

Estudio del Caos en sistemas físicos y su relación con la predicción meteorológica

Rubén Torre Merino

Table of contents

1 ColaCaos

¿Has oído hablar alguna vez de la teoría del caos? Es posible que te suene la famosa idea de que «el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un huracán en Texas». Esta afirmación es una metáfora del efecto mariposa, un concepto fundamental dentro de la teoría del caos que describe cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un sistema pueden dar lugar a diferencias enormes en su evolución.

El origen de esta idea se remonta a 1972, cuando el meteorólogo y matemático Edward Lorenz presentó una conferencia titulada «Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?» en la 139^a reunión de la American Association for the Advancement of Science (AAAS). Lorenz, que investigaba modelos meteorológicos, descubrió que pequeñas diferencias en los datos iniciales podían generar predicciones climáticas completamente distintas. Su trabajo sentó las bases de la teoría del caos y revolucionó la comprensión de los sistemas físicos.

La inspiración para este trabajo me vino de este video de Veritasium.

Si tienes tiempo y ganas también te recomiendo este video de PBS. Mucho más largo pero con mayor detalle

Pero, ¿qué significa realmente el caos? Aunque solemos asociarlo con desorden y aleatoriedad, en matemáticas y física el caos tiene un significado más profundo. Un sistema caótico no es simplemente impredecible, sino que sigue leyes deterministas, pero con una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Esto significa que, aunque podamos conocer las reglas que rigen su comportamiento, su evolución se vuelve imposible de predecir a largo plazo debido a la amplificación de pequeñas incertidumbres.

En este blog exploraremos cómo la teoría del caos y en especial sus consecuencias en la predicción del tiempo meteorológico. A través de ejemplos, experimentos y reflexiones, descubriremos cómo el caos no es simplemente desorden, sino una forma compleja de organización que rige muchos aspectos del mundo que nos rodea.

También abordaremos las implicaciones filosóficas del caos. Si la teoría del caos es correcta, a pesar de estar trabajando con sistemas cuyas ecuaciones son deterministas, no podremos conocer con certeza el estado final del sistema, por mucho que nos empeñemos en conocer con mas precisión las condiciones iniciales del sistema. Esto sugiere una limitación fundamental en muchos aspectos del conocimiento que la humanidad puede tener de su futuro. A pesar de la mejora de los medios técnicos disponibles por la Humanidad, y del avance científico, tenemos una limitación establecida por el Caos, que nos proyecta un Horizonte de Predictibilidad que no podemos pasar. Es un límite similar al de la velocidad de la luz, o al horizonte de sucesos de un agujero negro. Nunca vamos a poder ver más allá del Horizonte de Predictibilidad.

Por lo tanto, teniendo claras estas limitaciones, ¿Cómo pueden los científicos hacer predicciones sobre el clima de la Tierra a 10, 20 o 100 años vista, si el horizonte de predictibilidad del tiempo meteorológico no es mayor de 2 semanas?

Para concluir, he de confesar que no me he podido resistir a hacer el juego de palabras fácil con Cola «Caos», así que, la pregunta que intentaré responder, es ¿Puede una persona agitando

su taza de Cacao por la mañana provocar un huracán al otro lado del océano a la semana siguiente?

Part I

Introducción

Part II

El Caos a través de la Función Logística

2 El Mapa Logístico

2.1 Introducción

El mapa logístico es una de las ecuaciones en diferencia más clásicas de la teoría del caos:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

donde:

- $x_n \in [0, 1]$ es la población normalizada.
- r regula la tasa de crecimiento.

Se le llama “mapa”, porque en teoría de sistemas dinámicos, un mapa es simplemente una regla o función que toma un valor (o un punto en el espacio de estados) y lo “mapea” al siguiente valor. Algo similar a una función. El nombre “logístico” procede de la ecuación logística que modela el crecimiento de poblaciones con un límite (“capacidad de carga”).

Se trata, a grosso modo, de una sucesión en la que el siguiente valor depende del anterior. De este tipo, hemos visto bastantes en el bachillerato, como:

2.1.1 Sucesión aritmética

- Definición recursiva: $a_{n+1} = a_n + d$, donde d es la diferencia constante.
- Término general: $a_n = a_0 + n d$.
- Comportamiento: crecimiento o decrecimiento uniforme.

2.1.2 Sucesión geométrica

- Definición recursiva: $a_{n+1} = q a_n$, donde q es la razón constante.
- Término general: $a_n = a_0 q^n$.
- Comportamiento: decrece si $|q| < 1$, es constante si $|q| = 1$, crece o alterna si $|q| > 1$.

2.1.3 Sucesiones lineales de orden superior

- Ejemplo: Fibonacci
 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, con $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.
- Tienen fórmula cerrada y crecen de forma suave y predecible.

¿Qué tiene de especial el mapa logístico?. Lo veremos a continuación. Como primera pista, hay que observar que se trata de una ecuación no lineal, lo cual es un factor común de los sistemas caóticos. Una ecuación no lineal es aquella en la que la incógnita:

- Aparece con potencias distintas de uno,
- O bien se combina consigo misma (productos, potencias),
- O involucra funciones no lineales (exponentiales, trigonométricas...).

2.2 Relevancia

Su relevancia radica en que, a partir de una ecuación muy elemental, se observa toda la complejidad característica del caos: bifurcaciones, ciclos de periodo en expansión y dependencia sensible a las condiciones iniciales. Además su popularidad se debe a que esta ecuación modela muy bien diversos sistemas físicos como pueden ser:

1. Dinámica de poblaciones
2. Modelos económicos de oferta y demanda
3. Reacciones químicas oscilantes
4. Circuitos con realimentación

El caso más paradigmático de estudio es el primero, es decir, la evolución de la población de animales, plantas o células con el tiempo. ¿Por qué se emplea la función logística para ello?. Porque al principio, la población crece rápidamente pero después debido a la falta de recursos del entorno se suelen producir colapsos poblacionanales.

Para valores de r menor que uno, la población final tiende a cero, lo que resulta lógico, dado que la población inicial no crece.

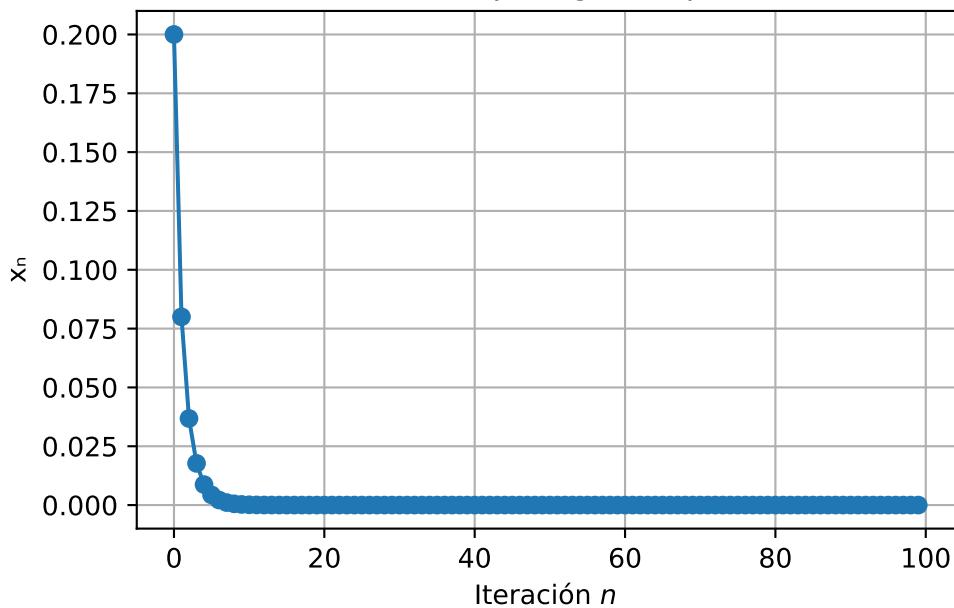
Para valores de r entre 1 y 3, la secuencia x_n converge a un único valor fijo, que además es estable.

Pero al aumentar r por encima de 3, llega la primera sorpresa. Primero aparece un ciclo doble (dos valores alternantes), luego ciclos de periodo 4, 8, 16... y así sucesivamente, hasta que el comportamiento se vuelve aparentemente aleatorio, o mejor dicho caótico. A lo largo del proyecto iremos distinguiendo claramente entre el término aleatorio y el término caótico.

2.3 Simulación en Python

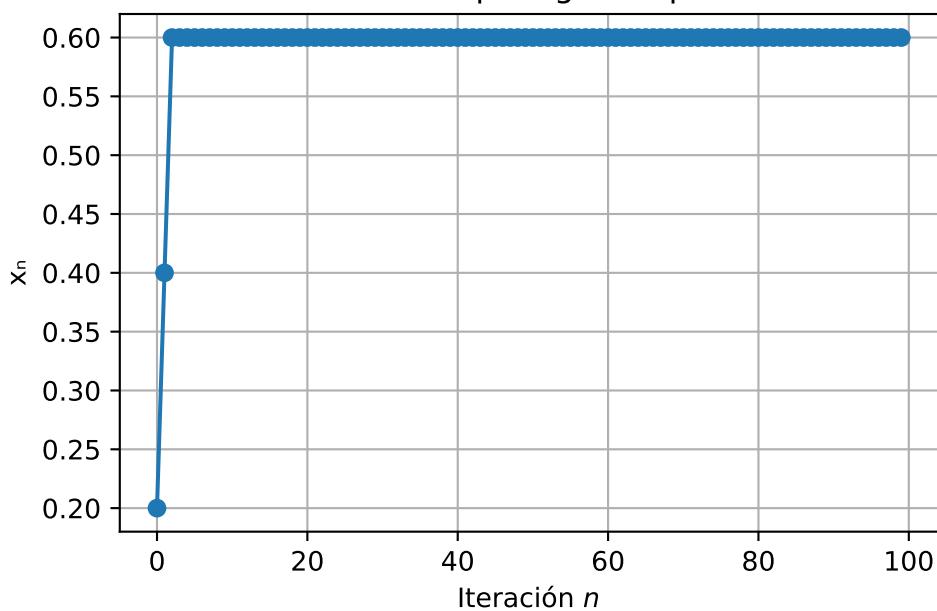
Vamos a refrendar lo anteriormente dicho con simulaciones de la función logística. Como veremos a continuación, para valores de r menores de 1, el valor final de x_n tiende a cero.

Evolución del mapa logístico para $r = 0.5$



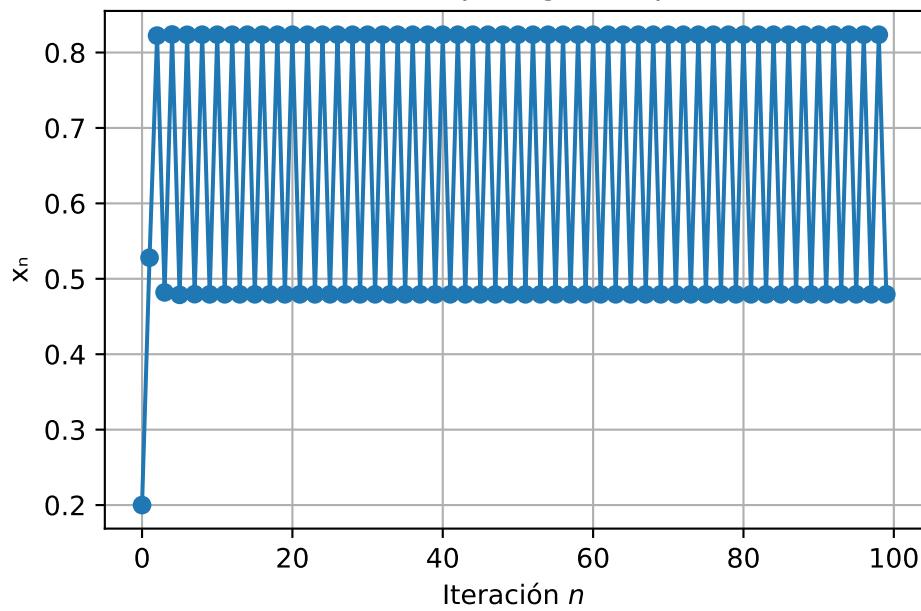
Para valores de r entre 1 y 3, el valor final de x_n tiende a un punto estable

Evolución del mapa logístico para $r = 2.5$



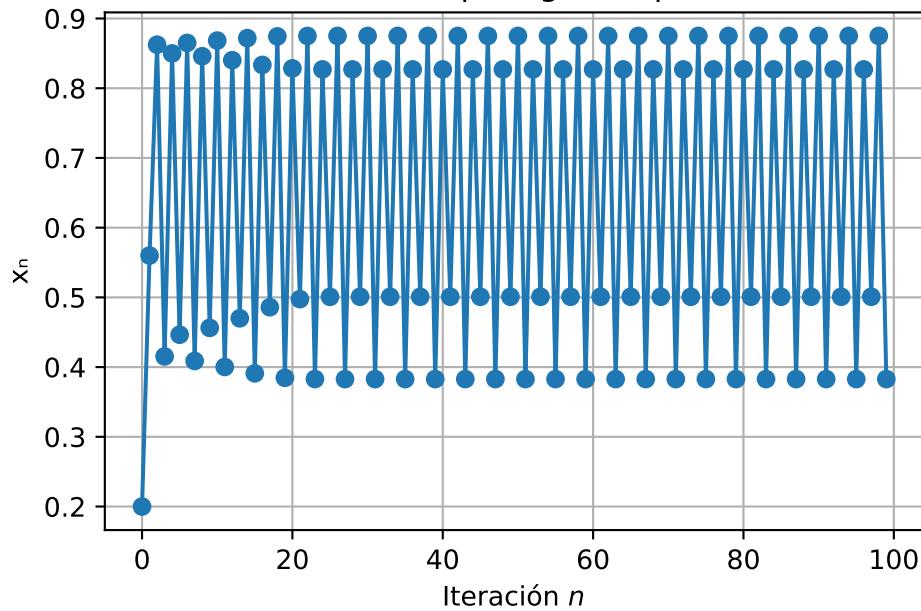
Para valores de r entre 3 y 3.449, el valor final de x_n tiende a dos puntos estables. Es decir, la población tiene un número de elementos alternantes, que se podría deber a la escasez/abundancia periódica de recursos.

Evolución del mapa logístico para $r = 3.3$



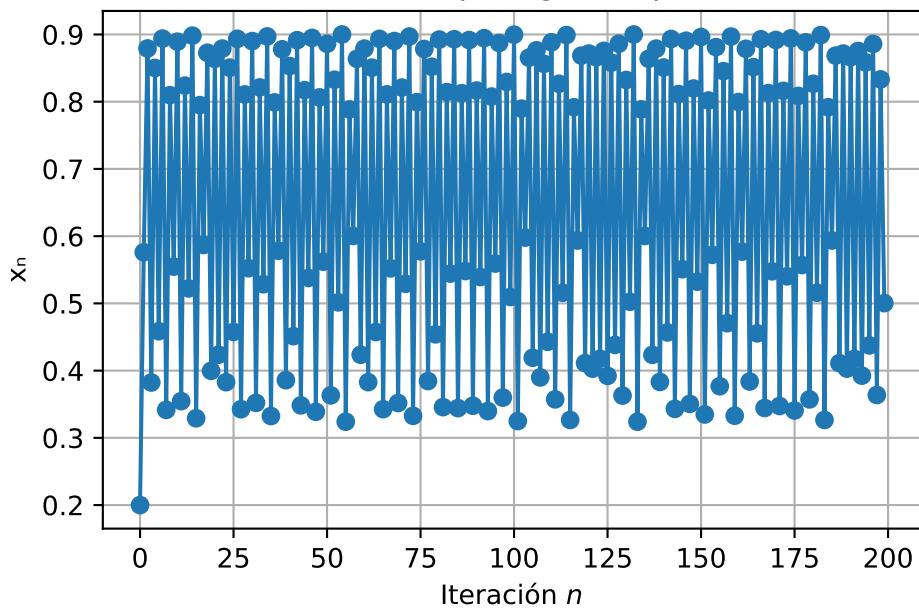
Para valores de r entre 3 y 3.544, el valor final de x_n tiende a cuatro puntos estables. Es curioso ver como la población final alterna entre 4 números distintos de individuos.

Evolución del mapa logístico para $r = 3.5$



Y a partir de $r = 3.56995$ no hay ningún punto estable. Se dice que el sistema en este punto se convierte en caótico

Evolución del mapa logístico para $r = 3.6$



Curioso, ¿verdad?. En la siguiente sección podrás experimentar con diferentes valores de r y diferentes valores iniciales, para ver cuál es el estado final del sistema. Después en sucesivas secciones, iremos explicando formalmente con ayuda de las matemáticas por qué ocurre ésto.

3 Diagrama de telaraña

3.1 Introducción

En sistemas discretos iterativos, un “diagrama cobweb” o “diagrama de telaraña” es una representación gráfica que ilustra cómo evoluciona la secuencia

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

paso a paso. Facilita la visualización de convergencia, ciclos y caos.

3.2 Construcción del diagrama Cobweb

1. Dibujamos las curvas:

- $y = f(x)$
- $y = x$

2. Partimos de un valor inicial x_0 en el eje horizontal.

3. Trazamos verticalmente desde $(x_0, 0)$ hasta $(x_0, f(x_0))$.

4. Desde $(x_0, f(x_0))$ traza horizontalmente hasta la recta $y = x$, llegando a $(f(x_0), f(x_0))$. Este valor es x_1 .

5. Repite el proceso usando x_1 para obtener x_2 , y así sucesivamente.

Al unir los segmentos verticales y horizontales se forma la “telaraña” que muestra la evolución $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$. Así vemos la evolución del sistema.

3.3 ¿Para qué sirve?

- **Convergencia a punto fijo:** si la telaraña se aproxima a un punto de intersección entre $y = f(x)$ y $y = x$. En la siguiente sección analizaremos el término “punto fijo”
- **Detección de ciclos:** patrones periódicos (por ejemplo, saltos entre dos puntos indican un ciclo de periodo 2).
- **Observación de caos:** en funciones no lineales como el mapa logístico, con ciertos parámetros la telaraña no se estabiliza y refleja sensibilidad a condiciones iniciales.

Aquí dejo un diagrama interactivo, en el que se observan la función logística $y = f(x) = rx(x-1)$, la función $y = x$, y el diagrama de telaraña.

El usuario puede jugar con el valor de r y de x_0 (el valor inicial de población), y ver la evolución de la población después de 100 iteraciones del mapa logístico.

Unable to display output for mime type(s): text/html

4 Puntos fijos de una función

4.1 ¿Qué es un punto fijo?

Un **punto fijo** de una función f es un valor x^* que satisface

$$x^* = f(x^*)$$

Intuitivamente, si comenzamos en x^* y aplicamos la función, nos quedamos en el mismo punto. En la sección anterior vimos que en el diagrama interactivo graficábamos también la función $y = x$. Si nuestra función “ $f(x)=x$ ” cruza en algún momento la función $y = x$, entonces tenemos un punto fijo en nuestra función.

La pregunta que hay que hacerse, es la siguiente. Si hacemos iteraciones sucesivas de nuestro mapa/función, ¿convergemos a un punto fijo?. Para responder esta cuestión, vamos a hacer uso de la derivada de la función que estamos estudiando.

4.2 Estudio formal de la convergencia

Para ver si la sucesión x_n converge al punto fijo x^* que define la ecuación $x^* = f(x^*)$, en primer lugar vamos a definir el **error**:

$$e_n = x_n - x^*,$$

Es decir, e_n es lo que dista el resultado en la iteración n de la sucesión.

La función f se puede aproximar alrededor de x^* por medio de su derivada primera:

$$f(x_n) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*)$$

y usando $f(x^*) = x^*$, obtenemos

$$e_{n+1} \approx x_{n+1} - x^* = f'(x^*) e_n$$

Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces $|e_{n+1}| < |e_n|$ y por tanto $|e_n| \rightarrow 0$, garantizando que $x_n \rightarrow x^*$.

4.3 Ejemplo: $f(x) = \cos(x)$

Si algún día te aburres, coge una calculadora y empieza a apretar sucesivas veces la función coseno. Verás que acabarás teniendo en el display de la calculadora el valor 0.739. No es magia. El valor $x^* \approx 0.739085$ es el punto fijo de la función coseno.

Veamoslo más formalmente. Consideremos la iteración

$$x_{n+1} = \cos(x_n), \quad x_0 = 0.$$

Los primeros valores son:

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos(0) = 1, \\x_2 &= \cos(1) \approx 0.540302, \\x_3 &= \cos(x_2) \approx 0.857553, \\x_4 &= \cos(x_3) \approx 0.654290, \\x_5 &= \cos(x_4) \approx 0.793480, \\x_6 &= \cos(x_5) \approx 0.701369, \\x_7 &= \cos(x_6) \approx 0.763960, \\x_8 &= \cos(x_7) \approx 0.722102, \\x_9 &= \cos(x_8) \approx 0.750417, \\x_{10} &= \cos(x_9) \approx 0.731404,\end{aligned}$$

Vemos que los valores van oscilando, pero rápidamente se aproximan al punto fijo

$$x^* \approx 0.739085,$$

que satisface $x^* = \cos(x^*)$ (la ecuación $x^* = \cos(x^*)$ no tiene solución en forma de fórmula elemental, pues es una ecuación transcendental).

Además, la derivada en este punto es menor que 1, lo que confirma que es un punto de atracción de la función.

$$f'(x) = -\sin(x), \quad |f'(x^*)| = |\sin(x^*)| < 1,$$

por lo que la iteración converge a x^* .

Si vuelves a la sección anterior, verás que para valores de r entre 1 y 3, el mapa logístico converge al punto fijo de la función logística. Siempre, independientemente del valor de x_0 que elijas.

Curiosamente, a partir de $r = 3$ la derivada de la función logística en el punto de corte con $y = x$ pasa a tener un valor mayor en valor absoluto que 1, por lo que en este momento el punto de corte deja de ser un punto fijo.

En la siguiente sección, calcularemos formalmente los puntos fijos de la función logística y estudiaremos formalmente como se comporta la sucesión.

5 Estudio formal del mapa logístico

En los siguientes apartados vamos a desentrañar desde un punto de vista matemático como se comporta el mapa logístico. Ya hemos visto en los apartados anteriores, vía simulación, que el comportamiento es muy errático dependiendo del valor de r . Veamos por qué.

Para empezar veremos la función logística y la analizaremos como haríamos con cualquier otra función para ver su forma. Para ello, recurrimos a las técnicas habituales de análisis de funciones.

5.1 Dominio y ceros

- Por definición, el **Dominio** es: $0 \leq x \leq 1$
- En este dominio los **Ceros** de la función están en:
 - $f(0) = r \cdot 0 \cdot (1 - 0) = 0$
 - $f(1) = r \cdot 1 \cdot (1 - 1) = 0$

5.2 Derivada y monotonía

Para conocer los máximos y mínimos primero hemos de calcular la derivada,

- Derivada:

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

- La derivada tiene una raíz en $x = 1/2$, independientemente del valor de r . Por lo tanto, el signo de $f'(x)$:
 - Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, entonces $f'(x) > 0$ **creciente**
 - Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $f'(x) = 0$
 - Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $f'(x) < 0$ **decreciente**

De acuerdo al estudio de la derivada, tenemos un punto crítico en $x = \frac{1}{2}$. Puesto que la derivada pasa a ser creciente a decreciente en este punto, tenemos un máximo. La función, pues, tiene un valor máximo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}$$

Observar que si $r > 4$ entonces el máximo de la función es mayor que 1. Esto no puede darse, ya que la función logística normaliza los recursos máximos disponibles a 1. Por lo tanto, para que no se excedan (cosa que no puede ocurrir físicamente), el valor de r siempre se establece por debajo de 4.

5.3 Concavidad

- Segunda derivada:

$$f''(x) = -2r$$

- Como $r > 0$, $f''(x) < 0$ en todo el dominio **cóncava hacia abajo**

5.4 Rango de la función

De acuerdo, al estudio anterior, la función es siempre positiva, con valores entre 0 y $\frac{r}{4}$

Si vamos a la sección con el diagrama de telaraña, veremos efectivamente esta forma de la función.

5.5 Resumen gráfico

- Parábola invertida con vértice en $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$
- Crece de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$, luego decrece hasta $x = 1$

6 Término genérico del mapa logístico

En las sucesiones aritméticas y geométricas es fácil expresar el término enésimo de la sucesión en función del primer término de la misma. Veamos:

Término general de la sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

donde: - a_1 es el primer término. - d es la diferencia común. - n es la posición del término.

Término general de la sucesión geométrica

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

donde: - a_1 es el primer término. - r es la razón común. - n es la posición del término.

¿Podemos hacer lo mismo con el mapa logístico?. Hagamos las primeras iteraciones.

$$x_1 = r x_0 (1 - x_0)$$

$$x_2 = r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))$$

$$x_3 = r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)))$$

$$x_4 = r^4 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))) (1 - r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))))$$

$$\begin{aligned} x_5 &= r^5 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))) \\ &\quad \times (1 - r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)))) \\ &\quad \times (1 - r^4 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)) (1 - r^2 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0))) (1 - r^3 x_0 (1 - x_0) (1 - r x_0 (1 - x_0)))) \end{aligned}$$

Como podemos ver, sí que podemos ir expresando los sucesivos términos en función de solamente x_0 y de r , pero a medida que iteramos, la expresión se vuelve muy complicada. A pesar de todo, hay que destacar que la función es **puramente determinista**. Es decir, se podría formular el valor de la iteración enésima en función de los valores de x_0 y de r .

7 Estabilidad del mapa logístico

7.1 Puntos fijos

Tal y como habíamos visto anteriormente, un **punto fijo** x^* satisface:

$$f(x^*) = x^*.$$

Para encontrar los puntos fijos de la función logística, resolvemos:

$$r x (1 - x) = x.$$

Llevando todos los términos a un lado:

$$r x (1 - x) - x = 0 \implies x(r(1 - x) - 1) = 0.$$

De aquí se obtienen dos soluciones:

$$x_1 = 0$$

y x_2 tal que $r(1 - x_2) - 1 = 0$, es decir:

$$1 - x_2 = \frac{1}{r} \implies x_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

7.2 Evaluación de la derivada en los puntos fijos

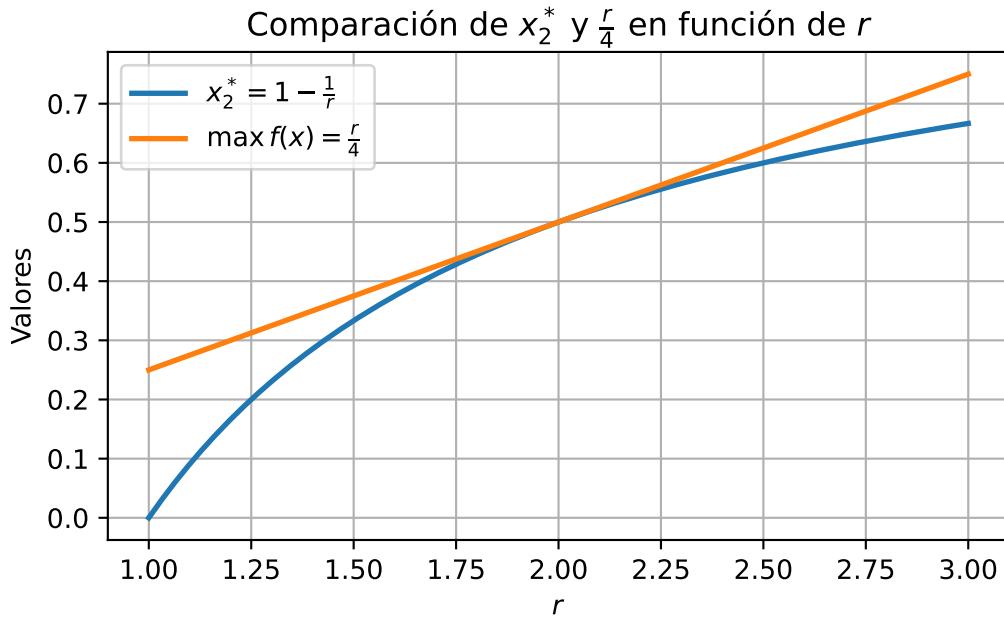
La derivada de la función logística es:

$$f'(x) = r(1 - 2x).$$

Y además, de la sección sobre los puntos fijos sabemos que un punto fijo es estable si $|f'(x^*)| < 1$.

- **En $x_1^* = 0$:** $f'(0) = r$. Estable si $0 < r < 1$. Es decir, para valores de r comprendidos entre 0 y 1, el valor de $x = 0$ es un punto fijo. Lo que ocurre es bien sencillo. Como ya comentamos anteriormente, puesto que la población va decreciendo tras cada iteración, acaba convergiendo en $x = 0$. Gráficamente también es fácil verlo. Si vamos al diagrama de telaraña, y ponemos un $r < 1$, veremos que la función lógistica solamente toca a la recta $y = x$ en $x = 0$
- **En $x_2^* = 1 - 1/r$:** $f'(x_2^*) = 2 - r$. Estable si $|2 - r| < 1 \rightarrow 1 < r < 3$. Aquí vemos que el mapa logístico converge a un punto, que es el punto fijo. Es lo que habíamos visto ya en las soluciones. De nuevo, animo al lector a probarlo en el diagrama de telaraña interactivo. Con cualquier valor de x_0 que pongan para valores de r entre 1 y 3, siempre se convergerá a un punto que es $x_2^* = 1 - 1/r$.

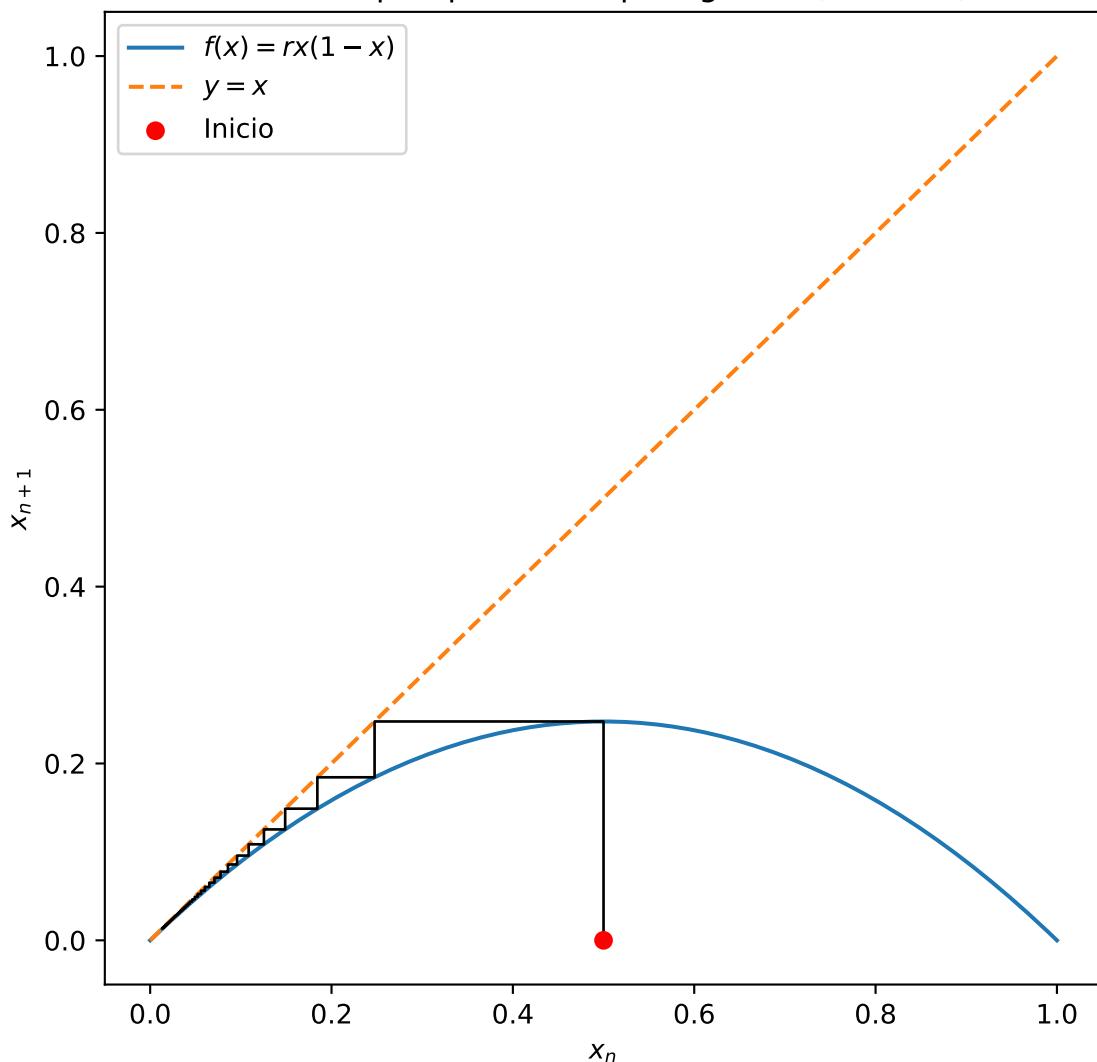
Tal y como se muestra en la siguiente figura, a medida que el factor de crecimiento de la población crece, el número final de individuos aumenta de forma constante. Como vemos, el valor final de población, siempre está por debajo del valor máximo de la función logística. Solamente coincide el valor final con el máximo en $r=2$. ¿Qué quiere decir esto?. Que la población puede que en las primeras iteraciones alcance el valor máximo $r/4$, pero al final se estabilizar en un valor menor que es igual a $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$.



Añadamos unos gráficos para verlo mejor.

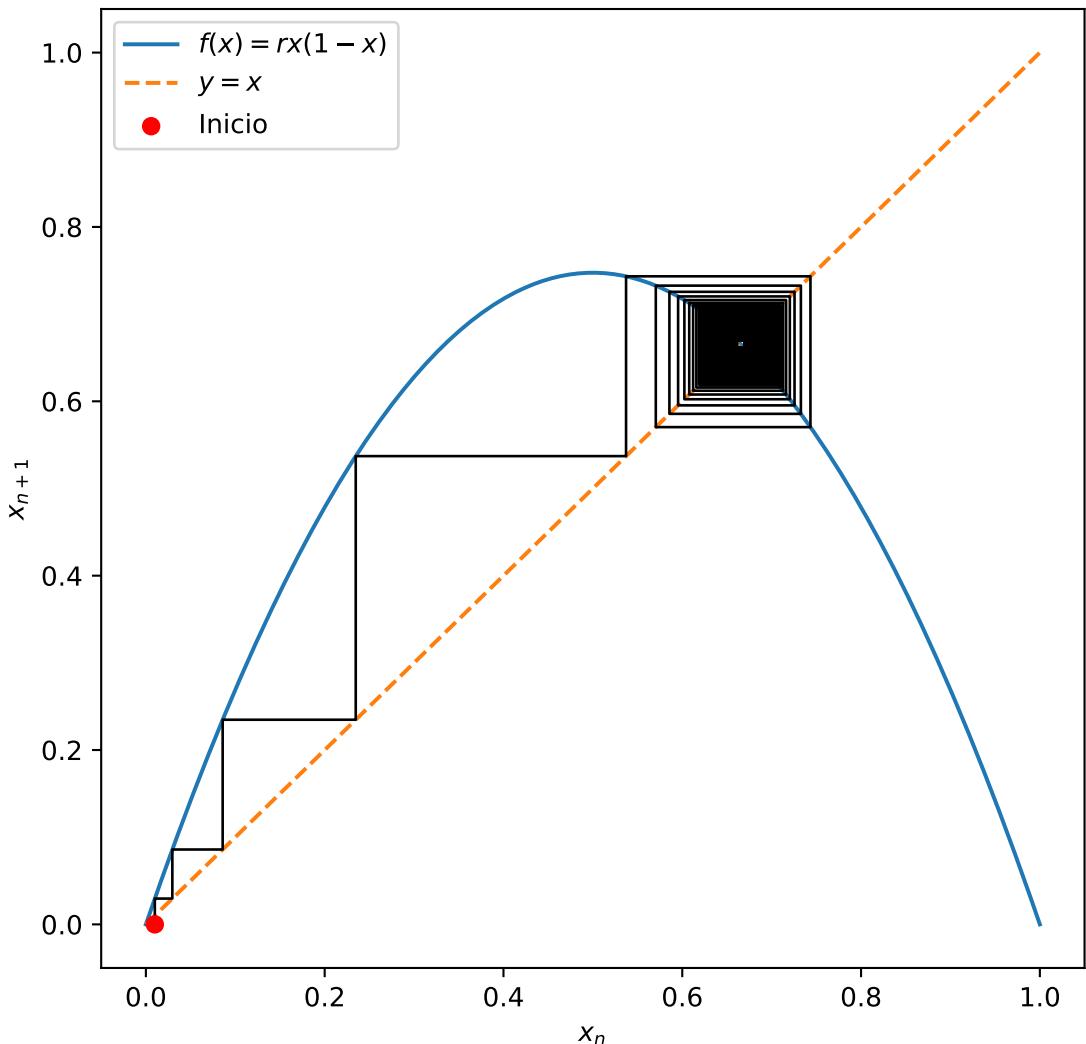
En este primero, vemos para un valor de $r = 0.99$ como la población va decreciendo iteración tras iteración hasta llegar al punto fijo $x = 0$

Cobweb plot para el mapa logístico ($r = 0.99$)



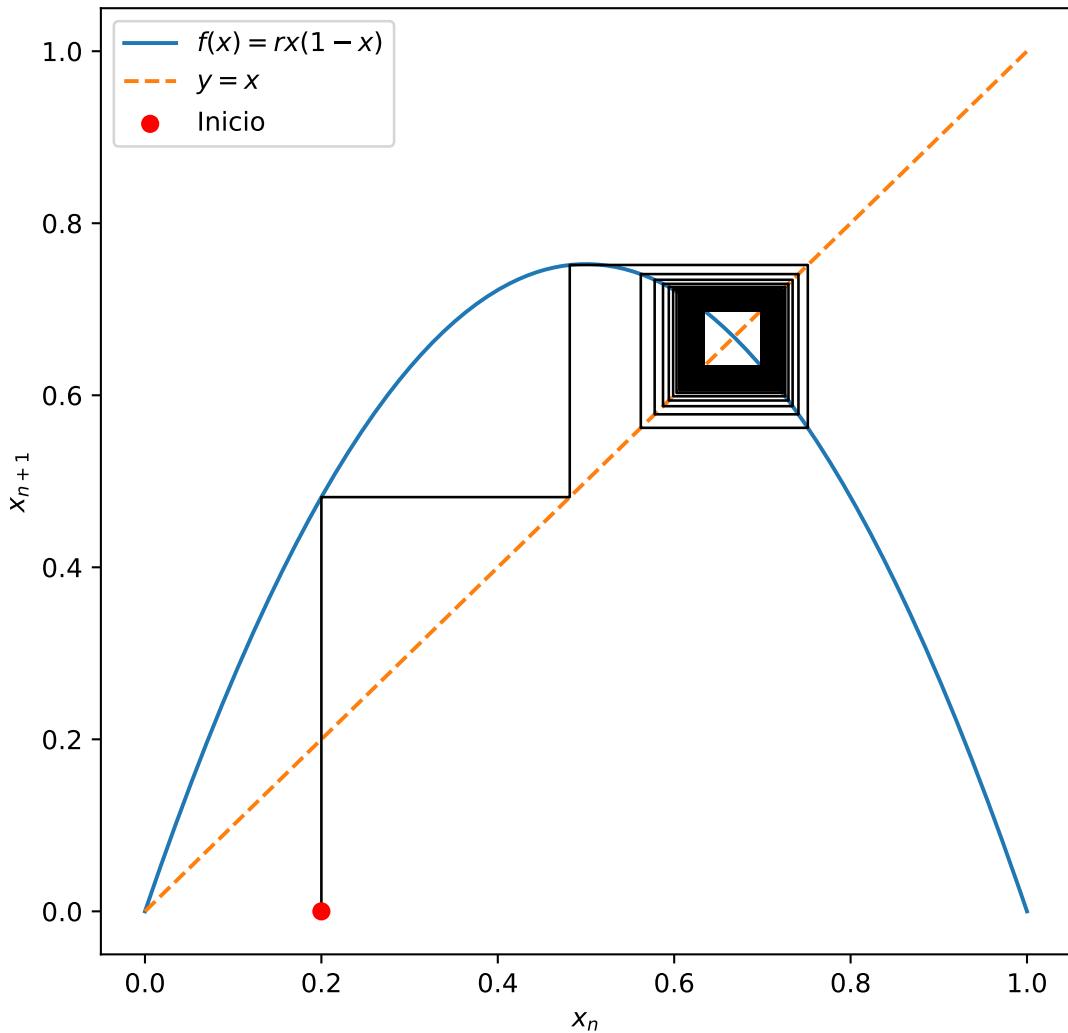
En este segundo vemos como efectivamente la sucesión converge al punto fijo (el cruce de la función con la recta $y = x$), a pesar de que el valor de r está cerca de 3. Pero puesto que sigue siendo menor de 3, el punto fijo actúa como atractor, y después de 200 iteraciones acaba convergiendo.

Cobweb plot para el mapa logístico ($r = 2.99$) después de 200 iteraciones



Pero, ¿qué pasa cuando subimos por encima de $r = 3$? Pues que la derivada en el punto fijo ya no es menor en valor absoluto que 1, y por lo tanto el punto fijo ya no atrae las iteraciones. El punto fijo, sigue siendo punto fijo, es decir, si introducimos su valor, la función vuelve ahí; pero desde cualquier otro punto, ya no va a converger hacia ese valor. En este caso, vemos que para $r = 3.01$ la sucesión orbita entre dos puntos. Es decir, la población final alterna entre dos valores distintos de individuos. Biológicamente, sucede porque la tasa de crecimiento r es lo bastante alta para que, cuando la población se acerca a la capacidad máxima del entorno, en la siguiente generación haya un colapso por exceso de competencia (o agotamiento de recursos), y luego vuelva a recuperarse.

Cobweb plot para el mapa logístico ($r = 3.01$) después de 2000 iteraciones



Aunque el mapa logístico es un modelo muy sencillo, en laboratorio y a veces en campo se han visto oscilaciones de “alto-bajo” de periodo 2 parecidas a las predichas para $r \approx 3$. Algunos ejemplos son:

- Moscas de la carne (*Lucilia cuprina*). En los famosos experimentos de Nicholson sobre poblaciones de mosca de la carne en frascos, al mantenerlas en condiciones constantes y con alta fecundidad, la densidad adulta pasaba de un pico alto un año a un valle bajo al siguiente, repitiéndose cada dos generaciones.
- Escarabajos del trigo (*Tribolium confusum*). Gurney y Nisbet cultivaron colonias de *Tribolium* en el laboratorio controlando sólo la tasa de natalidad por suministro de alimento. Se observó un ciclo bienal: una generación con números muy altos y la siguiente bastante más baja, en perfecta alternancia.
- Daphnia en estanques experimentales. Algunos estudios con pulgas de agua (*Daphnia*) en estanques cerrados, variando la concentración de alimento, han mostrado también ciclos aproximados de dos generaciones cuando la tasa de crecimiento es lo bastante alta.
- Peces capelán (*Mallotus villosus*). En poblaciones silvestres de capelán del Atlántico Norte, los registros de capturas han evidenciado picos de abundancia que tienden a repetirse cada dos años, lo cual coincide con su periodo de madurez y un efecto de “sobre población-agotamiento de recursos”.

En todos estos casos la dinámica de periodo 2 refleja una sobre corrección: tras un año de “boom” la población agota alimento o espacios de puesta, con lo que la siguiente generación cae muy por debajo de la capacidad de carga, y después se recupera, iniciando de nuevo el ciclo

En el siguiente apartado, analizaremos formalmente lo que ocurre en la primera bifurcación del mapa logístico.

8 Primera bifurcación

Tal y como vimos en la sección anterior cuando $r > 3$ el valor final de la sucesión logística alterna entre dos valores finales. Vamos a hacer un análisis matemático para explicar por qué pasa ésto.

