

Estudio del Caos en sistemas físicos y su relación con la predicción meteorológica

Rubén Torre Merino

Table of contents

1 ColaCaos

¿Has oído hablar alguna vez de la teoría del caos? Es posible que te suene la famosa idea de que «el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un huracán en Texas». Esta afirmación es una metáfora del efecto mariposa, un concepto fundamental dentro de la teoría del caos que describe cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un sistema pueden dar lugar a diferencias enormes en su evolución.

El origen de esta idea se remonta a 1972, cuando el meteorólogo y matemático Edward Lorenz presentó una conferencia titulada «Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?» en la 139ª reunión de la American Association for the Advancement of Science (AAAS). Lorenz, que investigaba modelos meteorológicos, descubrió que pequeñas diferencias en los datos iniciales podían generar predicciones climáticas completamente distintas. Su trabajo sentó las bases de la teoría del caos y revolucionó la comprensión de los sistemas físicos.

La inspiración para este trabajo me vino de este video de Veritasium.

Si tienes tiempo y ganas también te recomiendo este video de PBS. Mucho más largo pero con mayor detalle

Pero, ¿qué significa realmente el caos? Aunque solemos asociarlo con desorden y aleatoriedad, en matemáticas y física el caos tiene un significado más profundo. Un sistema caótico no es simplemente impredecible, sino que sigue leyes deterministas, pero con una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Esto significa que, aunque podamos conocer las reglas que rigen su comportamiento, su evolución se vuelve imposible de predecir a largo plazo debido a la amplificación de pequeñas incertidumbres.

En este blog exploraremos cómo la teoría del caos y en especial sus consecuencias en la predicción del tiempo meteorológico. A través de ejemplos, experimentos y reflexiones, descubriremos cómo el caos no es simplemente desorden, sino una forma compleja de organización que rige muchos aspectos del mundo que nos rodea.

También abordaremos las implicaciones filosóficas del caos. Si la teoría del caos es correcta, a pesar de estar trabajando con sistemas cuyas ecuaciones son deterministas, no podremos conocer con certeza el estado final del sistema, por mucho que nos empeñemos en conocer con mas precisión las condiciones iniciales del sistema. Esto sugiere una limitación fundamental en muchos aspectos del conocimiento que la humanidad puede tener de su futuro. A pesar de la mejora de los medios técnicos disponibles por la Humanidad, y del avance científico, tenemos una limitación establecida por el Caos, que nos proyecta un Horizonte de Predictibilidad que no podemos pasar. Es un limite similar al de la velocidad de la luz, o al horizonte de sucesos de un agujero negro. Nunca vamos a poder ver más allá del Horizonte de Predictibilidad.

Por lo tanto, teniendo claras estas limitaciones, ¿Cómo pueden los científicos hacer predicciones sobre el clima de la Tierra a 10, 20 o 100 años vista, si el horizonte de predictibilidad del tiempo meteorológico no es mayor de 2 semanas?

Para concluir, he de confesar que no me he podido resistir a hacer el juego de palabras fácil con Cola «Caos», así que, la pregunta que intentaré responder, es ¿Puede una persona agitando

su taza de Cacao por la mañana provocar un huracán al otro lado del océano a la semana siguiente?



Part I

Introducción

2 Resumen del Proyecto de Investigación

Desde tiempos inmemoriales el ser humano ha ansiado conocer el futuro. En la antigüedad, las culturas anteriores al desarrollo de la ciencia recurrían a la magia, oráculos y al esoterismo para tratar de predecir el futuro. Con la llegada del método científico, la Humanidad pudo conocer las leyes físicas que rigen el Universo para así poder predecir el comportamiento de muchos fenómenos naturales. La mecánica de Newton permitió calcular trayectorias de planetas y cometas con gran precisión; la termodinámica y la química explicaron reacciones y transformaciones de la materia; la biología comenzó a anticipar procesos vitales como la herencia genética.

Durante siglos, esta idea de que si conocemos las leyes y las condiciones iniciales podemos anticipar el futuro fue dominante en la ciencia. Sin embargo, a mediados del siglo XX surgió un descubrimiento sorprendente: incluso en sistemas gobernados por leyes deterministas, pequeñas variaciones en los datos iniciales podían producir resultados totalmente distintos.

Este fenómeno recibió el nombre de caos, y cambió para siempre nuestra concepción de la predicción. Podíamos conocer las leyes que rigen el Universo, pero la capacidad de conocer el futuro era limitada.

Para poder comprender el alcance del caos sobre la capacidad de predicción recurrí en primer lugar a analizar el fenómeno en el ordenador. Y es que es el ordenador el medio por el cual realizamos cálculos complejos basados en modelos matemáticos de la realidad que nos rodea. Como campo de experimentación escogí el mapa logístico, por ser una sucesión sencilla que presenta un comportamiento caótico muy complejo. Realicé varios experimentos, entre ellos uno muy impactante, que fue codificar el mapa logístico de dos maneras diferentes, como $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$ y como $x_{n+1} = r x_n - r x_n^2$. Al cabo de pocas iteraciones comprobé cómo los resultados de ambas fórmulas divergían enormemente debido a la precisión finita de almacenaje de los números en el ordenador.

Ante estos resultados tan desconcertantes, me pregunté si el caos también se da de forma tan fácil en sistemas físicos. Entonces recurrí al análisis del péndulo doble, que es uno de los sistemas caóticos por antonomasia. Para ello, pedí a ChatGPT que me desarrollase las ecuaciones matemáticas que rigen el movimiento del péndulo y que me las simulase bajo multitud de estados iniciales diferentes, ligeramente separados unos de otros. Los desarrollos fueron codificados por ChatGPT en Python y simulados en mi ordenador. Algunas de las simulaciones implicaban el lanzamiento en paralelo de miles de péndulos y eran muy lentas ejecutadas en la CPU del ordenador, por lo que tuve que recurrir a que ChatGPT paralelizase los programas usando las librerías de Python para la tarjeta gráfica Nvidia de mi ordenador. Los resultados fueron de nuevo sorprendentes, pues empezaron a aparecer estructuras fractales dentro de las condiciones iniciales cuando simulaba miles de péndulos a la par. No importaba cómo de pequeña era la diferencia de condiciones iniciales entre dos péndulos, que al final, con el transcurso del tiempo, los péndulos dobles siempre divergían.

Una vez terminada la parte de análisis matemático y de simulación de los sistemas caóticos, me lancé a comprobar si en verdad este comportamiento caótico se daba en la realidad. Compré un péndulo doble, que tenía la propiedad de poder bloquear el segundo eje para así transformarse en un péndulo simple. Aquí el reto estaba en poder medir con precisión la posición de los dos brazos del péndulo mientras se movía a alta velocidad. Tras ser aconsejado por ChatGPT, recurrí a

una librería de visión por ordenador llamada OpenCV. Con la ayuda de ChatGPT realicé un programa que, en tiempo real, medía la posición de los brazos del péndulo doble y guardaba los datos en un fichero. Gracias a este programa, pude ver que lanzando el péndulo doble en diferentes posiciones iniciales, las trayectorias divergían enormemente tras unos breves instantes. Me pregunté si habría algún problema con la forma en la que estaba configurado el experimento, así que recurrí a hacer lo mismo con el péndulo simple. En este caso, pude constatar, cómo una tras otra, las trayectorias eran idénticas en todos los lanzamientos.

Un aspecto importante que pude apreciar en el péndulo doble es que si bien su posición en un momento dado era imposible de predecir, había variables que sí se podían predecir con bastante exactitud, como por ejemplo la distancia recorrida por el extremo del péndulo. En todos los lanzamientos resultaba muy similar. Es decir, en los sistemas caóticos hay ciertos patrones y estadísticas que sí pueden ser estimadas de antemano.

Llegado a este punto y convencido del comportamiento caótico de sistemas aparentemente sencillos, quise ver cómo se manifestaba el caos en sistemas más complejos, como es la atmósfera terrestre y la meteorología, y también quise ver como lidiaba la ciencia con este asunto. Si bien pude encontrar modelos de código abierto con los que simular la atmósfera, no disponía la capacidad de cómputo para ejecutarlos. Por ello, y tras investigar el tema, llegué a la conclusión de que el mayor error que se da en las predicciones es el debido a la imprecisión de la estimación de las condiciones iniciales, no a las ecuaciones que rigen los modelos. Entonces, pensé que observando cómo diverge la observación real del tiempo de la predicción realizada unos días antes por los modelos de las agencias meteorológicas, podría cuantificar el crecimiento exponencial del caos debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Creé con ChatGPT un programa, que día tras día, se conectaba a una web meteorológica y que me daba las predicciones para los siguientes 14 días. Almacené esos datos durante tres meses, y después los analicé. Pude así ver con datos reales el crecimiento exponencial de los errores, y hacer un análisis de regresión para calcular el exponente de Lyapunov de las variables meteorológicas principales: temperatura, presión, humedad y velocidad del viento. Corroboré este procedimiento y pude despejar algunas dudas con técnicos de predicción de la AEMET, quienes tuvieron la amabilidad de charlar conmigo durante una mañana sobre el impacto del caos en meteorología. A la vista de mis resultados y de los datos que me aportaron los técnicos de la AEMET, pude determinar cómo el horizonte de predictibilidad de las variables meteorológicas no va nunca más allá de los 14 días. Y es una barrera muy difícil de superar, pues mientras que nuestras mejoras en la toma de datos y el modelado avanzan linealmente, el error caótico evoluciona exponencialmente con el tiempo.

