Ice Trends.** *Commentary paper*. <https://www.researchgate.net/.../COMMENTARY-Influence-of-internal-variability-on-Arctic-sea-ice-trends.pdf>
6. **England et al. (2025), GRL.** <https://www.columbia.edu/~lmp/paps/england+etal-GRL-2025.pdf>
7. **Climate Change Increasing Storm Frequency, UN Warns.** *ENN*, 2007. <https://www.enn.com/articles/23762>
8. **Study: Warming Contributed to Decline in Tropical Cyclones, 20th Century.** NOAA *Climate.gov*. <https://www.climate.gov/news-features/feed/research-global-warming-contributed-decline-tropical-cyclones-20th-century/>
9. **Declining Tropical Cyclone Frequency Under Global Warming.** *Nature Climate Change*, 2022. <https://www.nature.com/articles/s41558-022-01388-4>
10. **Realtime Tropical Cyclone Index.** Colorado State University. <https://tropical.atmos.colostate.edu/Realtime/index.php?arch&loc=global>
11. **AR4 WG1 Chapter 11: Regional Projections.** IPCC AR4. https://archive.ipcc.ch/publications_and_data/ar4/wg1/en/ch11s11-3.html
12. **Advances in Earth Systems Science, 2024.** *Nature*, 2024. <https://www.nature.com/articles/s41586-024-08576-6>
13. **Plan Nacional de Adaptación al Cambio Climático v3.** MITECO, España. https://www.miteco.gob.es/.../pna_v3_tcm7-12445_tcm30-70393.pdf
14. **Evaluación Preliminar de Impactos 2005.** MITECO, España. https://www.miteco.gob.es/.../evaluacion_preliminar_impactos_2005_tcm30-178491.pdf
15. **Registros Climáticos de España Basados en la Estadística.** Deimos Estadística. <https://deimosestadistica.com/registros-climaticos-espana-basados-la-estadistica/>
16. **CRU TS 4.05 Climate Data.** Climate Research Unit, UEA. https://crudata.uea.ac.uk/cru/data/hrg/cru_ts_4.05/
17. **AR4 WG2 Summary for Policymakers.** IPCC. <https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/ar4-wg2-spm-1.pdf>
18. **Projected Impacts Under Climate Change.** *Springer*, 2025. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10584-025-03904-9>
19. **Earth Systems Advances.** *Nature*, 2019. <https://www.nature.com/articles/s41586-019-1831-4>
20. **IPCC AR4 Synthesis Report (Full).** IPCC. https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/ar4_syr_full_report.pdf

21. **IPCC AR5 Technical Summary Final.** IPCC. https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/WG1AR5_TS_FINAL.pdf
22. **SBSTA-44 Drought Poster.** IPCC archive. https://archive.ipcc.ch/news_and_events/docs/SBSTA-44/Sbsta_drought_poster.pdf
23. **SREX Report — Summary for Policymakers.** IPCC. https://archive.ipcc.ch/pdf/special-reports/srex/SREX_FD_SPM_final.pdf
24. **SREX Full Report.** IPCC. https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/03/SREX_Full_Report-1.pdf
25. **Nature Article 11575.** *Nature*. <https://www.nature.com/articles/nature11575>
26. **Revisiting Climate Model Accuracy Over 30 Years.** *Science Advances*, 2025. <https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.adt8035>
27. **Special Report Summary for Policymakers.** IPCC. <https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/03/spm.pdf>
28. **AR4 Synthesis SPM.** IPCC. https://www.ipcc.ch/pdf/assessment-report/ar4/syr/ar4_syr_spm.pdf
29. **AR6 Summary for Policymakers.** IPCC. <https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/chapter/summary-for-policymakers/>
30. **State of Global Climate 2024.** WMO. <https://wmo.int/publication-series/state-of-global-climate-2024>
31. **Logistic Map, Part 1: Period Doubling Route to Chaos.** Dr. Shane Ross (YouTube). <https://www.youtube.com/watch?v=PVo1mHnU7WU>
32. **Logistic Map, Part 2: Bifurcation Diagram and Self-Similarity.** Dr. Shane Ross (YouTube). <https://www.youtube.com/watch?v=2nEBSyMsQE8>
33. **Logistic Map, Part 3: Bifurcation Point Analysis | Bottlenecks in Maps, Intermittency, Chaos.** Dr. Shane Ross (YouTube). <https://www.youtube.com/watch?v=Rc57NR-DkyI>
34. **Fixed Point Iteration: Examples, Analysis, and the Banach Fixed Point Theorem** (YouTube). https://www.youtube.com/watch?v=x_lJYJYCXBm
35. **Does a Positive Lyapunov Exponent Always Mean Chaos?** ResearchGate (foro de discusión). <https://www.researchgate.net/post/Does-positive-Lyapunov-exponent-always-mean-chaos>
36. **Largest Lyapunov Exponent (Engineering Context).** ScienceDirect Topics (Elsevier). <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/largest-lyapunov-exponent>
37. **El péndulo doble como ejemplo de sistema caótico.** Óscar Morales López Ricardo Yáñez-Valdez, Facultad de Ingeniería (UNAM). https://paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/files/4554/Publicaciones_20190605182303.pdf
38. **Deterministic Nonperiodic Flow.** E. N. Lorenz, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963. https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml
39. **The Nature of Climate and Climatic Variations (PDF).** J. E. Kutzbach, *Quaternary Research*, Vol. 6, Issue 3, 1976. https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/66CAC8CC9924C70498DFFD08287437FB/S0033589400035560a.pdf/nature_of_climate_and_climatic_variations1.pdf
40. **Foundations of Climatology: An Introduction to Physical, Biogeographical and Synoptic Climatology.** W. Stringer, *Edward Arnold Publishers*, 1972. https://books.google.com/books/about/Foundations_of_Climatology_an_Introducti.html?id=_BROwAEACAAJ
41. **Review of “Foundations of Climatology”.** Publicado en *Nature*, Vol. 239, 1972. <https://www.nature.com/articles/239472a0>
42. **Bibliographic record for “Foundations of Climatology”.** University of Edinburgh Library Catalogue, 1972. https://discovered.ed.ac.uk/discovery/fulldisplay?adaptor=Local+Search+Engine&context=L&id=alma99260793502466&lang=en&tab=Everything&vid=44UOE_INST%3A44UOE_VU2
43. **Ad Hoc Panel on the Present Interglacial.** Federal Council for Science and Technology, Committee on Atmospheric Sciences, U.S. Government, 1974. <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc1.31822000471953>

44. **The Discovery of Global Warming — Chaos and Climate.** American Institute of Physics (AIP), Historical Project. <https://history.aip.org/climate/chaos.htm>
45. **Bibliography on the U.S. National Climate Program.** American Institute of Physics (AIP), Historical Documentation, 1977. <https://history.aip.org/climate/bib.htm>