8.1 Primera bifurcación: duplicación de período en $r = 3$. Análisis matemático

En $r = 3$, la derivada en el punto fijo $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ se vuelve -1 , lo cual genera una órbita de período 2, tal y como hemos visto en el apartado anterior.

Surgen dos nuevos puntos p y q que no son puntos fijos, sino puntos de período 2 tales que:

$$f(p) = q, \quad f(q) = p$$

Es decir, si al mapa logístico se le alimenta con un valor p , da como resultado un valor q , que al ser metido otra vez en el mapa logístico da el valor p inicial.

Esto significa que:

$$f(f(p)) = p$$

Lo cual implica que p es un punto fijo del mapa iterado f^2 (esta notación significa la composición de una función con sigo misma $f^2() = f \circ f = f(f())$, no el cuadrado de la función)

Dado que $f(x) = rx(1 - x)$, podemos escribir:

$$f(p) = rp(1 - p)$$

Entonces:

$$f(f(p)) = r \cdot f(p) \cdot (1 - f(p)) = r \cdot [rp(1 - p)] \cdot [1 - rp(1 - p)]$$

Queremos encontrar los puntos de período 2, así que igualamos:

$$f(f(p)) = p$$

Hay que observar, que la resolución gráfica es sencilla. Simplemente hay que dibujar la función $f^2() = f \circ f = f(f())$ y la función $y = x$, y encontrar los cruces de ambas. Se cortarán en dos puntos, que serán los puntos entre los que alternará el mapa logístico.

Sigamos con la resolución analítica. Para ello, desarrollamos completamente $f(f(p)) = p$:

$$r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) = p$$

Pasando todo al mismo lado:

$$r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) - p = 0$$

Factorizamos p :

$$p [r^2(1-p)(1-rp(1-p)) - 1] = 0$$

Una de las soluciones es $p = 0$ (punto fijo trivial), pero las otras soluciones corresponden a los puntos de período 2.

Expandimos el polinomio:

$$f(f(p)) = r^2p(1-p)(1-rp(1-p)) = p$$

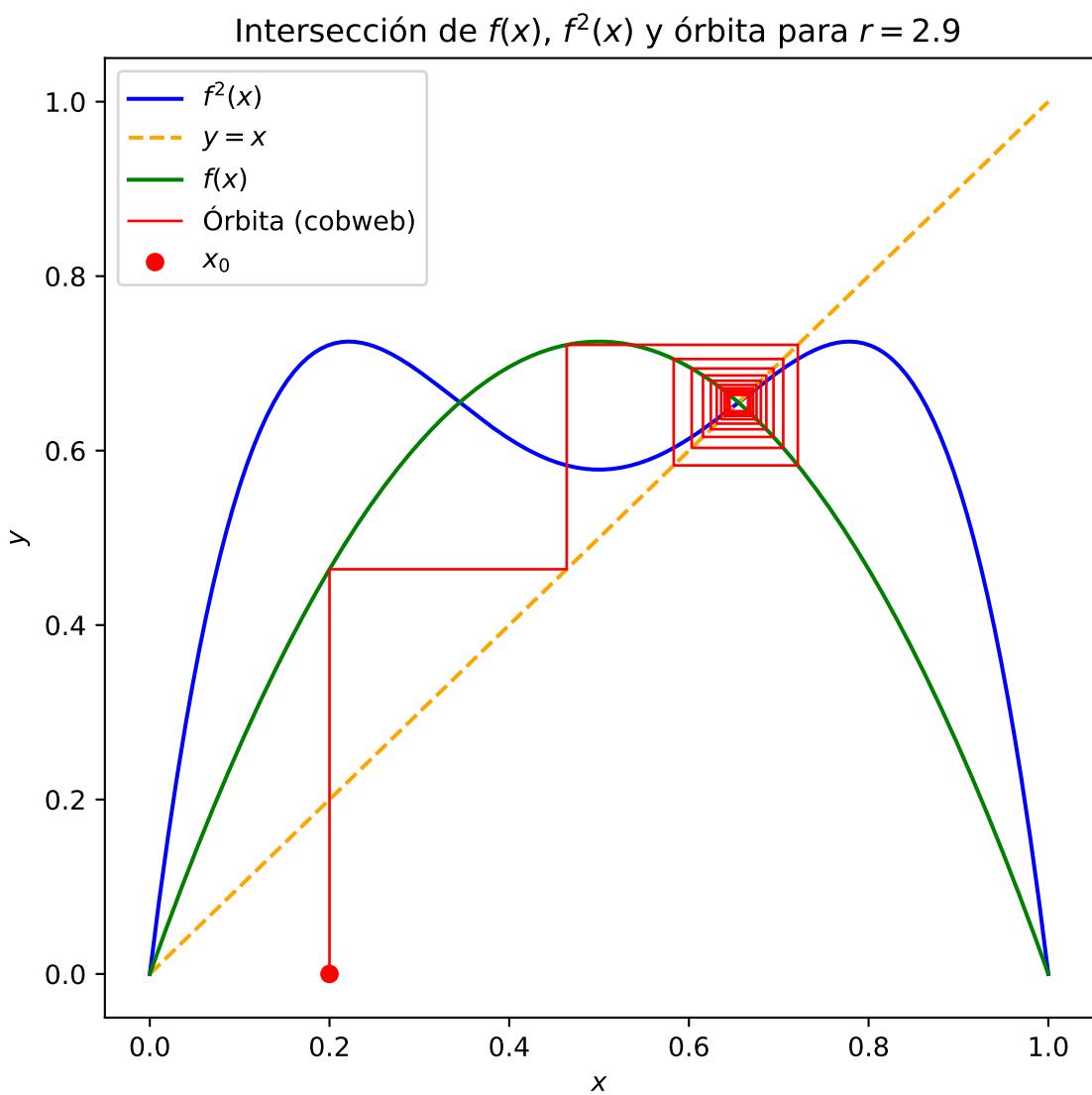
Expandimos paso a paso:

1. $f(p) = rp(1-p)$
2. $1 - f(p) = 1 - rp(1-p)$
3. $(1-p)(1-rp(1-p)) = 1 - p - rp(1-p) + rp^2(1-p)$
4. Multiplicamos todo por r^2p
5. Resulta en un polinomio de cuarto grado en p

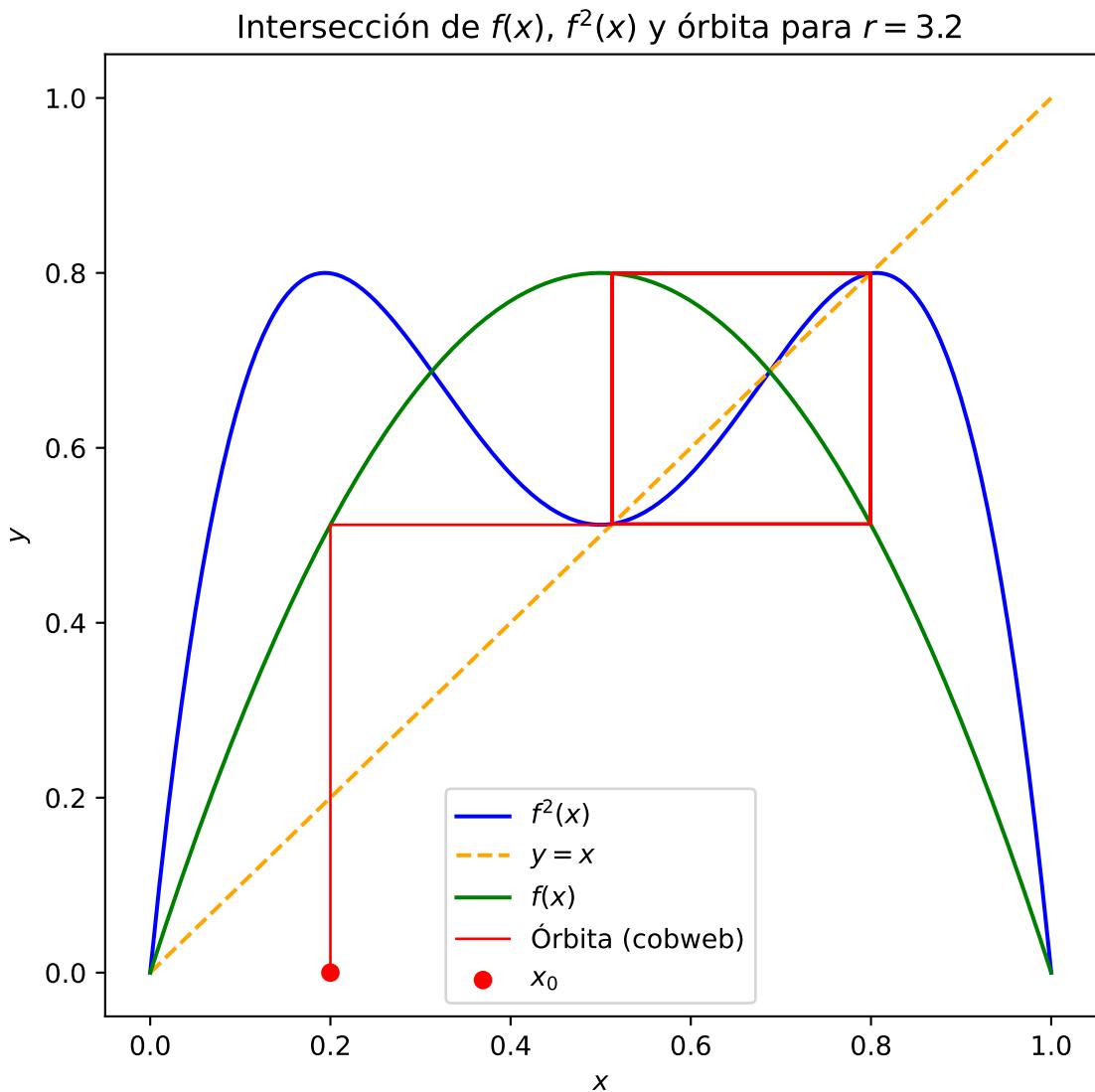
Este polinomio tiene hasta 4 raíces reales, de las cuales dos corresponden a los nuevos puntos de período 2. Las otras dos pueden ser los puntos fijos ya conocidos o raíces no relevantes dinámicamente.

8.2 Análisis gráfico

Vamos a proceder al análisis gráfico. Para empezar vamos a poner un mapa logístico con $r = 2.9$. Sabemos que para este valor la sucesión converge a un punto. Esto lo vemos porque la función logística corta con la recta $y = x$ en un punto cuya pendiente en valor absoluto es menor que 1, y porque además en ese punto corta también la segunda iterada $f \circ f$. La recta $y = x$ solo corta en un punto a la segunda iterada, por lo tanto no hay alternancia entre dos puntos.



Y ahora veamos lo que pasa cuando $r = 3.2$. En este caso, la segunda iteración corta con la recta $y = x$ en dos puntos. Tal y como vemos en el diagrama de telaraña son estos dos puntos entre los que oscila el valor final del mapa logístico.



8.3 Análisis de estabilidad de la primera bifurcación

En primer lugar, vamos a calcular de nuevo de forma analítica precisa los puntos en los que se produce la oscilación. La función logística es

$$f(x) = rx(1-x),$$

y su iteración doble se define como

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)).$$

Queremos hallar los valores de x que satisfacen

$$f^{(2)}(x) = x.$$

8.3.1 Expresión explícita de ($f^{(2)}(x)$)

Primero calculamos

$$f(x) = rx - rx^2.$$

Luego

$$f(f(x)) = r(f(x))(1 - f(x)) = r(rx - rx^2)(1 - (rx - rx^2))$$

Por tanto

$$f^{(2)}(x) = r(rx - rx^2)(1 - rx + rx^2) = r^2 x (1 - x) (1 - rx + rx^2)$$

En vez de expresar la segunda iteración como un polinomio de grado 4, lo dejamos en función de dos monomios y un binomio.

8.4 Primera bifurcación: obtención de los puntos fijos de periodo 1 y 2

8.4.1 Definición de la función y de su iterada doble

La función logística es

$$f(x) = r x (1 - x).$$

Su segunda iterada (composición consigo misma) se escribe

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)).$$

Queremos resolver

$$f^{(2)}(x) - x = 0,$$

que es un polinomio de grado 4 en (x).

8.4.2 Puntos de periodo 1 (puntos fijos de (f))

Localizamos los puntos de periodo 1, es decir, las raíces de

$$f(x) - x = r x (1 - x) - x = 0.$$

Factorizando:

$$r x (1 - x) - x = x[r(1 - x) - 1] = 0.$$

De aquí salen dos soluciones:

$$x = 0, \quad x = \frac{r-1}{r}.$$

8.4.3 Construcción del polinomio de grado 4

Para la segunda iterada:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= r(f(x))(1-f(x)) = r(rx - rx^2)[1 - (rx - rx^2)] \\ &= r^2 x (1-x)(1-rx+rx^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{(2)}(x) - x = r^2 x (1-x)(1-rx+rx^2) - x.$$

8.4.4 División polinómica para aislar el factor de periodo 2

Primero, observemos que si

$$x^*$$

es un punto fijo de

$$f$$

, es decir,

$$f(x^*) - x^* = 0,$$

entonces

$$f^{(2)}(x^*) - x^* = f(f(x^*)) - x^* = f(x^*) - x^* = 0.$$

Por tanto, toda raíz de

$$f(x) - x$$

es también raíz de

$$f^{(2)}(x) - x$$

, lo que en términos de polinomios equivale a afirmar que

$$f^{(2)}(x) - x \text{ es divisible por } f(x) - x.$$

División polinómica paso a paso

Queremos dividir

$$P(x) = f^{(2)}(x) - x = -r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2-1)x$$

entre

$$D(x) = f(x) - x = -rx^2 + (r-1)x.$$

8.4.4.0.1 Paso 1.

Dividimos el término de mayor grado de $(P(x))$ entre el de $(D(x))$:

$$\frac{-r^3x^4}{-rx^2} = r^2x^2.$$

Multiplicamos y restamos:

$$r^2x^2 \cdot D(x) = -r^3x^4 + r^2(r-1)x^3,$$

$$P(x) - (r^2x^2 \cdot D(x)) = (r^3 + r^2)x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2 - 1)x.$$

8.4.4.0.2 Paso 2.

Dividimos el nuevo término principal entre el de $(D(x))$:

$$\frac{(r^3 + r^2)x^3}{-rx^2} = -(r^2 + r)x.$$

Multiplicamos y restamos:

$$-(r^2 + r)x \cdot D(x) = -(r^3 + r^2)x^3 + (r^3 - r)x^2,$$

$$[(r^3 + r^2)x^3 - r^2(r+1)x^2 + (r^2 - 1)x] - [-(r^3 + r^2)x^3 + (r^3 - r)x^2] = -(r^2 + r)x^2 + (r^2 - 1)x.$$

8.4.4.0.3 Paso 3.

Dividimos nuevamente:

$$\frac{-(r^2 + r)x^2}{-rx^2} = r + 1.$$

Multiplicamos y restamos:

$$(r + 1) \cdot D(x) = -(r^2 + r)x^2 + (r^2 - 1)x,$$

$$[-(r^2 + r)x^2 + (r^2 - 1)x] - [-(r^2 + r)x^2 + (r^2 - 1)x] = 0.$$

8.4.4.0.4 Resultado.

El cociente es

$$Q(x) = r^2x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1),$$

y el resto es cero.

El **cociente** resultante es

$$Q(x) = r^2x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1),$$

y el resto es cero, tal como queríamos demostrar.

8.4.4.1 Paso 1

- Cociente parcial:

$$\frac{-r^3x^4}{-rx^2} = r^2x^2.$$

- Multiplicamos y restamos → nuevo dividendo.

8.4.4.2 Paso 2

- Cociente parcial:

$$\frac{(r^3 + r^2)x^3}{-rx^2} = -(r^2 + r)x.$$

- Multiplicamos y restamos → nuevo dividendo.

8.4.4.3 Paso 3

- Cociente parcial:

$$\frac{-(r^2 + r)x^2}{-rx^2} = r + 1.$$

- Multiplicamos y restamos → **resto cero**.

Cociente final:

$$Q(x) = r^2x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1).$$

8.4.5 Solución de las raíces de periodo 2

Resolvemos

$$r^2x^2 - (r^2 + r)x + (r + 1) = 0$$

con la fórmula cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{(r^2 + r) \pm \sqrt{(r^2 + r)^2 - 4r^2(r + 1)}}{2r^2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r + 1)(r - 3)}}{2r}.$$

Así:

$$x_1 = \frac{r + 1 + \sqrt{(r + 1)(r - 3)}}{2r}, \quad x_2 = \frac{r + 1 - \sqrt{(r + 1)(r - 3)}}{2r}.$$

Nota: En ($r=3$) el discriminante ($(r+1)(r-3)$) se anula y ambas raíces confluyen en ($x=2/3$), coincidiendo con el punto fijo que pierde estabilidad.

Obsérvese, que para $r = 3$, no hay dos soluciones, sino una, que coincide con el punto estable ($x = 2/3$). Ahora que tenemos la fórmula de los puntos finales, vamos a ver si estos dos puntos finales son estables. Para ello haremos lo mismo que para el caso $1 < r < 3$. Es decir, cuando estábamos en la región estable $1 < r < 3$, el punto de estabilidad final lo daba el cruce que la función logística con la recta $y = x$, imponiendo la condición adicional de que el valor absoluto de la derivada en ese cruce sea menor que 1. Ahora, haremos lo mismo, pero imponiendo la condición adicional sobre la derivada de la segunda iteración de la función.

8.4.6 Derivada de f y criterio de estabilidad

Supongamos que (x_1, x_2) es un ciclo de periodo 2, es decir

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_1.$$

Queremos ver qué pasa si en lugar de empezar exactamente en x_1 tomamos un punto “ligeramente” desviado:

$$x_1 + \delta,$$

con δ muy pequeño.

Al aplicar f alrededor de x_1 , usamos la aproximación lineal:

$$f(x_1 + \delta) \approx f(x_1) + f'(x_1) \delta = x_2 + f'(x_1) \delta.$$

Así, tras una iteración, nuestro error (desviación) se amplifica o reduce por el factor $f'(x_1)$.

Ahora iteramos de nuevo, partiendo de

$$x_2 + f'(x_1) \delta.$$

Otra vez linealizamos en torno a x_2 :

$$f(x_2 + f'(x_1) \delta) \approx f(x_2) + f'(x_2) (f'(x_1) \delta) = x_1 + [f'(x_2) f'(x_1)] \delta.$$

Después de dos pasos (una vuelta completa al ciclo de período 2), la desviación original δ se convierte en

$$\delta_{extnuevo} = f'(x_2) f'(x_1) \delta.$$

Por tanto, **el factor que controla la estabilidad** del ciclo de período 2 es precisamente

$$\Lambda = f'(x_1) f'(x_2).$$

- Si $|\Lambda| < 1$, la desviación δ tiende a cero y el ciclo es **estable**.
- Si $|\Lambda| > 1$, la desviación crece y el ciclo es **inestable**.

Veamos otra forma de calcularlo. Formalmente, la derivada de la composición $f^{(2)} = f \circ f$ se calcula con la regla de la cadena:

$$(f^{(2)})'(x) = f'(f(x)) f'(x).$$

Si evaluamos en $x = x_1$, tenemos:

$$(f^{(2)})'(x_1) = f'(f(x_1)) f'(x_1) = f'(x_2) f'(x_1),$$

que es exactamente el mismo producto que acabamos de entender con el argumento de las dos iteraciones sucesivas.

Por lo tanto, el ciclo de periodo 2 es estable si

$$|f'(x_1) f'(x_2)| < 1.$$

Vamos a proceder a evaluar el producto de derivadas en los puntos x_1 y x_2 calculados anteriormente. Recordemos:

$$x_1 = \frac{r+1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}, \quad x_2 = \frac{r+1 - \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r},$$

y

$$f'(x) = r(1 - 2x).$$

1. Derivada en (x_1)

[

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= r\left(1 - 2x_1\right) = r\left(1 - 2\frac{r+1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}\right) \\ &= r\left(1 - \frac{r+1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}}{r}\right) = r\left(\frac{r - (r+1 + \sqrt{(r+1)(r-3)})}{r}\right) \\ &= r \frac{-1 - \sqrt{(r+1)(r-3)}}{r} = -1 - \sqrt{(r+1)(r-3)}. \end{aligned}$$

]

2. Derivada en (x_2)

[

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= r\left(1 - 2x_2\right) = r\left(1 - 2\frac{r+1 - \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}\right) \\ &= r\left(1 - \frac{r+1 - \sqrt{(r+1)(r-3)}}{r}\right) = r\left(\frac{r - (r+1 - \sqrt{(r+1)(r-3)})}{r}\right) \\ &= r \frac{-1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}}{r} = -1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}. \end{aligned}$$

]

3. Producto de las derivadas

[

$$\begin{aligned}
 f'(x_1) f'(x_2) &= (-1 - \sqrt{(r+1)(r-3)})(-1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}) \\
 &= (-1)^2 - (\sqrt{(r+1)(r-3)})^2 = 1 - (r+1)(r-3) \\
 &= 1 - (r^2 - 2r - 3) = -r^2 + 2r + 4.
 \end{aligned}$$

]

La bifurcación de periodo 2 a periodo 4 ocurre cuando el producto cruza -1 (al graficar la función $f \circ f$ se observa que su derivada se va haciendo negativa en el punto de cruce con $y = x$ a medida que aumentamos r ; por ello no igualamos a $+1$):

$$-r^2 + 2r + 4 = -1 \implies r^2 - 2r - 5 = 0 \implies r = 1 \pm \sqrt{6}.$$

Despreciando la solución negativa, tomamos

$$r_c = 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949.$$

Por lo tanto, recopilando lo que tenemos hasta ahora:

- Para $0 < r < 1$ la sucesión tiende a cero
- Para $1 < r < 3$ la sucesión tiende a un punto final único
- Para $3 < r < (1 + \sqrt{6})$ tiende a dos puntos que se van alternando

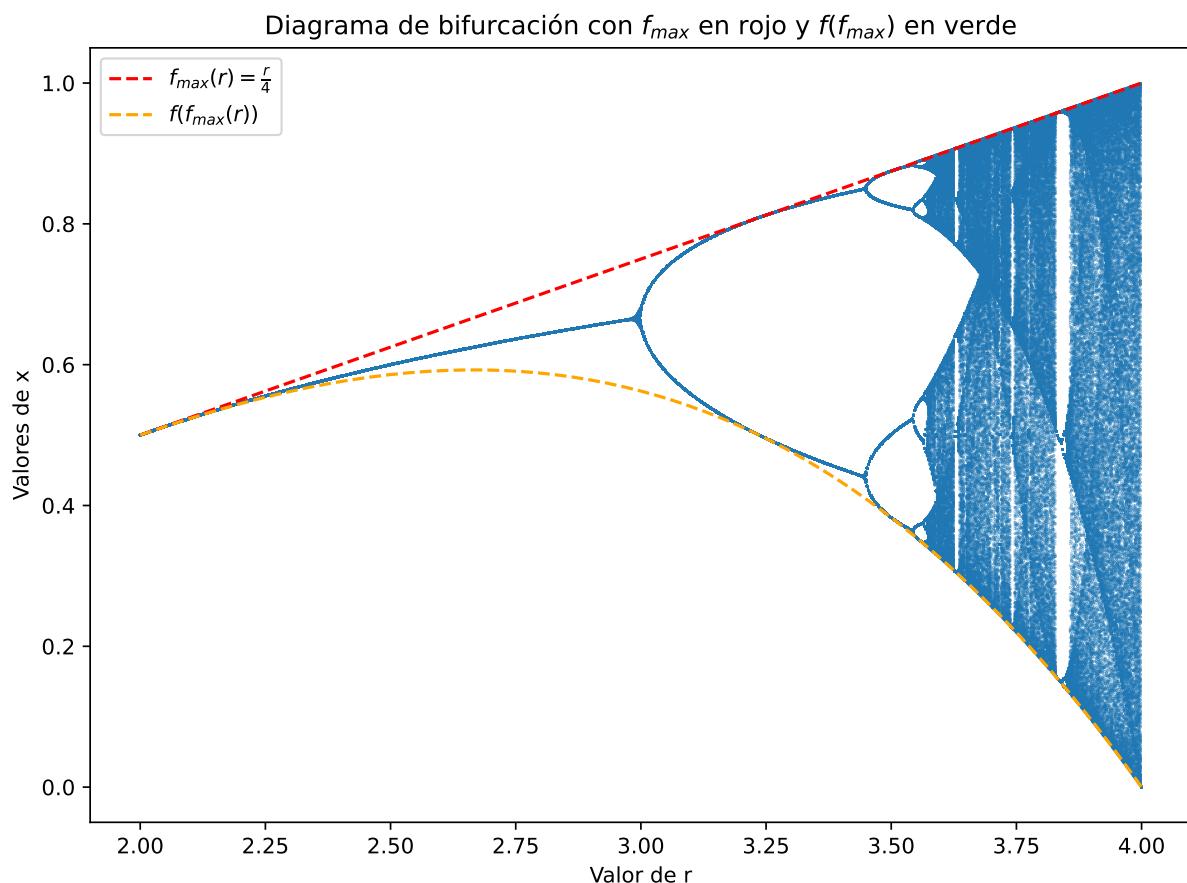
¿Qué pasará a partir de $r > 1 + \sqrt{6}$? Podríamos repetir el análisis que acabamos de realizar. Sin embargo, resulta muy farragoso matemáticamente, dado que el orden de los polinomios involucrados es muy grande. Por ello, vamos a recurrir a la simulación numérica en la siguiente sección.

9 Bifurcaciones sucesivas

En el siguiente diagrama interactivo se muestra el valor final del mapa logístico para distintos valores de la tasa de crecimiento r . El usuario puede jugar con los valores de r , el valor inicial de x y el número de iteraciones hasta un máximo de 500 iteraciones.

Unable to display output for mime type(s): text/html

El primer detalle que no pasa desapercibido es ver como los valores máximos y mínimos están constreñidos entre dos curvas perfectamente definidas. En la siguiente gráfica se puede apreciar que el máximo que alcanza para cada valor de r es precisamente $r/4$ tal y como habíamos calculado en la sección en la que hicimos el análisis formal del mapa logístico. Y su valor mínimo es la iteración del valor máximo, es decir $r^2/4(1 - r/4)$. Solamente cuando $r = 4$ se cubre todo el rango de valores desde 0 hasta 1.

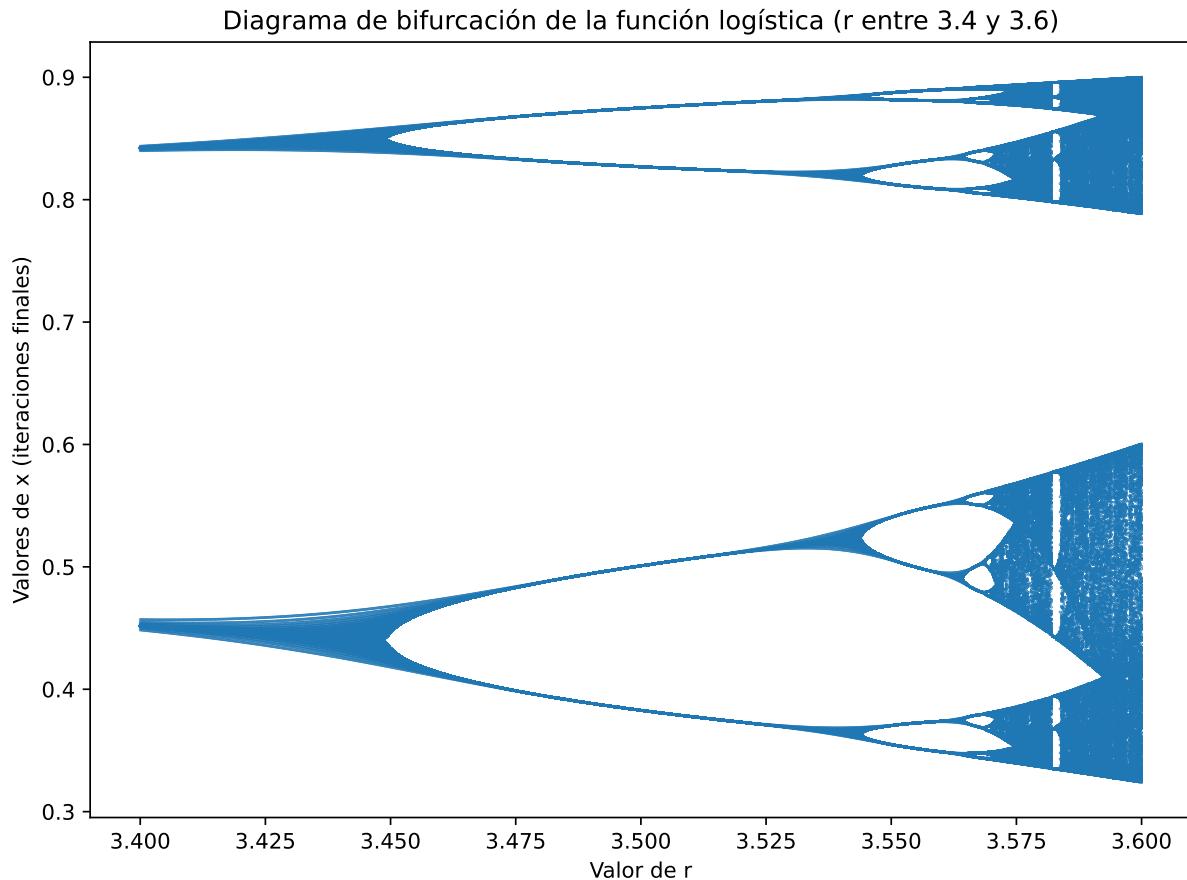


Sigamos con el análisis visual del gráfico. Conforme r crece, aparecen bifurcaciones que duplican el periodo sucesivamente:

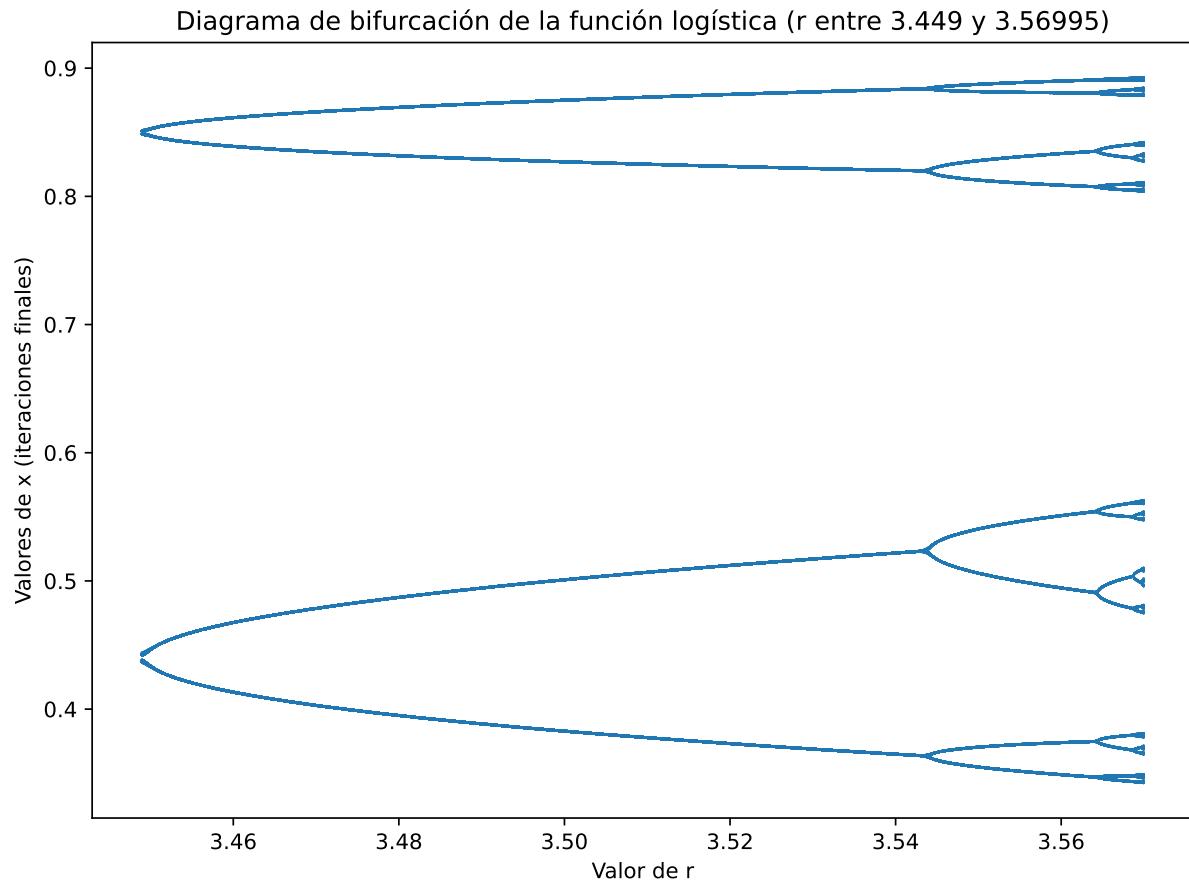
- $r_1 = 3.0 \rightarrow$ periodo 2. Analizada en la sección anterior.

- $r_2 \approx 3.449 \rightarrow$ periodo 4. Tal y como vimos en la sección anterior para $r = 1 + \sqrt{6}$, la primera bifurcación deja de ser estable y vemos que aparece una bifurcación adicional, por lo que el valor final del mapa lógistico alterna entre 4 valores finales.
- $r_3 \approx 3.544 \rightarrow$ periodo 8. Aparece una nueva bifurcación y ahora el valor final del mapa lógistico alterna entre 8 valores finales.

Vamos a hacer un zoom a la zona con r entre 3.4 y 3.6 para ver que pasa con más detalle a partir de $r_3 \approx 3.544$

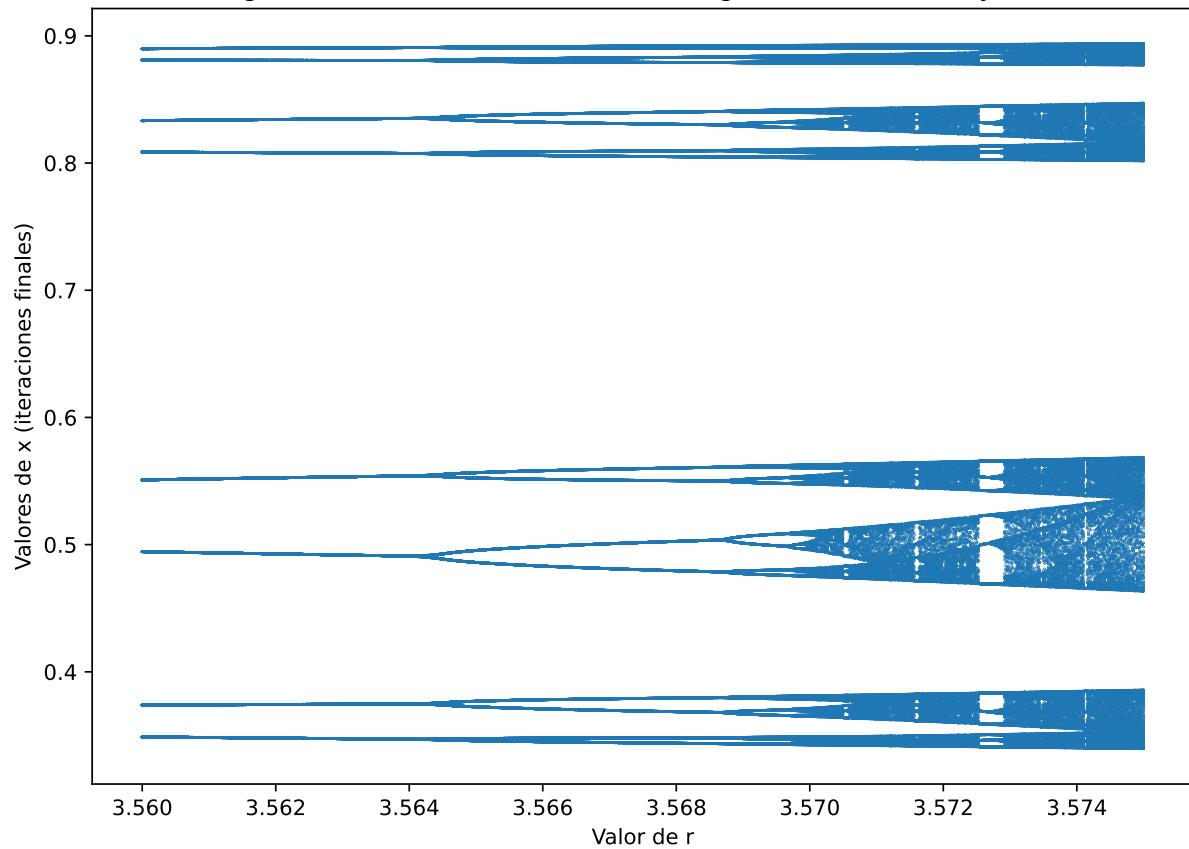


Vemos un montón de bifurcaciones (periodo 2, 4, 8, 16). Vamos a hacer un zoom adicional a la zona con r comprendido entre 3.449 y 3.56995.



Vemos ahora mejor las primeras bifurcaciones (periodo 2, 4, 8, 16). Parece que el valor final de la función logística va creando sucesivamente nuevos ciclos, hasta que llegamos a un valor cercano a 3.57 (3.56995 para ser más exactos). A partir de este valor de r dejan de verse claramente oscilaciones periódicas, y pasamos al régimen caótico. Vamos a hacer un zoom adicional a la zona con r comprendido entre 3.56 y 3.575.

Diagrama de bifurcación de la función logística (r entre 3.56 y 3.575)

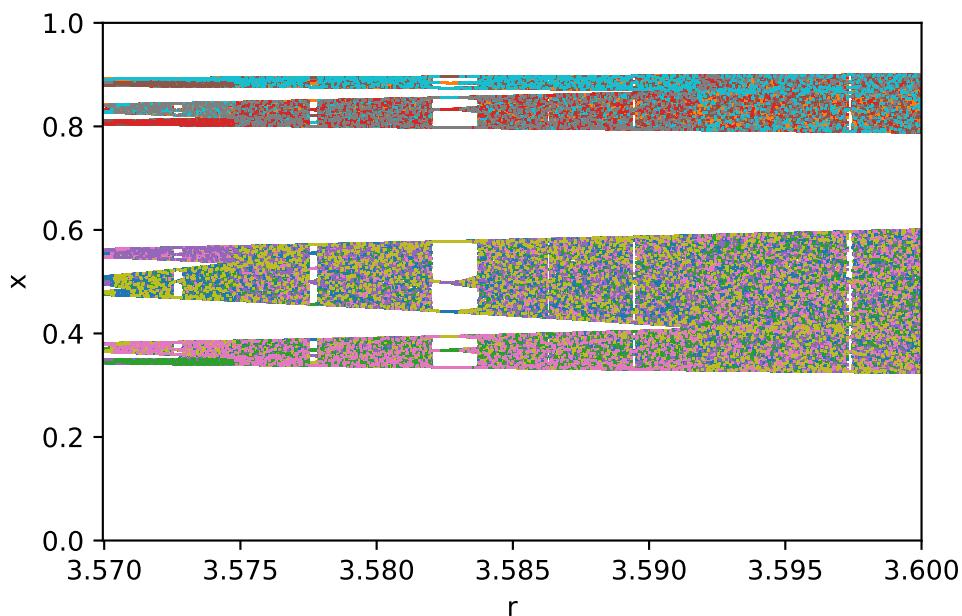


10 Caos

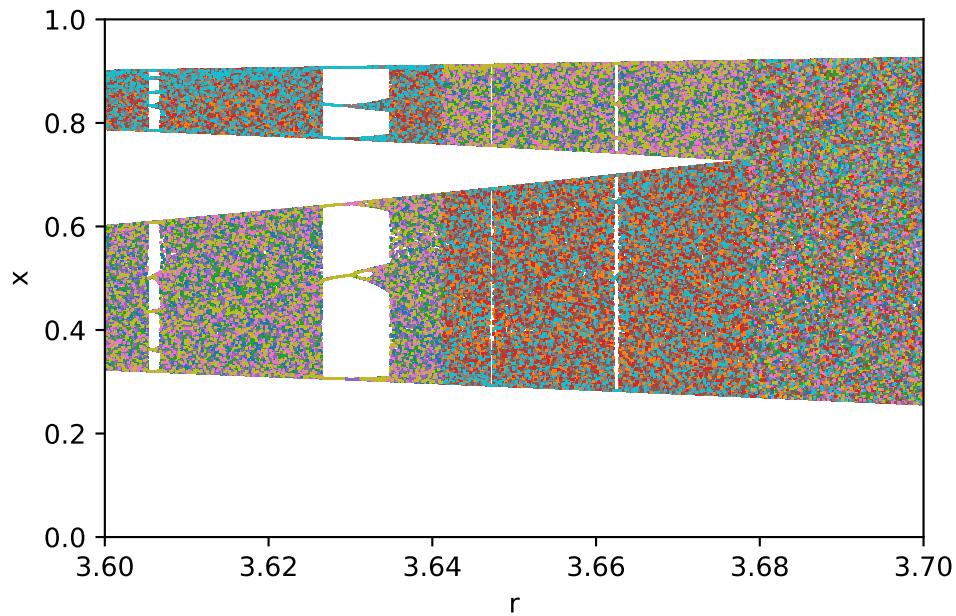
Como dijimos en la sección anterior, a partir de $r_\infty \approx 3.56995$, el mapa logístico entra en un **régimen caótico**. Para $r < r_\infty$, aparecían sucesivas bifurcaciones de periodo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$. En $r = r_\infty$, esas bifurcaciones se acumulan y ya no hay ciclos periódicos finitos: el valor final se vuelve errático. Sin embargo a medida que vamos observando el mapa aparecen comportamientos extraños.

10.1 División en bandas

Justo tras r_∞ , la zona caótica se **parte en dos bandas** disjuntas: en el diagrama de bifurcación aparecen dos hileras de puntos con un hueco entre ellas.

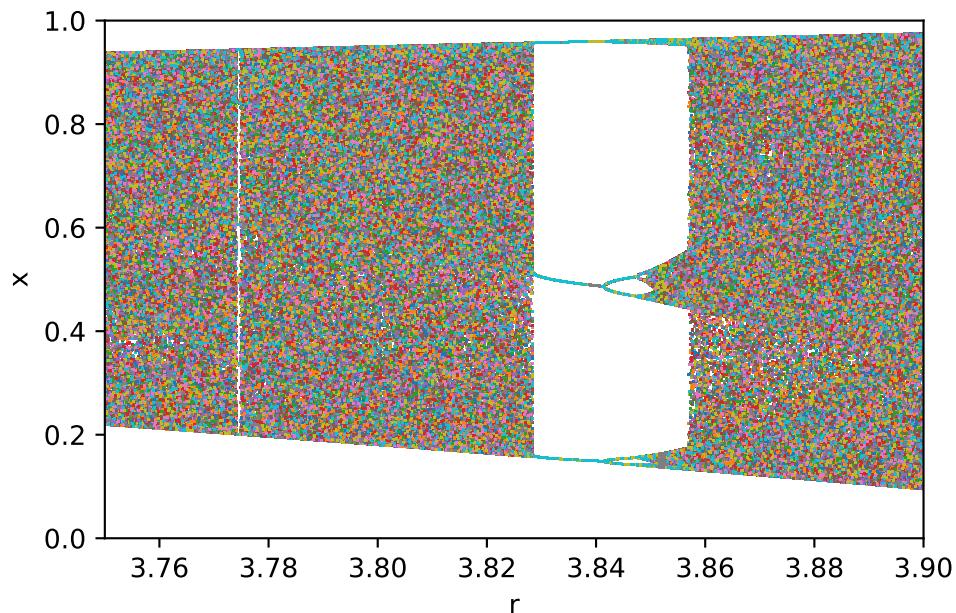


A medida que subimos r , esas dos bandas se bifurcan en 4, luego en 8, repitiendo la misma lógica de duplicación pero sobre la estructura del caos.