Siguiendo con esta dinámica, quise ampliar el análisis de la predicción de la atmósfera, estudiando esta vez el comportamiento de los modelos a largo plazo, es decir, estudiar la precisión con la que los modelos climáticos habían sido capaces de predecir hasta ahora el clima. Realicé una investigación de las principales predicciones realizadas hace 20, 30 años y vi su grado de cumplimiento en la actualidad. Si bien la principal variable, la temperatura media de la Tierra, había sido predicha con precisión, a nivel regional había algunas discrepancias entre las observaciones y las predicciones. A mi juicio, se repetía la premisa que aprecié en el péndulo doble: en los sistemas caóticos se pueden estimar algunas variables, patrones y estructuras, pero resulta muy difícil poder predecir el detalle del comportamiento en el futuro. Y este último punto resulta muy importante, puesto que un enfoque prudente refuerza la necesidad de proteger los ecosistemas y reducir las emisiones de gases de efecto invernadero, dado que el resultado detallado de nuestras acciones es incierto. No deberíamos especular con el impacto de nuestras acciones en un sistema que no somos capaces de predecir correctamente.

Tras analizar sistemas caóticos en el ordenador, la naturaleza y en los modelos climáticos, quise dar un paso más y preguntarme si sería capaz de crear yo mismo un sistema caótico artificial. No se trataba ya de estudiar únicamente ejemplos existentes, sino de experimentar con la posibilidad

de generar caos en un entorno controlado. Opté por utilizar el simulador físico Algodoo, donde diseñé una rueda movida por la caída de agua y convertida en caótica por la acción de canicas sueltas en su interior. Pude ver cómo el atractor surgido de este sistema era muy similar al de Lorenz, con dos estados (velocidad angular positiva y negativa), de los que se sale de forma totalmente impredecible.

Llegado este punto, entré en el terreno de la filosofía y me pregunté si el caos era un fenómeno indeseable que frustraba nuestro anhelo de predecir el futuro. En mi investigación, me encontré con el trabajo del premio Nobel Ilya Prigogine, quien demostró que es precisamente el caos el fenómeno esencial de la naturaleza para la creación de estructuras complejas como la vida. En un Universo sin caos, el demonio de Laplace puede actuar a sus anchas, pues la información inicial no se pierde por el caos, y así el demonio puede conocer con todo detalle el estado pasado, presente y futuro de cualquier sistema. El precio a pagar por ello es la ausencia de novedad. Esto me hizo formular el siguiente principio heurístico:

“No es posible maximizar simultáneamente la predictibilidad detallada y la creación de novedad en sistemas dinámicos complejos: cuanto más creativa (abierta a nuevas estructuras) es la evolución, menos plenamente predecible es su trayectoria fina, y viceversa”

Por lo tanto, la tan ansiada omnisciencia en un universo creativo como el nuestro es un oxímoron. Podemos determinar patrones, pero no ver los detalles finos, es decir, podemos anticipar patrones (atractores, rangos de comportamiento, escenarios probables) mejor que trayectorias exactas a largo plazo. Un universo capaz de crear nuevas formas no puede ser, al mismo tiempo, totalmente transparente a nuestra predicción. La novedad tiene un precio: nos hace renunciar a una parte de la certeza.

En definitiva, podemos plantear que “la novedad estructural es impredecible en detalle en un sistema caótico”. Y quizá ahí resida el misterio más fascinante del universo: que la misma dinámica que limita nuestra capacidad de predecir el futuro es la que permite la emergencia de la vida, de la complejidad y de la novedad. El caos no es un obstáculo al conocimiento, sino el terreno fértil donde nace lo nuevo.

3 Objetivos

Los objetivos que me he marcado a la hora de hacer este proyecto se dividen en dos categorías. Por una parte la **investigación científica** de la relación entre el caos y la meteorología/clima, y por otra parte la **adquisición de habilidades digitales** que permitan hacer un proyecto más profesional tanto en su contenido como en la forma

3.1 Objetivos científicos

Los objetivos científicos son los siguientes:

- Entender qué es el caos y “jugar” con sistemas caóticos para ver como se comportan. Para ello usaremos dos “juguetes”:
 - El **mapa logístico**, como juguete matemático. El mapa logístico me permitirá entender lo que es el horizonte de predictibilidad a través del computo del exponente de Lyapunov, y estudiar en el ordenador el efecto mariposa
 - El **péndulo doble**, como juguete físico. Mediante la simulación y observación real de un péndulo doble, comprenderé mejor en qué se traduce la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema caótico
- Relacionar los conceptos aprendidos a través del mapa logístico y del péndulo doble con la meteorología y el clima
- Evaluar de forma **cuantitativa** el caos en las predicciones **meteorológicas** a través del horizonte de predictibilidad
- Evaluar de forma **cualitativa** la influencia del caos en las predicciones **climáticas** realizadas por los científicos en las décadas anteriores
- **Entrevistar a expertos** en meteorología y clima para conocer la influencia del caos en ambos campos
- Como sugerencia de mi directora de proyecto, **crear un sistema caótico novedoso**.

3.2 Adquisición de habilidades digitales

Al plantearme como documentar el proyecto, vi dos opciones: hacerlo de la forma tradicional, es decir una memoria en formato Word, o hacer un proyecto moderno basado en las herramientas digitales actualmente disponibles. Si bien la segunda opción me parecía muy llamativa, al mismo tiempo me resulta muy imponente, dado mi limitado conocimiento de herramientas informáticas. Sin embargo, la aparición de sistemas de inteligencia artificial tan potentes como ChatGPT abre la posibilidad a programar sin necesidad de ser un desarrollador informático. Por ello, me lancé a usar de forma masiva **ChatGPT** para las siguiente tareas:

- Creación de un libro **Quarto** para documentar el proyecto en formato **Markdown**. Este es el formato más común en la actualidad en publicaciones digitales, siendo usado por ejemplo, en los chats de ChatGPT.
- Exportación del libro Quarto a formato **Latex**, para creación de la memoria del proyecto en formato pdf. Latex es el estándar en la creación de artículos científico técnicos de gran calidad visual y estética.
- Creación de un repositorio en **GitHub** con todos los archivos que he creado en el proyecto, y uso de **GitHub pages** para hacer una publicación digital a modo de página Web del proyecto. De esta manera, he podido publicar vídeos de mis experimentos y simulaciones, y también he dejado algunas herramientas interactivas con las que el lector interesado podrá jugar. De esta manera se contribuye a la mejor **divulgación** del proyecto y sus resultados.
- Programación en **Python** de scripts para hacer simulaciones de sistemas caóticos. Es lo que en la actualidad se denomina “**vibe coding**”: hacer uso del lenguaje natural en modelos de chatGPT para programar. En el proyecto he usado de forma recurrente el modelo **o4-mini-high** de OpenAI (ChatGPT), con muy buenos resultados. Planteaba al modelo el programa que quería hacer, e iteraba los errores y problemas de funcionamiento con el propio modelo
- Hacer investigación en profundidad de las predicciones climáticas realizadas durante las últimas décadas

Por último, he aprendido a usar Algodoo, un simulador de sistemas físicos sencillos, para analizar el comportamiento de mi sistema caótico propuesto

4 Resultados

A continuación desglosaré las principales aportaciones propias realizadas a lo largo de este proyecto, en términos de resultados científicos, investigaciones llevadas a cabo y código generado.

4.1 Aportación de este trabajo.

No pretendo descubrir el caos, sino mostrar de forma operativa y reproducible que la predictibilidad del mundo es limitada y cuantificable. Lo demuestro con: (i) simulaciones donde expresiones algebraicamente equivalentes divergen por aritmética finita, (ii) un experimento físico que contrasta péndulo doble (caótico) con simple (predecible), (iii) un análisis de predicción–observación que estima tasas de crecimiento del error (Lyapunov “operativo”), y (iv) el diseño de un sistema caótico propio. Con ello paso de la idea abstracta a evidencias medibles y a un principio heurístico: más novedad estructural – menos predictibilidad detallada.

4.2 Resultados

Efecto mariposa /// {#sec-sensibilidad} Efecto mariposa Efecto mariposa

4.3 Código generado

Part II

El Caos a través de la Función Logística

5 El Mapa Logístico

5.1 Introducción

El mapa logístico es una de las ecuaciones en diferencia más clásicas de la teoría del caos:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

donde:

- $x_n \in [0, 1]$ es la población normalizada.
- r regula la tasa de crecimiento.

Se le llama “mapa”, porque en teoría de sistemas dinámicos, un mapa es simplemente una regla o función que toma un valor (o un punto en el espacio de estados) y lo “mapea” al siguiente valor. Algo similar a una función. El nombre “logístico” procede de la ecuación logística que modela el crecimiento de poblaciones con un límite (“capacidad de carga”).

Se trata, a grosso modo, de una sucesión en el que el siguiente valor depende del anterior. De este tipo, hemos visto bastantes en el bachillerato, como:

5.1.1 Sucesión aritmética

- Definición recursiva: $a_{n+1} = a_n + d$, donde d es la diferencia constante.
- Término general: $a_n = a_0 + n d$.
- Comportamiento: crecimiento o decrecimiento uniforme.

5.1.2 Sucesión geométrica

- Definición recursiva: $a_{n+1} = q a_n$, donde q es la razón constante.
- Término general: $a_n = a_0 q^n$.
- Comportamiento: decae si $|q| < 1$, es constante si $|q| = 1$, crece o alterna si $|q| > 1$.