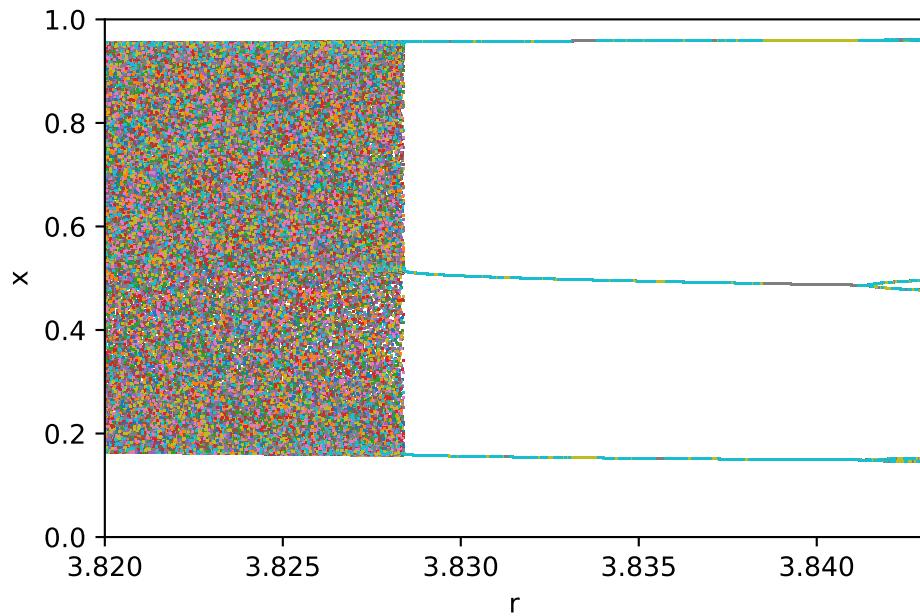


10.2 Ventanas de periodicidad

En medio del caos surgen **islas** de orden donde aparece un ciclo estable de periodo k (por ejemplo, un ciclo de orden 3 alrededor de $r \approx 3.828$).



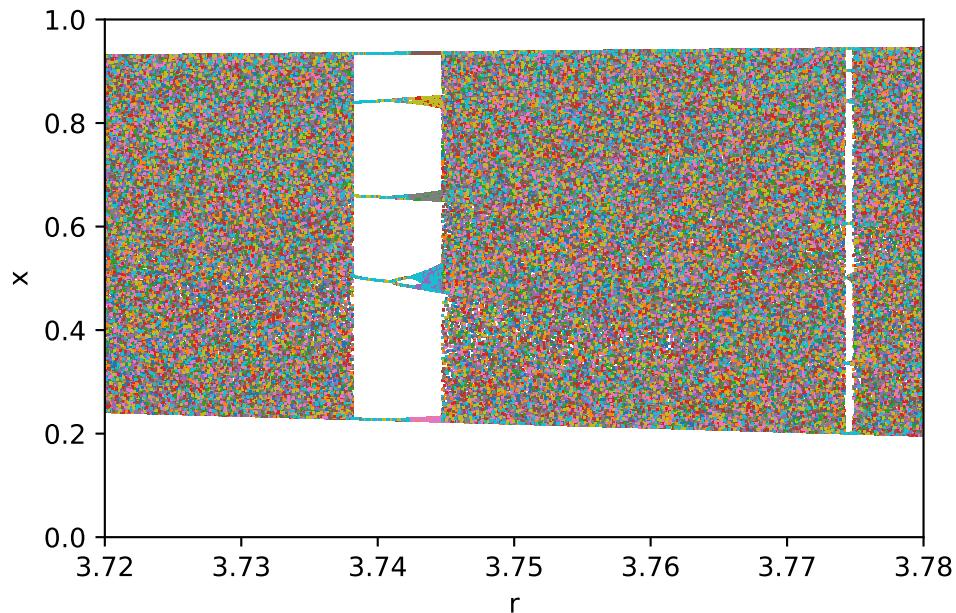
Dentro de cada ventana periódica se reproduce una **mini-cascada** de duplicación de periodo $k \rightarrow 2k \rightarrow 4k \rightarrow \dots$. Lo mismo que teníamos en la zona $3 < r < 3.56995$ pero ahora dentro de la zona caótica. Vemos como el caos da paso de nuevo a las órbitas periódicas



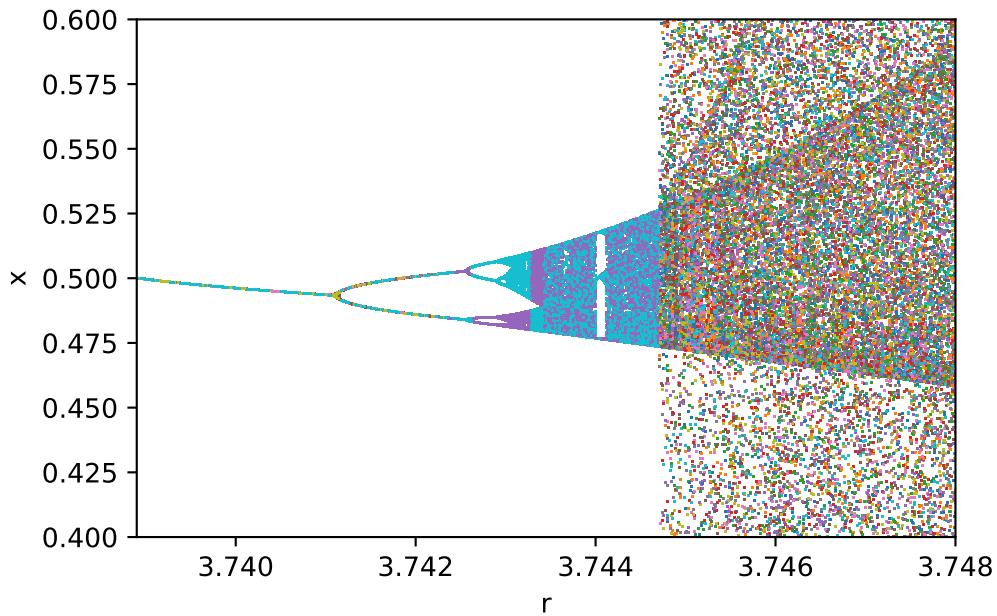
10.3 Repetición infinita

Las ventanas de periodicidad están **infinitamente repetidas**: en cada fragmento de la región caótica, por pequeño que sea, habrá alguna ventana donde emerja un ciclo estable.

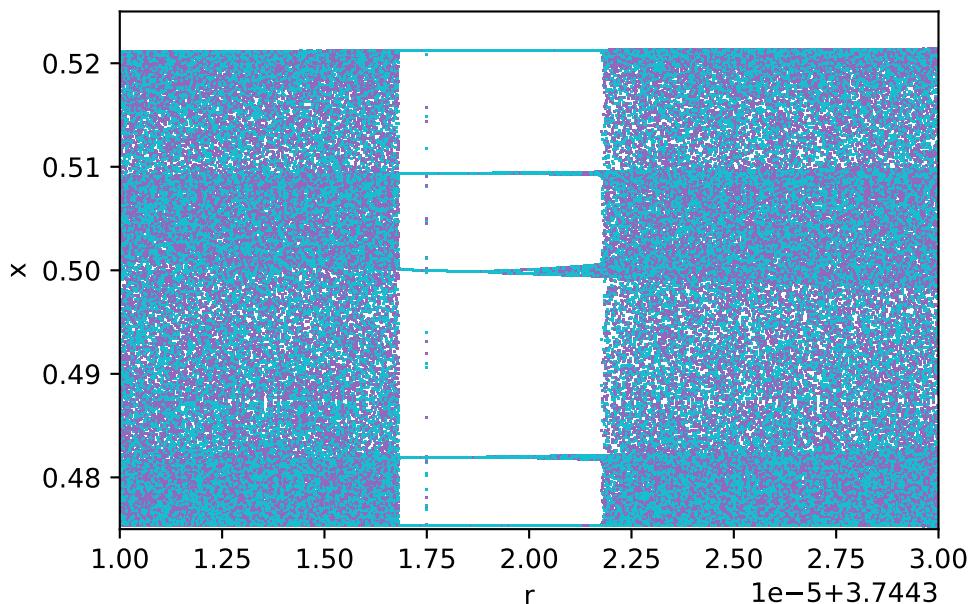
Así vemos como entre 3.73 y 3.76 aparecen un ciclo de período 5.



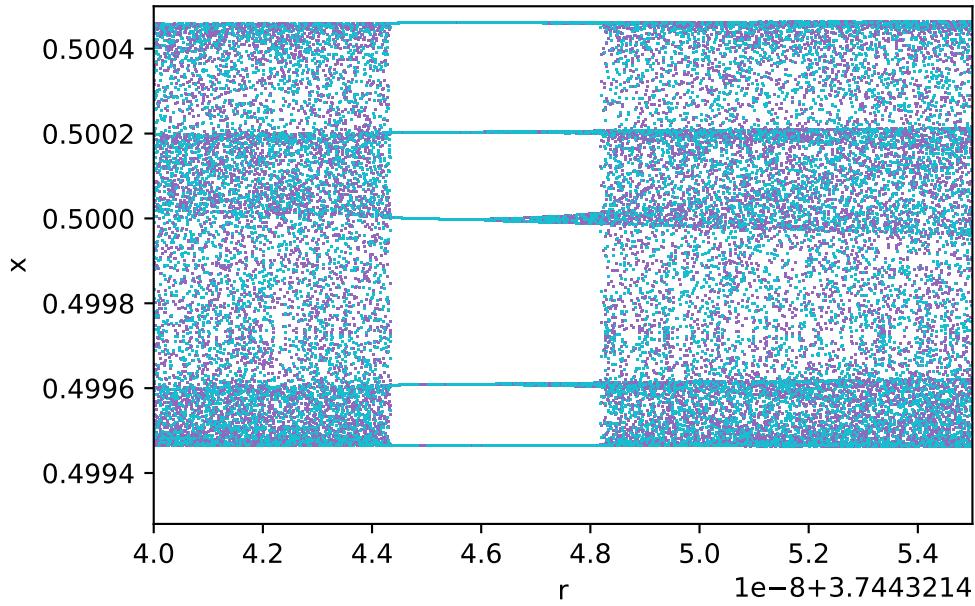
Si nos centramos en los valores de x alrededor de 0.5, vemos claramente el diagrama de bifurcación inicial replicado aquí, con tan solo 1000 iteraciones.



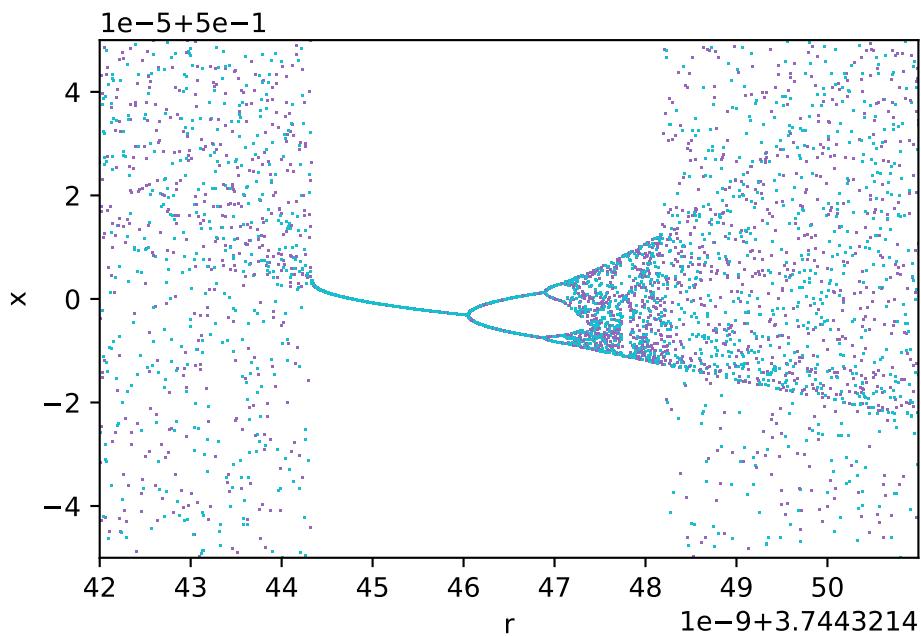
Y dentro de esta replicación del diagrama de bifurcación original, podemos encontrar el ciclo de periodo 5 de nuevo, en los valores de r comprendidos entre 3.74431 y 3.74433.



Y de nuevo, cogemos la replicación del diagrama de bifurcación original alrededor de 0.5 y nos encontramos con el ciclo de periodo 5 de nuevo, en los valores de r comprendidos entre 3.74432144 y 3.744321455. Cada vez necesitaremos más iteraciones para apreciar el diagrama de bifurcación original. De hecho, para plotear esta última gráfica se han requerido 100.000 iteraciones



Haciendo de nuevo zoom en torno a 0.5, vemos como aparece el diagrama de bifurcación original, esta vez en los valores de r comprendidos entre 3.7443214444 y 3.744321448 , tras 1.000.000 de iteraciones.

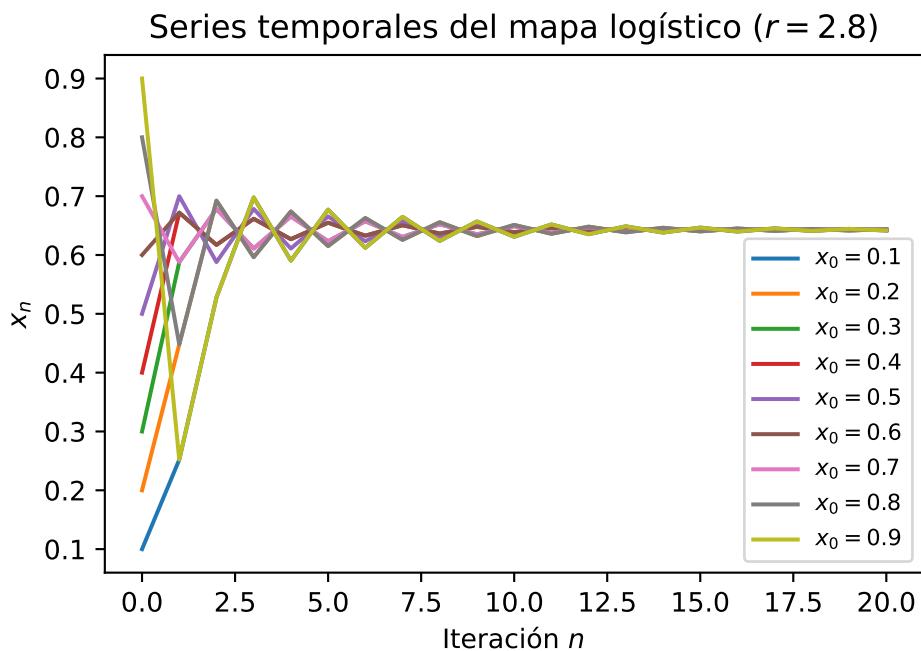


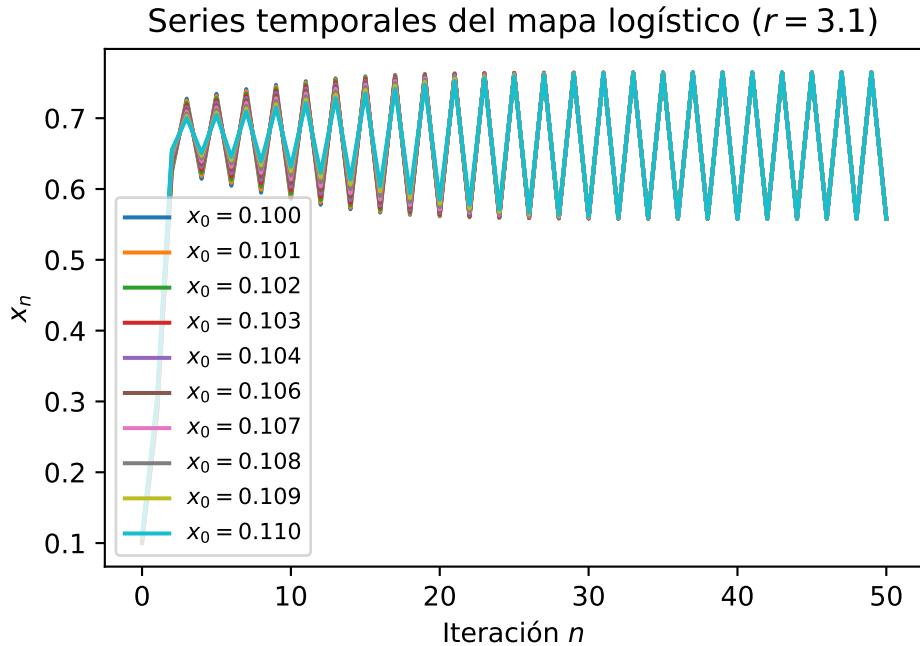
Podemos seguir así infinitamente. Lo que hemos encontrado es una **estructura fractal**.

11 Efecto mariposa

11.1 Sensibilidad a las condiciones iniciales

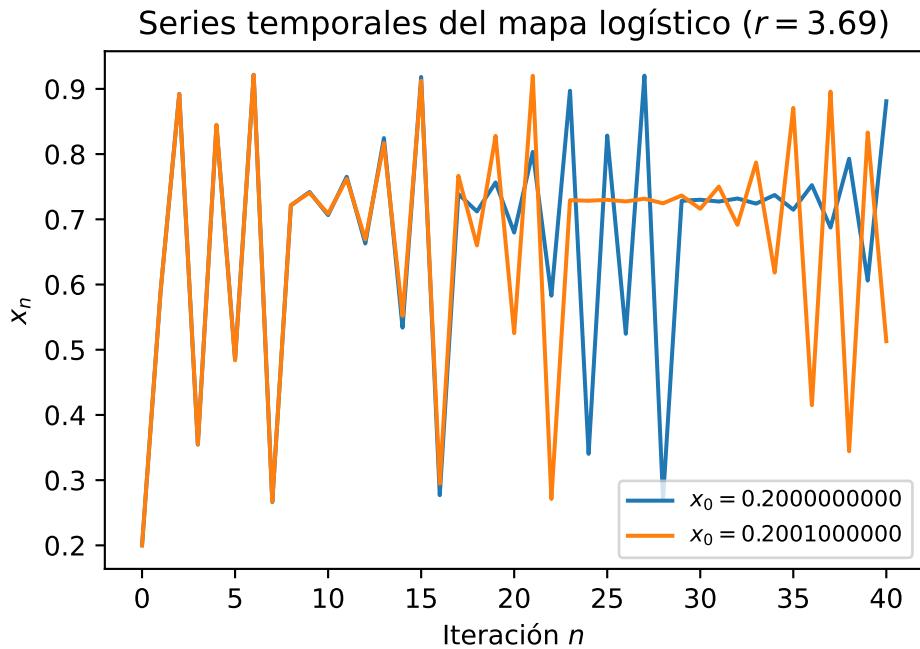
Cuando estamos en la zona estable del mapa logístico, desde cualquier valor de x_0 del que partamos, llegaremos siempre hasta el mismo valor final, bien sea el punto fijo que hemos calculado previamente, o cualquiera de los valores de las órbitas periódicas. Por ejemplo, para $r = 2.8$





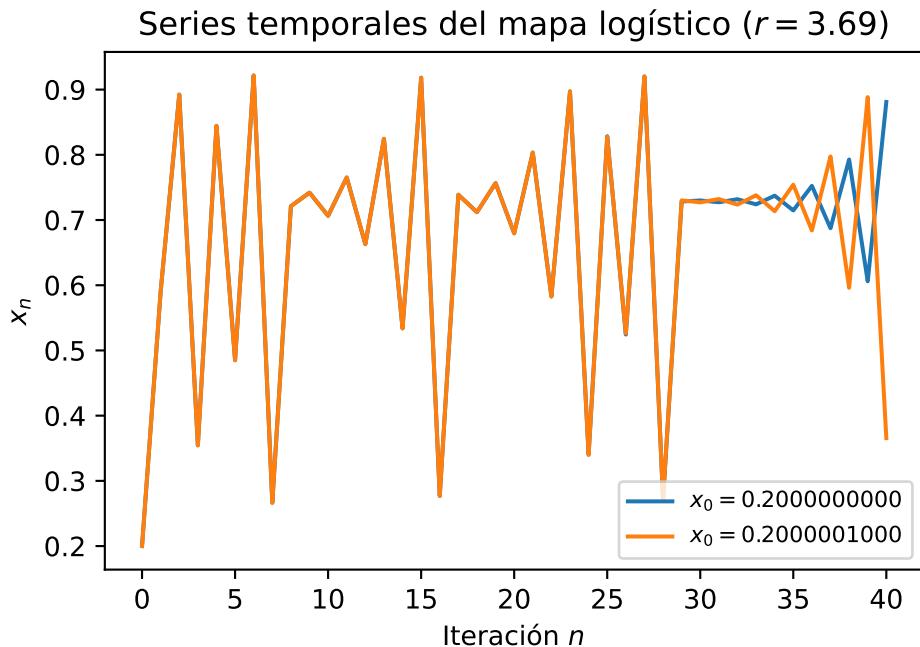
En los dos casos anteriores, no parece que la evolución del sistema sea sensible a la condición inicial de partida. Tras unas pocas iteraciones, da igual de donde se parta, que se converge al mismo punto.

Pero, ¿qué pasa cuando estamos en las zonas caóticas?. Veamos la iteración del mapa logístico para $r = 3.69$ partiendo de dos valores muy similares, que solo se separan en 10^{-5} unidades.

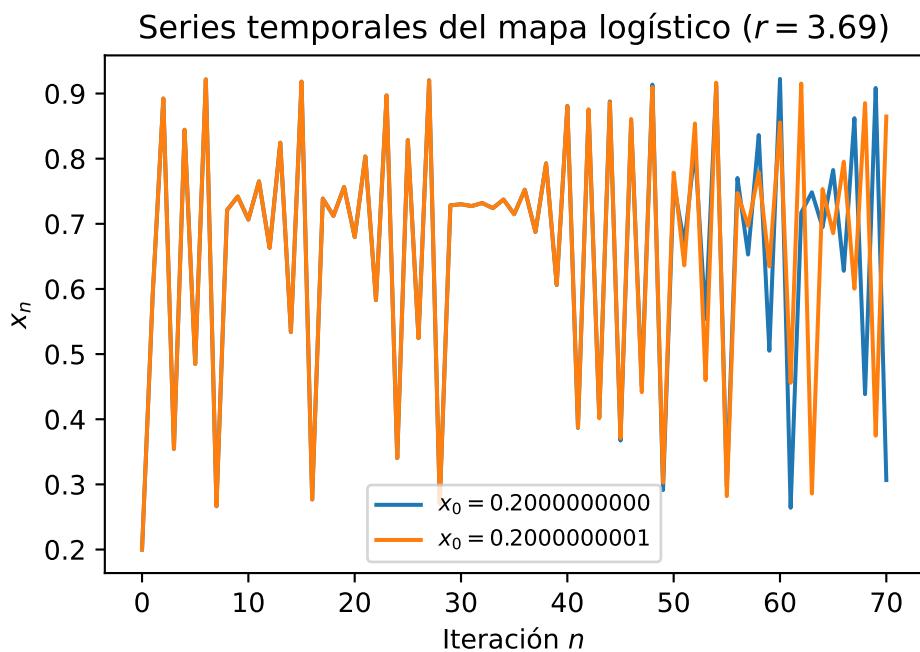


A la vista del gráfico, vemos como a partir de la iteración 10 empiezan a haber pequeñas diferencias que se van amplificando a medida que avanza la simulación. Aquí vemos que sí que empieza a haber sensibilidad a las condiciones iniciales.

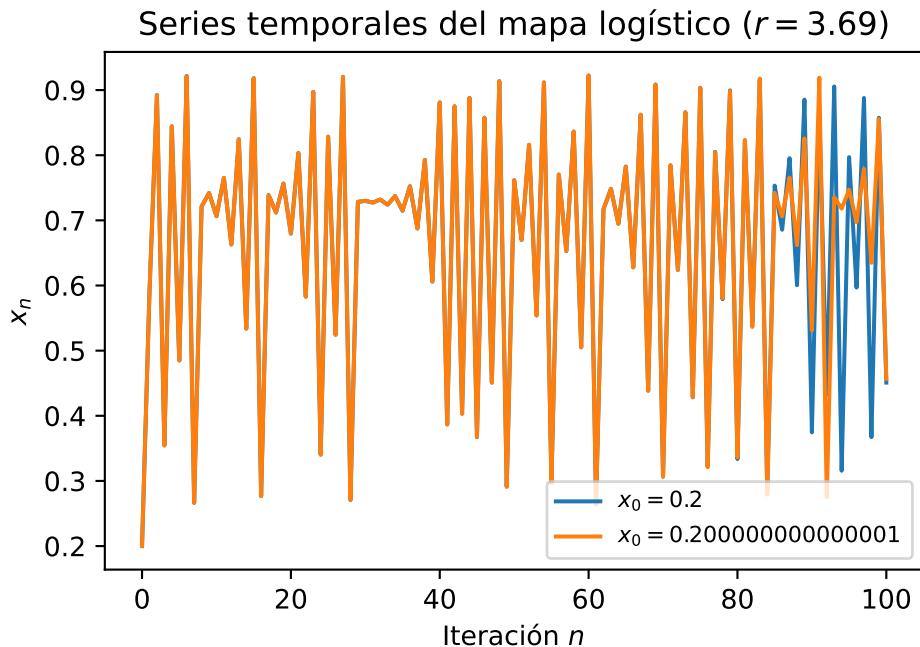
Probemos con una diferencia de valores iniciales aún mas pequeña, en este caso 10^{-7} unidades.



Ahora la separación de ambas simulaciones se produce a partir de la iteración número 30. Vamos con una diferencia aún mas pequeña, ahora 10^{-10} unidades.



La separación entre ambas curvas empieza a hacerse visible a partir de la iteración 50. ¿Qué pasa si hacemos la diferencia aún más pequeña, en este caso 10^{-15} unidades?. Pues como vemos en la siguiente gráfica, a partir de la iteración 85 empezamos a ver la divergencia de ambas sucesiones.



¿Qué está pasando aquí?. ¿Cómo puede ser que dos valores iniciales que se diferencian en un valor tan pequeño como 10^{-15} unidades den valores tan diferentes tras 100 iteraciones?. Si las unidades fueran metros, estaríamos hablando de una diferencia de un femtómetro. Y aún más importante: si quiero simular un sistema físico como éste en la región caótica, ¿cómo voy a poder medir su condición inicial con tal precisión?. De hecho, parece que la precisión requerida sería infinita. A poco que me equivoque en la estimación de la condición inicial, no voy a poder calcular bien su estado final pasado un número grande de iteraciones. ¿Cómo puede ser si mi sistema es determinista y está regido por una ecuación tan sencilla?. Hemos topado con el caos y el **efecto mariposa**. Y lo inquietante es que este fenómeno se da en sistemas físicos como la meteorología.

11.1.1 Inestabilidad de los cálculos numéricos

Cuando nos encontramos con un sistema físico con alta dependencia a las condiciones iniciales, no solamente tenemos el problema de conocer con total exactitud el estado inicial del sistema, sino que como veremos a continuación los cálculos numéricos que hacemos en nuestro ordenador para estudiar su evolución se vuelven también muy inestables. A continuación pondré un ejemplo sobre lo que acabo de decir.

Pongamos que quiero simular el mapa logístico tal cual lo he estado haciendo en las secciones anteriores. La fórmula es superconocida (form1):

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Pero también podríamos expresarlo como (form2):

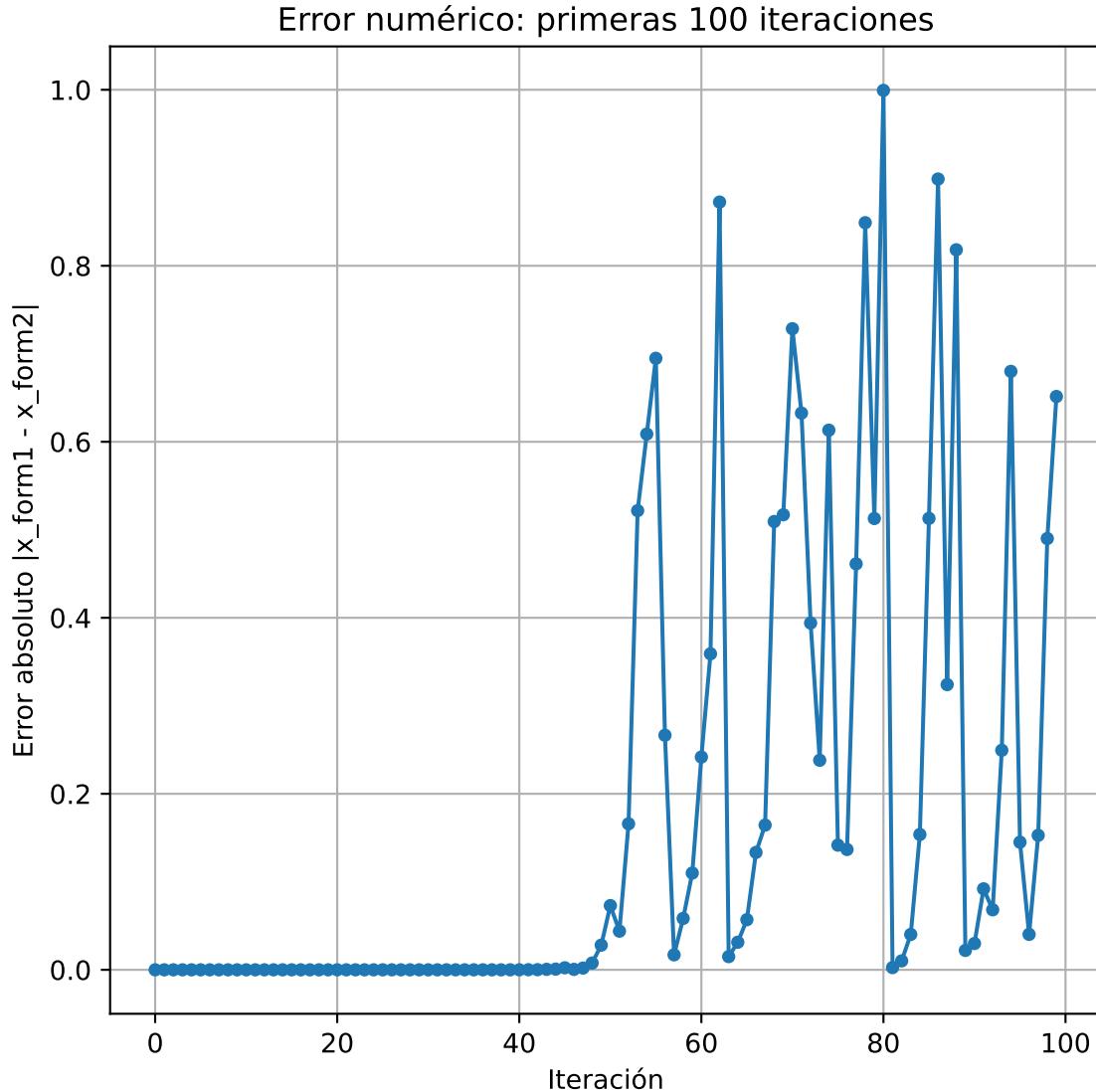
$$x_{n+1} = r x_n - r x_n^2$$

Matemáticamente son equivalentes pero a un computador le estamos diciendo cosas diferentes.

* En el primer caso le decimos que reste 1 menos $\{x_n\}$, y que a continuación lo multiplique por r y x_n . En total 1 resta y dos multiplicaciones * En el segundo caso le decimos que multiplique

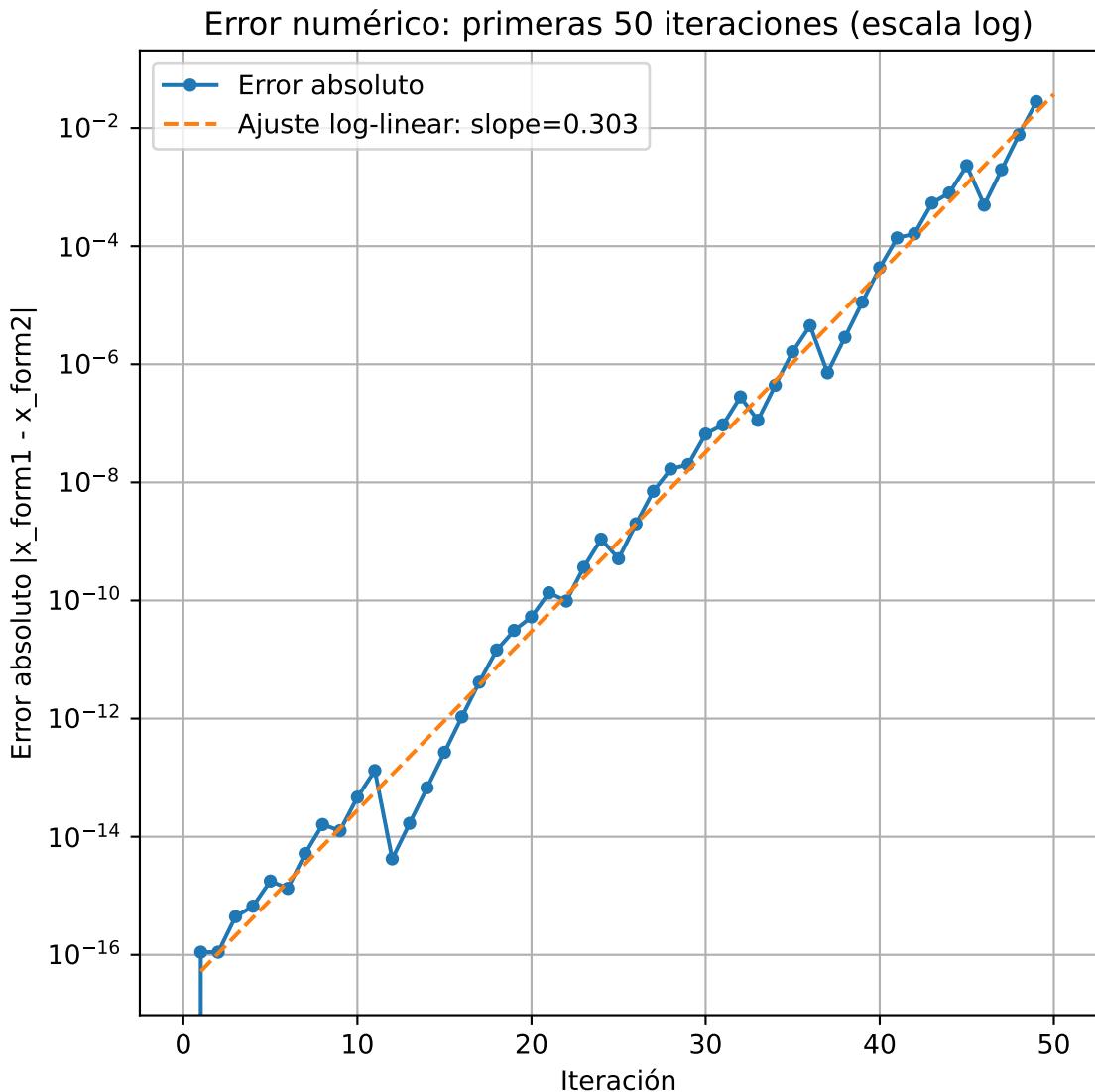
por r y x_n por un lado. Por otro lado que que eleve x_n al cuadrado, y que lo multiplique por r . Y al final que reste el primer resultado intermedio menos el segundo. En total 1 resta, 2 multiplicaciones y 1 cuadrado.

A esto hay que añadir que en un ordenador los números decimales se representan mediante aproximaciones. Por ejemplo, con 32 bits, el número 0.2 se representa como 0.200000003, debido a la precisión finita que dan los 32 bits. Por lo tanto entre el número real y el que representamos, la mayoría de veces va a haber un error. Estos errores se comportarán de manera diferente según los cálculos aritméticos que hagamos con ellos. En el siguiente plot, vemos los errores en un ordenador entre las dos fórmulas al partir del valor $x_0 = 0.2$ y con un $r = 4$.



Vemos como al principio el error es imperceptible, pero a media que avanzamos va creciendo. A partir de la iteración 50 este error se hace ya notable, y desde entonces se puede decir que ambas fórmulas evolucionan de forma totalmente distinta. Por lo tanto, vemos como en un sistema caótico, no sólo las condiciones iniciales determinan el valor final de forma extrema, sino que también cuando simulamos este sistema en una máquina computacional, la forma en la que se representan los números y la forma de las operaciones también influyen de forma muy notable.

Pero vamos a ir un paso más. Veamos que evolución tienen realmente los errores. Para poder bien los errores al principio y al final, vamos a usar una escala logarítmica en el eje Y. El resultado se muestra a continuación.



¿Qué es lo que vemos?. Que los errores crecen linealmente dentro de la escala logarítmica.

En escala \log_{10} hemos ajustado:

$$\log_{10}(\text{error}_n) \approx 0.303 n + C$$

donde C es la ordenada en el origen. Pasando de logaritmos a forma explícita:

$$\text{error}_n \approx 10^C \times 10^{0.303 n} = A (10^{0.303})^n \approx A 2^n,$$

puesto que $10^{0.303} \approx 2$.

Equivalentemente, en base e :

$$\ln(\text{error}_n) = \ln(10) \log_{10}(\text{error}_n) \approx (0.303 \ln 10) n + \ln A \approx 0.698 n + \ln A,$$

de donde

$$\text{error}_n \approx A e^{0.698 n} \approx A (2.01)^n.$$

Conclusión. El error crece de forma **exponencial** con n , aproximadamente duplicándose en cada iteración.

Curioso, ¿verdad?. El error se va multiplicando por 2 en cada iteración. Por 2 exactamente. ¿A qué se debe esto????

11.2 Cálculo matemático de la amplificación de desviaciones iniciales

A continuación daremos una explicación matemática a este fenómeno que estamos observando.

Imagina que quieres predecir el tiempo atmosférico. Nunca conoces la temperatura, presión o humedad con absoluta precisión: siempre hay un error mínimo en la medición. Si ese error crece muy despacio, podrías predecir con confianza varios días por delante. Pero si crece muy rápido, tu predicción se vuelve inútil en muy poco tiempo.

En los siguientes párrafos, verás un concepto matemático muy útil en el estudio del caos: el **exponente de Lyapunov**, que llamaremos λ y que cuantifica la tasa de crecimiento de estos errores.

11.2.1 Error inicial

- Sea x_0 el estado “verdadero” del sistema en el tiempo inicial.
- Tu medida real tiene un pequeño error δ_0 , de modo que en realidad partes de

$$x_0 + \delta_0, \quad \text{con } |\delta_0| \ll 1.$$

Ese δ_0 es tan pequeño que, al principio, los dos estados están casi juntos. Es lo que hemos visto en los ejemplos anteriores, donde en la primera iteración las dos simulaciones estaban casi juntas.

11.2.2 Cómo evoluciona el error

Supón que el sistema avanza según una regla f (nuestra función logística), es decir:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Queremos ver qué sucede con δ_n , la diferencia en el paso n . Para ello:

1. **Linealizamos** la función f alrededor de x_n .

Si f es suave, podemos aproximar

$$f(x_n + \delta_n) \approx f(x_n) + f'(x_n) \delta_n,$$

donde $f'(x_n)$ es la **derivada** (o pendiente) de f en x_n .

2. De esta aproximación se deduce que

$$\delta_{n+1} = f(x_n + \delta_n) - f(x_n) \approx f'(x_n) \delta_n.$$

Pero ojo. Cuando calculamos errores, siempre son distancia, es decir debe ser siempre un número no negativo. La derivada indica pendiente y sentido. Cuando linealizamos

$$f(x_n + \delta_n) \approx f(x_n) + f'(x_n) \delta_n,$$

el término $f'(x_n) \delta_n$ nos da **cuánto** y en **qué dirección** cambia la diferencia δ_n .

La distancia ha de ser siempre no negativa. Por tanto, definimos :

$$\delta_{n+1} = |x'_{n+1} - x_{n+1}|.$$

Sin valor absoluto, un $f'(x_n) < 0$ haría que la “distancia” resultase negativa, lo cual no tiene sentido para una medida de error.

El verdadero error en módulo es $|f'(x_n)|$ porque:

- Si $|f'(x_n)| > 1$, la distancia **aumenta**
- Si $|f'(x_n)| < 1$, la distancia **dismiuye**

Pongamos un ejemplo numérico: Supongamos $f'(x_n) = -2$ y $\delta_n = 0.01$:

- Sin valor absoluto:

$$\delta_{n+1} \approx (-2) \times 0.01 = -0.02 \quad (\text{sin sentido físico}).$$

- Con valor absoluto:

$$\delta_{n+1} \approx |-2| \times 0.01 = 2 \times 0.01 = 0.02,$$

reflejando correctamente que la distancia se **duplica**.

Por todo ello, la fórmula adecuada para la evolución del error es

$$\delta_{n+1} \approx |f'(x_n)| \delta_n,$$

garantizando que $\delta_{n+1} \geq 0$ y midiendo la **magnitud** real del estiramiento en cada paso.

11.3 Errores sucesivos

Si repetimos la relaciones anterior paso a paso obtenemos

1. Primera iteración

$$\delta_1 \approx |f'(x_0)| \delta_0.$$

2. Segunda iteración. En este caso es la derivada en x_1 multiplicado por el error anterior (utilizamos para el error anterior la fórmula del paso 1). En total vemos que el error en la segunda iteración, es el error inicial multiplicado por dos derivadas.

$$\delta_2 \approx |f'(x_1)| \delta_1 \approx |f'(x_1)| |f'(x_0)| \delta_0.$$

3. Tercera iteración. Aquí ya vemos como aparece un patrón. Vamos multiplicando el error inicial por las sucesivas derivadas.

$$\delta_3 \approx |f'(x_2)| \delta_2 \approx |f'(x_2)| |f'(x_1)| |f'(x_0)| \delta_0.$$

En general, para cualquier (n) podemos generalizar el patrón encontrado:

$$\delta_n \approx \left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| \right) \delta_0.$$

11.4 De producto a suma

Para manejar productos es muy útil usar los logaritmos, porque transforman productos en sumas:

$$\ln(\delta_n/\delta_0) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} f'(x_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|.$$

Esta formula nos da el logaritmo de cuánto ha crecido el error tras n iteraciones en relación al error inicial.

11.5 Definición del exponente de Lyapunov λ

Sabemos según la fórmula anterior, cuánto ha crecido el error en n iteraciones. Ahora bien, estaría mejor saber cuánto crece de media por cada iteración. Para ello, solo tenemos que dividir la suma anterior entre n .

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|.$$

Ahora vamos a suponer que la simulación es muy larga y que queremos hacer un promedio. Para ello tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la expresión anterior:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|.$$

Este factor λ es lo que crece de media el error en cada iteración en mi sistema. LO que crece de forma logarítmica. Lo que crece realmente en magnitud en cada iteración es e^λ

- Si $\lambda > 0$, el error crece con cada iteración, puesto que el número e elevado a un valor positivo siempre da un número mayor que 1. Puesto que multiplico mi error por un número mayor que 1, el error va creciendo iteración tras iteración ($e^\lambda e^\lambda e^\lambda \dots = (e^\lambda)^n = a^n$ con $a > 1$). Crece por lo tanto **exponencialmente**, y el sistema es **caótico** (muy sensible a la precisión inicial).
- Si $\lambda < 0$, el error **se atenúa** y las trayectorias convergen (sistema estable). La argumentación es justa la contraria del caso anterior. El número e elevado a un valor negativo siempre da un número menor que 1.
- Si $\lambda = 0$, estamos en un caso límite de inestabilidad neutra.

11.6 Cálculo del exponente de Lyapunov para el mapa logístico

Consideramos el **mapa logístico**

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n),$$

La derivada de f , tal y como hemos visto en anteriores secciones, es

$$f'(x) = r(1 - 2x).$$

Por lo tanto, si tenemos una sucesión de puntos compuesta por x_0, x_1, \dots, x_N , el exponente de Lyapunov máximo se calculará a partir de la multiplicación de las derivadas de la función logística en cada uno de los puntos de la sucesión, es decir,

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|f'(x_n)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|r(1 - 2x_n)|.$$

En la práctica, no podemos llevar la sucesión al infinito, por lo que tomamos N iteraciones y aplicamos la siguiente fórmula aproximada

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln|f'(x_k)| = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln|4(1 - 2x_k)|.$$

Al aumentar N , λ_N tenderá a λ .

11.6.1 Ejemplo numérico sencillo ($N = 20$)

Vamos a calcular el exponente de Lyapunov para el caso de $r = 4$. Tal y como vimos en las simulaciones que hicimos en el primer apartado, con $r = 4$ se prevé que el error se vaya doblando en cada paso, o lo que es lo mismo, que el exponente de Lyapunov sea $\lambda = \ln 2 \approx 0.6931$

Tomemos de nuevo el mapa logístico con $r = 4$, es decir,

$$f(x) = 4x(1 - x),$$

y su derivada

$$f'(x) = 4(1 - 2x).$$

Queremos calcular el exponente de Lyapunov aproximado usando 20 iteraciones, empezando con

$$x_0 = 0.3000$$

Para ello, iremos calculando sucesivamente cada $x_{n+1} = f(x_n)$, el valor absoluto de la derivada $|f'(x_n)|$, y luego $\ln|f'(x_n)|$. Mostraremos en la siguiente tabla x_n redondeado a cuatro cifras decimales, $|f'(x_n)|$ redondeado a cuatro cifras decimales, y $\ln|f'(x_n)|$ redondeado a tres cifras decimales.

n	x_n	$ f'(x_n) $	$\ln f'(x_n) $
0	0.3000	$ 4(1 - 2 \cdot 0.3000) = 1.6000$	0.470
1	0.8400	$ 4(1 - 2 \cdot 0.8400) = 2.7200$	1.001
2	0.5376	$ 4(1 - 2 \cdot 0.5376) = 0.3008$	-1.201
3	0.9953	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9953) = 3.9548$	1.375
4	0.0186	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0186) = 3.8201$	1.340
5	0.0879	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0879) = 3.2964$	1.193
6	0.3208	$ 4(1 - 2 \cdot 0.3208) = 1.4332$	0.360
7	0.8716	$ 4(1 - 2 \cdot 0.8716) = 2.9729$	1.090
8	0.4476	$ 4(1 - 2 \cdot 0.4476) = 0.4191$	-0.870
9	0.9890	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9890) = 3.9122$	1.364
10	0.0434	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0434) = 3.6526$	1.295
11	0.1661	$ 4(1 - 2 \cdot 0.1661) = 2.6708$	0.982
12	0.5542	$ 4(1 - 2 \cdot 0.5542) = 0.4333$	-0.836

n	x_n	$ f'(x_n) $	$\ln f'(x_n) $
13	0.9883	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9883) = 3.9061$	1.363
14	0.0464	$ 4(1 - 2 \cdot 0.0464) = 3.6289$	1.289
15	0.1770	$ 4(1 - 2 \cdot 0.1770) = 2.5844$	0.949
16	0.5826	$ 4(1 - 2 \cdot 0.5826) = 0.6605$	-0.415
17	0.9727	$ 4(1 - 2 \cdot 0.9727) = 3.7819$	1.330
18	0.1061	$ 4(1 - 2 \cdot 0.1061) = 3.1512$	1.148
19	0.3794	$ 4(1 - 2 \cdot 0.3794) = 0.9651$	-0.036

Cada fila se interpreta así:

1. Calculamos $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ usando el valor exacto de x_n y luego redondeamos el resultado a cuatro decimales para mostrarlo.
2. Evaluamos la derivada en el valor exacto de x_n : $f'(x_n) = 4(1 - 2x_n)$, tomamos su valor absoluto, y lo redondeamos a cuatro decimales.
3. Finalmente, calculamos $\ln|f'(x_n)|$ a partir del valor de la derivada ya redondeada, y lo redondeamos a tres decimales.

Ahora sumamos todos los logaritmos obtenidos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{19} \ln|f'(x_k)| &= 0.470 + 1.001 - 1.201 + 1.375 + 1.340 + 1.193 + 0.360 + 1.090 - 0.870 + 1.364 \\ &\quad + 1.295 + 0.982 - 0.836 + 1.363 + 1.289 + 0.949 - 0.415 + 1.330 + 1.148 - 0.036 \\ &= 13.191. \end{aligned}$$

Por último promediamos esta suma, por lo que el exponente de Lyapunov aproximado para $N = 20$ queda como

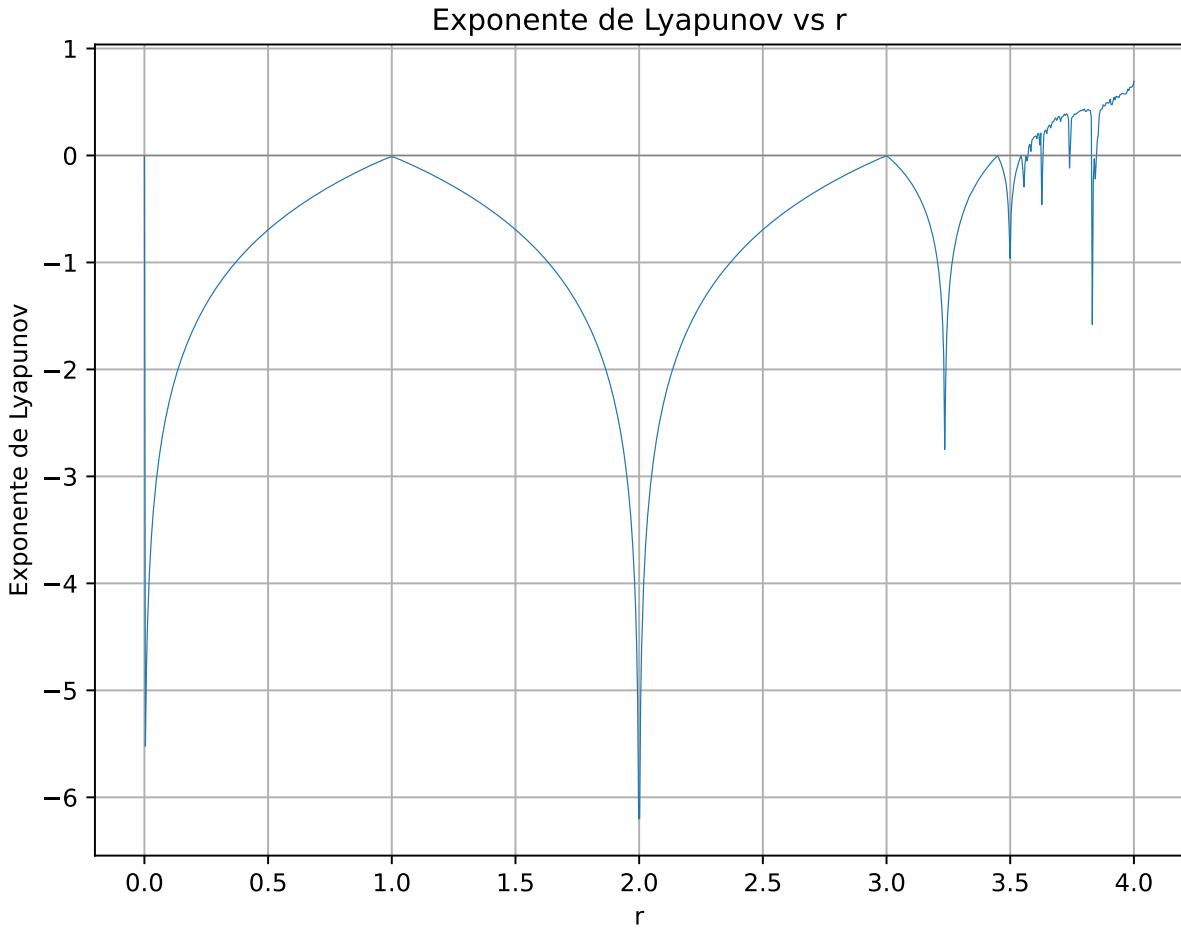
$$\lambda_{20} = \frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} \ln|f'(x_k)| = \frac{13.191}{20} = 0.6596.$$

Como vemos, el valor 0.6596 es muy próximo al teórico 0.6931. De hecho, $e^{0.6596} = 1.934$ que está muy cerca de 2.

Para $N = 20$ hemos obtenido $\lambda_{20} \approx 0.6596$. Si continuáramos con más iteraciones, como $N = 100$ o $N = 1000$, veríamos que λ_N se acerca gradualmente a 0.6931. Esto muestra que, aunque las primeras iteraciones pueden desviarse, al promediar sobre muchas iteraciones el resultado converge al **valor exacto** del exponente de Lyapunov para $r = 4$.

11.6.2 Cálculo del coeficiente de Lyapunov para todo el mapa logístico

Vamos a aplicar este procedimiento para todos los valores de r en el mapa logístico. Y vamos a ser más precisos; para cada valor de r haremos 1000 iteraciones en lugar de 20, calcularemos la derivada en cada uno de los puntos, y sumaremos sus logaritmos. El resultado es el que se muestra a continuación



Vamos a interpretar esta gráfica, y ver si cuadra con los conocimientos previos del mapa logístico.

Para valores $0 < r \leq 1$, sabemos que todas las iteraciones convergen al punto fijo $x^* = 0$. Por lo tanto el exponente de Lyapunov: $\lambda(r) < 0$ ya que no estamos en la zona caótica.

Para $r = 1$, la ecuación del mapa logístico es

$$x_{n+1} = 1 \cdot x_n (1 - x_n) = x_n (1 - x_n).$$

Los puntos fijos (soluciones de $x^* = x^*(1 - x^*)$) se determinan resolviendo

$$x^* = x^*(1 - x^*) \implies x^*(1 - (1 - x^*)) = 0 \implies x^*(1 - 1 + x^*) = 0 \implies x^* \cdot x^* = 0.$$

Por tanto, el único punto fijo es

$$x^* = 0.$$

La derivada del mapa general es

$$f'(x) = r(1 - 2x).$$

Si evaluamos en $r = 1$ en el punto fijo $x^* = 0$, obtenemos

$$f'(x^*) = 1 \cdot (1 - 2 \cdot 0) = 1.$$

Es decir, las iteraciones siempre terminan en una derivada igual a 1, cuyo logaritmo es cero. Por eso el coeficiente de Lyapunov promediado es cero.

Para valores $1 < r < 3$, vemos que de nuevo el exponente es negativo. En esta zona la función logística tiende a valores estables comprendidos entre 0 y 1, pero ni es caótica ni periódica. Podemos verlo matemáticamente, ya que sabemos que en esta zona el mapa logístico tiende al punto fijo $1 - 1/r$, y si evaluamos la derivada de la función logística en ese punto fijo tenemos $2 - r$, y como $1 < r < 3$ se tiene $-1 < 2 - r < 1$, de modo que $|2 - r| < 1$ y por tanto $\lambda(r) = \ln|2 - r| < 0$. Es decir, se suman logaritmos que son siempre negativos, por lo que el promedio final nunca podrá ser positivo.

Para $r = 3$ sabemos que el mapa logístico tiende a

$$x^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Evaluándola la derivada en este punto $x^* = \frac{2}{3}$ para $r = 3$:

$$f'(x^*) = 3 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Que en valor absoluto es 1, y por lo tanto al igual que el caso con $r = 1$, el exponente de Lyapunov es cero.

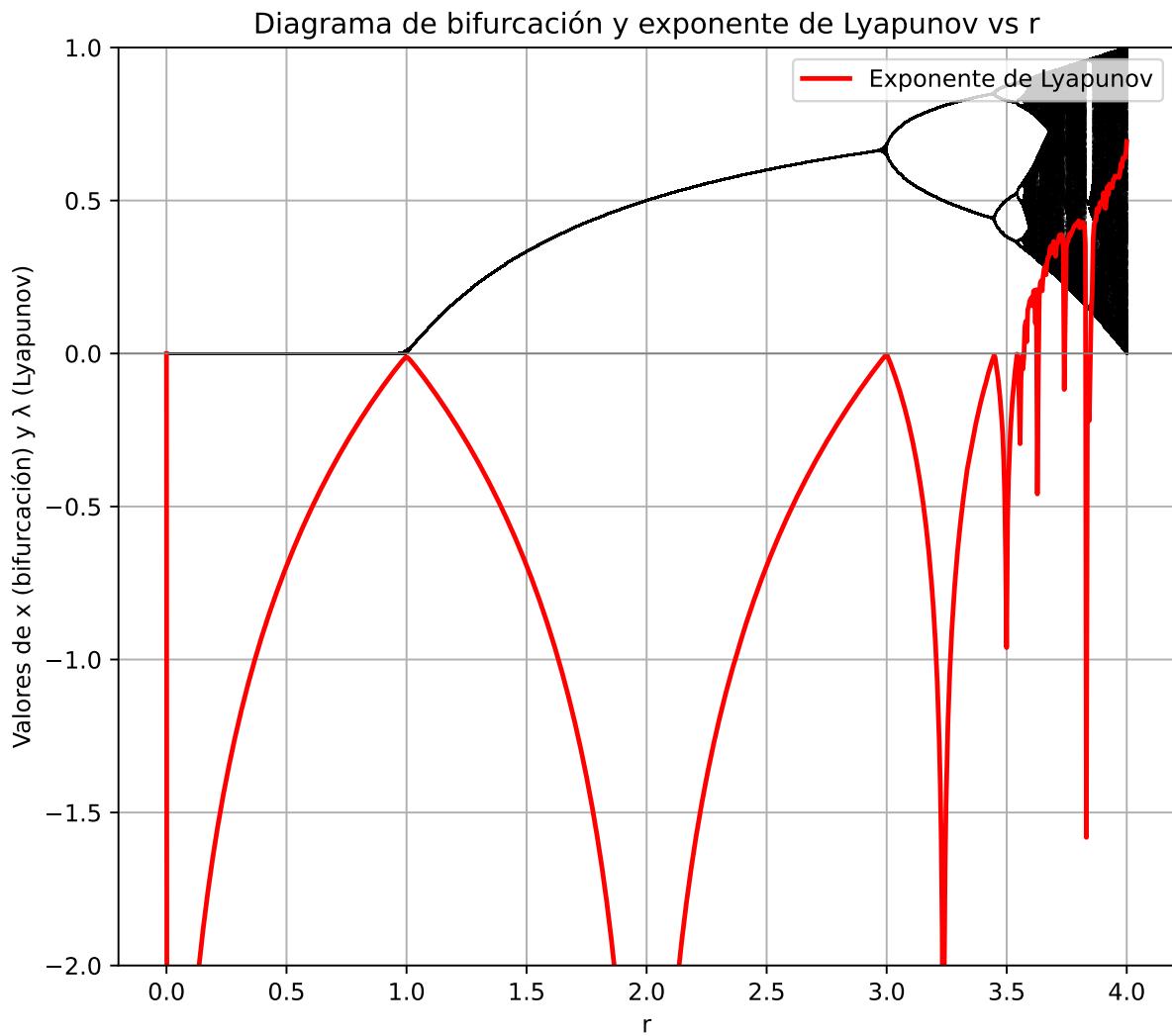
Para $3 < r < r_2 \approx 3.4495$ sabemos que existe un ciclo estable de periodo 2. $\lambda(r)$ en este rango vuelve a ser negativo, porque aunque ya no convergemos a un punto fijo, sí converge a un ciclo de periodo 2. En el límite $r \rightarrow r_2$, $\lambda(r)$ se acerca nuevamente a 0, pues se produce la segunda bifurcación hacia un ciclo de periodo 4.

En todos los ciclos restantes hasta $r_\infty \approx 3.5699456 \dots^*$ tenemos el mismo comportamiento, valores negativos en las zonas de los ciclos y acercándose a cero cuando cambiamos de periodo.

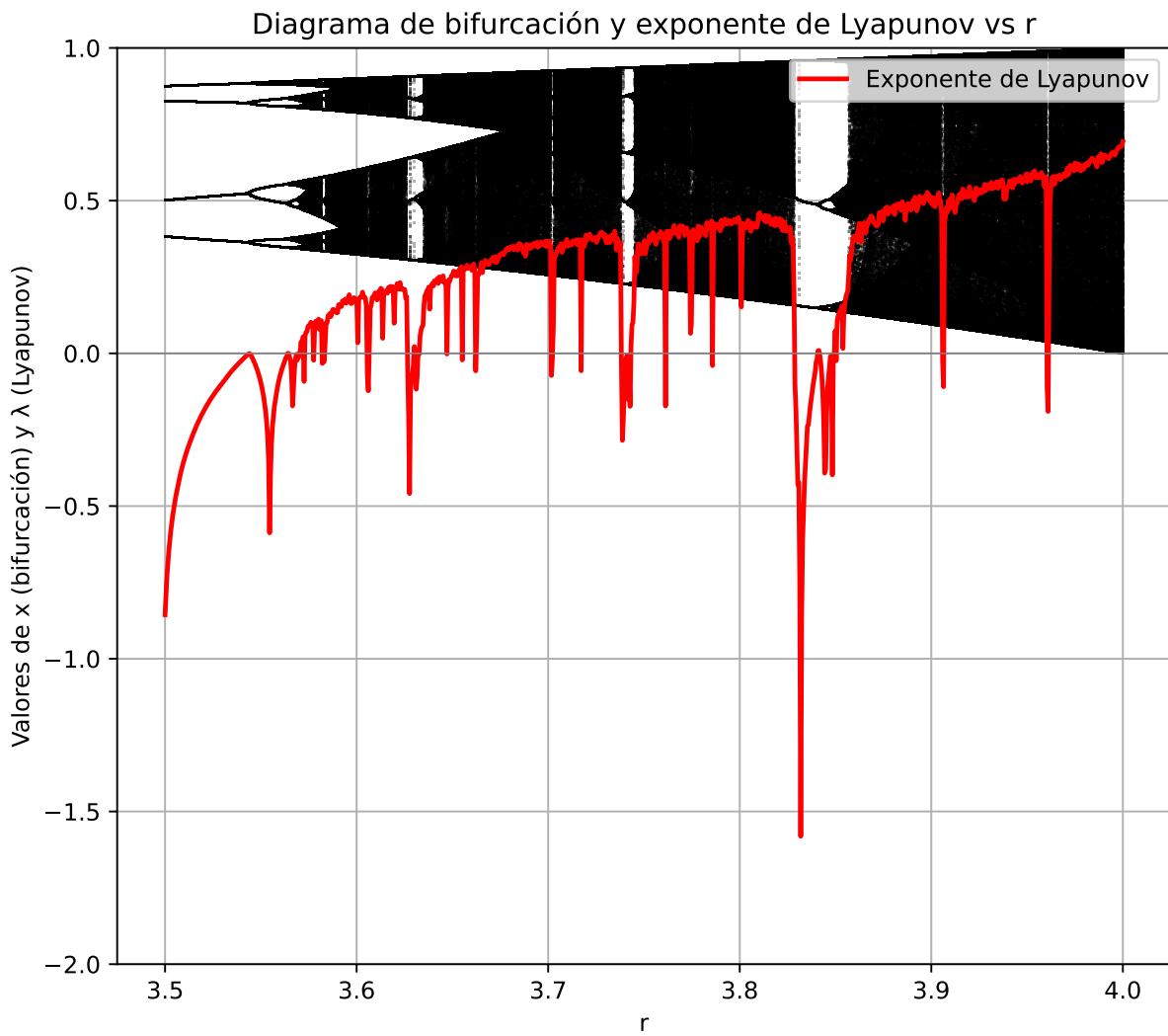
Para $r_\infty < r \leq 4^{**}$ vemos que en la mayoría de estos r en los que sabemos que el sistema es caótico se cumple que $\lambda(r) > 0$. Sin embargo, dentro de este intervalo caótico aparecen “ventanas” periódicas (por ejemplo, cerca de $r \approx 3.8284$, donde hay un ciclo de periodo 3). En esas ventanas periódicas $\lambda(r)$ vuelve a ser negativo. Justo en el borde de cada ventana periódica (bifurcaciones dentro del caos) se tiene $\lambda(r) = 0$. En la vecindad de $r = 4$, el valor promedio exacto es $\lambda(4) = \ln 2 \approx 0.6931$ tal y como habíamos visto.

12 El exponente de Lyapunov y el caos

En la siguiente gráfica vemos lo que hemos ido contanto pormenorizadamente en la sección anterior. Cada vez que el sistema está en una zona no caótica, el exponente de Lyapunov es negativo.



De hecho, si hacemos zoom en la zona donde aparece el caos, vemos que en las ventanas de periodicidad el exponente de Lyapunov se vuelve negativo.



La pregunta que debemos hacer es la siguiente, **¿es el exponente de lyapunov un indicador que nos puede decir si una serie temporal que estamos observando es caótica?** Una serie temporal es simplemente una lista de valores que varían con el tiempo, como por ejemplo la temperatura diaria de una ciudad: T_0, T_1, T_2, \dots .

Llamamos a esos valores x_0, x_1, x_2, \dots y cada subíndice indica la “etapa” o “momento” en que lo medimos.

Decir que una serie temporal es **caótica** significa, de acuerdo a la teoría del caos, que ha de cumplir tres condiciones:

1. **Es determinista:** existe una “regla” (una función) que, dado el estado actual x_n , calcula el siguiente x_{n+1} . No hay azar puro: si conoces x_n exactamente, sabes x_{n+1} .
2. **Tiene sensibilidad a condiciones iniciales:** dos valores muy parecidos x_0 y $x_0 + \delta_0$ se separan de forma exponencial a medida que iteras la regla. Aunque δ_0 sea minúsculo, al cabo de varias iteraciones la diferencia es muy grande.
3. **Se ve impredecible a largo plazo:** aunque la regla sea determinista, al crecer las diferencias “desordenadas” parece un comportamiento aleatorio.

Por ejemplo, ir anotando los números que salen directamente de una ruleta no es una serie caótica, ya que no hay ninguna regla para saber x_{n+1} si conoces x_n exactamente. Eso a pesar

de ser impredecible a largo plazo. Es muy importante hacer notar, que un sistema caótico tiene unas reglas deterministas muy claras. En este caso **no se puede calcular ningún exponente de Lyapunov** porque no hay función f continua o diferenciable que escriba $x_{n+1} = f(x_n)$. Si intentáramos “forzar” un cálculo, estaríamos midiendo ruido y obtendríamos resultados sin sentido práctico: un “valor de λ ” aquí no nos dice nada sobre determinismo o caos, sino solo sobre la aleatoriedad de los datos.

Otro ejemplo de sistemas que no cumplen estas premisas es la bolsa. A todo el mundo le parece que predecir el valor de una acción a lo largo del tiempo es muy complejo, pero ¿es caótico?. Para ello veremos como funciona la bolsa. El precio de una acción o de un índice bursátil depende de decenas de variables:

- Resultados financieros de las empresas.
- Noticias económicas o políticas.
- Sentimiento de los inversores y rumores.
- Tipos de interés, inflación, datos macroeconómicos.
- Eventos inesperados (crisis, pandemias, etc.).

Cada día (o incluso cada minuto) entran al mercado miles de órdenes de compra y venta, influenciadas por estas variables.

No existe una regla sencilla $x_{n+1} = f(x_n)$. A diferencia del mapa logístico, donde si conocemos x_n y el parámetro r podemos calcular $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, en la bolsa no hay una función sencilla y fija que relacione el precio de hoy con el de mañana.

Por estas razones, el precio de la bolsa es, en gran medida, un proceso aleatorio que incorpora ruido y reacciones humanas, no un sistema determinista como el mapa logístico.

Volviendo a la pregunta original. **¿es una condición necesaria y suficiente para que una serie sea caótica que su exponente de Lyapunov sea positivo?**

De acuerdo a la investigación bibliográfica realizada, un **exponente de Lyapunov mayor** $\lambda_{\max} > 0$ es **condición necesaria** para que un sistema determinista sea caótico, pero **no basta por sí solo** para garantizar caos en sentido completo.

Un sistema se considera **caótico** si cumple, entre otros, el criterio de **sensibilidad a condiciones iniciales**: dos trayectorias iniciadas en puntos arbitrariamente próximos se separan exponencialmente con el tiempo. El **exponente de Lyapunov** λ_{\max} mide justamente ese crecimiento (o decrecimiento) exponencial promedio de una pequeña desviación $\$ _0 \$$. Si $\lambda_{\max} < 0$, todas las pequeñas diferencias se contraen, y el sistema converge a un punto fijo o a un ciclo periódico estable: **no hay caos**. Por lo tanto, **tener $\lambda_{\max} > 0$ es condición necesaria** para hablar de caos determinista

Aunque $\lambda_{\max} > 0$ garantiza sensibilidad exponencial, para que un sistema sea considerado caótico **en el sentido matemático completo** también se requiere cumplir otras condiciones más específicas, que no citaré en este texto por estar muy por encima de mi nivel. La explicación larga para el lector interesado se haya aquí:

— “The short answer is ‘No’. As reflected in many of the other posted responses, positive Lyapunov exponents, by themselves, do not always indicate ‘chaos’. Additional information about the system ... needs to be performed to conclusively diagnose ‘chaos’ in most systems.”

Fuente: [ResearchGate – Does positive Lyapunov exponent always mean chaos?](#)

Sin embargo, en la **práctica experimental o de series temporales reales**, suele aceptarse que **si la estimación de λ_{\max} resulta positiva y se ha verificado que:

- El sistema es determinista (o modelado por un conjunto de ecuaciones conocidas).

- La variable observada permanece en un rango acotado
- Al simular o analizar la trayectoria, no se observan comportamientos puramente periódicos ni divergencias triviales.

Entonces, **la probabilidad de que el sistema sea caótico es muy alta**. Varios autores y estudios confirman que, bajo condiciones razonables de ruido controlado, un **exponente de Lyapunov mayor positivo es una señal muy confiable de caos determinista**.

– “The Largest Lyapunov Exponent (LLE) has been frequently used to investigate presence of chaotic behavior as well as nonlinear characteristics of time series.”

Fuente: [ScienceDirect – Largest Lyapunov Exponent](#)

Aunque **en teoría** hay que cumplir dos condiciones adicionales, **en la práctica**, sobre todo en áreas aplicadas (física experimental, meteorología, etc.), **una λ_{\max} positiva suele considerarse como “casi certeza” de caos** siempre que los cálculos se hayan hecho con series suficientemente largas y con ruido controlado.

12.1 Horizonte de predictibilidad

¿Por qué es tan importante el exponente de Lyapunov al hablar de sistemas caóticos?. Para ver su importancia vamos a introducir un término muy importante, el horizonte de predictibilidad.

El **horizonte de predictibilidad** es el tiempo máximo durante el cual podemos hacer predicciones fiables de un sistema caótico, dadas unas condiciones iniciales con cierta incertidumbre. Aunque conocemos la regla determinista que rige el sistema, la sensibilidad a las condiciones iniciales (medida por el exponente de Lyapunov) impone un límite práctico a nuestra capacidad de predicción.

En un sistema caótico, dos trayectorias que empiezan muy cerca divergen de forma **exponencial**. Si la separación inicial entre ellas es δ_0 , tras un tiempo t la separación será aproximadamente

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda_{\max} t},$$

donde λ_{\max} es el **exponente de Lyapunov máximo**, que mide la rapidez de esa divergencia.

¿Cuándo “fracasa” la predicción?

Definimos un **umbral de error Δ** : cuando la divergencia $\delta(t)$ alcance Δ , consideramos que la predicción ya no es útil. Por ejemplo, si medimos temperatura, δ_0 podría ser la imprecisión inicial y Δ el error máximo tolerable.

Buscamos el tiempo T_p tal que

$$\delta(T_p) = \Delta.$$

Para derivar de la fórmula partimos de

$$\delta(T_p) = \delta_0 e^{\lambda_{\max} T_p} = \Delta$$

Luego despejamos T_p :

$$e^{\lambda_{\max} T_p} = \frac{\Delta}{\delta_0}$$

$$\lambda_{\max} T_p = \ln\left(\frac{\Delta}{\delta_0}\right)$$

$$T_p = \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln\left(\frac{\Delta}{\delta_0}\right)$$

¿Cuál es el significado de cada término?

- λ_{\max} : mayor exponente → predicciones válidas por menos tiempo.
- δ_0 : si reducimos la imprecisión inicial, alargamos T_p .
- Δ : cuanto más tolerante seas al error, más tiempo «aguanta» la predicción.
- Un sistema con $\lambda_{\max} < 0$ tendría, en cambio, un horizonte de predictibilidad infinito, pues los errores se contraen y la predicción mejora con el tiempo.

Ejemplo práctico:

En la atmósfera se observa a menudo un exponente

$$\lambda_{\max} \approx 0,8 \text{ día}^{-1}.$$

Además, la **incertidumbre inicial** realista en modelos y medidas es más alta, por ejemplo

$$\delta_0 = 10^{-3} (\text{°C}),$$

y mantenemos el **error tolerable**

$$\Delta = 1 \text{ °C}.$$

Entonces,

$$T_p = \frac{1}{0,8} \ln\left(\frac{1}{10^{-3}}\right) = 1,25 \times \ln(10^3) = 1,25 \times 6,91 \approx 8,6 \text{ días.}$$

Este cálculo **coincide** con el límite práctico de **7–10 días** que vemos hoy en los pronósticos meteorológicos fiables. El lector puede echar un vistazo al siguiente artículo:

<https://www.stratumfive.com/climate/weather-forecasting-and-chaos-theory/>

Aquí se habla de un horizonte de predictibilidad para el tiempo de 8 a 10 días. La cuestión es que por lo aprendido en este proyecto, éste límite es una barrera que no vamos a poder superar. Si bien en los últimos 50 años se ha producido un formidable incremento de la precisión con la que hacemos las predicciones, pasando de predicciones fiables a un día a tener buenas predicciones a 5 días, el llegar a batir este límite dos semanas va a ser imposible.

Y hablando de horizontes de predictibilidad, ¿qué te parece el escuchar que el sistema solar tiene un horizonte de predictibilidad de unos 5 millones de años?. Si Newton levantase la cabeza. Es decir, a pesar de que tenemos esa preciosa fórmula de la gravitación universal, que funciona tan bien, su propagación hacia el futuro, cuando tenemos en cuenta los planetas que componen el sistema solar, deja de ser válida a 4 millones de años vista, que en términos cósmicos es poco tiempo. Y es que no solamente tenemos errores iniciales, al no poder tener en cuenta todos los pequeños objetos que vagan por el sistema solar, sino porque el sistema es inherentemente caótico. De hecho, tal y como anticipó Poincaré, el movimiento de tres cuerpos en el vacío sujetos a sus respectivas fuerzas de atracción gravitatoria, es ya un sistema caótico, y que presenta un exponente de Lyapunov positivo en determinadas circunstancias.

12.1.1 Referencias principales

1. Wikipedia. “Chaos theory.”
https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory
2. ResearchGate. “Does positive Lyapunov exponent always mean chaos?”
<https://www.researchgate.net/post/Does-positive-Lyapunov-exponent-always-mean-chaos>
3. Wikipedia. “Butterfly effect.”
https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect
4. ScienceDirect Topics. “Largest Lyapunov Exponent.”
<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/largest-lyapunov-exponent>

Part III

El Caos en vivo: El péndulo doble

13 El Péndulo Doble

13.1 Introducción

El péndulo doble es quizás uno de los sistemas físicos más estudiados en el ámbito de la teoría del caos. Esto es debido a que tiene unas ecuaciones deterministas muy bien conocidas, y a la contraposición con el péndulo simple. Es decir, mientras que en el péndulo simple con unas ecuaciones relativamente más sencillas podemos predecir “ad infinitum” la posición y velocidad del péndulo, en el caso del péndulo doble, que no son más que dos péndulos sencillos acoplados, no podemos predecir más allá de unos pocos segundos.

Dicho de otra manera, un péndulo simple, como el que estudió Galileo, es un sistema que encaja perfectamente en la mecánica clásica y que se comporta de una forma determinista, mientras que un péndulo doble tiene un comportamiento imposible de predecir tras unos pocos segundos. Ambos están regidos por las mismas leyes de la física, y el péndulo doble es ligeramente más complejo, pero su comportamiento es totalmente impredecible. Todo ello a pesar de tener unas ecuaciones que describen a la perfección su comportamiento.

El análisis matemático de ambos sistemas, el péndulo simple y doble, se puede obtener en muchas referencias, por ejemplo en https://paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/files/4554/Publica_20190605182303.pdf. El análisis matemático del péndulo doble está muy por encima del nivel de bachillerato.

Sin embargo podemos recurrir a la simulación y experimentación real para analizar su comportamiento. Empezaremos por realizar simulaciones y comprobar en el ordenador como se comporta el péndulo doble. Pero, ¿no resulta muy complicado hacer la simulación de un péndulo doble?. ¿Acaso no habría que implementar las ecuaciones del péndulo doble, que resultan realmente complicadas de analizar matemáticamente?. Tenemos dos soluciones para ello:

- Podemos utilizar simuladores de física como Algodo <https://www.algodo.com/>
- Podemos pedirle a ChatGPT que nos haga una simulación en Python.

En este proyecto, he optado por la segunda alternativa, y los resultados han sido espectaculares. Usando uno de los modelos más avanzados de OpenAI, el mini4-high, la codificación resultó directa y sin errores. Copiando el código generado, y ejecutándolo desde mi ordenador pude tener en unos pocos minutos

14 Sensibilidad a las condiciones iniciales

Autor: Rubén Torre Merino

14.1 Descripción General

En esta entrada se analiza un programa escrito en Python para simular y dibujar 10.000 péndulos dobles simultáneamente. El objetivo principal de la simulación es mostrar la **sensibilidad a las condiciones iniciales**, un rasgo característico de los sistemas caóticos. Cada péndulo comienza con un ángulo inicial ligeramente distinto para ilustrar cómo pequeñas variaciones pueden dar lugar a comportamientos muy diferentes a lo largo del tiempo. Es decir, como verás en el próximo vídeo los péndulos al ser lanzados paracen estar todos en la misma posición pero a medida que vamos avanzando en la simulación se separan totalmente.

Figura 1: Esquema del doble péndulo

14.2 Preparación del Código con ChatGPT

Este código fue **generado mediante ChatGPT**, aprovechando la capacidad del sistema para programar en Python. A continuación, se describe el *prompt* que dio origen a esta simulación:

Prompt sugerido:

“Genera un código en Python que utilice Python para simular 10000 péndulos dobles al mismo tiempo. Cada péndulo debe tener la primera pata en la misma posición (170 grados) y la segunda pata con un ángulo inicial también de 170 grados pero ligeramente distinto en cada péndulo, espaciado uniformemente entre 170 y 170.1 grados. El objetivo es visualizar la sensibilidad a las condiciones iniciales superponiendo todos los péndulos en una misma imagen. Dibuja cada péndulo de un color, y muestra la animación en tiempo real. Mi ordenador dispone de una tarjeta gráfica Nvidia y tengo instalado CUDA, así que úsalo para acelerar las simulaciones. No tengas en cuenta la fuerza de rozamiento.”

Tras varias iteraciones de este prompt, al final conseguí un código que se ejecutase. La depuración del código es realmente fácil de hacer. Cada vez que ChatGPT me daba un código, lo corría en el ordenador mediante el comando “python programa.py”, y los errores se los alimentaba de vuelta al ordenador que a su vez me devolvía el código depurado.

En el código proporcionado, los parámetros físicos de cada péndulo doble los ha definido ChatGPT de la siguiente manera:

- **Longitudes de los brazos**

- Longitud del primer brazo: $l_1 = 1.0$ metros
- Longitud del segundo brazo: $l_2 = 1.0$ metros

En la representación gráfica cada metro es representado a través de 150 píxeles.

- **Masas de los cuerpos**

- Masa del primer cuerpo: $m_1 = 1.0$ Kg
- Masa del segundo cuerpo: $m_2 = 1.0$ Kg

La gravedad es la terrestre, $9.81Kg/m^2$. El péndulo simulado es grande, pero lo bueno de hacerlo grande es que va mas lento en tiempo que un péndulo pequeño, por lo que su movimiento se aprecia mejor en la simulación. El péndulo oscila sin parar ya que no hemos puesto ninguna fuerza de rozamiento.

14.3 Video con la simulación

Una vez preparado el código procedía a correrlo y grabar la ventana de salida en un archivo de vídeo que se encuentra a continuación. Hay que tener en cuenta que el código Python generado por ChatGPT, avanza en pasos de 1 milisegundo de tiempo real, y que debido a la gran cantidad de pendulos la simulación no llega a ser en tiempo real. Por eso le pedía a ChatGPT que incluyera un texto en la simulación que mostrase el tiempo real durante la simulación.

El resultado es sorprendente e hipnotizante. ¿Como puede ser que péndulos que se lanzan tan cercanos diverjan tan rápidamente?. Si observamos antentamente el vídeo hasta el segundo 1 de la simulación todos los péndulos van casi al unísono. En el segundo 2, que es cuando llegan al otro extremo, vemos que el “abanicó” ya se empieza a abrir. Y en la bajada que le sigue se desata el caos. Del segundo 2 al tres ya estamos con una divergencia total, y a partir de ahí cada uno va a su bola, !!caos total!!.

Ahora reflexionemos. Péndulos que fueron lanzados con diferencias de milésimas de grado, tienen trayectorias que divergen enormemente tras 5 segundos. ¿Acaso es éste un sistema físico que cuyo comportamiento podamos predecir en la vida real?. Pues yo diría que no.

14.4 Complemento y Reflexiones

¡Imagínate! Iniciamos todos los péndulos casi de la misma manera, apenas una pequeña de diferencia en el segundo ángulo. Y, sin embargo, a los pocos segundos, el espectáculo visual es un torbellino de colores y líneas que ya no parecen corresponderse entre sí. Fíjate bien: el lector no ve cinco segundos, sino un universo paralelo donde cada péndulo tiene su propia historia, su propio destino. ¿Te das cuenta de lo desconcertante que es?

14.4.1 La Belleza del Caos

Tal vez te preguntes: “¿Por qué es tan atractivo ver este desorden?”. La respuesta está en la misma naturaleza de lo impredecible. Cada línea coloreada que se dispersa representa un pequeño “qué pasaría si...”: un escenario distinto construido por una diferencia diminuta en los ángulos iniciales. Cuando miras el vídeo, lo que parece arte abstracto en movimiento es, en realidad, la materialización instantánea de un principio matemático: el caos.

14.4.2 Reflexión sobre la Predictibilidad

¿Recuerdas cuando en clases nos decían que la física clásica era determinista? Aquí tenemos una bofetada directa a esa idea: sí, las ecuaciones son exactas y puntuales, pero cualquier medición en la realidad lleva error, desviaciones, incertidumbre. Esas milésimas de grado que apenas vemos en el vídeo se traducen en divergencias drásticas en segundos. Entonces debes preguntarte:

- ¿Podríamos predecir con exactitud el comportamiento de un péndulo real si midiera su ángulo con la precisión de un nanómetro?
- ¿Sería suficiente?

La respuesta es que, por muy maravillosa que sea nuestra instrumentación, siempre habrá imperfecciones. Ese desajuste, ese ruido minúsculo, es suficiente para que la simulación sea un recordatorio de que el mundo real—y nuestros modelos—tienen un límite de predictibilidad. No solo eso, como vimos en el capítulo anterior con la función logística, los modelos matemáticos se codifican en un ordenador con una precisión finita, que a su vez introduce errores iteración tras iteración de nuestro código. Por lo tanto, nos enfrentamos a dos problemas en la realidad:

- No podemos medir con total exactitud el estado inicial de nuestro sistema
- No podemos simular los modelos matemáticos con una precisión infinita en un ordenador

14.4.3 ¿Qué Aprendemos como Observadores?

En este punto, quiero que te sientas más que un simple espectador; quiero que te cuestiones tu propia confianza en la previsión de sistemas aparentemente simples. Porque, al fin y al cabo, el péndulo doble no es más que un ejemplo fácil de visualizar, pero el universo real está lleno de sistemas caóticos: el clima, la dinámica de poblaciones, incluso ciertos procesos en la economía. Si un experimento tan básico como el péndulo doble nos muestra esta fragilidad, ¿cómo imaginamos predecir con total certeza fenómenos tan complejos?

14.4.4 Reflexión Final: Una Invitación al Asombro

Te invito a que, la próxima vez que veas un pronóstico meteorológico o leas sobre el futuro de los mercados, recuerdes este vídeo de los péndulos. Observa cómo cambia cada línea, cómo el abanico se abre a partir de una diferencia insignificante. Tal vez entonces comprendas que la exploración del caos no es un simple juego visual, sino un recordatorio profundo: hay límites invisibles en nuestra capacidad de anticipar el futuro.

15 Mapa de Fases

Recordemos que durante el estudio de la función logística, el diagrama de bifurcación aparecía una y otra vez cada vez que hacíamos zoom en una zona pequeña de r . Veíamos la misma estructura repetida en zonas de r cada vez más pequeñas. ¿Pasará algo similar con el péndulo doble?. Vamos a ir paso a paso.

En primer lugar vamos a simular 36×36 péndulos, cada uno de ellos con diferentes condiciones iniciales de los dos brazos. Puesto que cada uno de los ángulos puede tomar 360 grados, vamos a repartirlos en 36 posiciones diferentes cada uno de ellos desde $0, 10, 20 \dots$ hasta 350 grados. Obviamente, aquí están separados bastante por lo que su evolución va a ser diferente.

Por lo tanto estamos viendo 1296 péndulos dobles al mismo tiempo! Cada uno en su pequeña celda de 20×20 píxeles, todos organizados en una cuadrícula de 36×36 . El resultado es una imagen de 720×720 donde cada cuadradito muestra un péndulo doble distinto, lanzado con ángulos iniciales que varían sistemáticamente en filas y columnas.

Cada celda se trata como un único péndulo doble, con los mismos parámetros que en el caso del abanico de péndulos (masas $m_1 = m_2 = 1$, longitudes $l_1 = l_2 = 1$, gravedad $g = 9.81$).

Se dibujan las líneas de los brazos en blanco y los tres puntos de unión en colores rojo, verde y azul para los pivotes, la primera masa y la segunda masa respectivamente.

Con cada iteración, la simulación avanza y se pinta el estado actualizado, de modo que se ve un baile de péndulos distintos en cada casilla.

15.1 Prompt para Generar Este Script con ChatGPT

Prompt para la generación del código

“Quiero un código en Python para mi tarjeta Nvidia y Cuda para simular una **cuadrícula 36×36 de péndulos dobles** en paralelo. Cada celda debe inicializar su péndulo con un ángulo para el primer brazo comprendido entre 0 y 350 grados en pasos de 10 grados, y con un ángulo para el segundo brazo comprendido entre 0 y 350 grados en pasos de 10 grados. Utiliza los siguientes parámetros de simulación para los péndulos ($m_1 = m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $g = 9.81$ y cero rozamiento).

Dibuja cada péndulo en su propia celda de 20×20 píxeles dentro de una imagen global de 720×720 . Dibuja los brazos (longitudes 6 píxeles) en blanco y los pivotes como círculos pequeños en rojo, verde y azul. Muestra la ventana en tiempo real y sal al presionar Esc.”

Al ver la cuadrícula completa, el lector observa cómo cambia el comportamiento del péndulo doble al variar sus ángulos iniciales en pequeños pasos de 10° . En la esquina superior izquierda ($-180^\circ, -180^\circ$) el movimiento puede ser muy distinto al de la esquina inferior derecha ($+170^\circ, +170^\circ$).

Es un “mapa de fase” visual: cada casilla revela un patrón dinámico único, mostrando cómo la mecánica no lineal responde a distintos puntos de partida. ¿Por qué se llama mapa de fase?. Cuando dibujamos una función senoidal a lo largo del tiempo, vemos un patrón repetido. Si

pintamos otro seno al lado, con igual amplitud y frecuencia, pero cambiando el ángulo inicial, veremos el mismo patrón pero desplazado en el tiempo por ese ángulo incial. Estamos por lo tanto en otra “fase” del mismo sistema. Otra forma más cotidiana de verlo es con la Luna: hablamos de fases para referirnos a la iluminación relativa de la Luna por el Sol tal y como lo vemos desde la Tierra. Así tenemos fase creciente, menguante, llena, etc.