5.1.3 Sucesiones lineales de orden superior

- Ejemplo: Fibonacci
 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, con $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.
- Tienen fórmula cerrada y crecen de forma suave y predecible.

¿Qué tiene de especial el mapa logístico?. Lo veremos a continuación. Como primera pista, hay que observar que se trata de una ecuación no lineal, lo cual es un factor común de los sistemas caóticos. Una ecuación no lineal es aquella en la que la incógnita:

- Aparece con potencias distintas de uno,
- O bien se combina consigo misma (productos, potencias),
- O involucra funciones no lineales (exponenciales, trigonométricas...).

5.2 Relevancia

Su relevancia radica en que, a partir de una ecuación muy elemental, se observa toda la complejidad característica del caos: bifurcaciones, ciclos de periodo en expansión y dependencia sensible a las condiciones iniciales. Además su popularidad se debe a que esta ecuación modela muy bien diversos sistemas físicos como pueden ser:

1. Dinámica de poblaciones
2. Modelos económicos de oferta y demanda
3. Reacciones químicas oscilantes
4. Circuitos con realimentación

El caso más paradigmático de estudio es el primero, es decir, la evolución de la población de animales, plantas o células con el tiempo. ¿Por qué se emplea la función logística para ello?. Porque al principio, la población crece rápidamente pero después debido a la falta de recursos del entorno se suelen producir colapsos poblacionales.

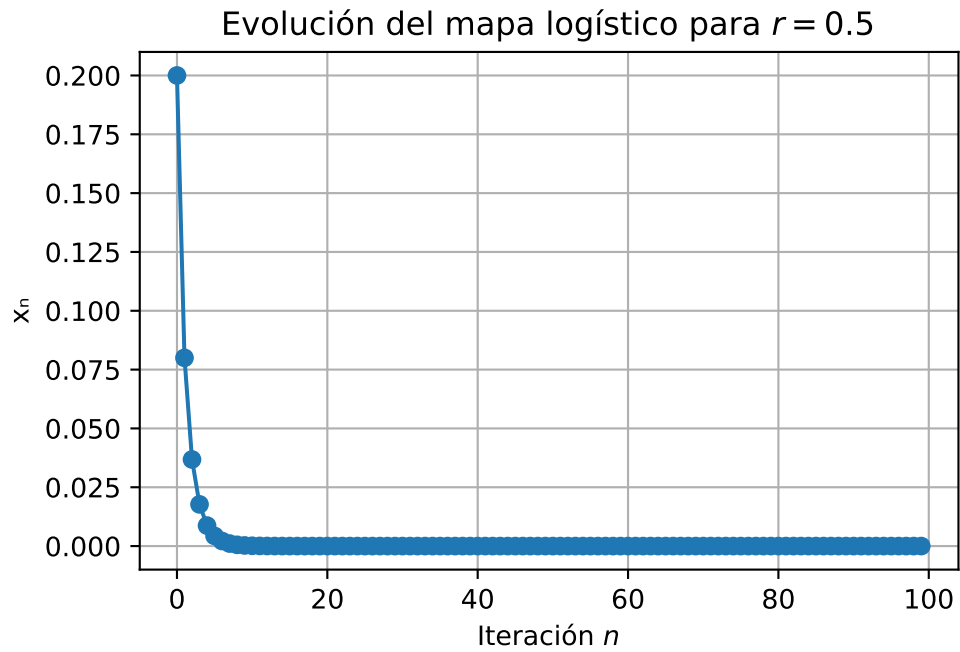
Para valores de r menor que uno, la población final tiende a cero, lo que resulta lógico, dado que la población inicial no crece.

Para valores de r entre 1 y 3, la secuencia x_n converge a un único valor fijo, que además es estable.

Pero al aumentar r por encima de 3, llega la primera sorpresa. Primero aparece un ciclo doble (dos valores alternantes), luego ciclos de periodo 4, 8, 16... y así sucesivamente, hasta que el comportamiento se vuelve aparentemente aleatorio, o mejor dicho caótico. A lo largo del proyecto iremos distinguiendo claramente entre el término aleatorio y el término caótico.

5.3 Simulación en Python

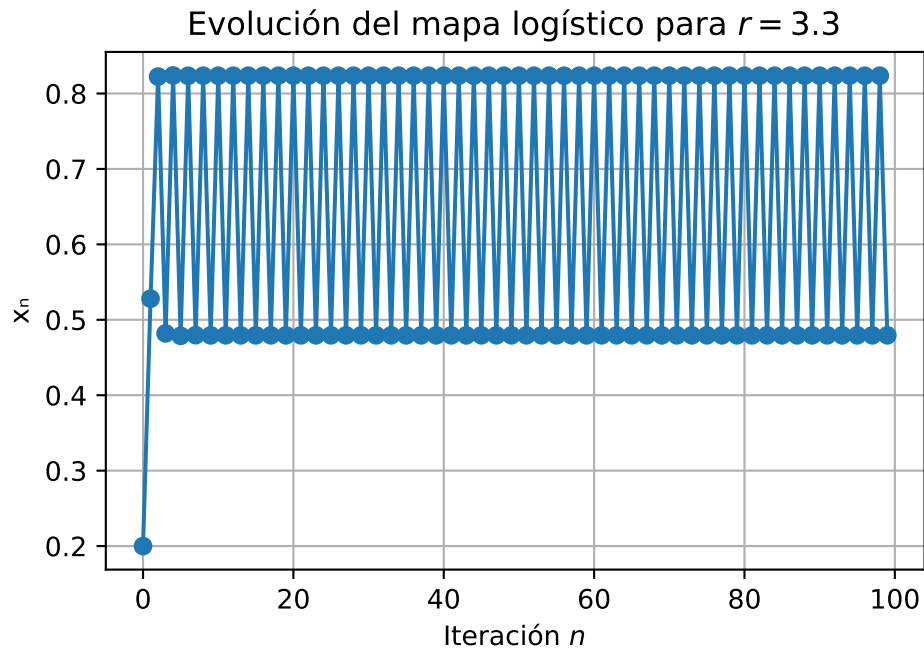
Vamos a refrendar lo anteriormente dicho con simulaciones de la función logística. Como veremos a continuación, para valores de r menores de 1, el valor final de x_n tiende a cero.



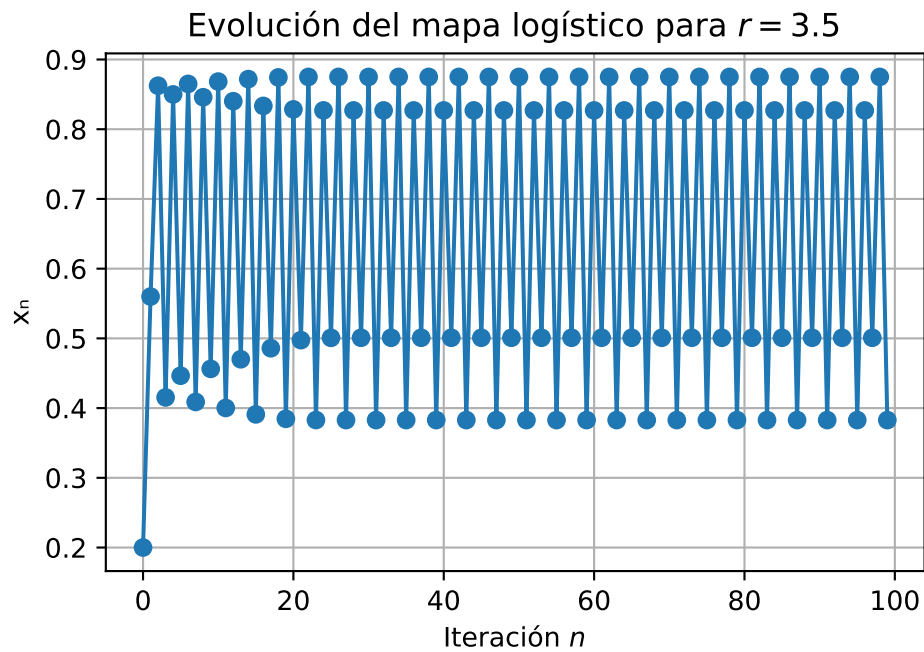
Para valores de r entre 1 y 3, el valor final de x_n tiende a un punto estable



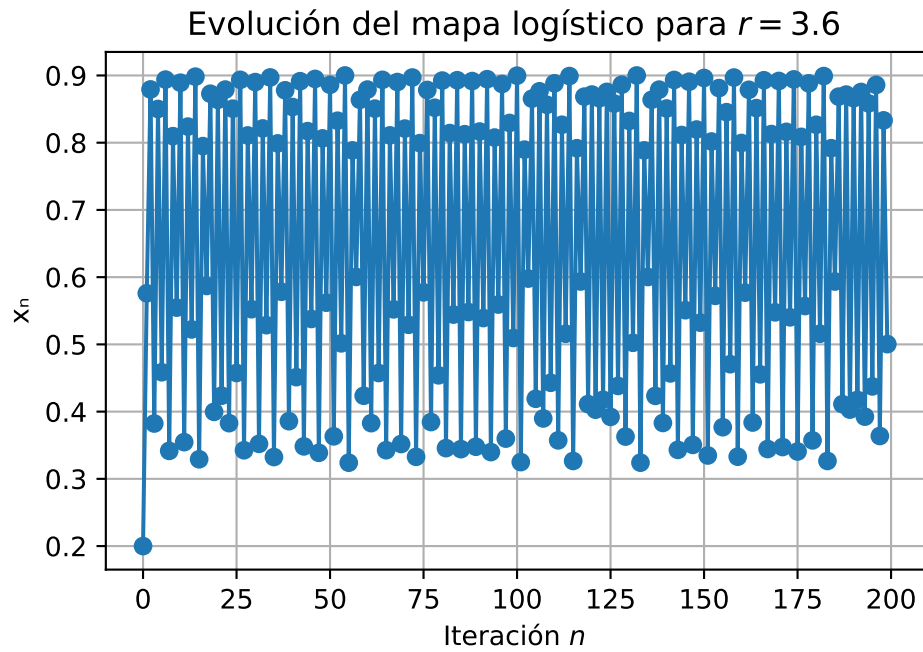
Para valores de r entre 3 y 3.449, el valor final de x_n tiende a dos puntos estables. Es decir, la población tiene un número de elementos alternantes, que se podría deber a la escasez/abundancia periódica de recursos.