Vemos una zona central en la que los péndulos parten de ángulos pequeños. En este caso observamos que el comportamiento es muy similar al de un péndulo simple. Es, por así decirlo, una zona de estabilidad del sistema. Pregunté a ChatGPT por qué se produce esta zona de estabilidad y su respuesta fue la siguiente.

15.1.1 Aproximación de Ángulo Pequeño

En la simulación del péndulo doble, cada péndulo tiene dos ángulos θ_1 y θ_2 . Cuando ambos son pequeños, la dinámica se “desacopla” casi como si fueran dos péndulos simples en serie, pero sin generar las fuertes interacciones que provocan el caos. Veamos por qué:

1. Las ecuaciones originales del péndulo doble incluyen términos no lineales muy potentes (producto de $\sin(\theta_1 - 2\theta_2)$, $\cos(2\delta)$, etc.).
2. Si θ_1 y θ_2 permanecen pequeños, esos términos no lineales pierden relevancia: $\sin(\theta_1) \approx \theta_1$, $\sin(\theta_1 - 2\theta_2) \approx \theta_1 - 2\theta_2$, y $\cos(2\delta) \approx 1$.
3. Resultado: el sistema casi se comporta como dos péndulos simples que oscilan suavemente y de forma **aproximadamente periódica**. No hay “explosión” de sensibilidad porque las variaciones pequeñas no se amplifican de forma exponencial. Es la zona donde la energía no alcanza para explorar el caos.

En otras palabras, en el centro de la “cuadrícula de fase” hay un área donde las trayectorias son estables, casi previsibles, iguales a las que obtendrías si estudiara un péndulo simple (o dos acoplados muy débilmente). Observas oscilaciones regulares, de ida y vuelta, sin divergencias drásticas.

15.1.2 ¿Por Qué Llamarlo “Zona de Estabilidad”?

Cuando hablamos de sistemas dinámicos, llamamos “estable” a aquella región donde las pequeñas perturbaciones no se magnifican con el tiempo.

Si en el experimento gráfico seleccionas solo las celdas centrales, notarás que los péndulos dobles describen curvas suaves, casi sinusoidales, muy parecidas a las de un péndulo simple. Esa cohesión de trayectorias es lo que define la estabilidad: todas las simulaciones de esa región inicial “viajan juntas”, sin dispersarse.

15.2 Transición hacia el Caos

A medida que nos alejamos del centro (es decir, cuando comienzas a dar a θ_1 o θ_2 valores más grandes, digamos 30° , 40° o más), las ecuaciones no lineales cobran protagonismo. Entonces:

1. Los términos $\sin(\theta)$ ya no son equivalentes a θ .

2. Aparecen resonancias internas: la interacción entre el primer y el segundo brazo se hace más intensa.
3. Surge la **sensibilidad exponencial**: dos péndulos con diferencias iniciales de solo unos grados comienzan a divergir rápidamente tras pocas oscilaciones.

Así, justo en el borde de esa zona estable, empieza a nacer el caos: las trayectorias dejan de ser regulares y adquieren formas impredecibles.

Esto nos recuerda a lo que pasaba con la función logística a medida que crecía r . Hasta $r = 3$ estábamos en una zona muy estable, con un solo valor final. Ahora el parámetro que controla la estabilidad es el ángulo desde el que lanzamos el péndulo. Para ángulos pequeños estamos en zona estable y para ángulos mayores estamos en zonas de caos. En ambos casos, cuando suministramos más “energía” al sistema bien sea en forma de un mayor r o un mayor ángulo inicial el sistema se vuelve caótico.

15.3 Mapa de fase detallado

Ahora vamos a simular muchísimos más pendulos, para obtener un mapa de fase mas detallado. Para ello ahora la simulación se organiza en una cuadrícula de 720×720 péndulos. Cada columna i corresponde a un ángulo inicial

$$\theta_1(i) = -\pi + i \frac{2\pi}{719}, \quad i = 0, 1, \dots, 719,$$

y cada fila j a un ángulo inicial

$$\theta_2(j) = -\pi + j \frac{2\pi}{719}, \quad j = 0, 1, \dots, 719.$$

Así, la celda (i, j) arranca con condiciones

$$\theta_1 = \theta_1(i), \quad \theta_2 = \theta_2(j).$$

Como cada péndulo es ahora un pixel, ¿cómo podemos visualizar su estado?. Pues recurrimos a un código de colores. Entonces para cada péndulo cogemos los angulos θ_1 y θ_2 en los que se encuentra y hacemos una primera normalización. Para cada péndulo se calculan

$$n_1 = \frac{\sin(\theta_1) + 1}{2}, \quad n_2 = \frac{\sin(\theta_2) + 1}{2},$$

de modo que $n_1, n_2 \in [0, 1]$. De esta manera no tenemos valores negativos del estado, es decir su estado va desde 0 hasta 1.

A continuación promediamos, ambos valores n_1 y n_2 y escalamos al equivalente de 8 bits, es decir 256 valores, $[0, 255]$:

$$\text{Promedio} = \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \right) \times 255.$$

Y por último el código generado por ChatGPT aplica un código de colores al valor promedio resultando en:

azul para valores bajos (≈ 0),

verde/amarillo para valores intermedios,

rojo para valores altos (≈ 255).

El resultado de la simulación se puede ver en el siguiente vídeo.

Como anticipábamos en la zona central hay estabilidad, y fuera de ella no se ven patrones, sino que aparece una especie de ruido. En estas zonas “ruidosas” lo que tenemos es caos, es decir, el estado del péndulo varía continuamente, y lo que es más importante el estado de cada péndulo es totalmente distinto de los péndulos vecinos, lo que manifiesta de nuevo la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para ver más detalladamente esta sensibilidad a las condiciones iniciales vamos a hacer zooms en áreas alejadas del centro. Se hacen hasta tres zooms consecutivos hasta llegar a una zona rectangular de 0.01 grados x 0.01 grados en las que se simulan los 720x720 péndulos. No importa cuánto nos adentramos en el mapa de fase: no se consigue que los péndulos vecinos vayan a la vez

En el siguiente video aparece la misma simulación pero esta vez dejando que corra más el tiempo. En ella se ve que a medida que avanza la simulación la zona central se va reduciendo, y el caos se apodera de más zonas. Hay que tener en cuenta que estamos en un sistema sin rozamiento, y que puede estar corriendo infinitamente. Zonas que al principio parecían estables, se convierten en caóticas, quedando una pequeña porción como estable.

Se pueden ver aparecer algunas pequeñas “islas” de estabilidad. Hagamos en una de ellas y veamos como avanza la simulación en ella:

Al igual que en el caso del mapa logístico hay pequeñas zonas de estabilidad alejadas del centro, rodeadas de caos. Pero la verdad es que hay que decir que son unos pocos y limitados casos.

16 Bifurcaciones

¿Qué mas paralelismos podemos encontrar en el doble péndulo al compararlo con el mapa logístico?. Vamos a hacer un nuevo ejercicio. En este caso vamos a simular la diagonal del mapa de fases anterior, es decir, vamos a coger los valores de θ_1 y de $\dot{\theta}_2$ y los vamos a variar desde -180 hasta 180 grados simultáneamente por medio de una sola variable de control. Puesto que el péndulo doble no tiende hasta un valor final, ya que está continuamente moviéndose al ser sin rozamiento, vamos a registrar el valor máximo en cada oscilación, y lo vamos a plotear para cada valor del ángulo inicial. Veamos el resultado:

Figura 1: Bifurcaciones en el doble péndulo

Vemos tres zonas diferenciadas. La primera de ella de 0 hasta 40 grados. En esta zona el valor de los máximos alterna entre varios puntos, con muchas ramificaciones o bifurcaciones adicionales que se van expandiendo y replegando. En ningún momento podemos hablar de caos, sino de comportamiento periódico

Figura 1: Bifurcaciones en el doble péndulo

A partir de los 43 grados, el diagrama se abre en dos ramas perfectamente distinguibles, que se vuelven a juntar a partir de los 57 grados. Curiosamente en torno a 64 grados, tenemos un único punto, por lo que el sistema podríamos decir que se comporta igual que un péndulo simple. De 64 grados hasta casi los 80 seguimos con las ramificaciones/bifurcaciones. Y a partir de los 80 grados tenemos el caos absoluto.

Figura 1: Bifurcaciones en el doble péndulo

Visto lo visto, me pregunté lo siguiente. ¿Cuál será el exponente de Lyapunov en cada una de las zonas?. Si bien yo no sabía como calcularlo, pues a diferencia de la función logística no tengo una expresión para ir calculando la derivada, le lancé la pregunta a ChatGPT. Al parecer existe un algoritmo llamado de “método de Benettin” que permite calcularlo. ChatGPT lo implementó en un script de Python y lo lancé en mi ordenador. El resultado fue el siguiente:

Figura 1: Exponente de Lyapuno para el péndulo doble

Al igual que con la función logística el exponente es prácticamente cero hasta los 80 grados. A partir de ahí sube abruptamente hasta valores de más de uno, lo que nos confirma que estamos en una zona caótica.

16.1 Zonas estables y caóticas en la atmósfera

Vamos a extender los paralelismos. Ya hemos visto como dos sistemas tienen comportamientos parecidos en cuanto a su comportamiento caótico. Vemos que aparecen bifurcaciones, zonas estables, zonas caóticas, etc...

En meteorología también distinguimos **regímenes estables, transiciones y comportamiento caótico**, de modo que el horizonte de predictibilidad varía según el nivel de caos.

Así tenemos zonas de estabilidad atmosférica en determinadas regiones del planeta, que vienen dadas por lo general por estas situaciones como los **Bloqueos atmosféricos**: grandes áreas de alta presión que pueden persistir días o semanas, desviando borrascas y estabilizando el tiempo.

En España es el típico anticiclón de las Azores, que cuando se sitúa en las Azores provoca que no entren las borrascas en la península, situación que puede llegar a durar varias semanas, y en el que el tiempo es muy estable.

En estos casos las pequeñas perturbaciones no se amplifican rápidamente y la predicción puede ser fiable hasta **8–10 días** o más.

Más información sobre bloqueos:

<https://cazatormentas.com/anticiclones-bloqueo-patron-climatico/>

También hay zonas de alta actividad caótica que se pueden dar por

- **Convección intensa**: tormentas y cumulonimbos que evolucionan en horas.
- **Frentes rápidos**: líneas de inestabilidad que se reorganizan de forma impredecible.

Aquí el horizonte de predictibilidad baja a **1–2 días** o menos, pues un error pequeño en humedad o temperatura crece exponencialmente.

17 Qué podemos predecir

Hasta ahora nos hemos llevado la impresión de que en un sistema caótico no podemos predecir nada. Pero tampoco es así la cosa, y lo vamos a ver con el péndulo doble. Vamos a simular el péndulo doble tirándolo desde $\theta_1 = 170$ grados y $\theta_2 = 170$ grados, posición de partida que sabemos que es caótica. El ángulo θ_2 lo vamos a variar 20 veces en pasos de 0.0005 grados (en total 1 milésima de grado de variación). Lanzamos esos 20 péndulos, y le pedimos a ChatGPT que en la simulación vaya acumulando la distancia total recorrida por cada péndulo en su extremo. El resultado para los primeros 20 segundos de simulación está en la siguiente figura:

Figura 1: Distancia recorrida por el extremo del péndulo

Como podemos ver la trayectoria de los 20 péndulos diverge desde el principio en términos de la distancia recorrida, y puesto que estamos hablando de diferencias de 0.5 milésimas de grado entre péndulos, sabemos que el predecir la distancia recorrida con exactitud en la realidad va a ser imposible. Es decir, estamos donde estábamos hasta ahora.

Pero, ¿qué pasa si simulo 1000 segundos?. Pues como vemos en la siguiente figura, el sistema ya no parece tan impredecible. La distancia recorrida va incrementándose prácticamente de forma lineal cuando ampliamos la duración de la simulación.

Figura 1: Distancia recorrida por el extremo del péndulo

Esto es lo que pasa en la predicción meteorológica y climática cuando hacemos predicciones a largo plazo. Si bien no podemos saber lo que pasará en un día concreto en un lugar preciso, sí podemos saber su comportamiento con un margen de error razonable. Al igual que con el péndulo doble, en el que podemos predecir la distancia recorrida a los 2000 segundos viendo lo que se ha movido en los primeros 1000 segundos: va a ser aproximadamente el doble sin mucho margen de equivocación.

17.1 Ejemplos en predicción climática

Hay varios ejemplos que ilustran como se aplica este principio a la predicción climática. Sin duda, el ejemplo más ilustrativo es el **Predicción de la temperatura media global**. Para ello se usa un modelo CGM (General Circulation Model), que es un modelo de la Circulación General de la Atmósfera y los Océanos. Con este modelo, aunque no sepamos si lloverá en Madrid el 15 de julio de 2030, podemos proyectar que la temperatura media anual aumente.

Otro ejemplo es el uso de Modelos empíricos combinados con GCMs para estimar la frecuencia de olas de calor o periodos de sequía en un horizonte de 10–30 años. Aunque la fecha exacta de la próxima ola de calor es impredecible, podemos calcular que su probabilidad anual aumenta de, por ejemplo, un 5 % a un 15 % bajo escenarios de +2 °C de calentamiento global.

La enseñanza clave es que **el clima** funciona como el **comportamiento total a largo plazo** del péndulo doble:

- **A corto plazo**, ambos sistemas son caóticos e impredecibles con precisión puntual.
- **A largo plazo**, emergen **tendencias medias** y estadísticas que sí podemos estimar y utilizar para planificar políticas, infraestructuras y medidas de adaptación.

Así, la analogía del péndulo doble nos ayuda a entender por qué los modelos climáticos son fiables para predecir promedios y tendencias, aunque jamás podrán garantizar el tiempo puntual de un día concreto dentro de meses o años.

18 Experimentos

18.1 Introducción

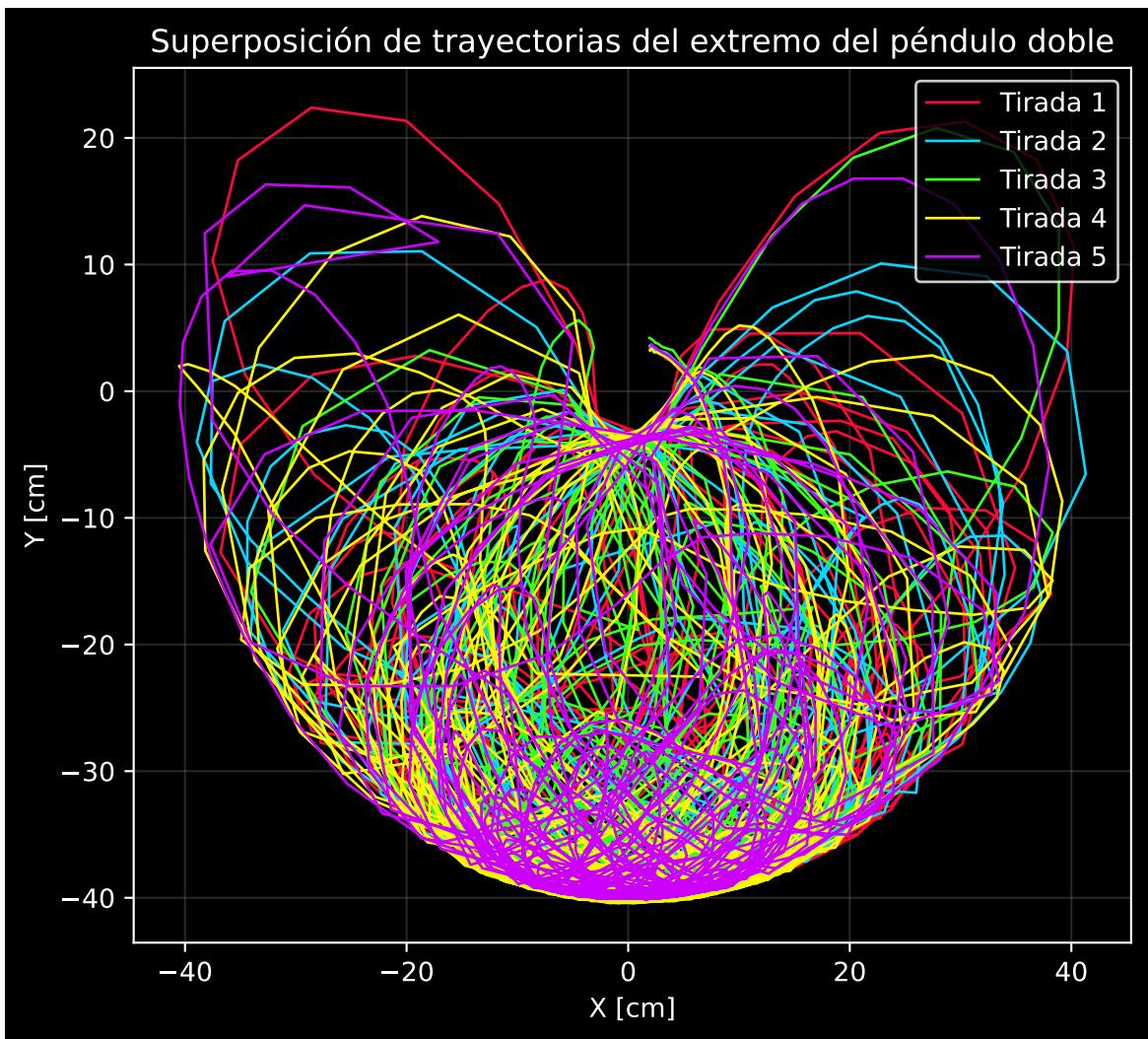
Para observar y realizar experimentos sobre el caos en un sistema físico real, he adquirido un péndulo doble, un dispositivo en el que es posible apreciar el caos con facilidad y en un corto período de tiempo.

18.2 Experimento

En este experimento he comprobado que, en el péndulo doble, los pequeños errores y las desviaciones de las condiciones iniciales se multiplican muy rápidamente, de modo que resulta ser un sistema caótico, aunque sí existen ecuaciones para determinar la posición de cada masa. En primer lugar, he colocado tres pegatinas de colores: la roja en el extremo del segundo péndulo, la verde en el eje que une el primer péndulo con el segundo y la azul en el eje del primer péndulo. A continuación, mediante un programa que desarrollé en Python con la ayuda de ChatGPT y una webcam, he seguido las trayectorias de cada uno de los tres puntos de color, que corresponden a las partes más relevantes del péndulo doble. Para reproducir condiciones iniciales prácticamente idénticas, dejé caer el péndulo siempre desde la vertical —a 90 grados respecto a la posición de equilibrio—, con el segundo péndulo colgando en la misma orientación que el primero, y lo impulsé cada vez de la manera más suave posible, únicamente lo necesario para que comenzara a oscilar y adquiriera la misma velocidad inicial. Repetí este procedimiento varias veces y registré la trayectoria de los tres puntos coloreados con mi programa. Posteriormente, elaboré una animación en la que se muestran las trayectorias del punto rojo —el que presenta comportamiento más caótico— en tiempo más lento que el real, con el fin de apreciar mejor las diferencias entre cada ensayo. En dicha animación puede observarse que, a partir del primer segundo, las trayectorias comienzan a divergir significativamente y, al cabo de unos segundos, resultan completamente distintas. Lo mismo pasaba en las simulaciones de abanico que vimos en la sección [Simulación](#)

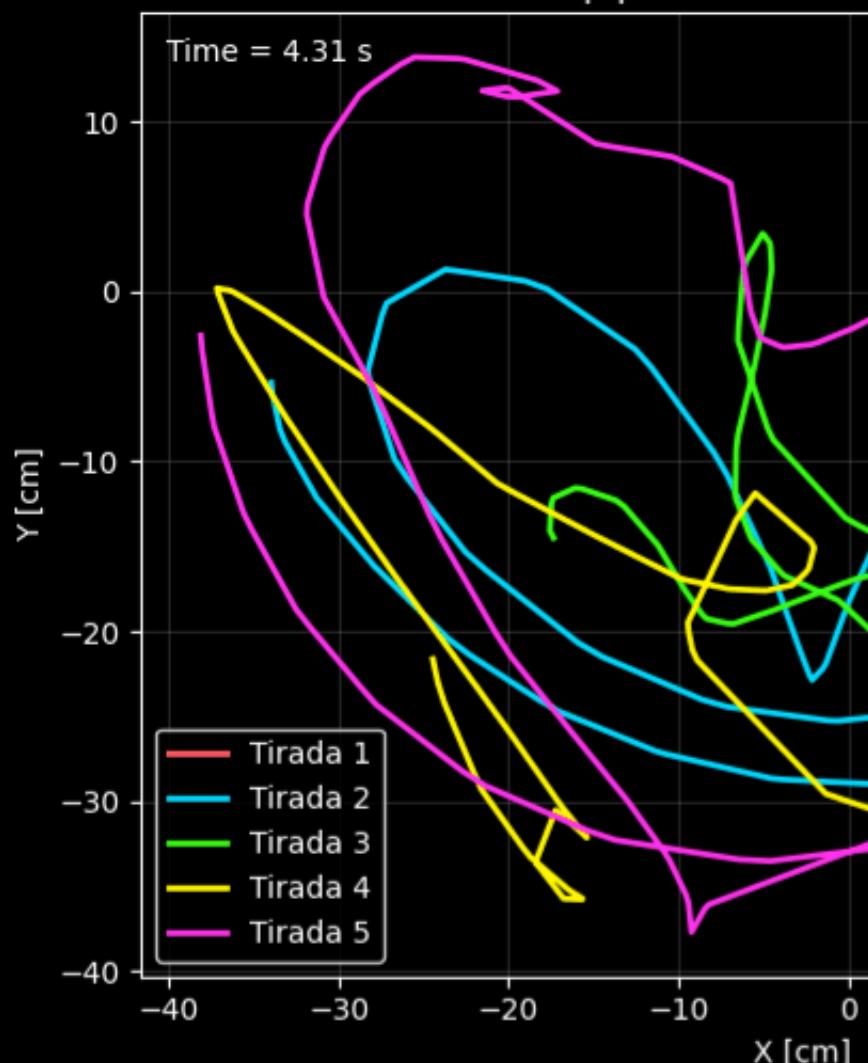
Aquí se ve el péndulo doble en movimiento con las diferentes partes representada con un punto de un color, que es lo que le sirve al programa para determinar las trayectorias.

Estas son las trayectorias del punto rojo del péndulo en cinco tiradas desde la misma posición y con la misma velocidad inicial. Se puede apreciar como al principio su trayectoria diverge muy rápidamente, pero al final, cuando ya han perdido mucha velocidad, hacen todos un recorrido muy similar hasta detenerse.



Esta es la animación que representa la trayectoria que han seguido tres tiradas. El tiempo que aparece es el tiempo que ha pasado realmente, ya que la trayectoria está ralentizada para que sea

Loop primeros 5 s:

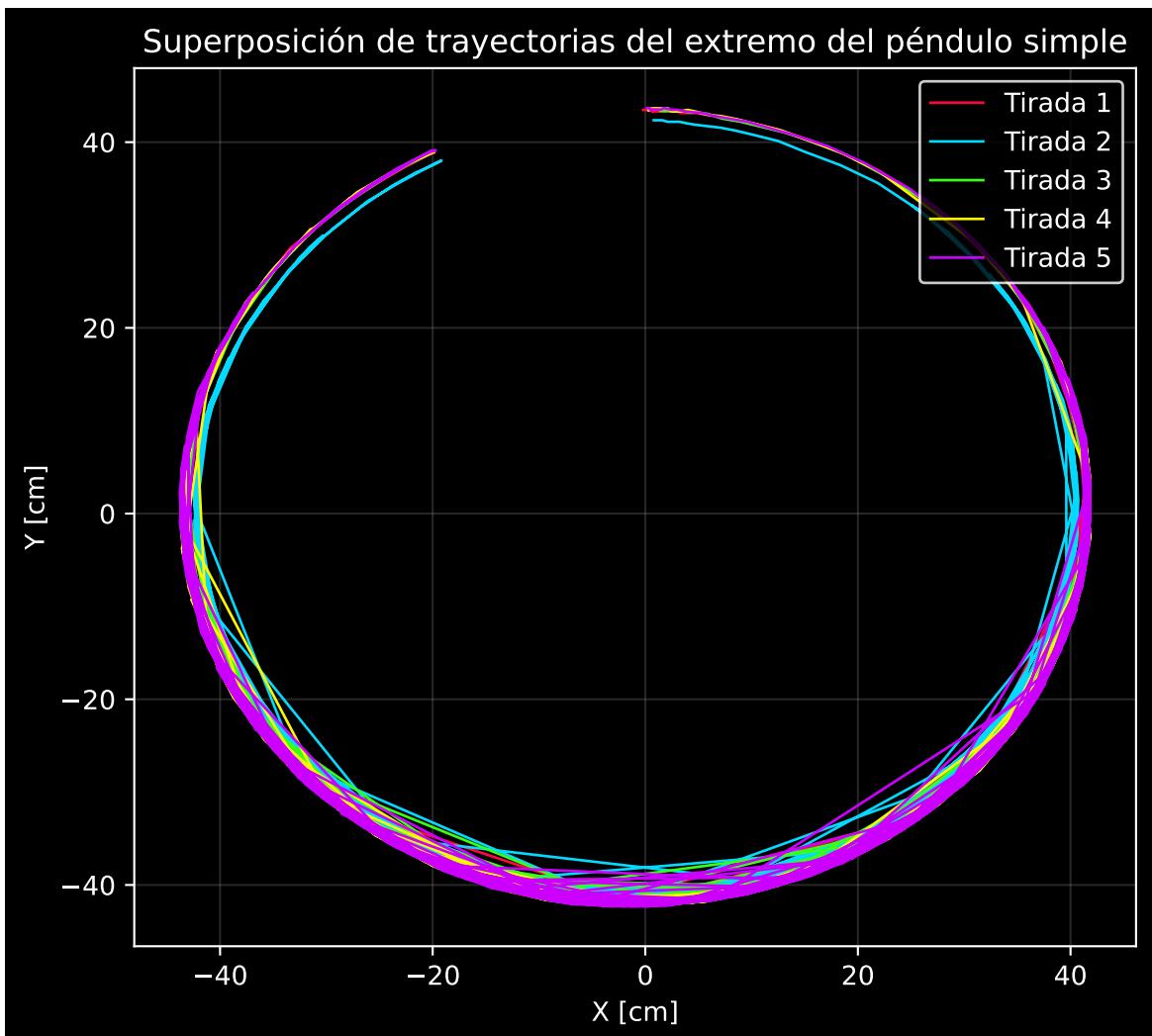


más fácil seguir como van divergiendo.

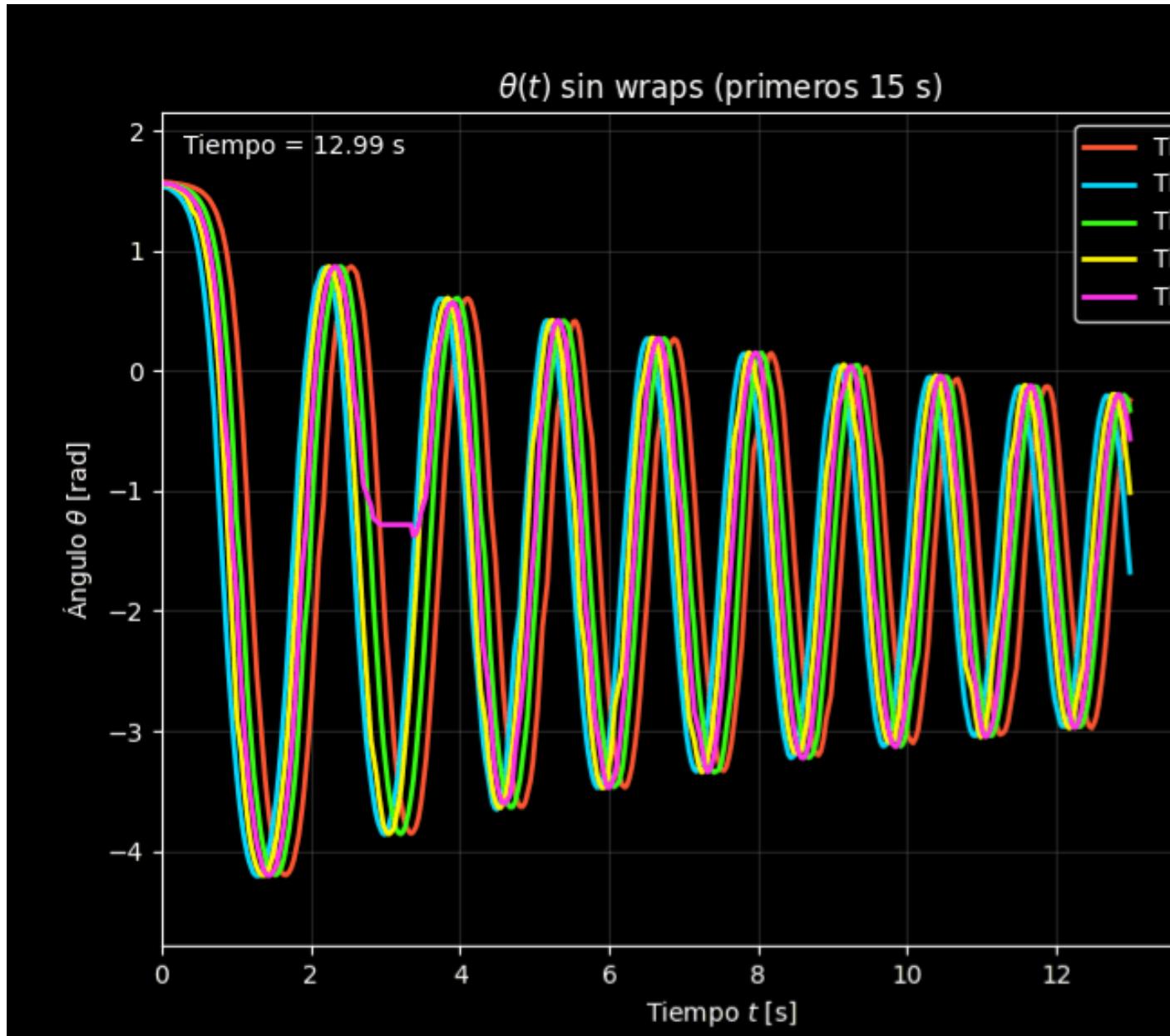
18.3 Comparación con el péndulo simple

A continuación vamos a mostrar cinco tiradas del péndulo simple. El péndulo es el mismo que en el caso anterior, lo único que fijamos el pivote central para que no se mueva, por lo que pasamos de tener un péndulo doble a uno simple. Igual que en el caso anterior, seguimos el extremo con el punto rojo.

Como podemos ver en la siguiente figura, a pesar de lanzarse cada una de las veces desde posiciones ligeramente distintas, las trayectorias son idénticas.

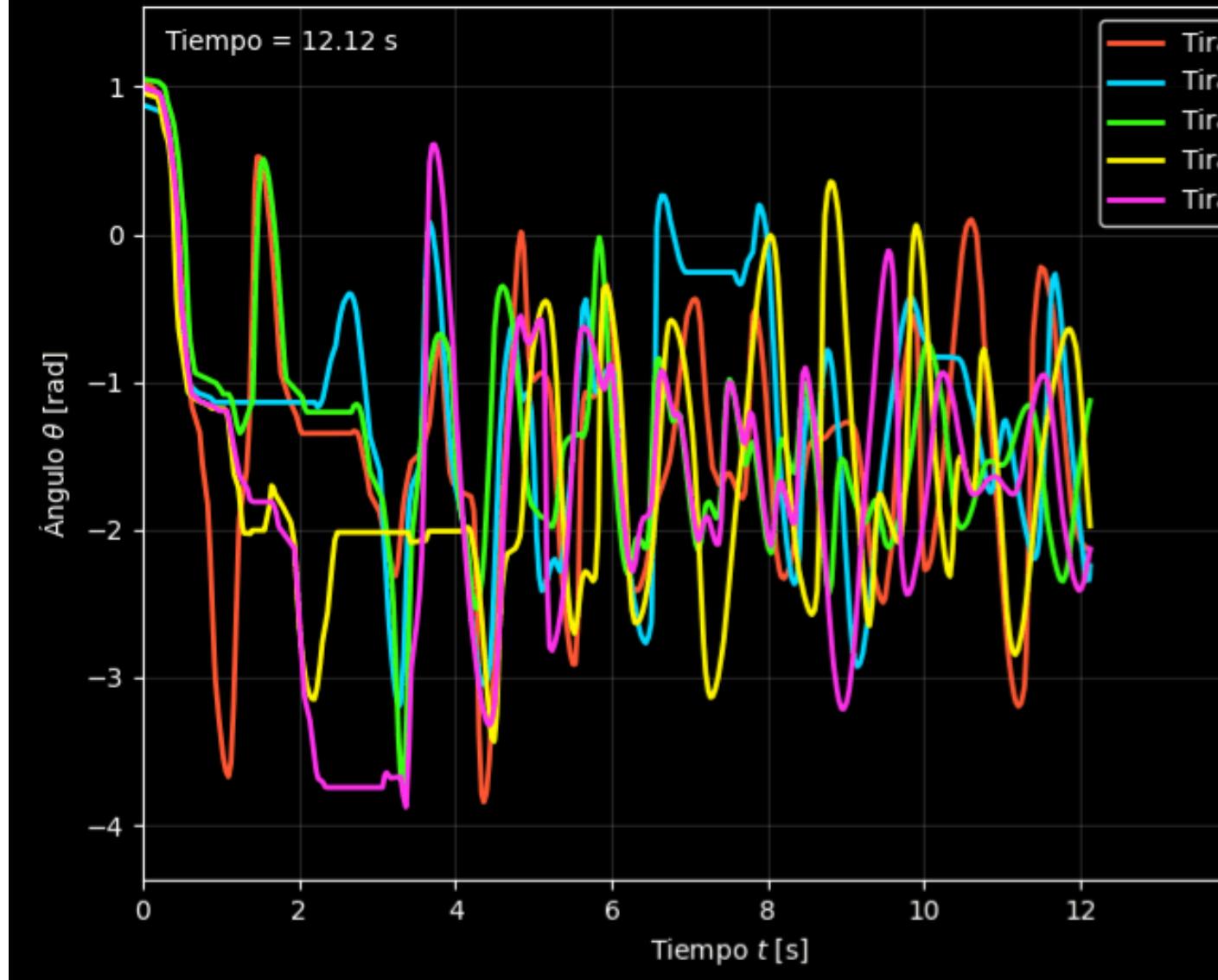


Y si miramos en la animación el ángulo del péndulo en cada una de las trayectorias, vemos de nuevo que en función del tiempo las trayectorias son muy similares.



He hecho este mismo gráfico con los datos de las tiradas del péndulo doble. El contraste con el péndulo doble es mayúsculo. En el péndulo doble no había ni una sola trayectoria idéntica, divergían continuamente. En el péndulo simple se ve como van iguales.

$\theta(t) \sin \text{wraps (primeros 15 s)}$



Part IV

La Meteorología y el Caos

19 Meteorología y Caos

19.1 Introducción

A lo largo del proyecto hemos visto la manifestación del caos en modelos matemáticos como el mapa logístico, o en sistemas físicos como el péndulo doble.

Uno de los retos del proyecto está en ver la manifestación del caos en la meteorología. Para ello vamos a proceder de dos maneras:

En la primera de ellas haremos una medida indirecta de la influencia del caos en las predicciones meteorológicas. Durante varias semanas hemos recopilado predicciones meteorológicas para Galapagar, y contrastaremos estas predicciones con las observaciones realizadas para esos días. De esta manera veremos cómo divergen a medida que pasa el tiempo las predicciones anteriores. Dado que la atmósfera es un sistema caótico, cualquier pequeña desviación en las condiciones iniciales estimadas se amplifica a medida que van pasando los días debido a la actuación del caos.

En la segunda haremos una estimación directa de un parámetro que hemos visto que identifica claramente la existencia de caos en un sistema. Se trata del exponente de Lyapunov. Cogeremos variables meteorológicas observadas y estimaremos su exponente de Lyapunov, esperando que sea positivo.

20 Predicibilidad de datos meteorológicos

El primer paso a la hora de estudiar el caos en el tiempo meteorológico es disponer de datos históricos de los principales parámetros del tiempo. Existe una excelente web llamada [Open-Meteo](#) que proporciona datos históricos de observaciones y predicciones para cualquier localidad, y que además lo hace de forma gratuita en:

<https://open-meteo.com/en/docs>

Poniéndome manos a la obra, he descargado los datos históricos de Galapagar desde el año 1950. La serie histórica que devuelve la página web tiene este formato:

```
latitude,longitude,elevation,utc_offset_seconds,timezone,timezone_abbreviation  
40.597538,-4.0735474,885.0,7200,Europe/Berlin,GMT+2  
  
time,temperature_2m_mean (°C),precipitation_sum (mm),wind_speed_10m_mean (km/h)  
1950-06-07,20.7,0.50,13.1  
1950-06-08,18.4,2.30,14.4  
1950-06-09,18.6,3.10,10.0  
1950-06-10,18.6,3.90,7.8  
1950-06-11,18.8,0.50,11.2  
1950-06-12,17.0,0.00,9.0  
1950-06-13,18.9,0.20,7.2  
1950-06-14,21.1,0.00,8.0  
1950-06-15,20.2,0.00,12.8
```

En segundo lugar tenemos que saber qué hacer con estos datos. Después de varias búsquedas en ChatGPT y google encontré un artículo sencillo sobre cómo calcular el exponente de Lyapunov en datos meteorológicos.

Referencia completa: Özgür E. & Yilmaz M. U. (2022). Using Chaos Theory to Determine Average Prediction Times of Different Meteorological Variables: A Case Study in Sivas. *Int. J. Adv. Eng. Pure Sci.* 34(1):101–106.

El artículo investiga cuánto tiempo, en promedio, pueden predecirse fiablemente tres series diarias (temperatura, velocidad del viento y humedad relativa desde el año 2006 hasta el 2010 para la estación de Sivas en Turquía) usando teoría del caos. Le pasé este artículo a chatGPT y le pedí que reprodujese los cálculos para mis datos de Galapagar. Una de las preguntas que me lanzó de vuelta chatGPT es que si quería usar los valores de los parámetros m y τ que usaban en el estudio de la estación turca. Pedí de vuelta a ChatGPT que eran estos valores, pues al parecer jugaban un papel crítico a la hora de estimar el valor del exponente de Lyapunov.

20.1 Explicación de τ y m

Retraso τ

El retraso τ indica cuántos pasos (días) “saltamos” entre cada coordenada al calcular el

exponente de Lyapunov. En lugar de usar solo $x(t)$, usamos

$$(x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots).$$

- Si τ es muy pequeño, $x(t)$ y $x(t + \tau)$ están muy correlacionados y aportan información casi redundante.
- Si τ es muy grande, $x(t)$ y $x(t + \tau)$ pueden ser casi independientes y perder la conexión dinámica.

El artículo turco revela que es óptimo trabajar con un valor de τ igual a 3 para la temperatura. Es decir, analizaremos el exponente de Lyapunov de la serie que nos da la temperatura en Galapagar cada tres días.

Dimensión de embedding m

La dimensión m es el número de valores escalonados que usamos para describir el estado del sistema:

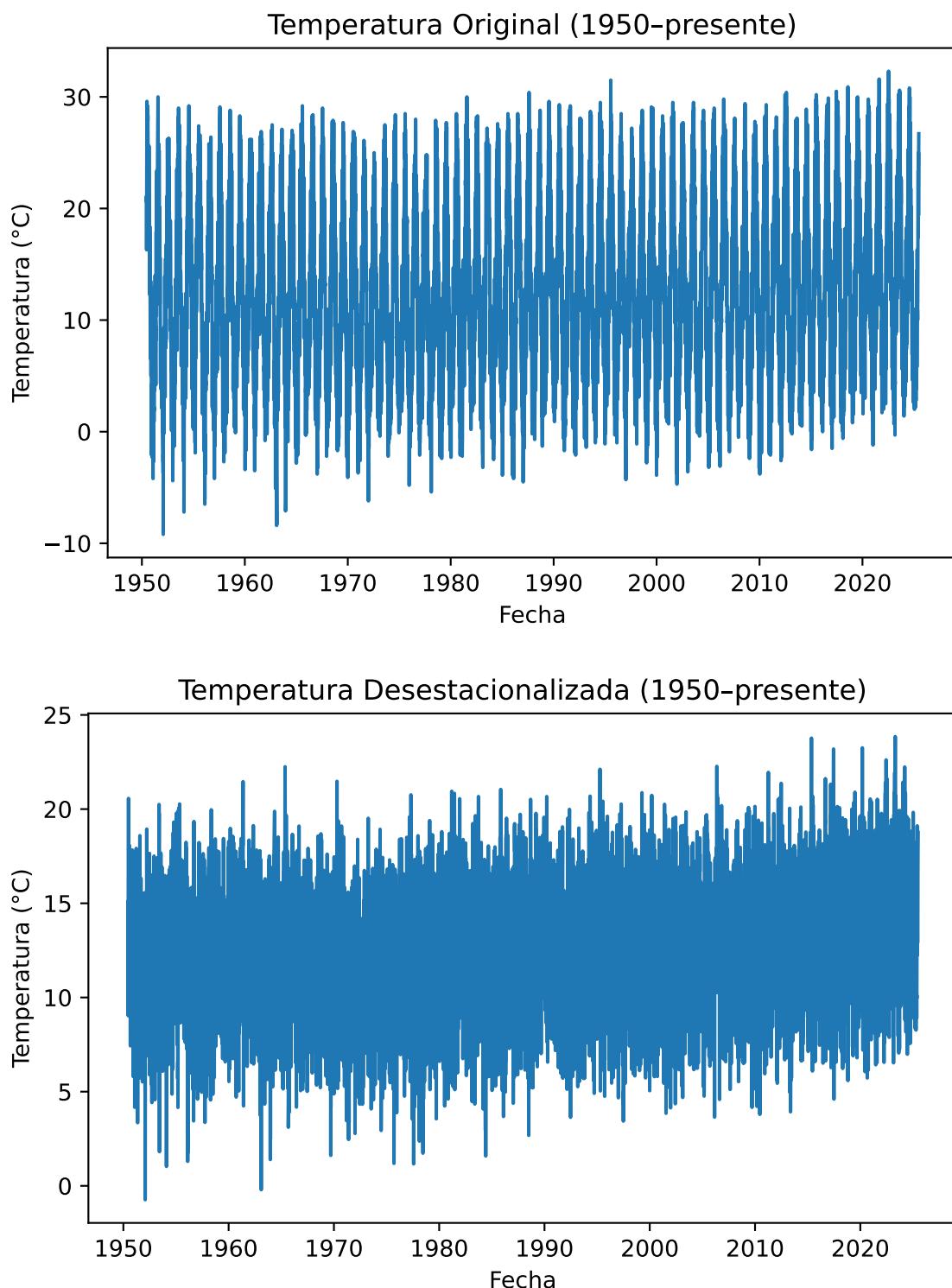
$$\mathbf{X}(t) = (x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)).$$

Es decir, el estado del sistema en un día, no es solamente el valor de la temperatura ese día, sino el valor de ese día más varios días anteriores. Pues bien, lo que necesitamos saber es cual es la dimensión óptima del estado del sistema. Si por ejemplo solo cojo un día, habrá muchos días que sean similares ya que habrá muchos casos en los que coincida la temperatura media para ese día. Sin embargo esto es engañoso, ya que no se tiene en cuenta el estado pasado del sistema. No es lo mismo estar en un día a 15 grados de temperatura media después de haber pasado una ola de calor, que estará a 15 grados después de varios días de ola de frío. De acuerdo al artículo turco un valor de $m = 12$ es óptimo.