Para valores de r entre 3 y 3.544, el valor final de x_n tiende a cuatro puntos estables. Es curioso ver como la población final alterna entre 4 números distintos de individuos.



Y a partir de $r = 3.56995$ no hay ningún punto estable. Se dice que el sistema en este punto se convierte en caótico



Curioso, ¿verdad?. En la siguiente sección podrás experimentar con diferentes valores de r y diferentes valores iniciales, para ver cuál es el estado final del sistema. Después en sucesivas secciones, iremos explicando formalmente con ayuda de las matemáticas por qué ocurre esto.

6 Diagrama de telaraña

6.1 Introducción

En sistemas discretos iterativos, un “diagrama cobweb” o “diagrama de telaraña” es una representación gráfica que ilustra cómo evoluciona la secuencia

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

paso a paso. Facilita la visualización de convergencia, ciclos y caos.

6.2 Construcción del diagrama Cobweb

1. Dibujamos las curvas:

- $y = f(x)$
- $y = x$

2. Partimos de un valor inicial x_0 en el eje horizontal.

3. Trazamos verticalmente desde $(x_0, 0)$ hasta $(x_0, f(x_0))$.

4. Desde $(x_0, f(x_0))$ traza horizontalmente hasta la recta $y = x$, llegando a $(f(x_0), f(x_0))$. Este valor es x_1 .

5. Repite el proceso usando x_1 para obtener x_2 , y así sucesivamente.

Al unir los segmentos verticales y horizontales se forma la “telaraña” que muestra la evolución $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$. Así vemos la evolución del sistema.

6.3 ¿Para qué sirve?

- **Convergencia a punto fijo:** si la telaraña se aproxima a un punto de intersección entre $y = f(x)$ y $y = x$. En la siguiente sección analizaremos el término “punto fijo”
- **Detección de ciclos:** patrones periódicos (por ejemplo, saltos entre dos puntos indican un ciclo de periodo 2).
- **Observación de caos:** en funciones no lineales como el mapa logístico, con ciertos parámetros la telaraña no se estabiliza y refleja sensibilidad a condiciones iniciales.

Aquí dejo un diagrama interactivo, en el que se observan la función logística $y = f(x) = rx(x-1)$, la función $y = x$, y el diagrama de telaraña.

El usuario puede jugar con el valor de r y de x_0 (el valor inicial de población), y ver la evolución de la población después de 100 iteraciones del mapa logístico.

Unable to display output for mime type(s): text/html

7 Puntos fijos de una función

7.1 ¿Qué es un punto fijo?

Un **punto fijo** de una función f es un valor x^* que satisface

$$x^* = f(x^*)$$

Intuitivamente, si comenzamos en x^* y aplicamos la función, nos quedamos en el mismo punto. En la sección anterior vimos que en el diagrama interactivo graficábamos también la función $y = x$. Si nuestra función $f(x)=x$ cruza en algún momento la función $y = x$, entonces tenemos un punto fijo en nuestra función.

La pregunta que hay que hacerse, es la siguiente. Si hacemos iteraciones sucesivas de nuestro mapa/función, ¿convergemos a un punto fijo?. Para responder esta cuestión, vamos a hacer uso de la derivada de la función que estamos estudiando.

7.2 Estudio formal de la convergencia

Para ver si la sucesión x_n converge al punto fijo x^* que define la ecuación $x^* = f(x^*)$, en primer lugar vamos a definir el **error**:

$$e_n = x_n - x^*,$$

Es decir, e_n es lo que dista el resultado en la iteración n de la sucesión.

La función f se puede aproximar alrededor de x^* por medio de su derivada primera:

$$f(x_n) \approx f(x^*) + f'(x^*) (x_n - x^*)$$

y usando $f(x^*) = x^*$, obtenemos

$$e_{n+1} \approx x_{n+1} - x^* = f'(x^*) e_n$$

Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces $|e_{n+1}| < |e_n|$ y por tanto $|e_n| \rightarrow 0$, garantizando que $x_n \rightarrow x^*$.

7.3 Ejemplo: $f(x) = \cos(x)$

Si algún día te aburres, coge una calculadora y empieza a apretar sucesivas veces la función coseno. Verás que acabarás teniendo en el display de la calculadora el valor 0.739. No es magia. El valor $x^* \approx 0.739085$ es el punto fijo de la función coseno.

Veámoslo más formalmente. Consideremos la iteración

$$x_{n+1} = \cos(x_n), \quad x_0 = 0.$$

Los primeros valores son:

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos(0) = 1, \\x_2 &= \cos(1) \approx 0.540302, \\x_3 &= \cos(x_2) \approx 0.857553, \\x_4 &= \cos(x_3) \approx 0.654290, \\x_5 &= \cos(x_4) \approx 0.793480, \\x_6 &= \cos(x_5) \approx 0.701369, \\x_7 &= \cos(x_6) \approx 0.763960, \\x_8 &= \cos(x_7) \approx 0.722102, \\x_9 &= \cos(x_8) \approx 0.750417, \\x_{10} &= \cos(x_9) \approx 0.731404,\end{aligned}$$

Vemos que los valores van oscilando, pero rápidamente se aproximan al punto fijo

$$x^* \approx 0.739085,$$

que satisface $x^* = \cos(x^*)$ (la ecuación $x^* = \cos(x^*)$ no tiene solución en forma de fórmula elemental, pues es una ecuación trascendental).

Además, la derivada en este punto es menor que 1, lo que confirma que es un punto de atracción de la función.

$$f'(x) = -\sin(x), \quad |f'(x^*)| = |\sin(x^*)| < 1,$$

por lo que la iteración converge a x^* .

Si vuelves a la sección anterior, verás que para valores de r entre 1 y 3, el mapa logístico converge al punto fijo de la función logística. Siempre, independientemente del valor de x_0 que elijas.

Curiosamente, a partir de $r = 3$ la derivada de la función logística en el punto de corte con $y = x$ pasa a tener un valor mayor en valor absoluto que 1, por lo que en este momento el punto de corte deja de ser un punto fijo.

En la siguiente sección, calcularemos formalmente los puntos fijos de la función logística y estudiaremos formalmente como se comporta la sucesión.

8 Estudio formal del mapa logístico

En los siguientes apartados vamos a desentrañar desde un punto de vista matemático como se comporta el mapa logístico. Ya hemos visto en los apartados anteriores, vía simulación, que el comportamiento es muy errático dependiendo del valor de r . Veamos por qué.

Para empezar veremos la función logística y la analizaremos como haríamos con cualquier otra función para ver su forma. Para ello, recurrimos a las técnicas habituales de análisis de funciones.

8.1 Dominio y ceros

- Por definición, el **Dominio** es: $0 \leq x \leq 1$
- En este dominio los **Ceros** de la función están en:

$$- f(0) = r \cdot 0 \cdot (1 - 0) = 0$$

$$- f(1) = r \cdot 1 \cdot (1 - 1) = 0$$

8.2 Derivada y monotonía

Para conocer los máximos y mínimos primero hemos de calcular la derivada,

- Derivada:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

- La derivada tiene una raíz en $x = 1/2$, independientemente del valor de r . Por lo tanto, el signo de $f'(x)$:
 - Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, entonces $f'(x) > 0$ **creciente**
 - Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $f'(x) = 0$
 - Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $f'(x) < 0$ **decreciente**

De acuerdo al estudio de la derivada, tenemos un punto crítico en $x = \frac{1}{2}$. Puesto que la derivada pasa a ser creciente a decreciente en este punto, tenemos un máximo. La función, pues, tiene un valor máximo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}$$

Observar que si $r > 4$ entonces el máximo de la función es mayor que 1. Esto no puede darse, ya que la función logística normaliza los recursos máximos disponibles a 1. Por lo tanto, para que no se excedan (cosa que no puede ocurrir físicamente), el valor de r siempre se establece por debajo de 4.

8.3 Concavidad

- Segunda derivada:

$$f''(x) = -2r$$

- Como $r > 0$, $f''(x) < 0$ en todo el dominio **cóncava hacia abajo**

8.4 Rango de la función

De acuerdo, al estudio anterior, la función es siempre positiva, con valores entre 0 y $\frac{r}{4}$

Si vamos a la sección con el diagrama de telaraña, veremos efectivamente esta forma de la función.