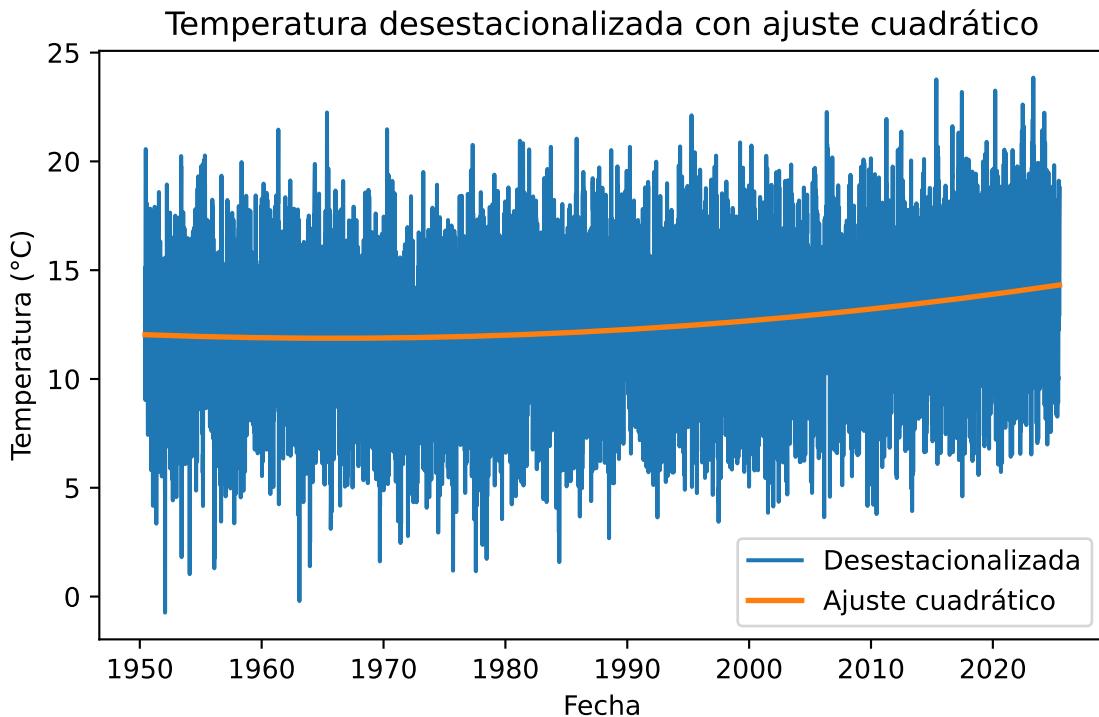
Con estos valores de τ y m le pedí a ChatGPT que me calculase el exponente de Lyapunov de la serie de temperaturas de Galapagar. ChatGPT usa en este caso el mismo algoritmo que para el cálculo del exponente de Laypunov de las simulaciones del péndulo doble. Se trata de un algoritmo bastante complicado cuya comprensión se me escapa. Hay que tener en cuenta que todos estos cálculos los realizo a con el modelo 04-mini-high, que tiene una capacidad matemática muy superior a la esperada de un alumno de bachillerato, y que además es capaz de hacer los cálculos en un entorno interno de Python, y de plotear resultados.

20.2 Exponente de Lyapunov para la serie de valores de temperatura

A continuación muestro todos los valores de temperatura que hemos sacado de la web open-meteo. Obviamente en la serie original vemos que hay un componente estacional muy fuerte. Le pedía ChatGPT que estimase la variación estacional y que la quitase de los datos, dándome la gráfica de temperatura desestacionalizada. En ella se ven las variaciones de temperatura como algo más aleatorio ya que hemos quitado las componentes estacionales. No obstante se ve una ligera subida de temperaturas desde el año 1950 hasta el presente, coincidente con el aumento de temperaturas observado a nivel global en la Tierra.



Como curiosidad, le pedía a ChatGPT que hiciese una regresión no lineal de orden 2 para ver como ha ido evolucionando la temperatura media en Galapagar desde 1950.



La temperatura media desestacionalizada ha subido desde 1950 hasta 2025 aproximadamente $\Delta y = y(2025) - y(1950) \approx 2.23 \text{ } ^\circ\text{C}$.

La tasa media de incremento es $\frac{2.23 \text{ } ^\circ\text{C}}{75 \text{ años}} \approx 0.030 \text{ } ^\circ\text{C/año}$ (aproximadamente $0.3 \text{ } ^\circ\text{C/década}$).
¡Casi nada!!!!

Volvamos al tajo. Ahora le pido a ChatGPT que me haga el cálculo del exponente de Lyapunov para estos datos de temperatura, usando el mismo procedimiento y parámetros que en el artículo de la estación de Turquía. El exponente de Lyapunov máximo calculado para la temperatura desestacionalizada es

$$\lambda_{\max} \approx 0.219 \text{ día}^{-1}.$$

20.2.1 Horizonte de predictibilidad

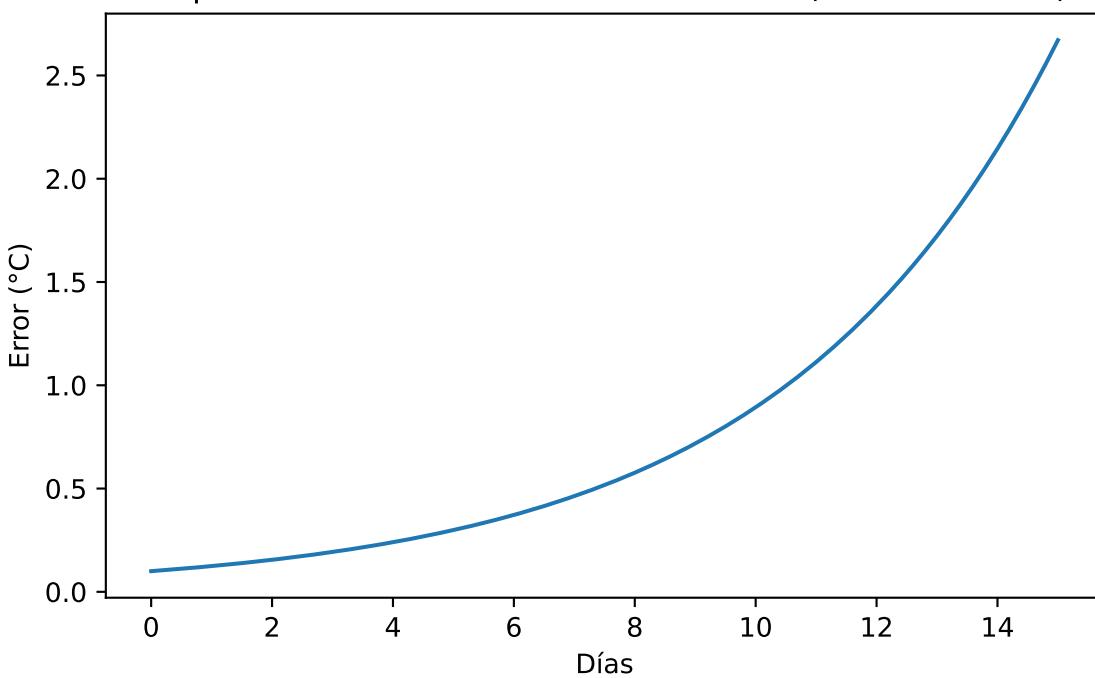
Veamos en qué se traduce esta exponente de Lyapunov. Al ser positivo sabemos que indica que estamos ante un sistema caótico, y que los errores se amplificarán con el tiempo. Veamos cuando multiplicamos por 10 un error inicial de 0.1 grados Centígrados:

$$T = \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{0.219} \ln(10) \approx 10.5 \text{ días.}$$

20.2.2 Amplificación de un error inicial de 0.1 °C tras 15 días

Y ahora veamos de forma gráfica cómo se va amplificando el error inicial de 0.1 grados tras quince días.

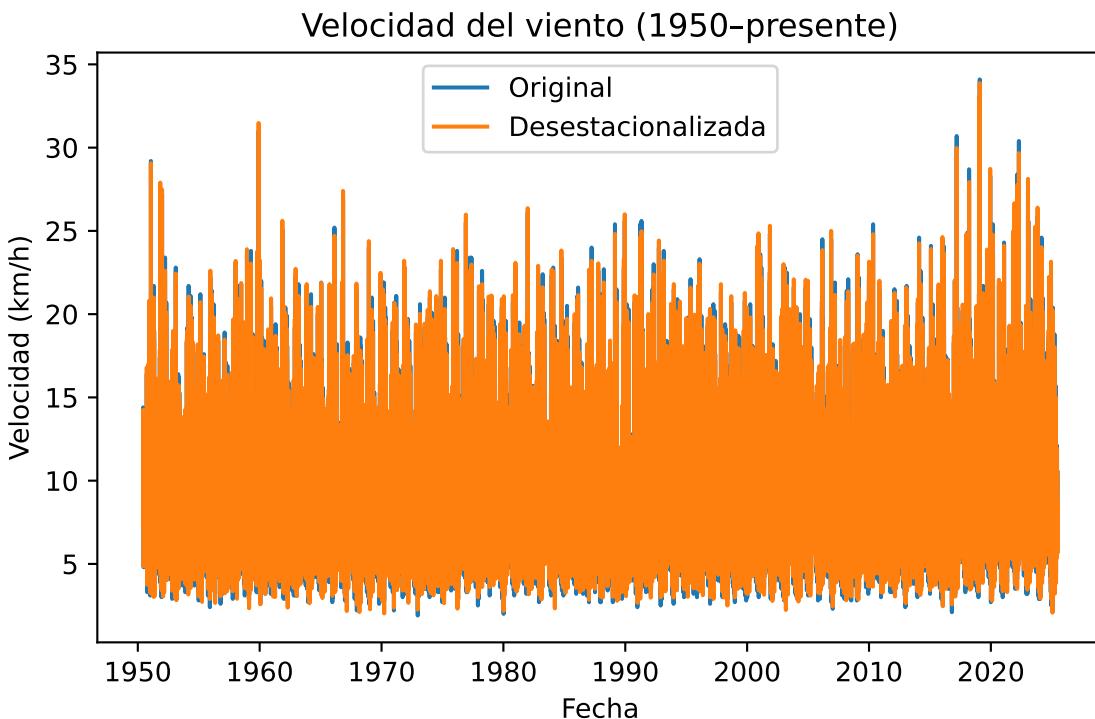
Amplificación de un error inicial de 0.1°C ($\lambda = 0.219 \text{ d\'ia}^{-1}$)



Estos valores refuerzan las hip\u00f3tesis inciales con las que hab\u00edamos especulado. Pasadas dos semanas es muy d\u00edf\u00edl tener estimaciones precisas del tiempo meteorol\u00f3gico.

20.3 Exponente de Lyapunov para la serie de velocidad del viento

A continuaci\u00f3n cargamos y desestacionalizamos los datos de velocidad del viento (1950–presente), mostramos la serie original y la desestacionalizada:



En este caso no hay gran diferencia entre la componente desestacionalizada y sin desestacionalizar.

20.3.1 Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov máximo calculado para la serie de viento desestacionalizada (usando Wolf, $m = 12$, $\tau = 3$) es

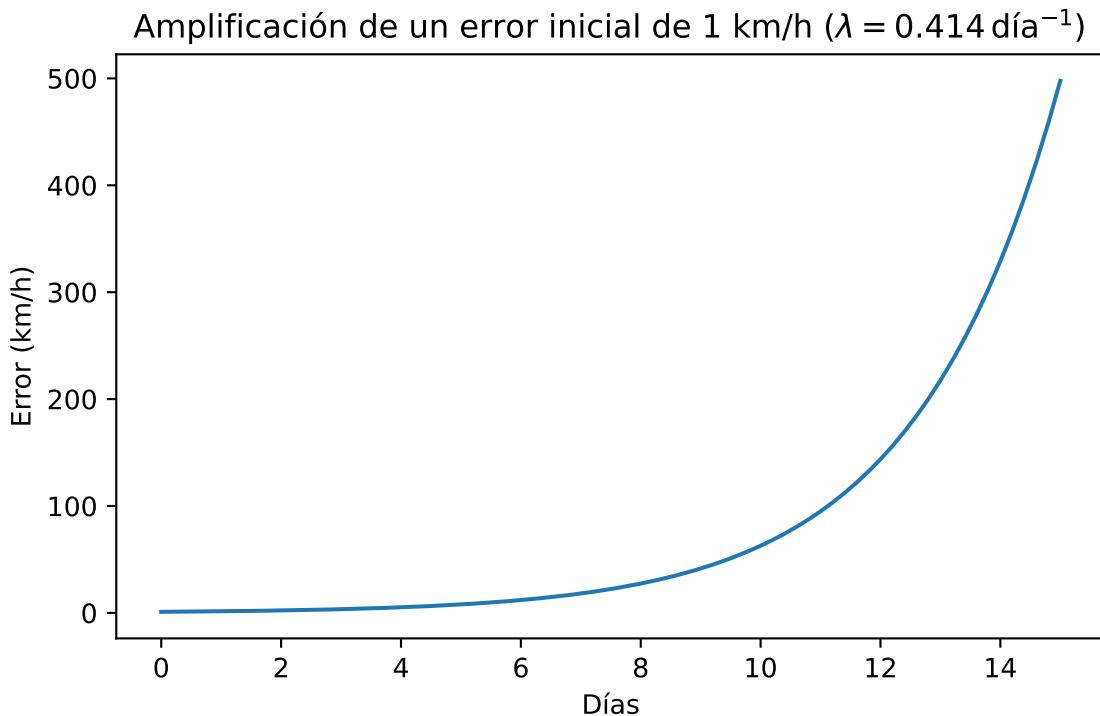
$$\lambda_{\max} \approx 0.414 \text{ día}^{-1}.$$

20.3.2 Horizonte de predictibilidad

Para un error inicial $\varepsilon = 1 \text{ km/h}$ y un factor de crecimiento $10\times$ ($L/\varepsilon = 10$):

$$T = \frac{1}{\lambda_{\max}} \ln\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{0.414} \ln(10) \approx 5.6 \text{ días.}$$

20.3.3 Amplificación de un error inicial de 1 km/h tras 15 días



20.3.4 Comparación de la predictibilidad: viento vs temperatura

En el caso de la temperatura desestacionalizada, obtuvimos un exponente de Lyapunov

$$\lambda_{\max}^{\text{exttemp}} \approx 0.219 \text{ día}^{-1},$$

lo que da un horizonte de predictibilidad de

$$T_{exttemp} = \frac{1}{0.219} \ln(10) \approx 10.5 \text{ días.}$$

Para la velocidad del viento desestacionalizada hallamos

$$\lambda_{\max}^{extviento} \approx 0.414 \text{ día}^{-1},$$

y por tanto

$$T_{extviento} = \frac{1}{0.414} \ln(10) \approx 5.6 \text{ días.}$$

Observamos que

$$T_{extviento} \approx \frac{1}{2} T_{exttemp}.$$

Esto significa que **la serie de viento es más caótica**: su exponente de Lyapunov es casi el doble, y los errores iniciales se amplifican mucho más rápido.

Varias razones explican esta diferencia:

- **Variabilidad a corto plazo**: la velocidad del viento está dominada por fenómenos de escala reducida (frentes, turbulencia, ráfagas) que inducen cambios bruscos.
- **Forzamientos estacionales débiles**: el ciclo anual aporta poca oscilación comparado con la temperatura, por lo que el viento muestra un comportamiento intrínsecamente más errático.

1. ¿Qué es un “forzamiento estacional”?

Es la variación periódica y predecible que se repite cada año, debida al cambio de estación (más sol y calor en verano, menos en invierno).

2. Temperatura vs. viento

- **Temperatura**: el rango típico entre verano e invierno puede ser de ± 10 °C o más. Es decir, el ciclo anual supone una parte muy importante de la variabilidad total.
- **Viento**: la velocidad media cambia solo unos ± 2 km/h a lo largo del año. Esa “señal” anual es pequeña comparada con las oscilaciones diarias o las rachas impredecibles.

3. Efecto al desestacionalizar

- Al quitar la estacionalidad de la temperatura, reducimos mucho la amplitud de la serie y “dejamos ver” las fluctuaciones reales.
- Al hacer lo mismo con el viento, casi no cambiamos nada: la mayor parte de la variabilidad ya venía de eventos de corto plazo, no del ciclo anual.
- **Implicaciones prácticas**: mientras que las predicciones de temperatura pueden ser útiles hasta unos 10 días, las de viento pierden precisión ya a los 5–6 días, reflejo de su carácter más caótico.

21 Caos en las predicciones meteorológicas

La meteorología es un ejemplo paradigmático de sistema caótico. Edward Lorenz, en su famoso artículo de 1963, demostró que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales pueden producir divergencias exponenciales en la evolución del sistema atmosférico (Lorenz, 1963). Esta propiedad se cuantifica mediante el **exponente de Lyapunov**, el cual mide la tasa a la que dos trayectorias inicialmente cercanas se separan en el espacio de fases.

Como ya hemos mencionado uno de los retos del proyecto es demostrar que el tiempo es un sistema caótico. En la anterior entrada del proyecto hice un cálculo del exponente de Lyapunov cogiendo medidas reales de variables como la temperatura y el viento, y analizándolas por medio de rutinas hechas por ChatGPT. Los valores resultantes eran lo esperado: un horizonte de predictibilidad de 10 días para la temperatura media diaria.

Ahora vamos a emprender un método indirecto de cálculo. Las diferentes organizaciones meteorológicas realizan todos los días predicciones de hasta 14 días. Puesto que el tiempo es caótico, este caos se tiene que reflejar en el error de las predicciones. A medida que aumenta la distancia con respecto al día actual, el error tiene que aumentar. Este incremento no será lineal sino que será exponencial, de acuerdo a la teoría que ya hemos visto. Si cogemos los errores, y hacemos un logaritmo, podremos hacer una regresión lineal del logaritmo del error, lo que nos dará el exponente de Lyapunov. Así de sencillo. Se trata de una medida indirecta, pero creo que muy sencilla del exponente de Lyapunov.

21.1 Proceso de Recopilación de Datos Mediante el Script de Python

En este punto lo primero que tenemos que hacer es recopilar datos. En este caso en vez de usar open-meteo, usé Visual Crossing (<https://www.visualcrossing.com/>) , que dispone también de una utilidad gratuita para descargar previsiones meteorológicas. Para ello, pedí a ChatGPT que hiciera un script para coger los datos de Visual Crossing. El script desarrollado tiene dos funciones principales, diseñadas para ir acumulando la información necesaria a lo largo del tiempo:

a) Registro de Pronósticos (“Forecast”)

Cada día se obtiene un pronóstico para 15 días (el día actual + 14 días de anticipación) a través de la API de Visual Crossing. Para cada parámetro (temperatura, humedad, presión y velocidad del viento), se crea un archivo CSV en el que cada fila contiene:

- **Columna 1:** La fecha de creación del pronóstico (formato americano: M-D-YYYY).
- **Columnas 2 a 15:** Los valores predichos para 1 día adelante, 2 días adelante, ..., hasta 14 días adelante.

Matemáticamente, si denotamos por $F_{\text{param}}(d, n)$ el valor predicho para el parámetro en el día $d + n$ cuando el pronóstico se realizó en el día d , la fila correspondiente al pronóstico realizado en la fecha d es:

$$\text{Fila}_d = [d, F_{\text{param}}(d, 1), F_{\text{param}}(d, 2), \dots, F_{\text{param}}(d, 14)]$$

b) *Registro Retroactivo (“Retro”)*

El propósito de este archivo es reconstruir, para cada día objetivo, la evolución de los pronósticos hechos en días anteriores y compararlos con el valor observado real. Para cada parámetro se crea un archivo CSV en el que cada fila contiene:

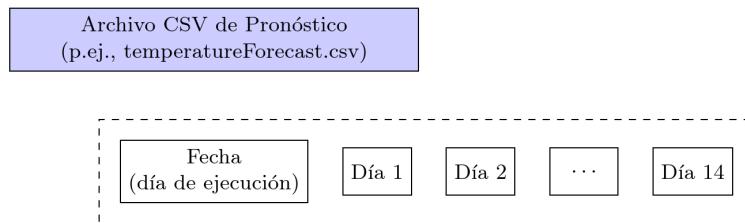
- **Columna 1:** La fecha del día objetivo (por ejemplo, ayer, formato M-D-YYYY).
- **Columna 2:** El valor observado históricamente para ese día.
- **Columnas 3 a 16:** Los pronósticos para ese mismo día, realizados desde 1 hasta 14 días antes.

En otras palabras, para un día objetivo d_{target} , se recupera el pronóstico realizado en $d_{\text{target}} - n$ (para $n = 1, 2, \dots, 14$) y se toma el valor predicho correspondiente al n -ésimo día. La fila retroactiva es:

$$\text{Retro}_d = [d_{\text{target}}, O(d_{\text{target}}), F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - 1, 1), F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - 2, 2), \dots, F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - 14, 14)]$$

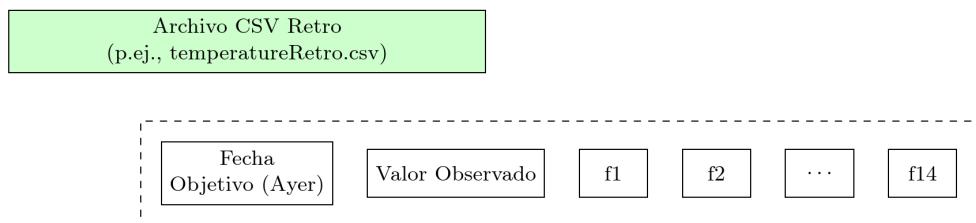
donde $O(d_{\text{target}})$ es el valor observado real para el parámetro en el día objetivo.

La estructura de los dos ficheros se detalla en la siguiente figura



Estructura de la Fila de Pronóstico:

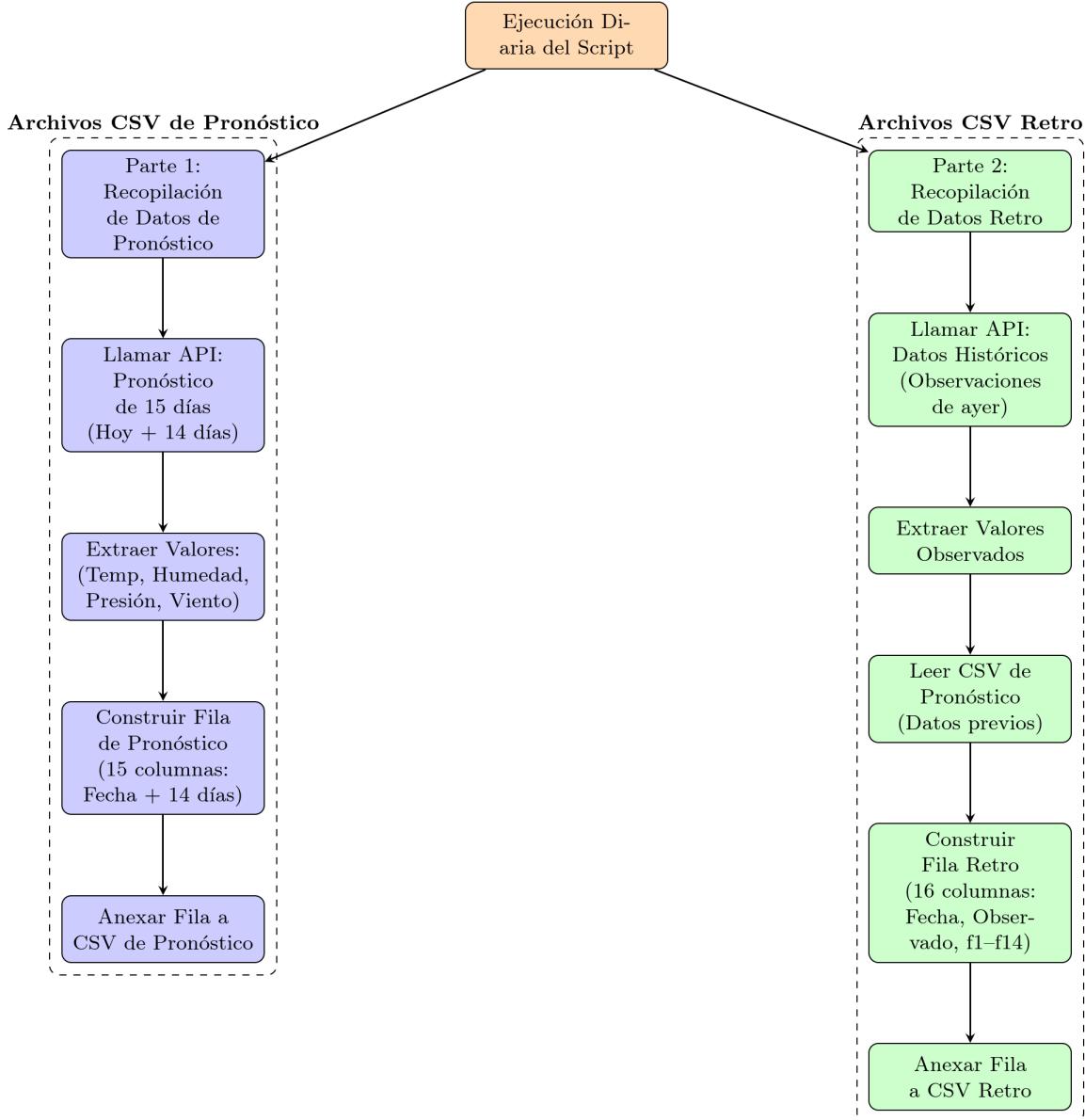
Columna 1: Fecha en que se realizó el pronóstico (notación americana)
 Columnas 2–15: Pronósticos para 1 a 14 días adelante



Estructura de la Fila Retro:

Columna 1: Fecha objetivo (Ayer)
 Columna 2: Valor observado (histórico)
 Columnas 3–16: Pronósticos para la fecha objetivo realizados 1 a 14 días antes (f1–f14)

Y el procedimiento que hace el script diariamente se detalla a continuación.



El error de cada pronóstico se define como:

$$e(n) = |F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - n, n) - O(d_{\text{target}})|$$

para $n = 1, 2, \dots, 14$. Esta serie $\{e(n)\}$ representa cómo varía el error en función del tiempo de anticipación.

21.2 Análisis de Datos y Determinación del Coeficiente de Lyapunov

a) Enfoque Teórico Clásico

En un sistema caótico, la separación entre dos trayectorias evoluciona de forma exponencial. Asumiendo que el error en el pronóstico $e(n)$ crece de manera similar, se modela como:

$$e(n) = e(0) e^{\lambda n}$$

Tomando logaritmos:

$$\ln e(n) = \ln e(0) + \lambda n$$

Por lo tanto, si se realiza un ajuste lineal de $\ln e(n)$ en función de n , la pendiente de la recta brinda una estimación empírica de λ .

b) Enfoque Empírico Propuesto

En este estudio, en lugar de disponer de dos trayectorias infinitesimalmente separadas, se utilizan las diferencias en las predicciones realizadas en distintos días para el mismo objetivo. Cada error $e(n)$ se obtiene como la diferencia entre el pronóstico hecho n días antes y el valor observado:

$$e(n) = |F_{\text{param}}(d_{\text{target}} - n, n) - O(d_{\text{target}})|$$

La estimación empírica del exponente de Lyapunov se obtiene realizando un ajuste lineal de:

$$\ln e(n) = \ln e(0) + \lambda_{\text{emp}} n$$

donde λ_{emp} es la pendiente obtenida a partir de la regresión lineal sobre los datos $(n, \ln e(n))$.

Esto ya lo vimos en la sección [Efecto mariposa](#). En esa sección vimos como el error iba creciendo exponencialmente, y al hacer el logaritmo nos quedó una recta cuya pendiente era el exponente de Lyapunov de la función logística para ese valor de r . En este caso, veremos que el error de pronóstico crece también exponencialmente, no linealmente, lo que al hacer el logaritmo nos permitirá sacar la pendiente y por tanto el exponente de Lyapunov.

c) Confrontación con la Fórmula Tradicional

Fórmula Tradicional:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|}$$

Fórmula Empírica del Estudio:

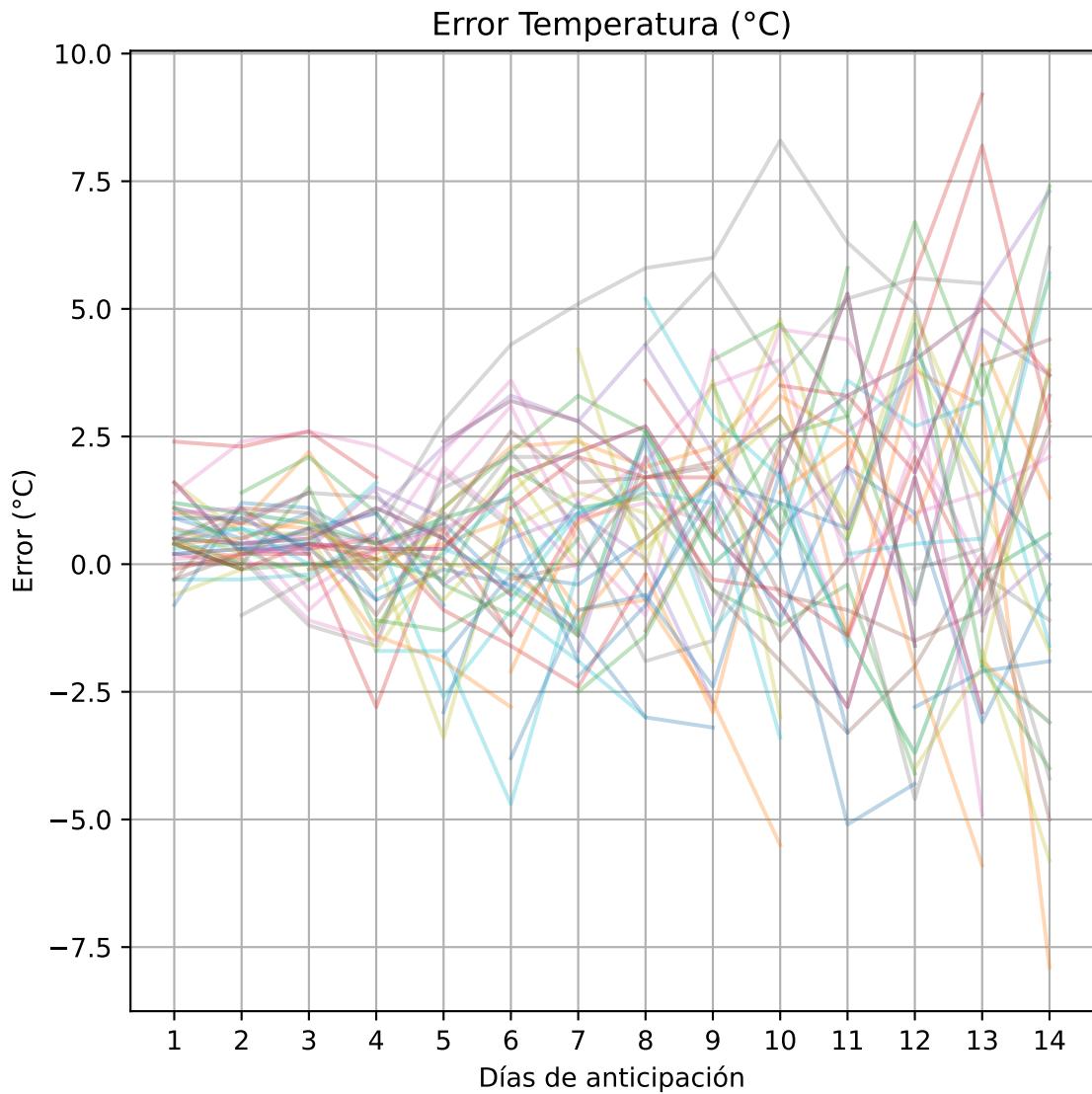
$$\lambda_{\text{emp}} \approx \text{slope}(\ln e(n) \text{ vs. } n)$$

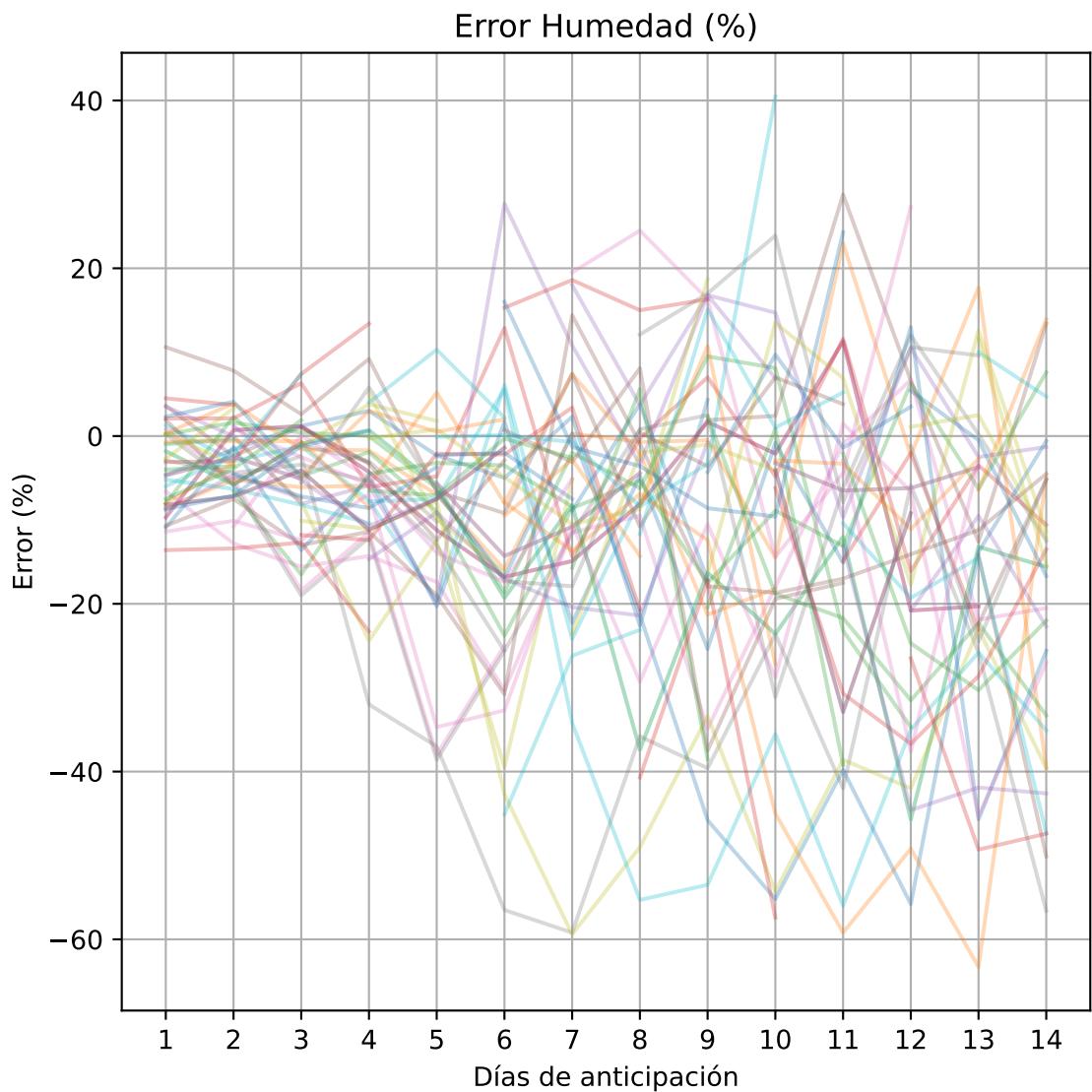
En este caso, $e(n)$ incorpora tanto la sensibilidad a las condiciones iniciales como los errores inherentes del modelo de pronóstico. Además, el análisis se realiza sobre un rango discreto de días (1 a 14), por lo que λ_{emp} debe interpretarse como una aproximación de la tasa de divergencia del error.

21.3 Resultados

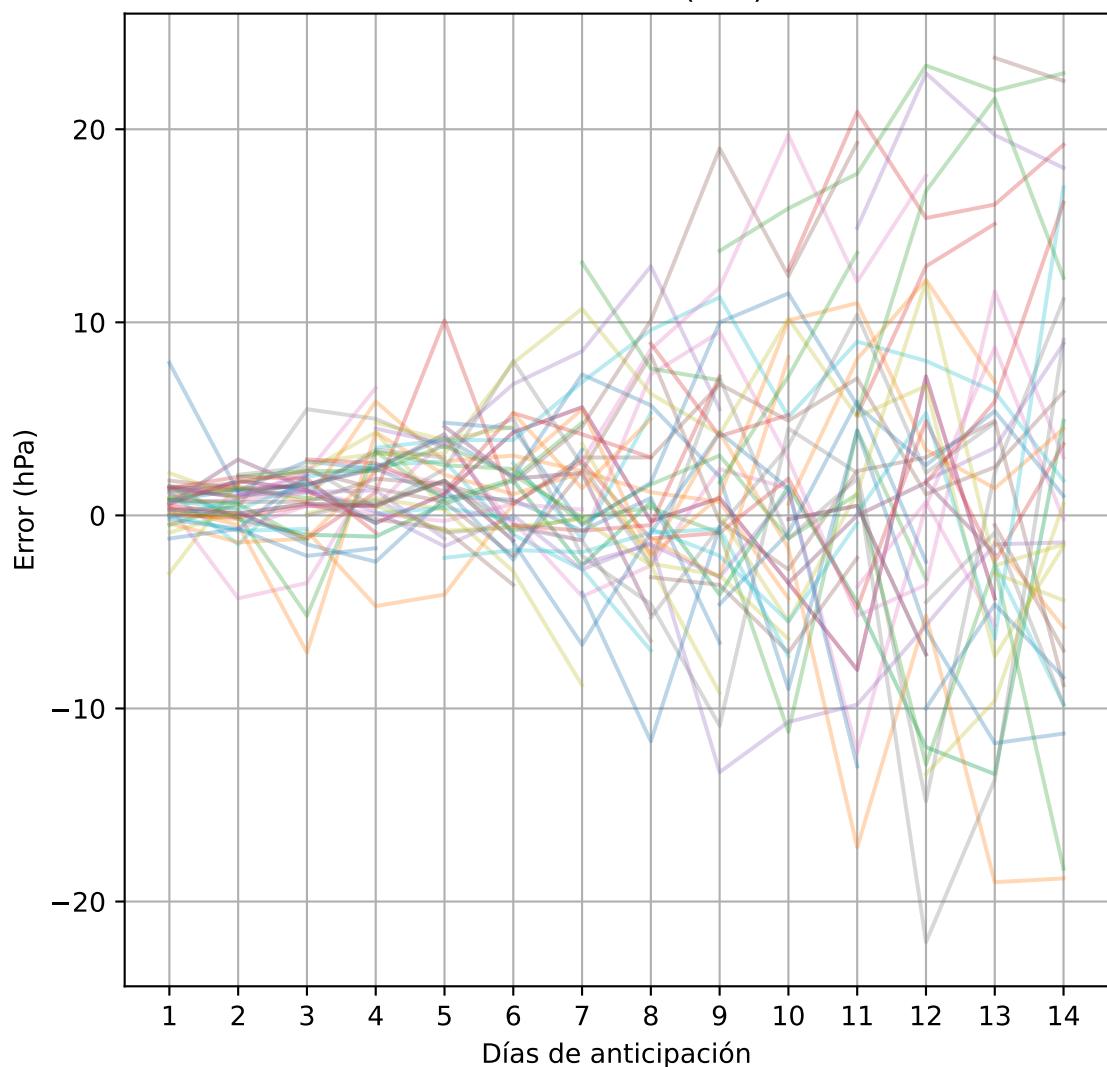
Durante los meses de febrero, marzo y abril estuve recopilando las predicciones y los valores observados de temperatura, humedad, viento y presión atmosférica para Galapagar.

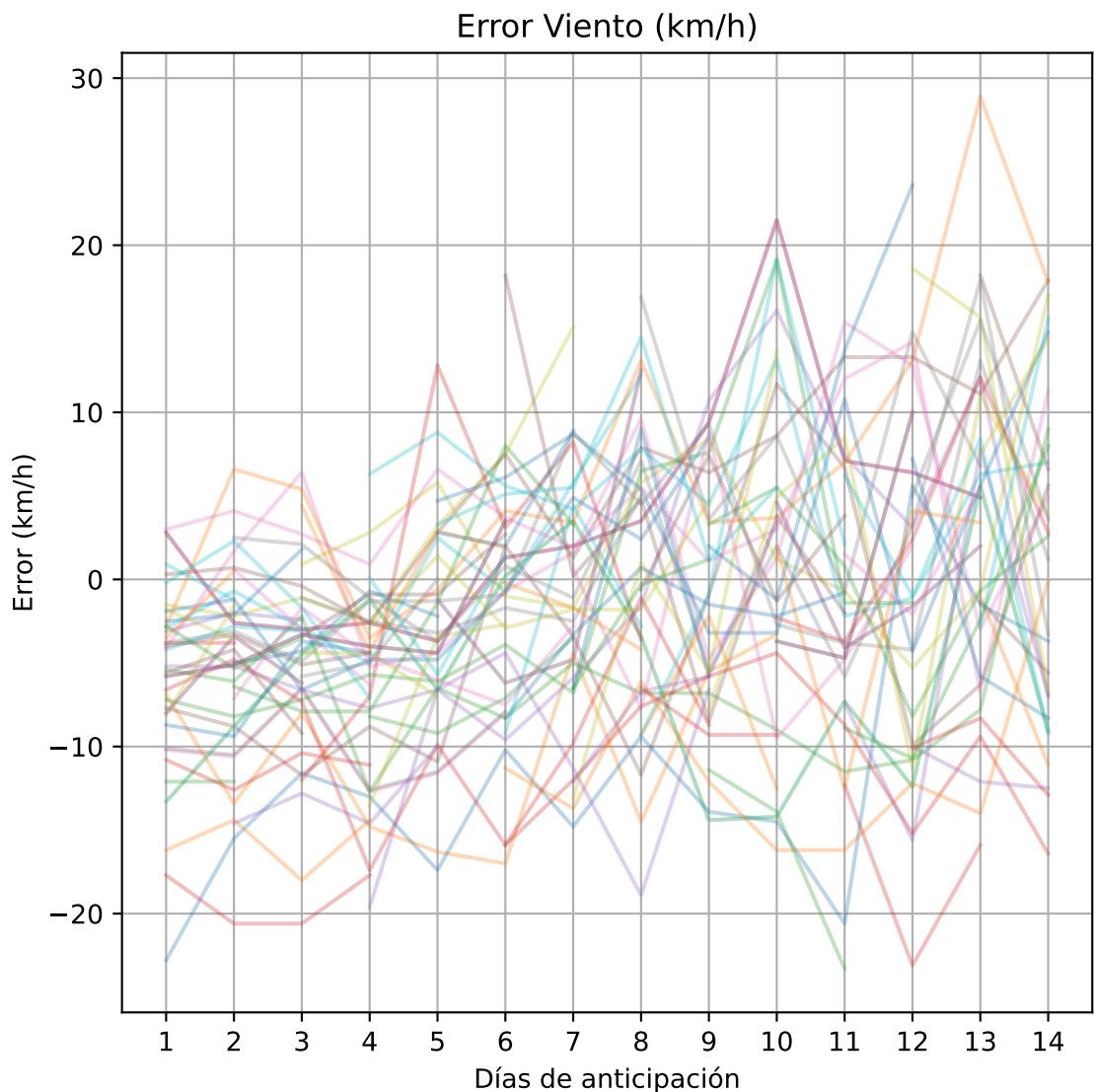
El conjunto de errores para cada día de la predicción se muestran a continuación (cada línea representa un día en el que se realiza la predicción).



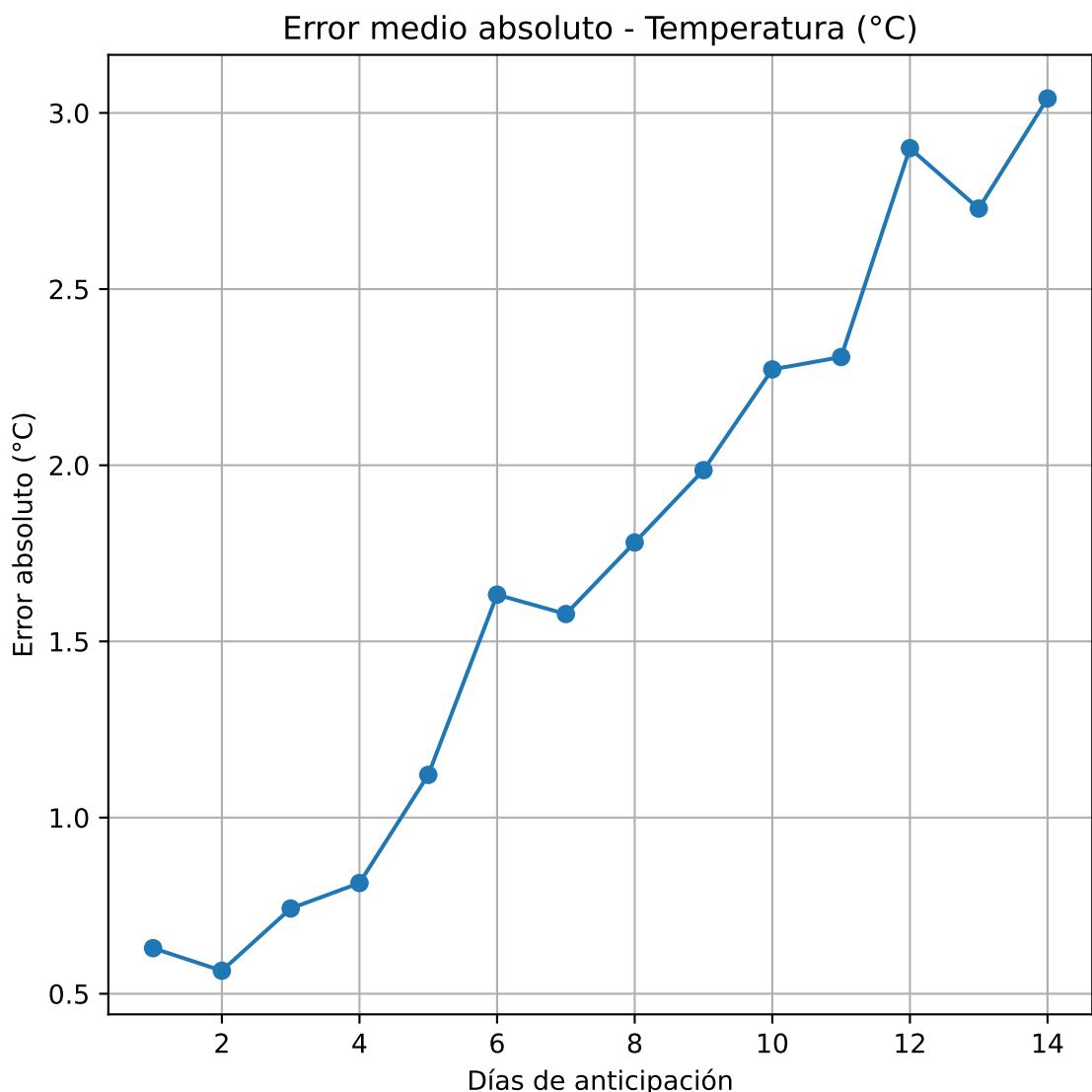


Error Presión (hPa)

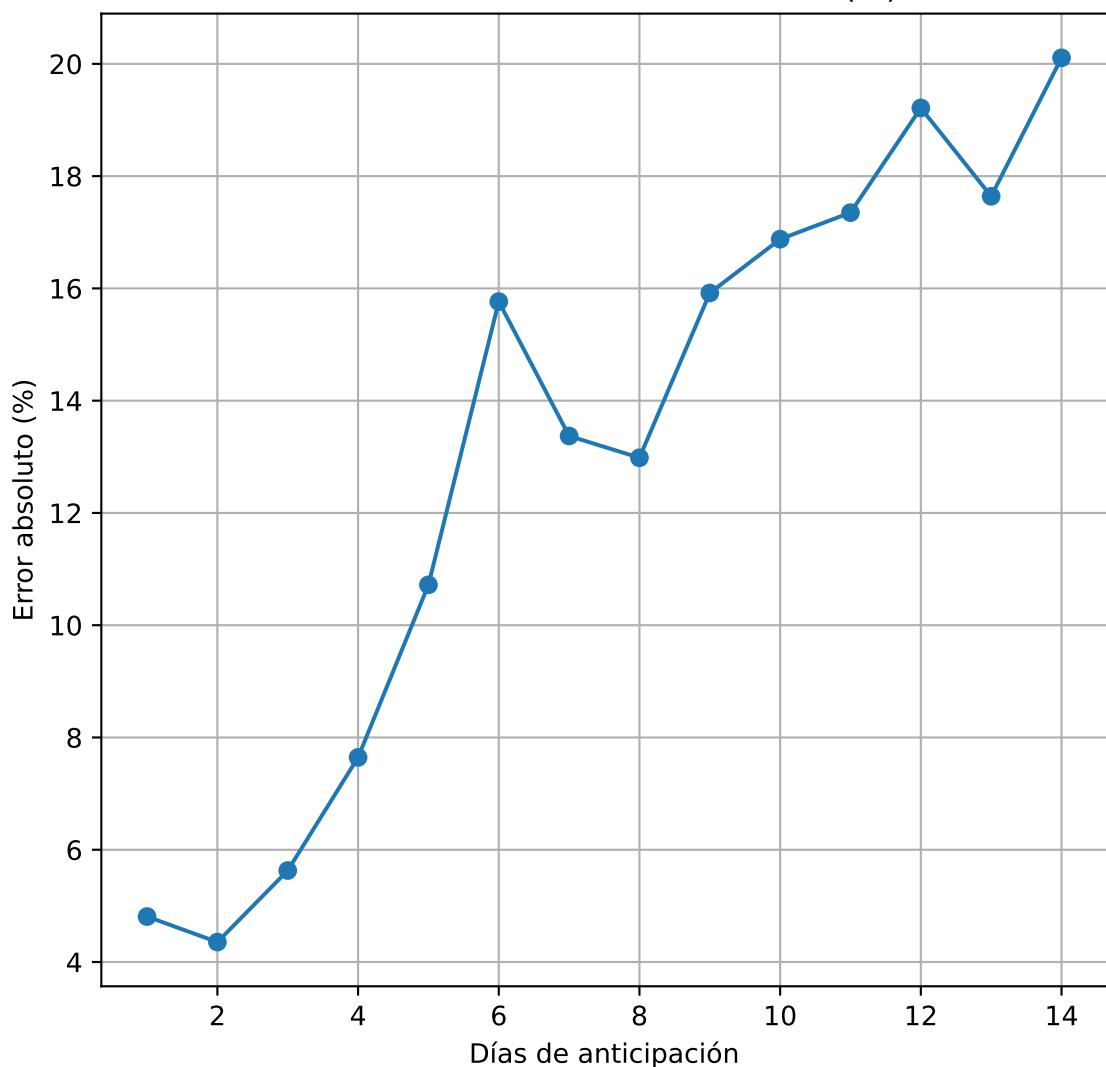




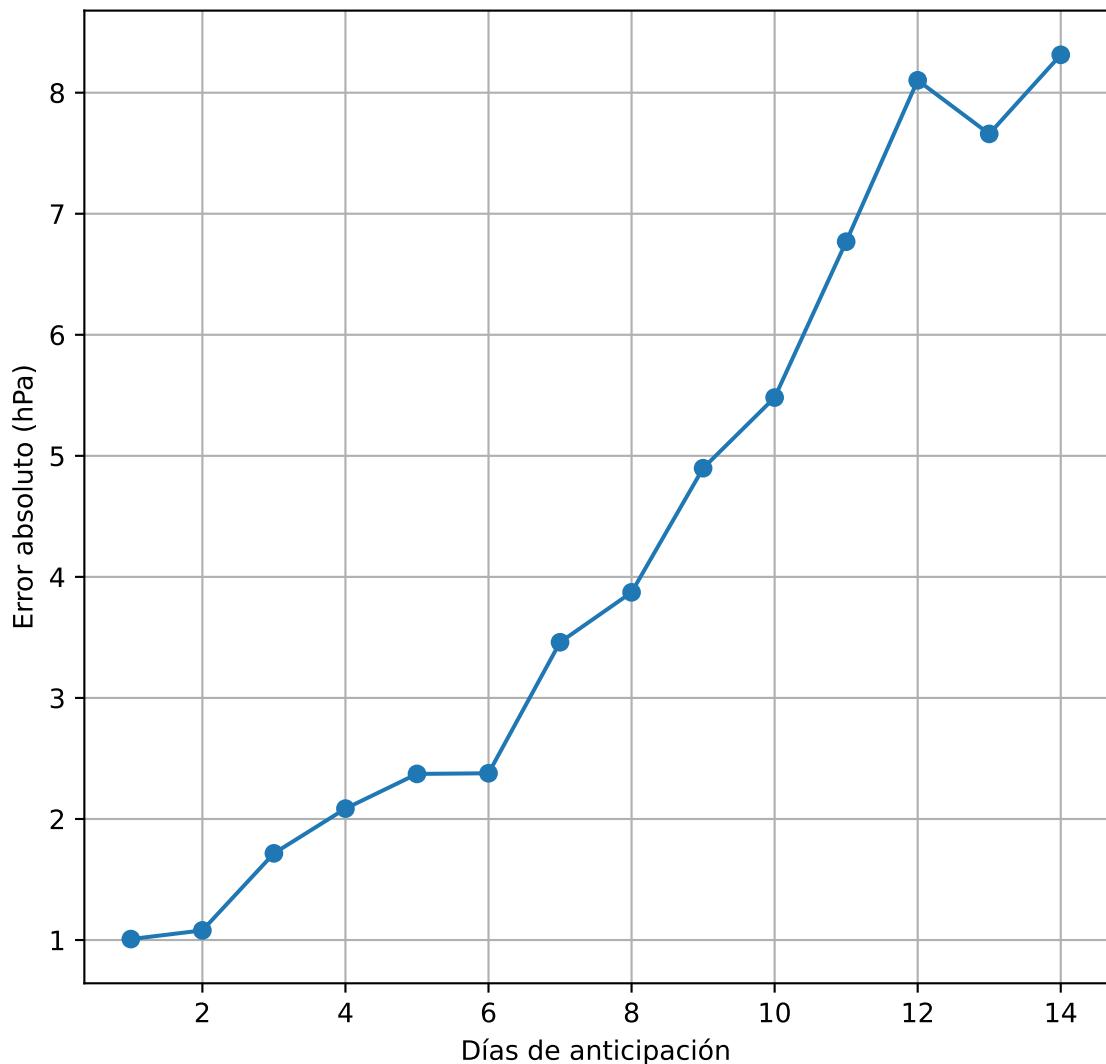
Los errores medios en valor absoluto de predicción en función del número de días anteriores en los que se hizo la predicción se muestran a continuación. Se ve claramente que los errores van aumentando exponencialmente.

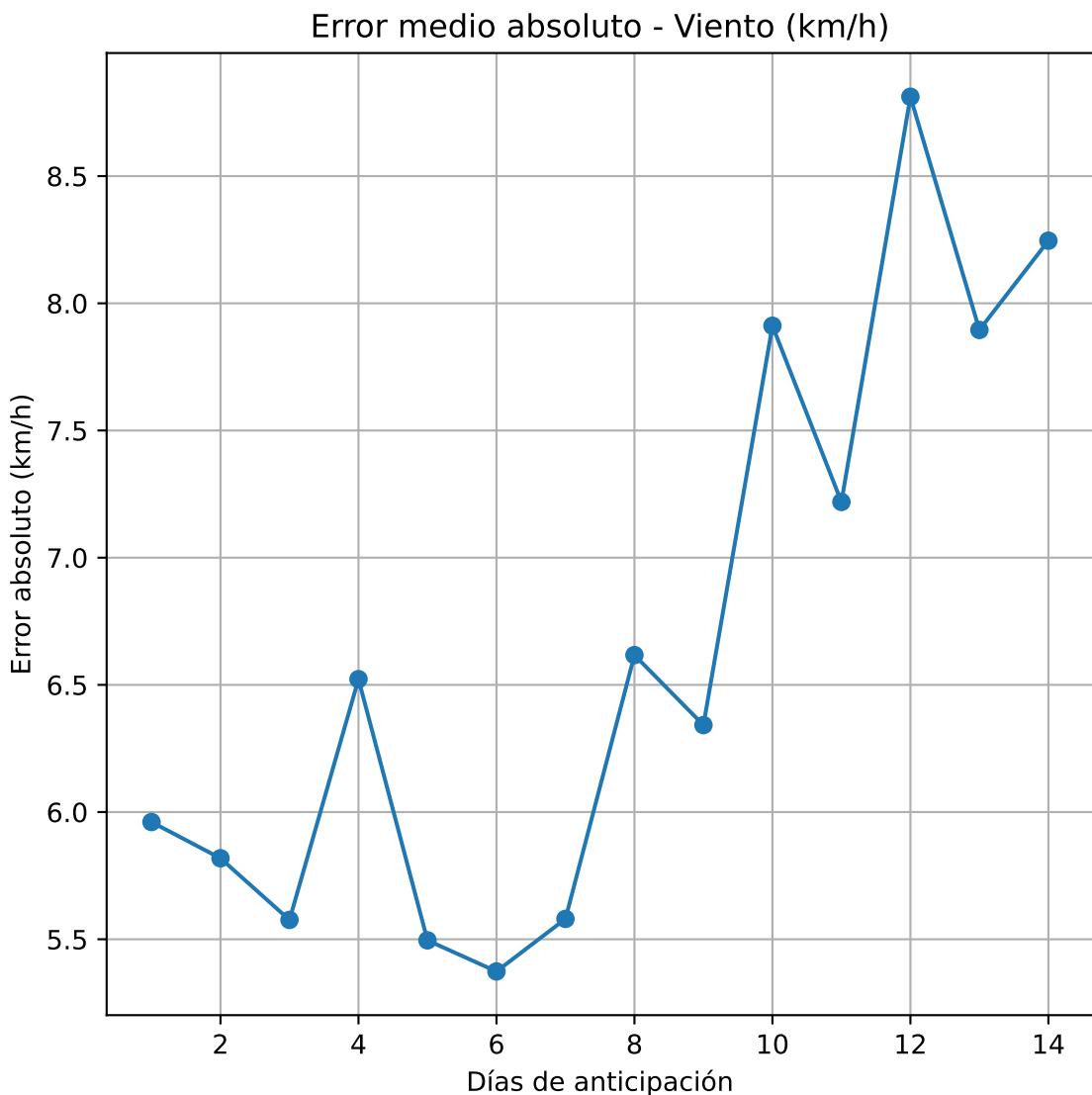


Error medio absoluto - Humedad (%)

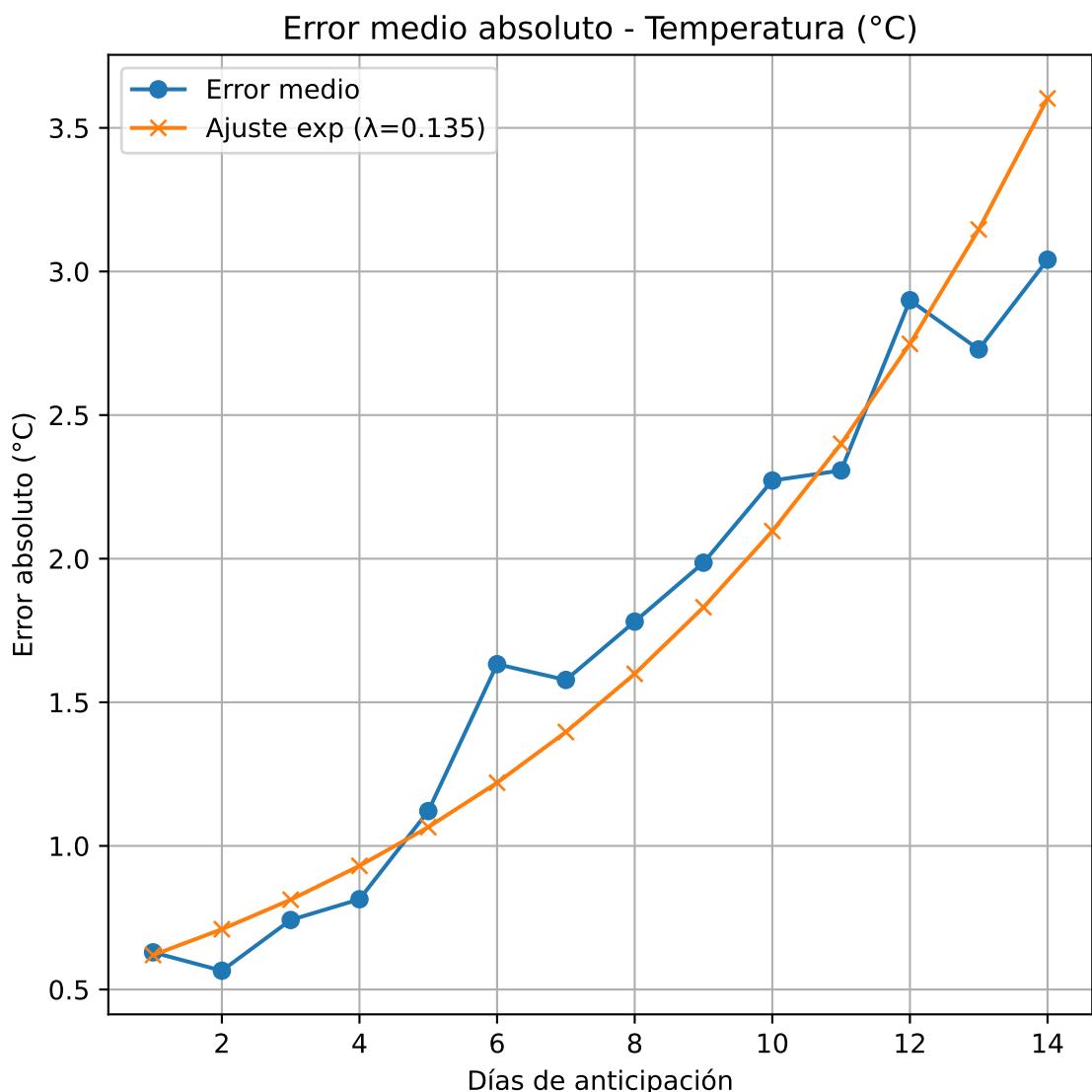


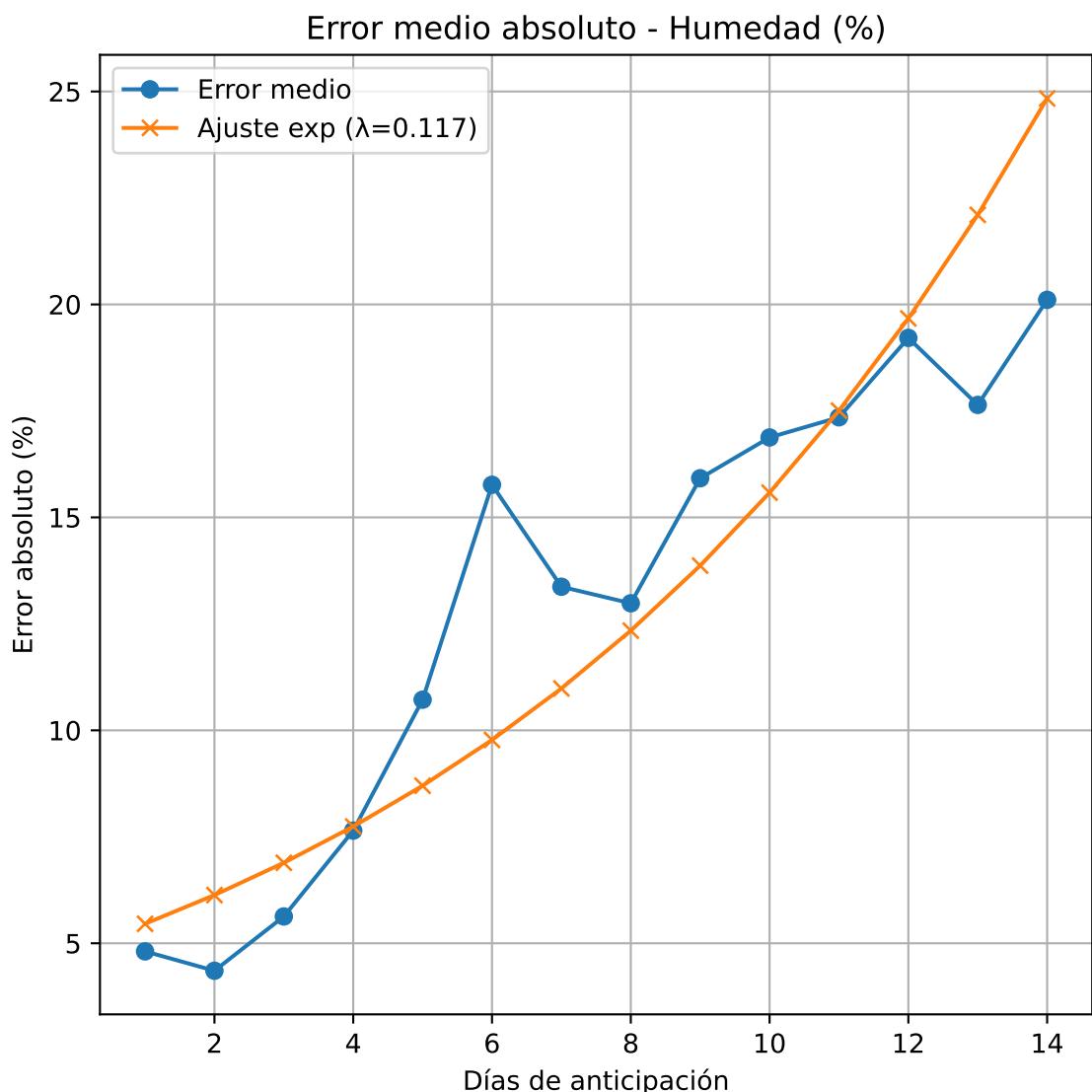
Error medio absoluto - Presión (hPa)



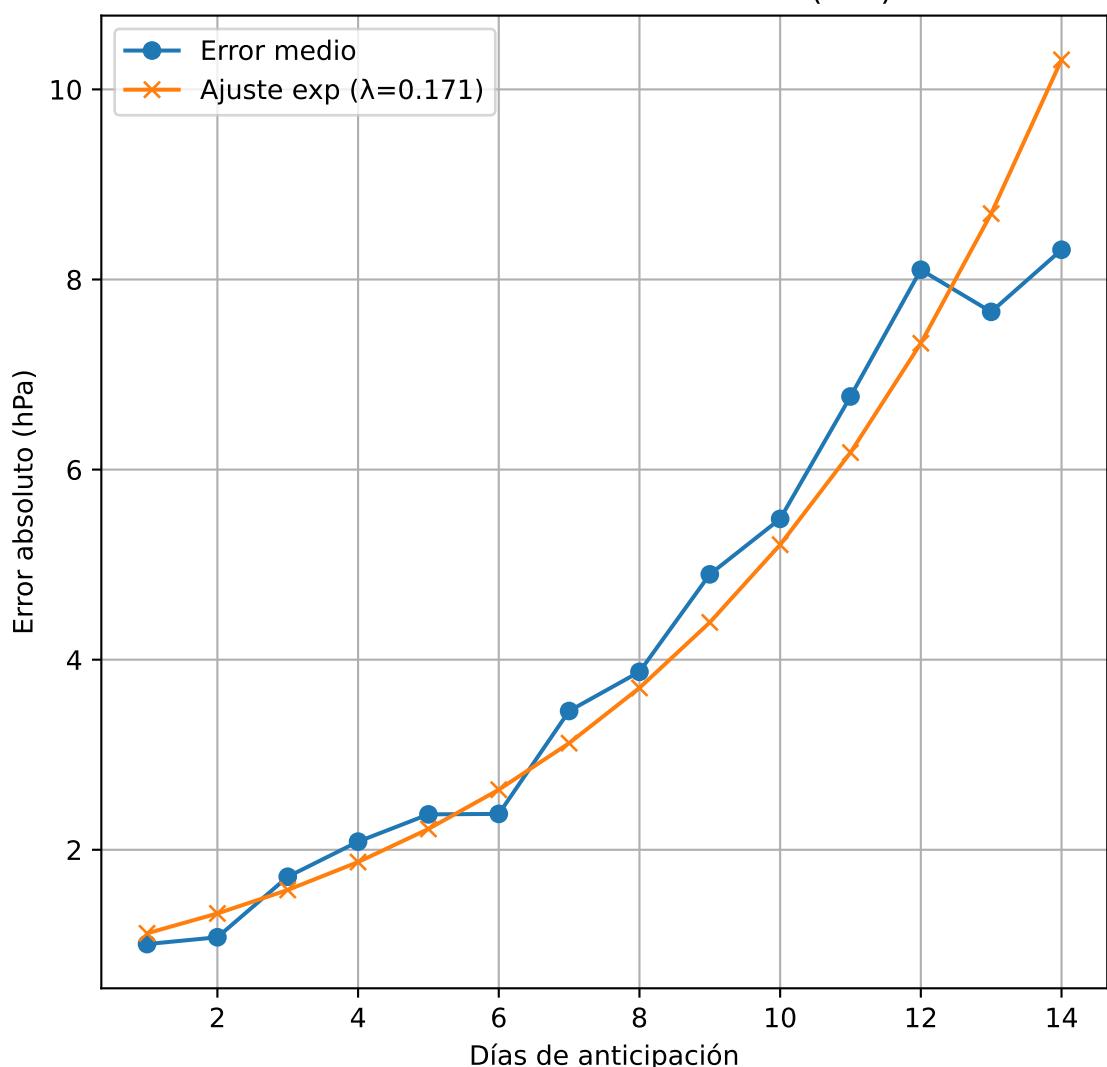


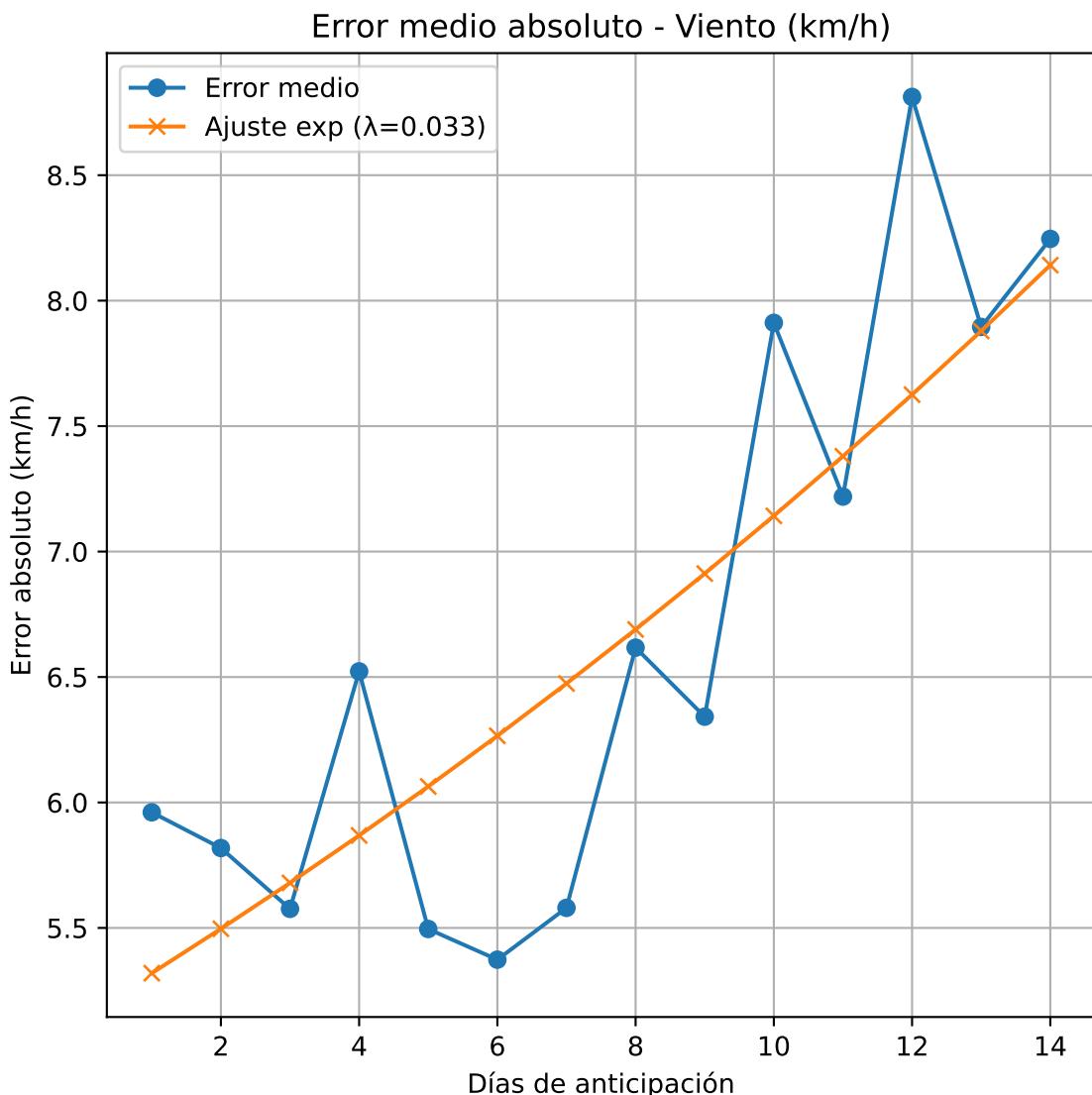
Y ahora le pedimos a ChatGPT que nos calcule el exponente de Lyapunov, y que nos trace de forma superpuesta el error de acuerdo al exponente de Lyapunov.





Error medio absoluto - Presión (hPa)





Los exponentes de Lyapunov salen más pequeños que los calculados mediante las series históricas en la sección anterior Predictibilidad. Hay que tener en cuenta que los exponentes en la sección anterior se tomaban sobre la base de 75 años, mientras que aquí tenemos un experimento más limitado, solamente tres meses, por lo que es normal que no cuadren del todo los datos. Sin embargo, tal y como hipotizamos, estamos alrededor de las dos semanas como límite de predictibilidad.

Además lo que es muy relevante, es ver como el error de predicción crece exponencialmente. Se ponen de manifiesto dos causas: la inexactitud de las condiciones inciales, y la inexactitud de los modelos y sus cálculos. Puesto que el sistema modelado es caótico, tal y como esperábamos los errores crecen exponencialmente.

21.4 Referencias Bibliográficas

22 Entrevista con expertos de la AEMET

El Jueves 19 de Junio tuve la oportunidad de tener una entrevista con dos meteorólogos de la Agencia Estatal de Meteorología para hacerles algunas preguntas sobre la parte del proyecto donde se estudia el caos en la predicción meteorológica y climática. De esta manera he podido incluir también la opinión de expertos en el tema en este proyecto. Aquí están todas las preguntas que hice durante la entrevista y cuáles fueron las respuestas de los expertos:

22.1 ¿Qué condiciones atmosféricas hacen que el sistema sea más caótico y por tanto que sea más difícil llevar a cabo una predicción meteorológica fiable, y cuales lo hacen más fácil?

Las condiciones en las que la atmósfera es más inestable como borrascas o ambientes de tormenta, porque es más difícil establecer unas condiciones iniciales que no tengan mucho error y que sean precisas. Esto hace que el error inicial en las mediciones sea grande y que se propague más rápidamente.

22.2 ¿Existe un horizonte de predictibilidad a partir del cual las predicciones meteorológicas no van a llegar a ser fiables nunca sin importar los avances tecnológicos y en los modelos que se puedan llevar a cabo en el futuro? ¿Cuál consideráis que es el horizonte de predictibilidad actualmente?

Sí, existe un horizonte de predictibilidad en meteorología, y es teórico y práctico al mismo tiempo. Se trata de un límite físico-matemático impuesto por la naturaleza del sistema atmosférico: un sistema caótico y no lineal. Este límite está alrededor de los 20 días y no importa cuán potentes sean los ordenadores del futuro o lo precisos que sean los sensores, este límite no va a poder superarse.

22.3 ¿Qué avances tecnológicos o metodológicos han mejorado más la capacidad predictiva frente a la naturaleza caótica de la atmósfera?

Los satélites, ya que permiten tomar mediciones de las diferentes capas de la atmósfera con más facilidad y de zonas más amplias que los globos meteorológicos, la capacidad computacional de los superordenadores y que se van añadiendo nuevos términos a las ecuaciones que dan más detalle y ayudan a mejorarlas.

22.4 ¿Existe algún parámetro como precipitación, viento, temperatura o humedad que sea más difícil de predecir y más caótico que otro o por el contrario más fácil de predecir que otro?

Si, los parámetros que son derivados de los demás que se obtienen sabiendo otros como la precipitación o la nubosidad, ya que no salen directamente de las ecuaciones que se utilizan en las predicciones, si no que se obtienen teniendo en cuenta mucho parámetros más simples que si salen de las ecuaciones

22.5 ¿Cómo se tiene en cuenta el error que existe a la hora de hacer las simulaciones de la atmósfera, que vienen dados por el propio límite de los ordenadores en cuanto a precisión en los decimales?

No existe ningún método como tal para reducir o eliminar ese error pero muchas veces no se llega a aprovechar toda la precisión que te permite el ordenador ya que los cálculos llevan mucho tiempo, y muchas veces se necesitan tener terminadas las predicciones rápidamente.

22.6 ¿Existe sensibilidad a las condiciones iniciales en las predicciones climáticas a largo plazo de la misma manera que en la predicción meteorológica, donde acaban dando lugar al caos?

Si existe pero las condiciones iniciales afectan menos ya que las ecuaciones utilizadas se simplifican y se vuelven lineales. Por otra parte el resultado no tiene que ser tan preciso ya que lo que se obtiene es una media. Sin embargo, aunque no sea casi caótico sigue siendo difícil establecer las condiciones iniciales por lo que el error inicial puede acabar propagándose aunque más lentamente que en las predicciones meteorológicas.

22.7 ¿Existe alguna condición o tipo de clima el cual presenta más o menos caos a la hora de realizar predicciones a largo plazo?

Sí que existen algunos climas que son más predecibles que otros a largo plazo. En predicción climática, el caos no desaparece, pero su impacto depende mucho del contexto: Si una región está controlada por forzamientos globales regulares, como El Niño, es menos caótica y más predecible. Si depende del ruido interno de la atmósfera o de factores locales, el caos reina y la predictibilidad climática estacional es baja.

22.8 ¿Es el caos la razón de que algunas de las predicciones climatológicas hechas hace varias décadas no hayan sido muy precisas o incluso algunas hayan llegado a fallar?

Sí puede serlo algunas veces, aunque también influyen muchos factores externos como la actividad humana que no se pueden predecir.

Part V

El Clima y el Caos

23 Clima

Llegamos a la parte más cualitativa y menos cuantitativa del proyecto, no por ello menos importante. Como bien se manifiesta en los medios de comunicación y en la comunidad científica la predicción del clima es uno los puntos más importantes para la humanidad. Si bien en el capítulo anterior hemos investigado sobre como afecta el caos a la previsión meteorológica ahora vamos a hacer lo mismo con el clima.

Con el tiempo meteorológico a corto plazo todo el mundo asume que las previsiones meteorológicas dejan de tener validez a los diez días. En este proyecto hemos visto que esto se debe a que la atmósfera es un sistema caótico, muy sensible por lo tanto a las condiciones iniciales.

Con el clima curiosamente, la sensación general que hay en la sociedad es que puede predecirse. Cada ciertos años el IPCC nos da sus proyecciones sobre el clima para los próximos 100 años, y lo tomamos como válido dado el gran consenso científico en torno a estas proyecciones. ¿Cómo puede ser ésto?. No podemos predecir el tiempo a diez días, pero sí a cien años. A continuación, durante este capítulo, veremos los matices que hay detrás de todo esto.

23.1 Clima y Caos. Historia

Empezaremos por ver cuál es la postura oficial del IPCC sobre la predictibilidad del clima. En los glosarios de los **informes del IPCC**, tanto en el Cuarto Informe de Evaluación (AR4 WG I Annex I) como en el Quinto Informe de Evaluación (AR5 WG II), en la entrada «Predictibilidad», aparece el siguiente texto (recogido de la American Meteorological Society en el año 2000):

“El conocimiento de los estados actual y anteriores del sistema climático suele ser imperfecto, los modelos que mediante esos conocimientos generan predicciones climáticas son, por consiguiente, también imperfectos, y el sistema climático es inherentemente no lineal y caótico, todo lo cual hace que la predictibilidad del sistema climático sea inherentemente limitada. Incluso aunque se utilicen modelos y observaciones arbitrariamente precisos, existen limitaciones a la predictibilidad de un sistema no lineal como el clima (AMS, 2000).”

Aquí tenemos un reconocimiento implícito de que el clima es un sistema caótico. Por lo que llevamos visto en el proyecto, ya sabemos que predecir sistemas caóticos parece un oximorón. Sin embargo, la ciencia moderna afirma que no es un oxímoron: existen predicciones útiles a corto plazo (deterministas) y a largo plazo (estadísticas o climáticas). La clave está en reconocer el alcance y las limitaciones de cada tipo de predicción.

El reconocimiento del clima como sistema caótico nos retrotrae a los momentos en los que se descubrió el caos atmosférico. Fue **Edward Lorenz** en 1961 quién se dió cuenta de la existencia del caos haciendo unas simulaciones de la atmósfera. Recomiendo la lectura de esta página [Lorenz](#), donde se narra como se produjo el descubrimiento. Tal y como se cuenta en esta página, Lorenz, cuatro años más tarde, en una charla en 1965, afirmó:

“Climate may or may not be deterministic, We shall probably never know for sure”

En este momento, mucha gente empezó a preocuparse porque los cambios climáticos pudiesen venir de forma arbitraria y catastrófica. Reconocer la naturaleza caótica del clima, implicaba

reconocer que pequeñas perturbaciones pudieran cambiar el estado a largo plazo de la atmósfera de un estado a otro.

Sin embargo, durante esta época, también existía una corriente de científicos que creía que a pesar del caos, el clima podía predecirse. El argumento era muy sencillo: a pesar que la atmósfera es caótica todos los años tenemos temporada de huracanes y monzones de forma predecible. Otros aspectos del clima más a largo plazo que también pueden predecirse dentro de unos límites son los ciclos Niño/Niña. Por lo tanto, parece que dentro del caos impera cierto orden.

También relacionado con el caos y el clima, otro descubrimiento que se hizo en las décadas de los 60, 70 y 80 del pasado siglo, fue la evidencia paleoclimática de existencia de cambios muy rápidos del clima. Hasta aquel momento se pensaba que las variaciones del clima eran muy lentas, de miles de años. Pero se encontraron evidencias de cambios rápidos del clima, que podrían estar relacionados con la naturaleza caótica del mismo. En la próxima sección lo detallo.

23.2 Como estudiar el clima

El estudio del clima resulta extremadamente complejo. Los modelos que usa en la actualidad el IPCC tienen en cuenta la circulación atmosférica y la oceánica. Por limitaciones computacionales, la rejilla de cálculo que se emplea es de alrededor 50 kilómetros en horizontal, y en vertical se divide la atmósfera en 30 u 80 niveles hasta llegar a los 50 kilómetros de altura. De forma similar se procede al modelado de los océanos. Además hay que tener en cuenta que el clima global se ve afectado por mecanismos geológicos (volcanes, movimiento de placas tectónicas), por la vegetación y animales, procesos químicos (ciclos de carbono, aerosoles), impacto humano (emisiones de gas de efecto invernadero, usos agrícolas de suelo, deforestaciones/reforestaciones). La combinación de estos factores da lugar a un sistema muy complejo de estudiar, más aún, teniendo en cuenta las relaciones no lineales de muchos de los parámetros, lo que da lugar a un sistema caótico. Muchos modelos nuevos empiezan a tener en cuenta ya este enfoque multifactorial, pero los requisitos de cómputo para hacer un estudio con mucha resolución superan ampliamente los recursos de computación disponibles.

En las dos siguientes secciones analizaremos los cambios que se han producido en los climas en los últimos miles de años, y cómo estos cambios resultan de difícil predicción debido precisamente a la cantidad de factores que entran en juego a la hora de estudiarlos.

24 Atractores

24.1 Definición del clima

Antes de seguir hablando del clima vamos a ver qué entendemos por el clima. Según la Organización Meteorológica Mundial, el clima se define como la descripción estadística—principalmente la media y la variabilidad— de las variables atmosféricas (temperatura, precipitación, viento, etc.) para un lugar dado durante un periodo de referencia de 30 años, lo cual:

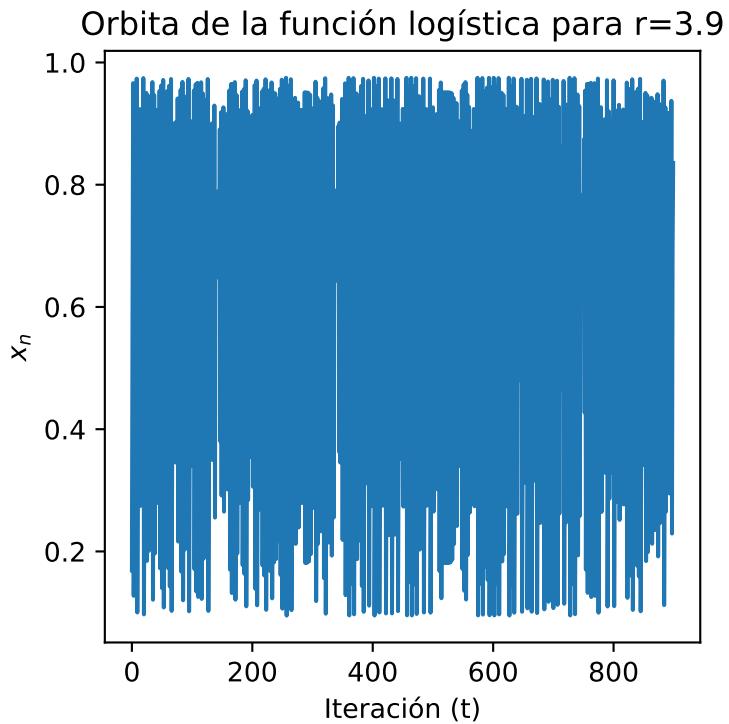
- Filtra las variaciones interanuales y anomalías (p. ej. El Niño–Oscilación del Sur).
- Permite identificar tendencias y extremos climáticos a largo plazo.

En la actualidad existe otra corriente de científicos para los que la definición del clima está mas relacionada con los sistemas caóticos. Para ellos, el clima no es la distribución de observaciones, sino el **atractor** de un **modelo climático** perfecto bajo condiciones externas fijas. Pero, ¿qué es un atractor?