8.5 Resumen gráfico

- Parábola invertida con vértice en $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$
- Crece de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$, luego decrece hasta $x = 1$

9 Término genérico del mapa logístico

En las sucesiones aritméticas y geométricas es fácil expresar el termino enésimo de la sucesión en función del primer término de la misma. Veamos:

Término general de la sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

donde: - a_1 es el primer término. - d es la diferencia común. - n es la posición del término.

Término general de la sucesión geométrica

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

donde: - a_1 es el primer término. - r es la razón común. - n es la posición del término.

¿Podemos hacer lo mismo con el mapa logístico?. Hagamos las primeras iteraciones.

$$x_1 = r x_0 (1 - x_0)$$

$$x_2 = r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))$$

$$x_3 = r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)))$$

$$x_4 = r^4 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))) (1 - r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))))$$

$$\begin{aligned} x_5 = & r^5 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))) \\ & \times (1 - r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)))) \\ & \times (1 - r^4 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))) (1 - r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)))) \end{aligned}$$

Como podemos ver, sí que podemos ir expresando los sucesivos términos en función de solamente x_0 y de r , pero a medida que iteramos, la expresión se vuelve muy complicada. A pesar de todo, hay que destacar que la función es **puramente determinista**. Es decir, se podría formular el valor de la iteración enésima en función de los valores de x_0 y de r .

10 Estabilidad del mapa logístico

10.1 Puntos fijos

Tal y como habíamos visto anteriormente, un **punto fijo** x^* satisface:

$$f(x^*) = x^*.$$

Para encontrar los puntos fijos de la función logística, resolvemos:

$$r x (1 - x) = x.$$

Llevando todos los términos a un lado:

$$r x (1 - x) - x = 0 \implies x(r(1 - x) - 1) = 0.$$

De aquí se obtienen dos soluciones:

$$x_1 = 0$$

y x_2 tal que $r(1 - x_2) - 1 = 0$, es decir:

$$1 - x_2 = \frac{1}{r} \implies x_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

10.2 Evaluación de la derivada en los puntos fijos

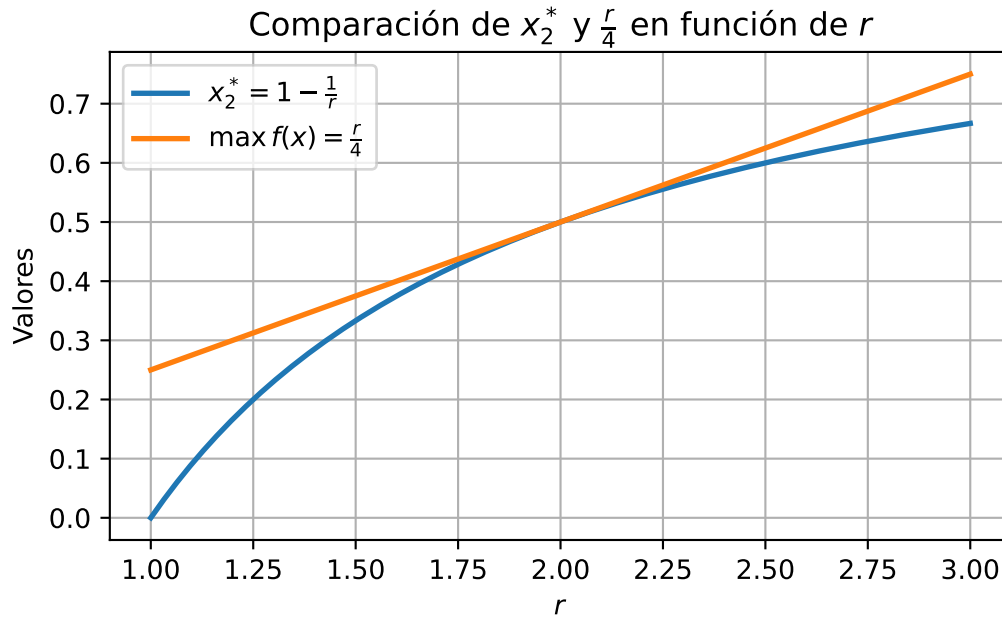
La derivada de la función logística es:

$$f'(x) = r(1 - 2x).$$

Y además, de la sección sobre los puntos fijos sabemos que un punto fijo es estable si $|f'(x^*)| < 1$.

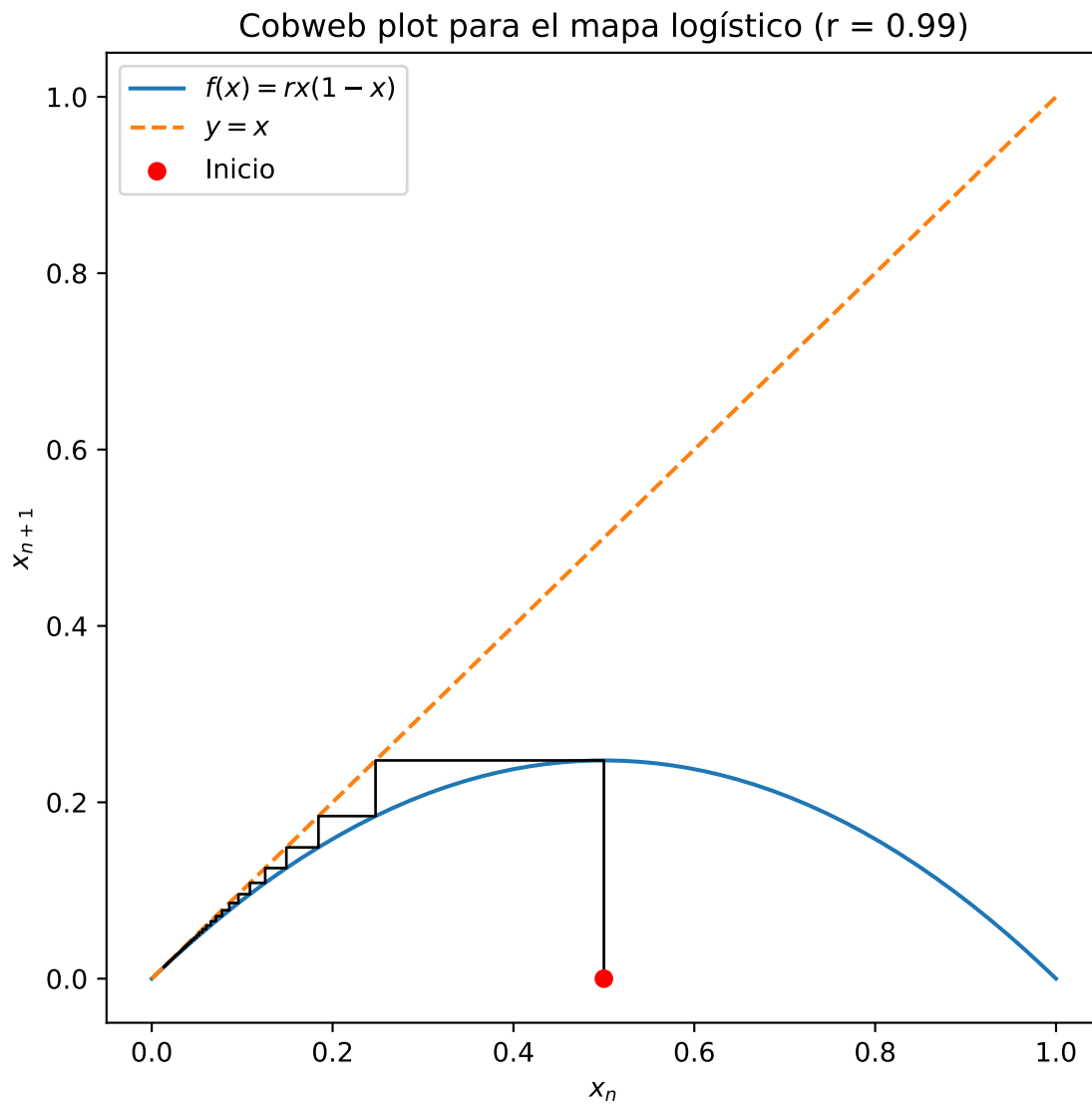
- **En $x_1^* = 0$:** $f'(0) = r$. Estable si $0 < r < 1$. Es decir, para valores de r comprendidos entre 0 y 1, el valor de $x = 0$ es un punto fijo. Lo que ocurre es bien sencillo. Como ya comentamos anteriormente, puesto que la población va decreciendo tras cada iteración, acaba convergiendo en $x = 0$. Gráficamente también es fácil verlo. Si vamos al diagrama de telaraña, y ponemos un $r < 1$, veremos que la función logística solamente toca a la recta $y = x$ en $x = 0$
- **En $x_2^* = 1 - 1/r$:** $f'(x_2^*) = 2 - r$. Estable si $|2 - r| < 1 \rightarrow 1 < r < 3$. Aquí vemos que el mapa logístico converge a un punto, que es el punto fijo. Es lo que habíamos visto ya en las soluciones. De nuevo, animo al lector a probarlo en el diagrama de telaraña interactivo. Con cualquier valor de x_0 que pongan para valores de r entre 1 y 3, siempre se convergerá a un punto que es $x_2^* = 1 - 1/r$.

Tal y como se muestra en la siguiente figura, a medida que el factor de crecimiento de la población crece, el número final de individuos aumenta de forma constante. Como vemos, el valor final de población, siempre está por debajo del valor máximo de la función logística. Solamente coincide el valor final con el máximo en $r=2$. ¿Qué quiere decir esto?. Que la población puede que en las primeras iteraciones alcance el valor máximo $r/4$, pero al final se estabilizar en un valor menor que es igual a $x_2^* = 1 - 1/r$.



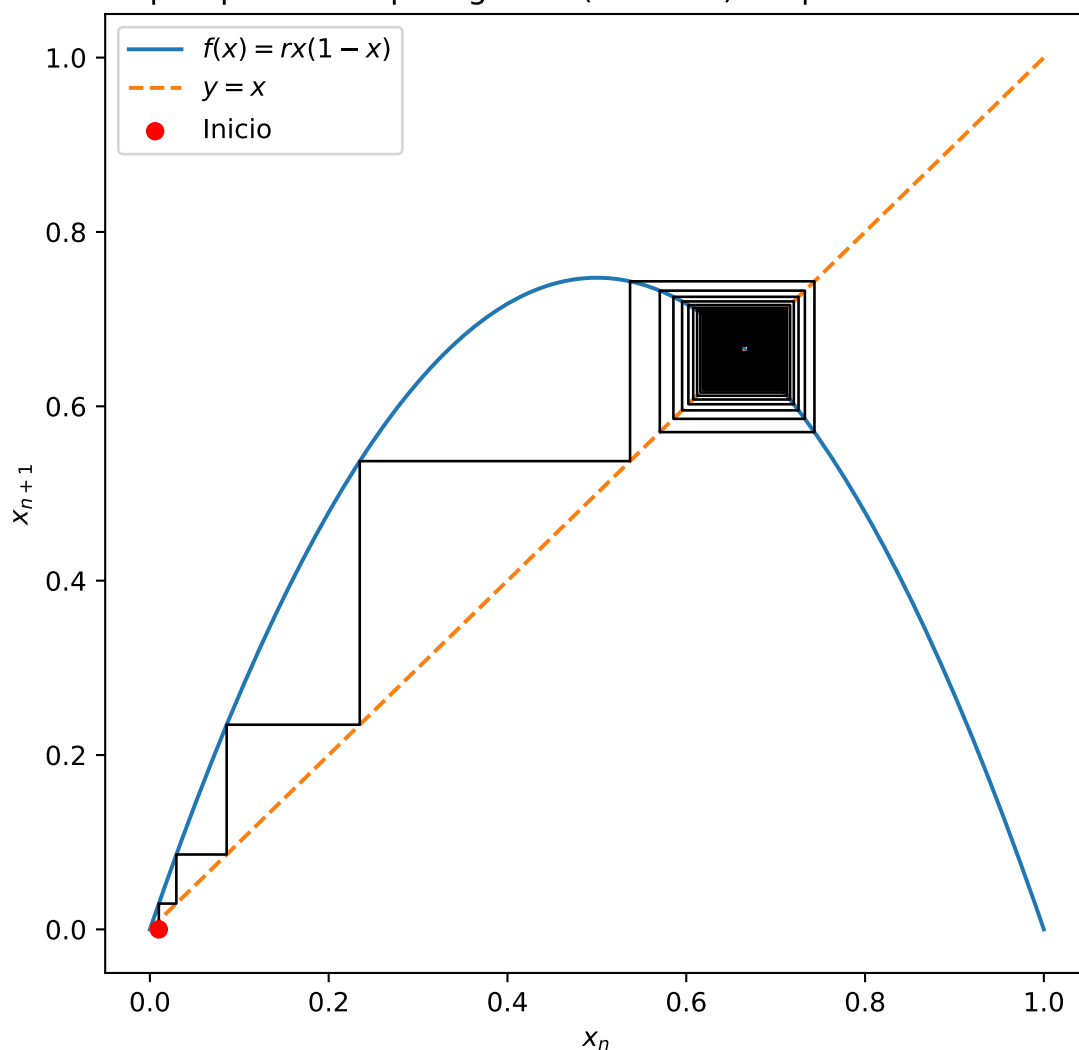
Añadamos unos gráficos para verlo mejor.

En este primero, vemos para un valor de $r = 0.99$ como la población va decreciendo iteración tras iteración hasta llegar al punto fijo $x = 0$



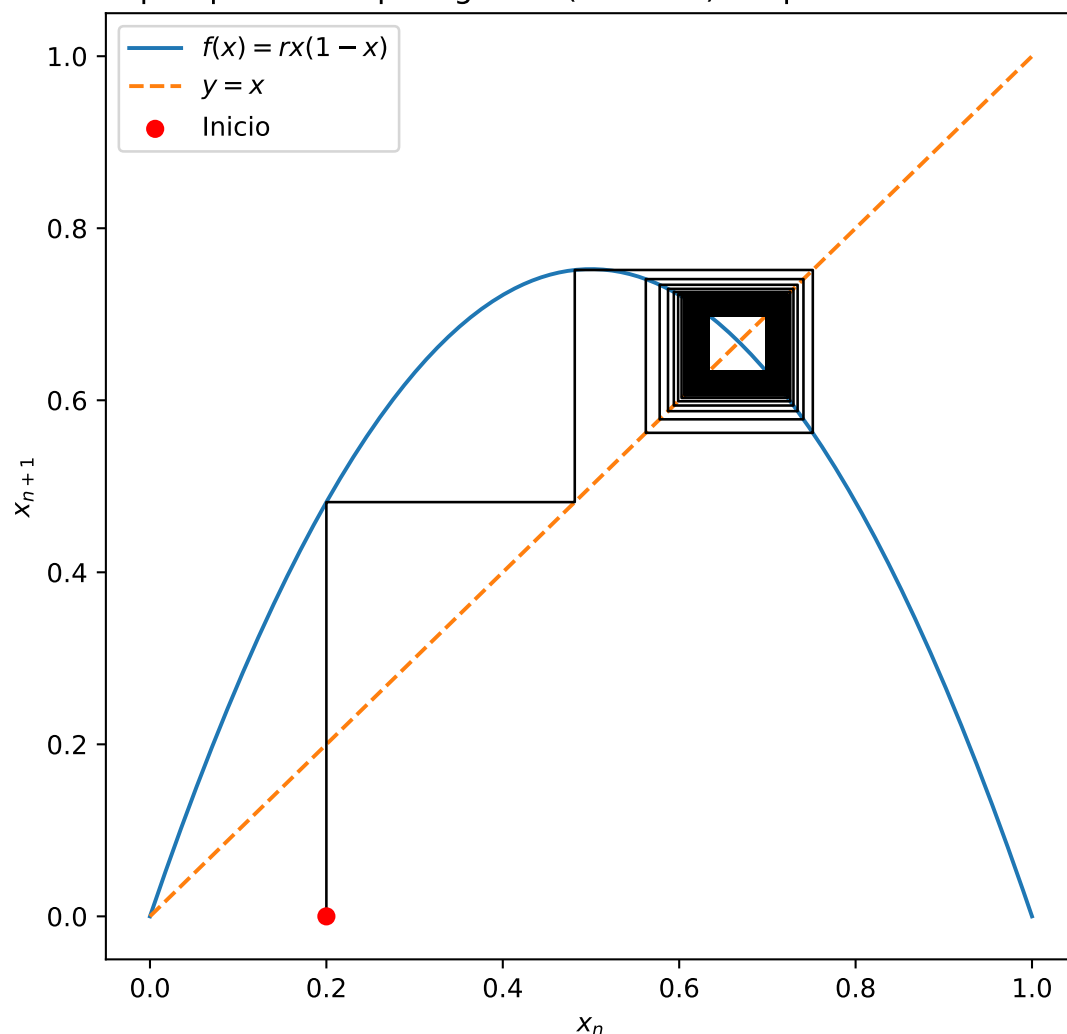
En este segundo vemos como efectivamente la sucesión converge al punto fijo (el cruce de la función con la recta $y = x$), a pesar de que el valor de r está cerca de 3. Pero puesto que sigue siendo menor de 3, el punto fijo actúa como atractor, y después de 200 iteraciones acaba convergiendo.

Cobweb plot para el mapa logístico ($r = 2.99$) después de 200 iteraciones



Pero, ¿qué pasa cuando subimos por encima de $r = 3$? Pues que la derivada en el punto fijo ya no es menor en valor absoluto que 1, y por lo tanto el punto fijo ya no atrae las iteraciones. El punto fijo, sigue siendo punto fijo, es decir, si introducimos su valor, la función vuelve ahí; pero desde cualquier otro punto, ya no va a converger hacia ese valor. En este caso, vemos que para $r = 3.01$ la sucesión orbita entre dos puntos. Es decir, la población final alterna entre dos valores distintos de individuos. Biológicamente, sucede porque la tasa de crecimiento r es lo bastante alta para que, cuando la población se acerca a la capacidad máxima del entorno, en la siguiente generación haya un colapso por exceso de competencia (o agotamiento de recursos), y luego vuelva a recuperarse.

Cobweb plot para el mapa logístico ($r = 3.01$) después de 2000 iteraciones



Aunque el mapa logístico es un modelo muy sencillo, en laboratorio y a veces en campo se han visto oscilaciones de “alto-bajo” de periodo 2 parecidas a las predichas para $r \approx 3$. Algunos ejemplos son:

- **Moscas de la carne (*Lucilia cuprina*)**

En los famosos experimentos de Nicholson sobre poblaciones de moscas de la carne, al mantenerlas en condiciones constantes y con alta fecundidad, la densidad adulta pasaba de un pico alto un año a un valle bajo al siguiente, repitiéndose cada dos generaciones [Nicholson 1954](#), [Wikipedia](#).