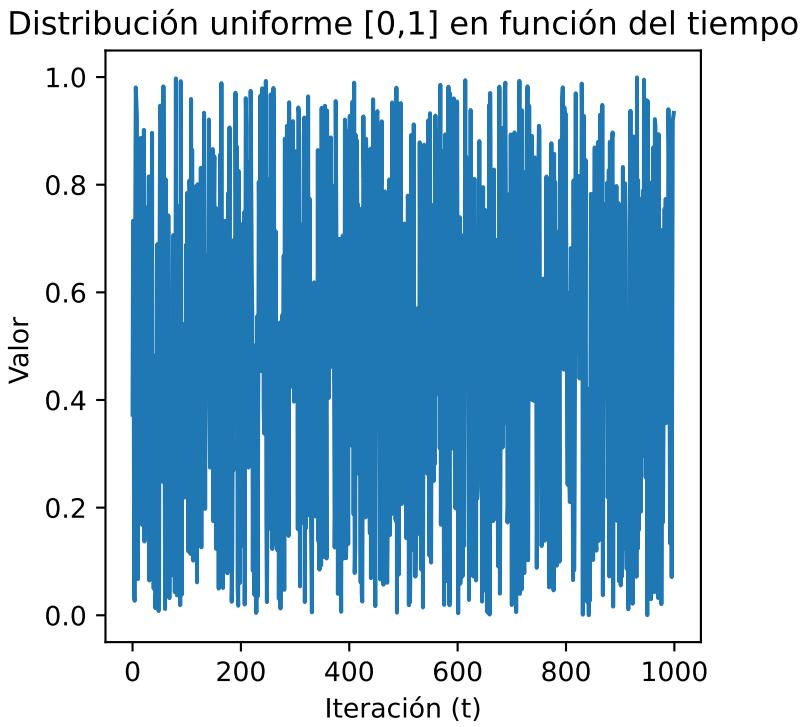
24.2 Atractor

Para ver lo que es un atractor nos vamos a valer de nuevo de nuestro tan útil mapa logístico.

Vamos a ir a la zona caótica del mapa logístico, con $r = 3.9$. Vamos a ver un plot del valor de la sucesión con el tiempo.

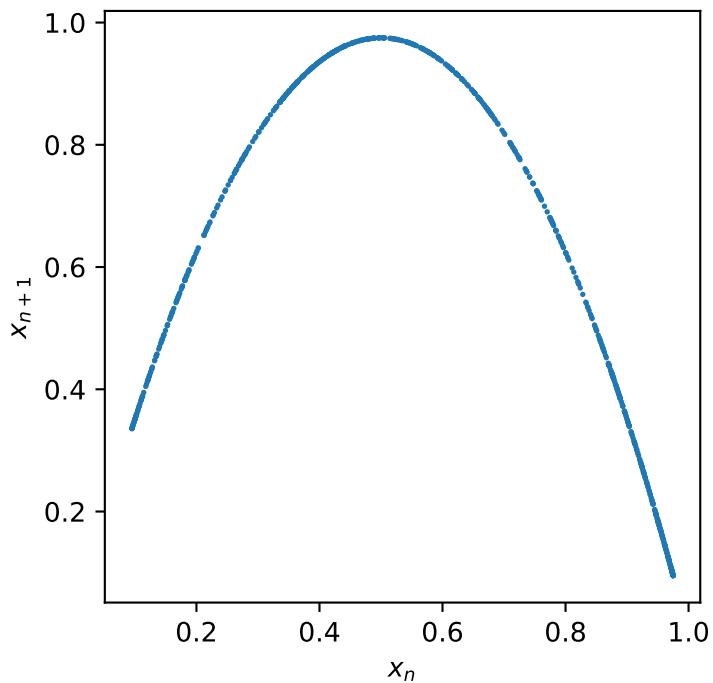


Y ahora vamos a hacer lo mismo con números aleatorios que he mandado generar al ordenador con una distribución uniforme entre 0 y 1.



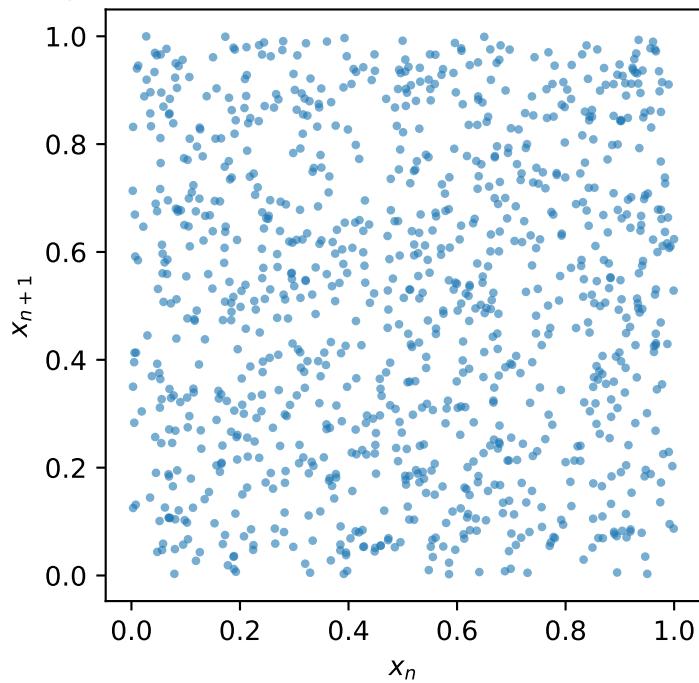
Aparentemente estamos viendo la misma nube de puntos sin ninguna estructura. Pero, ¿qué pasa si representamos x_{n+1} frente a x_n ? El resultado es una zona de puntos que atrae las distintas iteraciones de nuestra secuencia. !!Nos encontramos ante un atractor!!

Diagrama de fase: x_{n+1} vs x_n para $r = 3.9$



Si hacemos lo mismo con los números aleatorios entre 0 y 1 el resultado es el siguiente.

Diagrama de fase de números uniformes en $[0,1]$



NO hay ninguna estructura que atraiga los valores. Estamos ante un conjunto desestructurado de datos.

Volvamos al atractor del mapa logístico. Uno podría decir que es lógico lo que vemos, ya que los puntos están definidos por la función logística. De hecho, parece que estamos viendo la función logística. Pero hay un detalle: si miras detalladamente verás huecos en la gráfica. ¿Por qué el atractor es distinto de la función logística?

- La ecuación logística

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

es la regla determinista que asigna cada valor x_n al siguiente.

- El atractor es el conjunto de pares (x_n, x_{n+1}) en el espacio de fases donde la dinámica termina estabilizándose tras desechar el transitorio. Aunque la función forma una parábola continua, el atractor sólo ocupa las regiones donde los puntos rebotan de forma caótica y no periódica. Estamos por tanto ante un atractor periódico. ¿Qué tipos de atractores hay en el mapa logístico?

1. Punto fijo

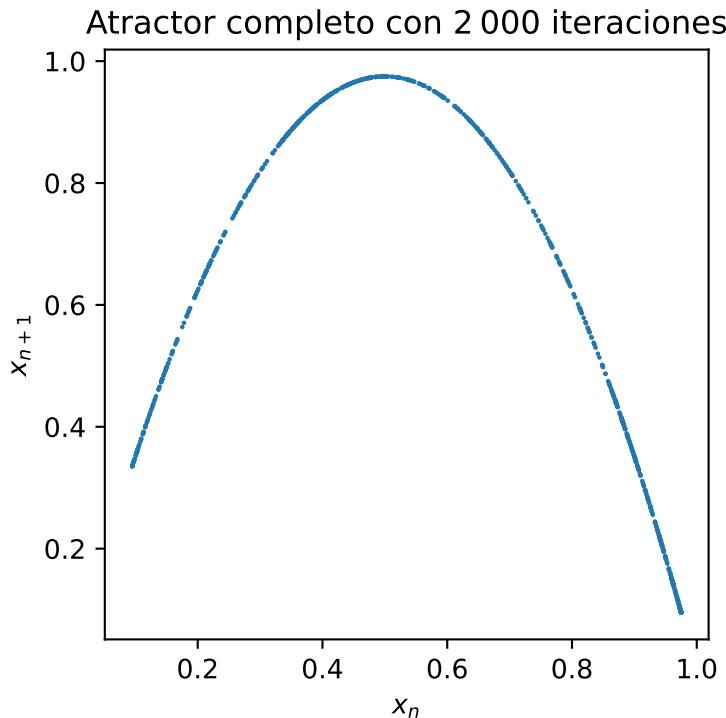
Todos los orbitantes convergen a un único punto (x^*, x^*) . Ejemplo: para $0 < r < 1$, $x^* = 0$.

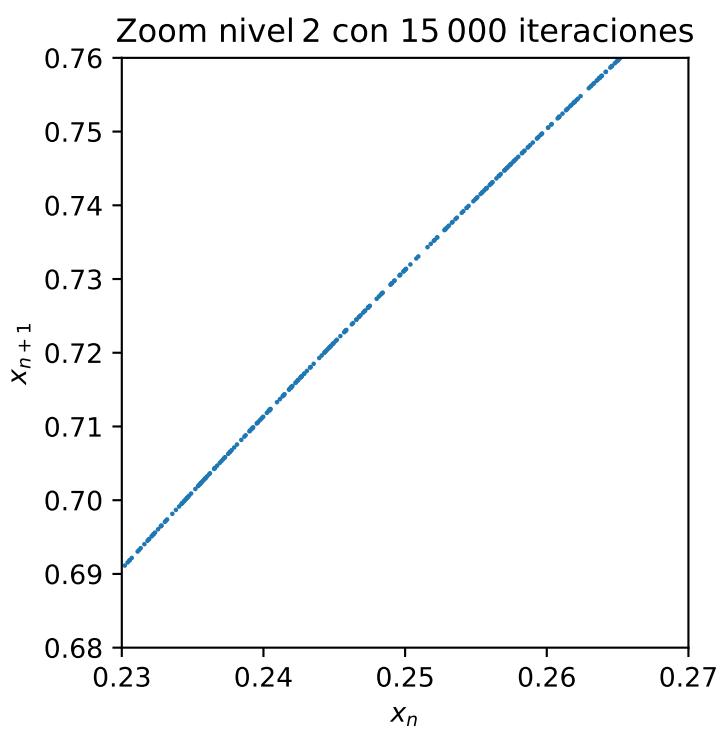
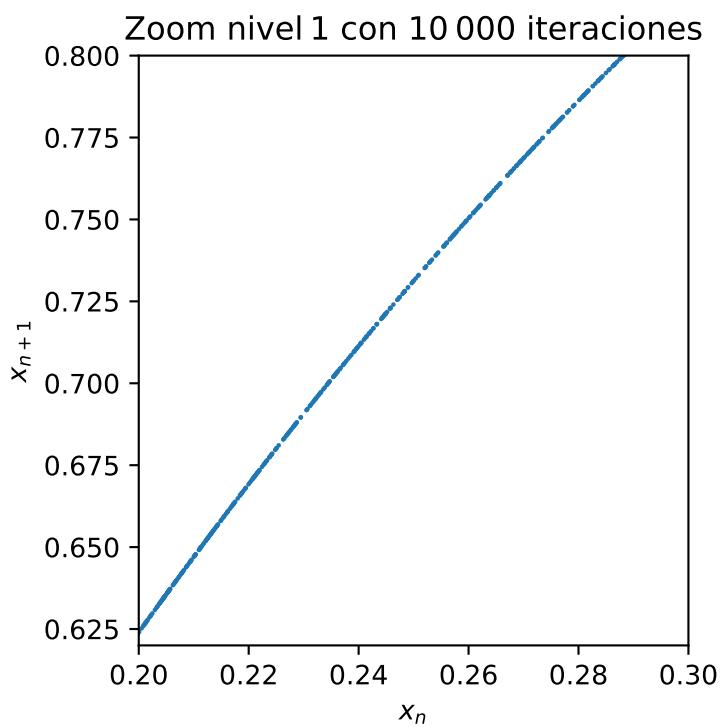
2. Ciclo límite

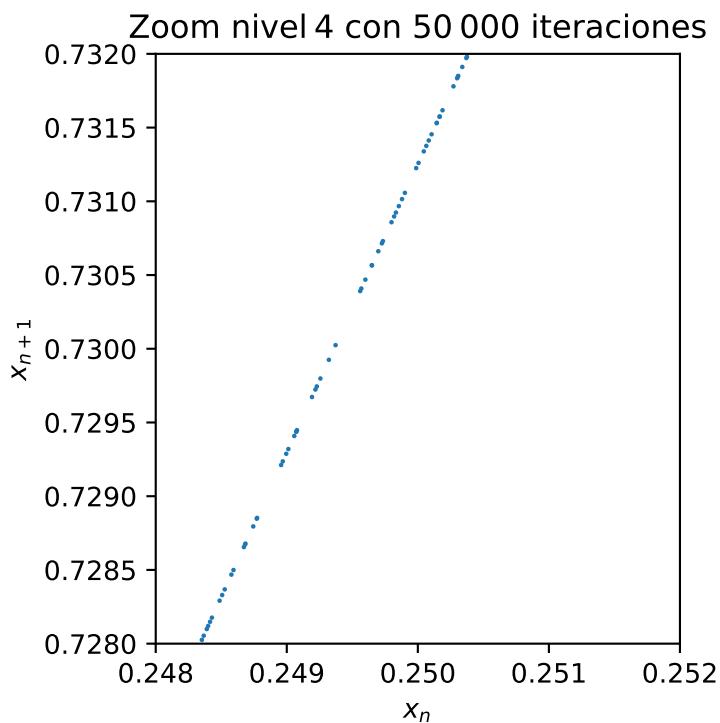
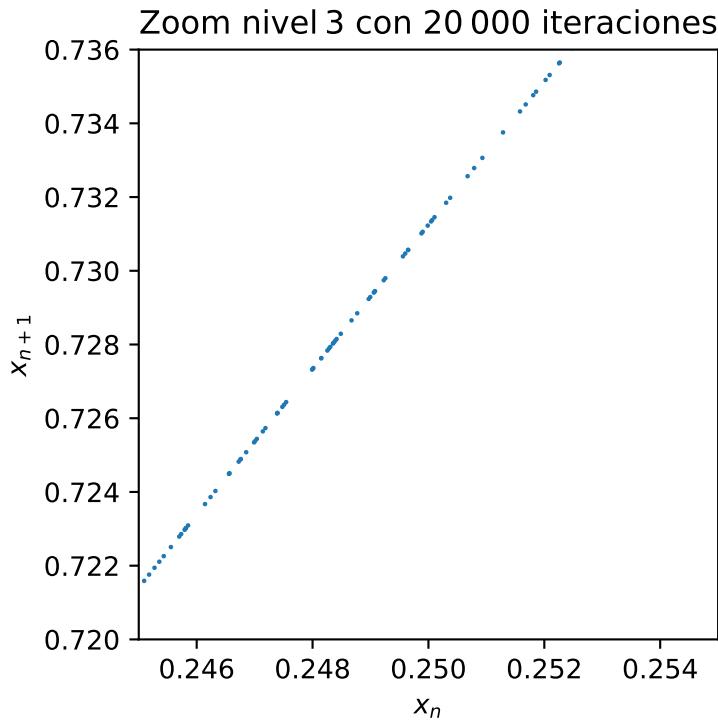
Oscilaciones periódicas entre un conjunto finito de valores (periodo 2, 4, ...). Sucede para $3 < r < 3.5699 \dots$

3. Atractor extraño (caótico)

La razón de que el atractor sea “extraño” es que puntos muy próximos en una iteración pueden acabar muy separados en iteraciones posteriores, generando esa mezcla de estabilidad (se quedan en el atractor) y caos (se mueven sin orden aparente), pero siempre dentro de la misma estructura fractal. Para ver la estructura fractal, vamos a hacer zooms sucesivos en $r = 3.9$.



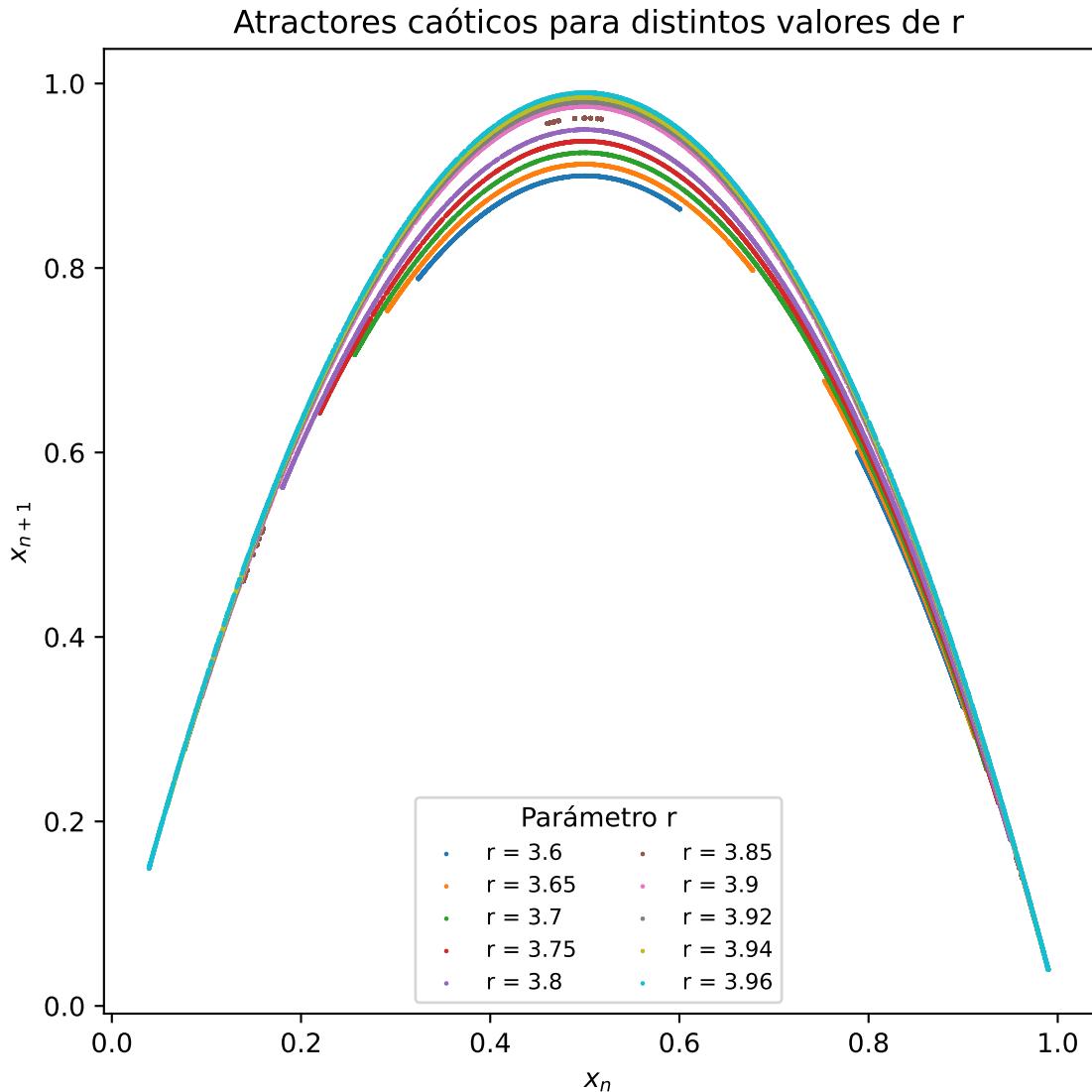




Como vemos a diferencia de la función logística, el atractor tiene “huecos”, no es continuo en el sentido matemático estricto. Se trata de una constucción extraña. Tras consultarla a ChatGPT, me confirmó que hay infinitos huecos a cualquier escala. En 1º de Bachillerato decimos que un conjunto de la recta es **continuo** (o **conectado**) si para cualesquiera a, b en él, todo el intervalo $[a, b]$ también está contenido. El atractor fractal **no** cumple esto: no existe $\delta > 0$ tal que contenga el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ alrededor de un punto x_0 . Es decir, todos los puntos tienen huecos alrededor suyos.

Cada valor de r tiene su propio atractor, tal y como se puede ver en la siguiente figura. Como

es lógico, dependiendo del valor de crecimiento de la función logística r , el sistema terminará en un atractor o en otro.



24.3 Otros atractores

Existen otros atractores dentro de los sistemas caóticos. Por ejemplo un péndulo doble con rozamiento acaba siempre en la misma posición (con el péndulo parado justo debajo del eje debido a la pérdida de energía); en este caso el atractor es un punto. Existe otro atractor que es mítico, y que no podría dejar pasar en este proyecto, que es el atractor de Lorenz por todo lo que representa en el estudio de sistemas caóticos y el tiempo. Fue el primero que se describió y describe perfectamente como un sistema caótico puede tener dos estados diferenciados. El sistema pasa de un estado a otro por pequeñas perturbaciones, y puede permanecer en uno de los estados durante bastante tiempo hasta que otra perturbación lo saca de ahí y lo lleva hacia el otro estado. Las ecuaciones de Lorenz se hallan totalmente fuera del alcance de lo que puedo entender con mi nivel de matemáticas, pero su funcionamiento resulta fácil de comprender una vez que se muestra la gráfica con el estado del sistema en función del tiempo. Le pedí a ChatGPT que me hiciese una simulación del atractor del Lorenz y este fue el resultado

Haciendo paralelismos con el atractor del mapa logístico, en este caso, en lugar de puntos separados, lo que tenemos son líneas separadas. Es decir, ninguna de las líneas que van trazándose vuelve a pasar por encima de otra. Esto ya lo vimos en las simulaciones y experimentos con el péndulo: ninguna de las trayectorias del péndulo pasa por encima de otra.

¿Y por qué es relevante desde el punto de vista del clima el atractor de Lorenz?. Porque nos ilustra como un sistema caótico puede alternar entre dos estados, y pasar de uno a otro por pequeñas perturbaciones. Por lo tanto, vemos aquí una explicación, una demostración de lo que esta segunda definición del clima es desde el punto de vista de un sistema caótico. El clima actual, es el estado actual en el que el sistema caótico que conforma el clima está ahora mismo. Y solamente desde la perspectiva de los sistemas caóticos podemos reconocer que el paso de un estado a otro puede deberse a muy pequeñas perturbaciones, o “tipping points”, que nos pueden llevar a un clima totalmente diferente al que tenemos en la actualidad. Obviamente, hay que tener en cuenta que el clima es un sistema caótico con un estado multidimensional, que depende de múltiples variables que conforman este espacio multidimensional. Por lo tanto, sin más dilación, veremos en la siguiente sección los últimos cambios que se han producido en el clima y por qué han sido causados.

25 Cambios Climáticos Rápidos

Tal y como comentamos en la sección anterior, el clima global de la Tierra se puede ver sujeto a cambios abruptos en cortos espacios de tiempo. Esta es una manifestación más de la naturaleza caótica del clima, que hasta los años 50 del pasado siglo, se consideraba que no podría ocurrir. Sin embargo los científicos han encontrado estas variaciones abruptas del clima de la Tierra en los últimos 15.000 años, desde el final de la última glaciación. Ha habido dos eventos muy relevantes que muestran como el clima puede cambiar bruscamente.

25.1 Evento “Younger Dryas” (12 900–11 700 años antes del presente)

Imagina que, al final de la última glaciación, la temperatura sube lentamente y, de pronto, en menos de dos siglos, ¡cae 5 °C! Sería como pasar de un día de primavera suave a un día de invierno extremo en unas pocas generaciones humanas¹. Esto fue lo que pasó hace 12900 años debido a que un gran volumen de agua dulce de deshielo de un lago fue vertido en el Atlántico norte y bloqueó la Corriente del Golfo, reduciendo el transporte de calor al Atlántico Norte. La reducción de temperatura tuvo lugar a lo largo de unas pocas décadas y su impacto duró 1200 años. La salida de este estado climático también fue muy rápida. Se estima que también en unas pocas décadas volvió a aumentar la temperatura media unos 5 grados.

25.2 Evento 8.2 k (8 200 años antes del presente)

Tras el Younger Dryas, unos 4 700 años después, se produjo otra bajada de ~3 °C que duró 150 años. Es equivalente a cambiar de clima templado a casi boreal en unas pocas generaciones². De nuevo, el causante fue el desagüe repentino del lago glaciar Agassiz–Ojibway en Norteamérica, vertiendo enormes volúmenes de agua dulce en el Atlántico. Se estima que el descenso de temperatura tuvo lugar en menos de 10 años, y que la recuperación fue más gradual, unos 50 años.

25.3 Conexión común. Puntos de inflexión del clima

Estos eventos destacan la no linealidad del sistema climático y su **sensibilidad extrema a perturbaciones**. Una pequeña alteración en la salinidad u origen de agua dulce puede desencadenar un cambio rápido y global del clima. En la actualidad los científicos del clima han identificado varios puntos de inflexión que podrían provocar un cambio brusco del clima, como:

- Parón repentino de la corriente del Golfo debido al descenso de salinidad debido al agua dulce procedente del deshielo del Ártico y de los ríos siberianos.

¹AIP History of Physics, “Rapid Climate Change”, consultado el 5 de julio de 2025.

²AIP History of Physics, “Rapid Climate Change”, consultado el 5 de julio de 2025.

- Liberación de enormes cantidades de metano si se derrite el permafrost, lo que originaría una aceleración del calentamiento de la Tierra

Como dijimos anteriormente, son muchos los factores que intervienen en el clima. El poder tener en cuenta todos, implica un modelado de mucha precisión de una multitud de factores. En el futuro se podría desencadenar un evento que provocase un punto de inflexión y que diera al traste con las predicciones realizadas con los modelos actuales. Por ejemplo, en la pequeña edad del hielo, (aproximadamente entre 1300 y 1850), se cree que los factores que desencadenaron el descenso global de las temperaturas fueron una mayor actividad volcánica que coincidió con un mínimo de actividad solar. Estas dos perturbaciones causaron alteraciones en las corrientes oceánicas que habrían amplificado el enfriamiento, especialmente en el hemisferio norte. Tener en cuenta este tipo de eventos en un simulador, resulta imposible.

Un ejemplo extremo de punto de inflexión son los ciclos de Milankovitch. Estos ciclos periódicos que marcan los cambios de la excentricidad de la órbita de la Tierra, y la inclinación del eje de la Tierra, han marcado durante los últimos 5 millones de años la llegada y marcha de las glaciaciones. Pero lo interesante, es que estos pequeños cambios en la órbita de la Tierra, por sí solos no son capaces de generar las glaciaciones. Son puntos de inflexión, que provocan una cascada de eventos posterior que amplifican la pequeña perturbación inicial.

Por lo tanto, vemos como no solamente es necesario tener un buen simulador de la circulación atmosférica/oceánica, sino que también habría que tener en cuenta aspectos geológicos de la Tierra, sus ecosistemas, e incluso posibles perturbaciones cósmicas.

En la siguiente sección evaluaremos como han funcionado los modelos que se usan para la predicción del clima. Si bien, desde el momento en el que se empezaron a usar estos modelos no ha habido cambios naturales grandes, veremos como se han comportado durante este último siglo en el que el principal forzamiento del clima ha sido la emisión de gases de efecto invernadero por parte del ser humano.

26 Evaluación de las predicciones climáticas

Desde hace décadas y gracias a la existencia de supercomputadores, los científicos del mundo han elaborado simuladores del clima de la Tierra, para poder predecir el clima futuro. El principal motivo ha sido la preocupación de la comunidad internacional sobre los efectos de la emisión de gases de efecto invernadero en el clima. El clima de la Tierra viene calentándose desde hace más de doscientos años, básicamente desde el fin de la pequeña Edad del Hielo, y resulta crucial determinar qué parte del calentamiento actual observado se debe a causas naturales y qué parte se debe a causas humanas.

Las simulaciones realizadas con estos modelos climáticos en supercomputadores muestran un gran consenso a la hora de determinar que el forzamiento antropogénico es el principal causante del calentamiento actual. ¿Pero qué ocurre con el resto de predicciones que están realizando los modelos?

Recientemente, se ha publicado un artículo en la revista Nature, llamado *The other climate crisis* (Nature, 26 de marzo de 2025) que aborda la problemática señalada. Según el artículo, el paradigma estándar de la ciencia del clima ha mostrado gran éxito en predecir señales globales de calentamiento. Sin embargo, no ha sido tan exitoso en las predicciones regionales, por lo que surge la necesidad de revisar nuestras suposiciones y paradigmas de estudio del clima. Para profundizar, consulta [The other climate crisis](#). Porque una cosa es el calentamiento global de la Tierra y otra aspecto diferente son los distintos climas regionales. Hace falta definir claramente, es, qué se entiende por clima de la Tierra, ya que en no existe un único clima, sino que existen múltiples climas dependiendo de la zona que estudiemos.

Un ejemplo de las discrepancias de los modelos señaladas por el artículo mencionado son The other climate crisis:

- **Precipitación extrema:** los modelos subestiman la intensidad y frecuencia de precipitaciones extremas en África Oriental y el Sudeste de América del Sur, reproduciendo tendencias más débiles que las observadas
- **Circulaciones extratropicales:** fallos en capturar la intensificación del chorro polar y ondas de Rossby globales, así como el aumento de bloqueos en latitudes medias
- **Olas de calor:** incapacidad de reproducir el rápido incremento de extremos de calor en Europa Occidental, debido a tendencias de circulación omitidas
- **Sequedad estival:** déficit en la simulación de la disminución de humedad relativa y aumento de sequías en regiones templadas, como el suroeste de EE.UU.
- **Variabilidad interna y teleconexiones:** discrepancias en la Oscilación del Atlántico Norte y el gradiente este-oeste del Pacífico Tropical, afectando proyecciones regionales a largo plazo



Figure 26.1: Esquema del sistema

26.1 Ejemplo de sensibilidad de los modelos a las condiciones iniciales

Un caso concreto se observó en las simulaciones del modelo climático **CESM2** (Community Earth System Model, versión 2) [CESM2 Large Ensemble Community Project \(LENS2\)](#). Los investigadores realizaron más de 300 simulaciones de control preindustrial, todas **idénticas en su configuración física y parámetros**, pero con una minúscula diferencia en el estado inicial de la atmósfera: una perturbación de apenas

$$\Delta T \approx 10^{-14} \text{ K}$$

Esta variación es tan pequeña que está muy por debajo de cualquier precisión instrumental. Sin embargo, tras dejar correr la simulación durante años, las trayectorias climáticas divergieron lo suficiente como para producir **resultados regionales muy diferentes**.

En la mayoría de las ejecuciones, el modelo desarrolló una cobertura de hielo marino **excesiva** en el Mar de Labrador (y en menor medida en el Mar de Ojotsk), comparada con las observaciones por satélite. Sin embargo, una de las simulaciones —llamada *262c*— **no presentó ese exceso de hielo**.

Esta simulación no era especial en ningún otro aspecto: su temperatura media global, el equilibrio energético y la circulación oceánica estaban dentro de la variabilidad normal del conjunto. La única diferencia real fue la trayectoria caótica que siguió el sistema a partir de esa pequeñísima perturbación inicial.

Este ejemplo ilustra de manera numérica cómo, en sistemas no lineales como el clima, **pequeñas variaciones iniciales pueden llevar a estados regionales muy distintos**, incluso cuando el promedio global parece estable. Es una demostración clara de que la incertidumbre

en las condiciones iniciales, por diminuta que sea, puede tener consecuencias sustanciales en las predicciones a escala regional.

26.2 Otros fallos en las predicciones realizadas por los modelos

A lo largo de las últimas décadas, voces diversas —científicos, activistas, medios y organismos internacionales— han lanzado advertencias dramáticas sobre el futuro climático. Aquí tienes una selección de predicciones que no se cumplieron, cada una con su fuente como enlace clicable.

26.2.1 Refugiados climáticos y desertificación (2005 → 2010)

Predicción: En 2005, el PNUMA y la Universidad de las Naciones Unidas advirtieron que hasta **50 millones de personas podrían convertirse en “refugiados ambientales” para 2010**, huyendo de desertificación, aumento del nivel del mar y desastres climáticos.

Realidad: Esa migración masiva no ocurrió; la ONU se distanció del pronóstico, retiró el informe, y las zonas señaladas como “críticas” vieron crecimiento poblacional.

[Fuente](#) | [Reporte crítico](#)

26.2.2 Deshielo ártico prematuro (2009 → ~2013)

Predicción: En 2009, Al Gore, citando modelos científicos, afirmó que había una **probabilidad del 75 % de que el Ártico quedara libre de hielo en verano en cinco a siete años**.

Realidad: Aunque el hielo ha disminuido, no se ha desvanecido por completo en verano. La afirmación fue una interpretación exagerada de datos científicos.

[Fuente](#) | [Análisis detallado](#)

26.2.3 Huracanes destructivos menos frecuentes (siglo XX)

Predicción general: El cambio climático intensificaría todos los eventos extremos, incluyendo un aumento de huracanes devastadores.

Realidad: Investigaciones muestran que el número anual de ciclones tropicales a nivel global **disminuyó en alrededor de un 13 % durante el siglo XX**.

[Fuente](#) | [Estudio original](#)

26.2.4 “Naciones bajo el agua para el 2000” (1989)

Predicción: Noel Brown, director del PNUMA, advirtió que “naciones enteras podrían borrarse del mapa por el aumento del nivel del mar si la tendencia de calentamiento no se revierte para el año 2000.”

Realidad: El nivel del mar subió, pero no llevó a la desaparición de países enteros.

[Fuente](#) | [Más contexto](#)

26.2.5 Glaciares del Himalaya desapareciendo en 2035 (2007 → 2035)

Predicción: El IPCC afirmó que era “muy probable” que los glaciares del Himalaya desaparecieran para 2035 si continuaba el calentamiento.

Realidad: El informe contenía un error sin respaldo científico, posteriormente reconocido y corregido por el propio IPCC.

[Fuente](#)

26.2.6 “Humanidad extinta si no dejamos los fósiles en 5 años” (2018 → 2023)

Predicción: Greta Thunberg citó un tuit que insinuaba una advertencia de que la humanidad se extinguiría si no se abandonaban los combustibles fósiles en los próximos cinco años.

Realidad: La cita fue tomada de un artículo que distorsionaba la declaración original de un científico. Thunberg nunca afirmó que la extinción ocurriría en cinco años.

[Fuente](#) | [Más contexto](#)

26.2.7 “Los niños no sabrán qué es la nieve” (2000)

Predicción: El Dr. David Viner afirmó en 2000 que “en pocos años, la nieve invernal se convertirá en algo muy raro” en el Reino Unido y que “los niños no sabrán qué es la nieve.”

Realidad: Aunque hubo años con poca nevada, no se ha convertido en algo desconocido ni ha desaparecido por completo.

[Fuente](#)

26.2.8 “Quedan 96 meses para salvar al mundo” (2009)

Predicción: El Príncipe Carlos advirtió en 2009 que quedaban **80 meses** (aprox. 6–7 años) para evitar un daño climático irreversible.

Realidad: Como suele suceder, esa fecha pasó sin un colapso climático drástico, aunque el tema sigue vigente.

[Fuente](#)

26.2.9 “10 años para evitar un punto sin retorno” (2006)

Predicción: Al Gore afirmó en 2006 que había **10 años para evitar un punto de no retorno climático**.

Realidad: En 2016 no se identificó dicho punto irreversible; el cambio climático, eso sí, se intensificó.

[Fuente](#)

26.2.10 Mediterráneo sin playas en 2020 (2001)

En febrero de 2001, un reportaje en *El Mundo* presentaba un escenario alarmante para 2020 basado en el último informe de la ONU sobre cambio climático.

> “*Ya no queda rastro alguno de muchas de las playas bañadas por el Mediterráneo y del Atlántico...*”

> “*En el norte de España el paisaje está salpicado de palmeras...*”

> “*Los glaciares alpinos han desaparecido.*”

> “*Casi 300 islas han ido a parar al fondo del Pacífico...*”

> “*Deltas del Rin, Ebro y Guadalquivir ya han desaparecido...*”

> “*Algunas enfermedades tropicales, como la malaria o el cólera, han encontrado nuevas víctimas entre nosotros.*”

> “*El turismo de nieve [...] es hoy escaso...*”

> “*1.600 millones de personas en todo el mundo pasan hambre.*”

Realidad en 2020: Ninguna de estas proyecciones extremas se materializó en la escala y plazo anunciados.

[Fuente: *El Mundo*, 25/02/2001](#)

26.2.11 Países insulares desaparecidos (Maldivas, Tuvalu, Kiribati)

Predicción: En 1988 se afirmó que las Maldivas, Tuvalu y Kiribati estarían sumergidos en unas pocas décadas.

Realidad: En 2025, estas naciones siguen habitadas; Maldivas incluso han expandido infraestructuras costeras.

[Fuente](#)

26.2.12 Proyecciones del nivel del mar (1983 → 2025)

Predicción: Un estudio de 1983 estimó una subida del nivel del mar entre **13 cm (bajo)** y **55 cm (alto)** para 2025.

Realidad: Hasta 2010, el aumento observado fue inferior a 10 cm, muy por debajo incluso del escenario más conservador.

[Fuente estimaciones originales](#) – Se citan valores de 13 cm y 55 cm según distintos supuestos :contentReferenceoaicite:2.

Datos observados recientes – El aumento global medio desde 1901 hasta 2018 fue de entre **15 y 25 cm**, es decir, mucho más lento de lo que se preveía para 2025 :contentReferenceoaicite:3.

26.2.13 Mortalidad por desastres naturales: gran reducción

Categoría	Peor década (muertes/año por millón hab.)	Década 2000s	Reducción
Sequías	1920s: 235	~0.1	~99.9 %
Inundaciones	1930s: 204	~1	~98 %
Tormentas	1970s: 10	2–3	~75 %

Fuente : [Our World in Data – Natural Disasters](#)

26.2.14 Variabilidad natural significativa

Un estudio reciente publicado en *Climatic Change* bajo el título “**Robust climate attribution of modern floods needs palaeoflood science**” (26 de marzo de 2025, vol. 178, artículo 71) demuestra que muchos eventos de inundación recientes no son ni únicos ni inusuales en el contexto geológico e histórico :contentReferenceoaicite:1.

Este trabajo, liderado por Stephan Harrison y con participación de Gerardo Benito (CSIC), se basa en registros paleofloodísticos bien datados, que abarcan miles de años en el oeste y suroeste de Europa. Contrario a lo que sugieren algunos modelos, demuestra que:

“La magnitud de las inundaciones fue significativamente mayor antes del siglo XX, a pesar de que la contribución de gases de efecto invernadero de origen humano era insignificante” :contentReferenceoaicite:2.

Esto implica que la **variabilidad climática natural** podría ser mucho más amplia de lo que muchos modelos asumen, lo que plantea grandes implicaciones para la planificación de infraestructuras y las políticas de adaptación:

- Muchas inundaciones recientes **no pueden considerarse sin precedentes**, ni siquiera dentro del registro histórico.
- Esto desafía la evaluación actual del riesgo basado únicamente en documentos instrumentales del siglo XX.

Un artículo de divulgación en *Phys.org* resume bien la relevancia de estos hallazgos, señalando que:

“Las inundaciones recientes catalogadas como ‘sin precedentes’ pueden estar muy por debajo de las más extremas que ocurrieron en el pasado.” :contentReferenceoaicite:3

Fuente primaria: *Climatic Change* (2025), “Robust climate attribution of modern floods needs palaeoflood science”.

[Leer el artículo completo \(Open Access\)](#)

26.2.15 Huracanes: datos reales vs percepción pública

Aunque se ha afirmado que los huracanes son más frecuentes y destructivos, los registros globales muestran otra historia. Según datos de la [Colorado State University](#), no hay un incremento sostenido en el número total de huracanes a nivel global desde el inicio de los registros modernos.

26.2.16 Precipitación anual en España (1901–2020)

Predicciones mediáticas alertaron sobre una disminución drástica de la lluvia en España. Sin embargo, los datos de [AEMET](#) y el conjunto [CRU TS 4.05](#) muestran una tendencia lineal muy suave, con alta variabilidad interanual.

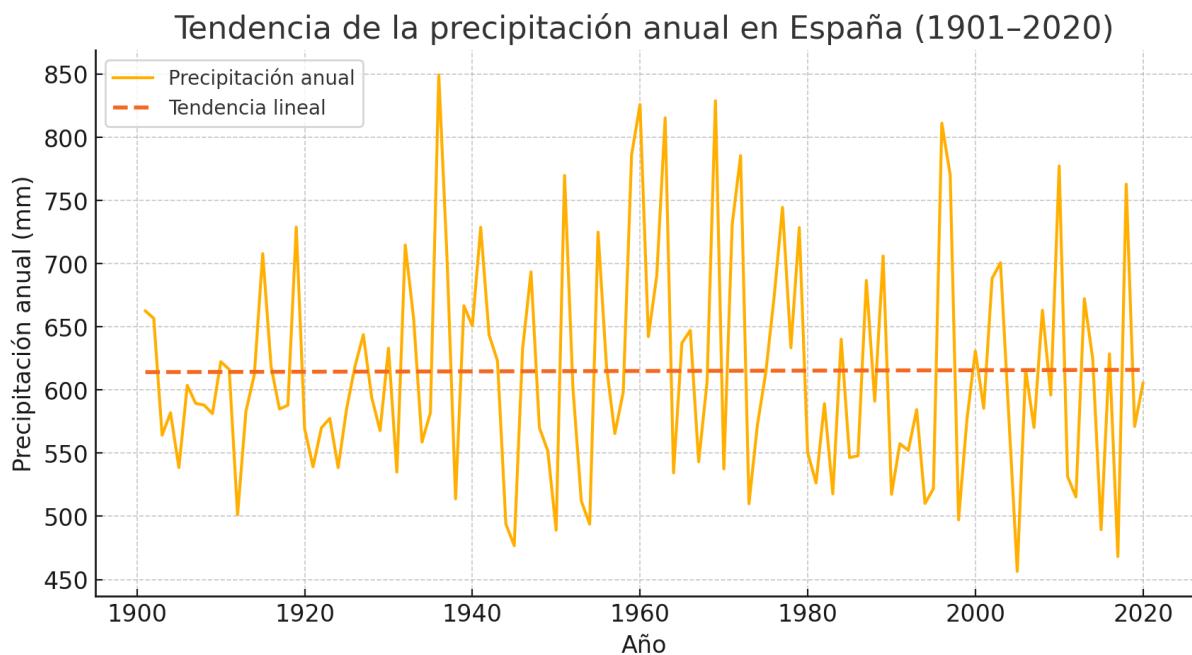


Figure 26.2: España

26.2.17 Precipitación en la cuenca mediterránea (1871–2020)

Se ha dicho que el Mediterráneo sufriría una pérdida continua de lluvia. Sin embargo, un análisis publicado en [Nature](#) revela que la precipitación se ha mantenido mayormente estable durante los últimos 150 años, aunque con variabilidad multidecadal e interanual.

26.2.18 Tendencias positivas inesperadas

- **Reverdecimiento de tierras áridas:** Gracias al aumento de CO₂, zonas secas han ganado cobertura vegetal.

[Fuente](#)

- **Descenso global de incendios:** La superficie quemada ha disminuido según datos de la NASA.

[Fuente](#)

26.2.19 Conclusión

Muchas predicciones climáticas fueron excesivas o impacientes con los plazos; eso no invalida la percepción real del cambio climático, sino que refuerza la necesidad de un enfoque basado en datos, contexto y comunicación cuidadosa.

26.3 Mejoras necesarias: rejillas más densas y avances computacionales

Para resolver estos problemas, se propone aumentar la resolución espacial de los modelos reduciendo el tamaño de la celda (Δx). Por ejemplo, si se pasa de una rejilla de 100 km a una de 10 km, la resolución mejora por un factor de 10:

$$\Delta x_{extnueva} = \frac{\Delta x_{extactual}}{10}.$$

Este aumento de resolución permite:

1. **Capturar procesos convectivos y topográficos** con mayor detalle, mejorando la simulación de precipitaciones locales :contentReferenceoaicite:7.
2. **Reducir errores numéricos** asociados al paso temporal (Δt), al poder disminuir simultáneamente el tamaño del paso de tiempo para mantener la estabilidad de los esquemas numéricos.
3. **Incorporar mecanismos de acoplamiento de escalas** que conectan fenómenos pequeños (turbulencia, nubes) con la circulación general :contentReferenceoaicite:8.
4. **Emplear técnicas disruptivas**, como modelos de nube resuelta y aprendizaje automático para parametrizaciones subcuadriculares, reduciendo incertidumbres de procesos no resueltos :contentReferenceoaicite:9.

Así, al combinar rejillas más densas con paradigmas computacionales innovadores, podemos avanzar hacia una nueva generación de modelos climáticos capaces de reproducir fielmente tanto señales globales como variaciones regionales.

Part VI

Mis experimentos con el Caos

27 1. Introducción al Caos a través de la Función Logística

28 1. Introducción al Caos a través de la Función Logística

Aquí va la presentación general de este capítulo...

29 test

tttttttttttttttttttttttttt