- **Escarabajos del trigo (*Tribolium confusum*)**

Gurney y Nisbet cultivaron colonias de *Tribolium* en el laboratorio controlando solo la tasa de natalidad mediante el suministro de alimento, y se observó un ciclo bienal: una generación con números muy altos seguida de otra bastante más baja, en perfecta alternancia [Gurney & Nisbet 1987](#), [Julius Kühn-Archiv](#).

- **Daphnia en estanques experimentales**

Algunos estudios con pulgas de agua (*Daphnia*) en estanques cerrados, variando la concentración de alimento, han mostrado también ciclos aproximados de dos generaciones cuando la tasa de crecimiento es lo bastante alta [NCBI](#), [ResearchGate](#).

- **Peces capelán (*Mallotus villosus*)**

En poblaciones silvestres de capelán del Atlántico Norte, los registros de capturas han evidenciado picos de abundancia que tienden a repetirse cada dos años, lo cual coincide con su periodo de madurez y su ritmo semélparo: tras desovar mueren, lo que promueve ese patrón de “sobrepoblación–agotamiento de recursos” bienal [Wikipedia](#), [Wiley](#).

En todos estos casos la dinámica de periodo 2 refleja una sobrecorrección: tras un año de “boom” la población agota alimento o espacios de puesta, con lo que la siguiente generación cae muy por debajo de la capacidad de carga, y después se recupera, iniciando de nuevo el ciclo

En el siguiente apartado, analizaremos formalmente lo que ocurre en la primera bifurcación del mapa logístico.

11 Primera bifurcación

Tal y como vimos en la sección anterior cuando $r > 3$ el valor final de la sucesión logística alterna entre dos valores finales. Vamos a hacer un análisis matemático para explicar por qué pasa ésto.

11.1 Primera bifurcación: duplicación de período en $r = 3$. Análisis matemático

En $r = 3$, la derivada en el punto fijo $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ se vuelve -1 , lo cual genera una órbita de período 2, tal y como hemos visto en el apartado anterior.

Surgen dos nuevos puntos p y q que no son puntos fijos, sino puntos de período 2 tales que:

$$f(p) = q, \quad f(q) = p$$

Es decir, si al mapa logístico se le alimenta con un valor p , da como resultado un valor q , que al ser metido otra vez en el mapa logístico da el valor p inicial.

Esto significa que:

$$f(f(p)) = p$$

Lo cual implica que p es un punto fijo del mapa iterado f^2 (esta notación significa la composición de una función con síg misma $f^2() = f \circ f = f(f())$, no el cuadrado de la función)

Dado que $f(x) = rx(1 - x)$, podemos escribir:

$$f(p) = rp(1 - p)$$

Entonces:

$$f(f(p)) = r \cdot f(p) \cdot (1 - f(p)) = r \cdot [rp(1 - p)] \cdot [1 - rp(1 - p)]$$

Queremos encontrar los puntos de período 2, así que igualamos:

$$f(f(p)) = p$$

Hay que observar, que la resolución gráfica es sencilla. Simplemente hay que dibujar la función $f^2() = f \circ f = f(f())$ y la función $y = x$, y encontrar los cruces de ambas. Se cortarán en dos puntos, que serán los puntos entre los que alternará el mapa logístico.

Sigamos con la resolución analítica. Para ello, desarrollamos completamente $f(f(p)) = p$:

$$r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) = p$$

Pasando todo al mismo lado:

$$r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) - p = 0$$

Factorizamos p :

$$p[r^2(1-p)(1-rp(1-p)) - 1] = 0$$

Una de las soluciones es $p = 0$ (punto fijo trivial), pero las otras soluciones corresponden a los puntos de período 2.

Expandimos el polinomio:

$$f(f(p)) = r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) = p$$

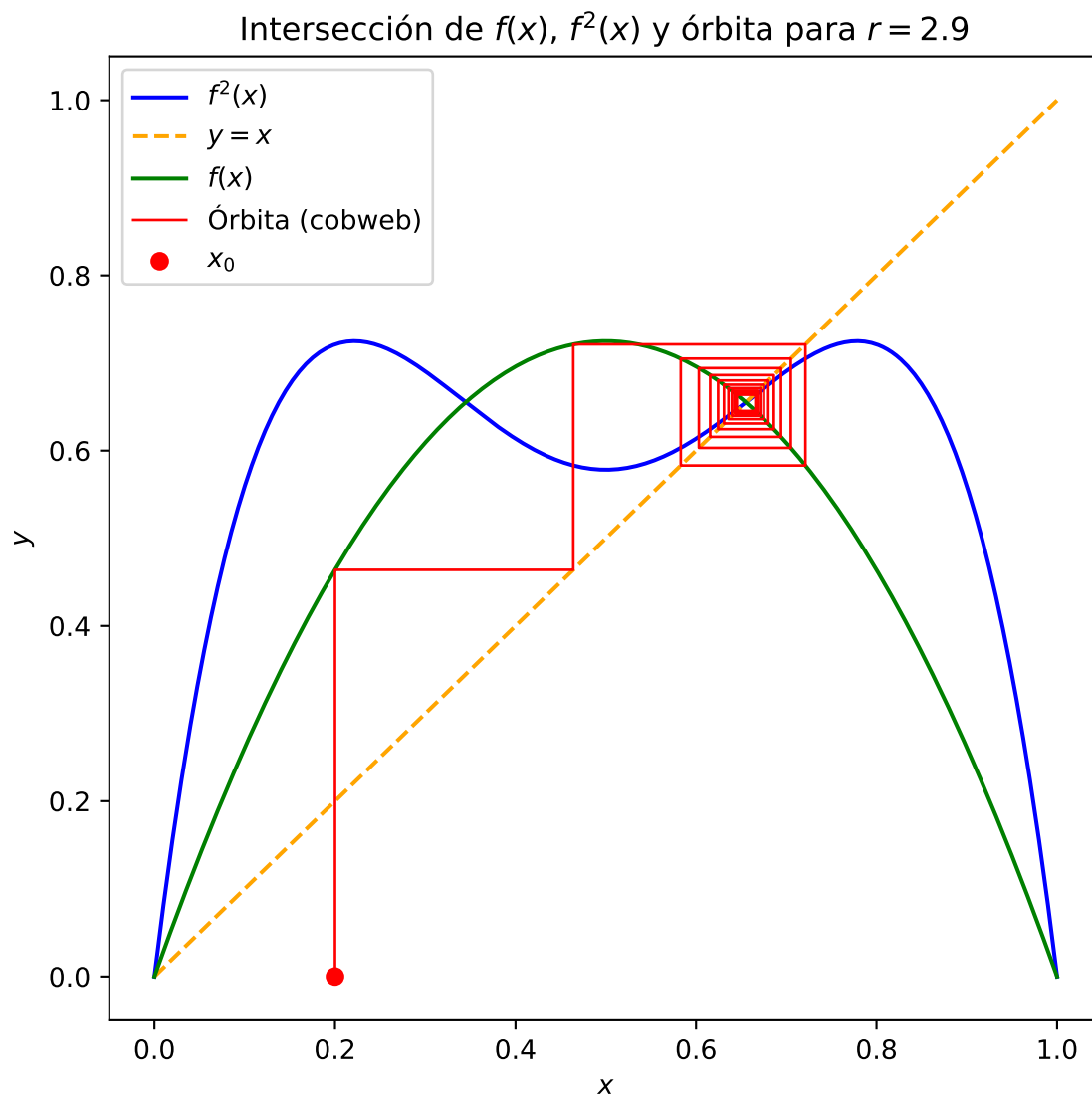
Expandimos paso a paso:

1. $f(p) = rp(1-p)$
2. $1 - f(p) = 1 - rp(1-p)$
3. $(1-p)(1-rp(1-p)) = 1 - p - rp(1-p) + rp^2(1-p)$
4. Multiplicamos todo por r^2p
5. Resulta en un polinomio de cuarto grado en p

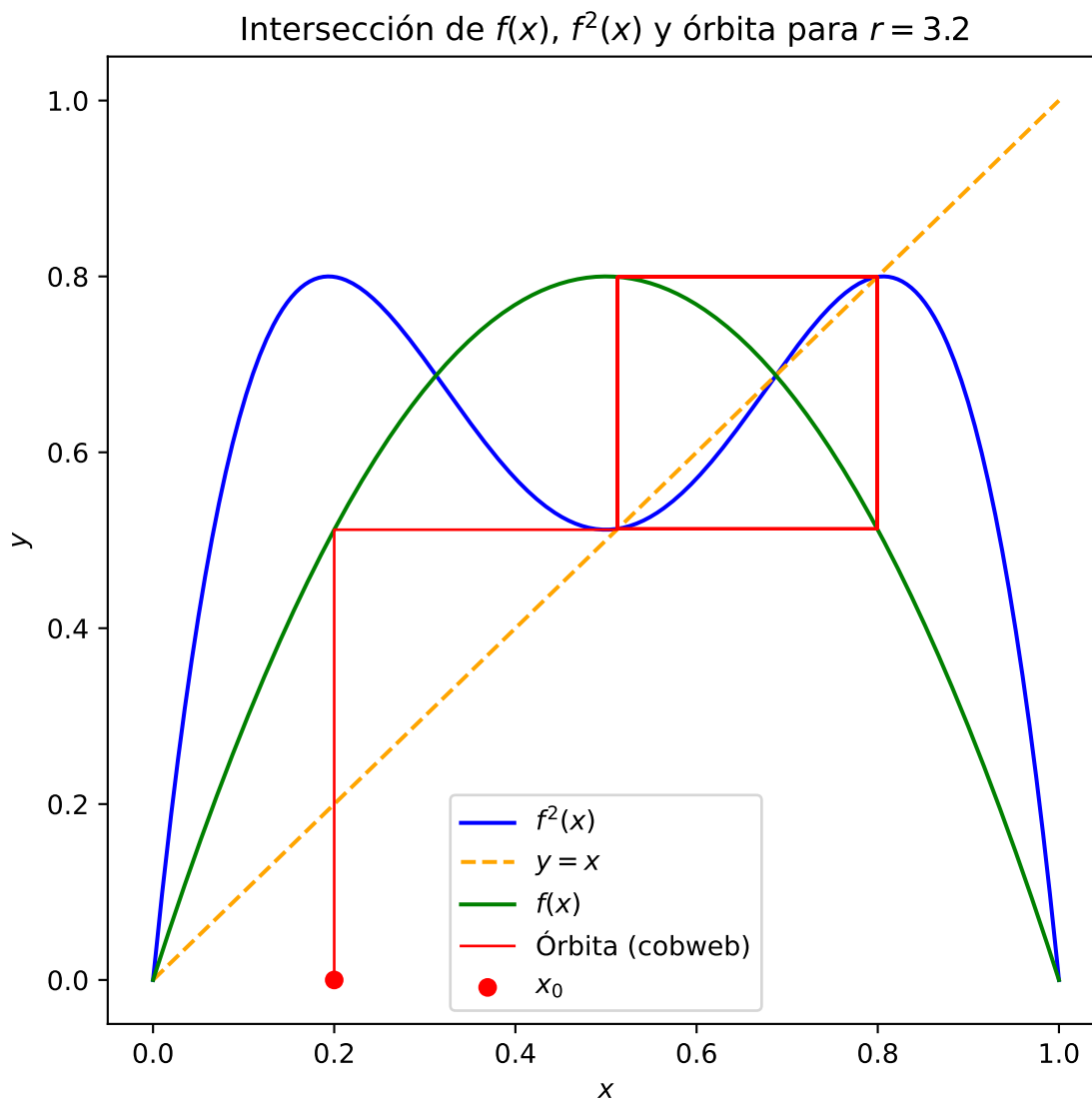
Este polinomio tiene hasta 4 raíces reales, de las cuales dos corresponden a los nuevos puntos de período 2. Las otras dos pueden ser los puntos fijos ya conocidos o raíces no relevantes dinámicamente.

11.2 Análisis gráfico

Vamos a proceder al análisis gráfico. Para empezar vamos a poner un mapa logístico con $r = 2.9$. Sabemos que para este valor la sucesión converge a un punto. Esto lo vemos porque la función logística corta con la recta $y = x$ en un punto cuya pendiente en valor absoluto es menor que 1, y porque además en ese punto corta también la segunda iterada $f \circ f$. La recta $y = x$ solo corta en un punto a la segunda iterada, por lo tanto no hay alternancia entre dos puntos.



Y ahora veamos lo que pasa cuando $r = 3.2$. En este caso, la segunda iteración corta con la recta $y = x$ en dos puntos. Tal y como vemos en el diagrama de telaraña son estos dos puntos entre los que oscila el valor final del mapa logístico.



11.3 Análisis de estabilidad de la primera bifurcación

En primer lugar, vamos a calcular de nuevo de forma analítica precisa los puntos en los que se produce la oscilación. La función logística es

$$f(x) = rx(1 - x),$$

y su iteración doble se define como

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)).$$

Queremos hallar los valores de x que satisfacen

$$f^{(2)}(x) = x.$$

11.3.1 Expresión explícita de $(f^{(2)}(x))$

Primero calculamos

$$f(x) = rx - rx^2.$$

Luego

$$f(f(x)) = r(f(x))(1 - f(x)) = r(rx - rx^2)(1 - (rx - rx^2))$$

Por tanto

$$f^{(2)}(x) = r(rx - rx^2)(1 - rx + rx^2) = r^2 x(1 - x)(1 - rx + rx^2)$$

En vez de expresar la segunda iteración como un polinomio de grado 4, lo dejamos en función de dos monomios y un binomio.

11.4 Primera bifurcación: obtención de los puntos fijos de periodo 1 y 2

11.4.1 Definición de la función y de su iterada doble

La **función logística** es

$$f(x) = rx(1 - x).$$

Su **segunda iterada** (composición consigo misma) se escribe

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)).$$

Queremos resolver

$$f^{(2)}(x) - x = 0,$$

que es un polinomio de grado 4 en (x).

11.4.2 Puntos de periodo 1 (puntos fijos de (f))

Localizamos los puntos de **periodo 1**, es decir, las raíces de

$$f(x) - x = rx(1 - x) - x = 0.$$

Factorizando:

$$rx(1 - x) - x = x[r(1 - x) - 1] = 0.$$

De aquí salen dos soluciones:

$$x = 0, \quad x = \frac{r-1}{r}.$$

11.4.3 Construcción del polinomio de grado 4

Para la segunda iterada:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= r(f(x))(1 - f(x)) = r(rx - rx^2)[1 - (rx - rx^2)] \\ &= r^2 x(1-x)(1-rx+rx^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{(2)}(x) - x = r^2 x(1-x)(1-rx+rx^2) - x.$$

11.4.4 División polinómica para aislar el factor de periodo 2

Primero, observemos que si

$$x^*$$

es un punto fijo de

$$f$$

, es decir,

$$f(x^*) - x^* = 0,$$

entonces

$$f^{(2)}(x^*) - x^* = f(f(x^*)) - x^* = f(x^*) - x^* = 0.$$

Por tanto, toda raíz de

$$f(x) - x$$

es también raíz de

$$f^{(2)}(x) - x$$

, lo que en términos de polinomios equivale a afirmar que

$$f^{(2)}(x) - x \text{ es divisible por } f(x) - x.$$

División polinómica paso a paso

Queremos dividir

$$P(x) = f^{(2)}(x) - x = -r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2-1)x$$

entre

$$D(x) = f(x) - x = -rx^2 + (r-1)x.$$

11.4.4.0.1 Paso 1.

Dividimos el término de mayor grado de $(P(x))$ entre el de $(D(x))$:

$$\frac{-r^3x^4}{-rx^2} = r^2x^2.$$

Multiplicamos y restamos:

$$\begin{aligned} r^2x^2 \cdot D(x) &= -r^3x^4 + r^2(r-1)x^3, \\ P(x) - (r^2x^2 \cdot D(x)) &= (r^3 + r^2)x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2-1)x. \end{aligned}$$

11.4.4.0.2 Paso 2.

Dividimos el nuevo término principal entre el de $(D(x))$:

$$\frac{(r^3 + r^2)x^3}{-rx^2} = -(r^2 + r)x.$$

Multiplicamos y restamos:

$$\begin{aligned} -(r^2 + r)x \cdot D(x) &= -(r^3 + r^2)x^3 + (r^3 - r)x^2, \\ [(r^3 + r^2)x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2-1)x] - [-(r^3 + r^2)x^3 + (r^3 - r)x^2] &= -(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x. \end{aligned}$$

11.4.4.0.3 Paso 3.

Dividimos nuevamente:

$$\frac{-(r^2 + r)x^2}{-rx^2} = r + 1.$$

Multiplicamos y restamos:

$$\begin{aligned} (r+1) \cdot D(x) &= -(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x, \\ [-(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x] - [-(r^2 + r)x^2 + (r^2-1)x] &= 0. \end{aligned}$$

11.4.4.0.4 Resultado.

El cociente es

$$Q(x) = r^2x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1),$$

y el resto es cero.

El **cociente** resultante es

$$Q(x) = r^2x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1),$$

y el resto es cero, tal como queríamos demostrar.

11.4.4.1 Paso 1

- Cociente parcial:

$$\frac{-r^3 x^4}{-r x^2} = r^2 x^2.$$

- Multiplicamos y restamos \rightarrow nuevo dividendo.

11.4.4.2 Paso 2

- Cociente parcial:

$$\frac{(r^3 + r^2)x^3}{-r x^2} = -(r^2 + r)x.$$

- Multiplicamos y restamos \rightarrow nuevo dividendo.

11.4.4.3 Paso 3

- Cociente parcial:

$$\frac{-(r^2 + r)x^2}{-r x^2} = r + 1.$$

- Multiplicamos y restamos \rightarrow **resto cero**.

Cociente final:

$$Q(x) = r^2 x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1).$$

11.4.5 Solución de las raíces de periodo 2

Resolvemos

$$r^2 x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1) = 0$$

con la fórmula cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{(r^2 + r) \pm \sqrt{(r^2 + r)^2 - 4r^2(r + 1)}}{2r^2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r + 1)(r - 3)}}{2r}.$$

Así:

$$x_1 = \frac{r + 1 + \sqrt{(r + 1)(r - 3)}}{2r}, \quad x_2 = \frac{r + 1 - \sqrt{(r + 1)(r - 3)}}{2r}.$$

Nota: En ($r=3$) el discriminante ($(r+1)(r-3)$) se anula y ambas raíces confluyen en ($x=2/3$), coincidiendo con el punto fijo que pierde estabilidad.