Principio Presupuestario de Información, Entropía (KS) y Predictibilidad

Idea general

En sistemas caóticos, las trayectorias cercanas se separan (en promedio) de forma exponencial al ritmo del *exponente de Lyapunov* $\lambda_{\text{máx}}$. Si observamos el estado inicial con resolución ε y consideramos que la predicción deja de ser útil cuando el error supera un umbral Δ, el *horizonte de predictibilidad* (o *tiempo de Lyapunov*) satisface la relación operativa

$$T_p(\varepsilon, \Delta) = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon} \,.$$

Cuando la medida natural del sistema es de tipo SRB (hipótesis de Pesin), la *entropía de Kolmogórov–Sinai* h_μ coincide con la suma de los exponentes positivos, y en sistemas con una única dirección inestable $h_\mu = \lambda_{\text{máx}}$.

Principio Presupuestario de Información

Sea X_0 el estado inicial observado con resolución ε y X_t el estado a tiempo t observado con umbral de utilidad Δ. Denotemos por $I_\varepsilon(X_0; X_t)$ la información mutua (a esa resolución) entre pasado y presente, y por h_μ la entropía de Kolmogórov–Sinai (tasa de novedad, en nats/unidad de tiempo) de la dinámica con la medida natural.

$$\boxed{I_\varepsilon(X_0; X_t) \; + \; h_\mu \, t \; \approx \; H_\varepsilon(X_0)}$$

mientras $I_\varepsilon(X_0; X_t) \geq 0$. El instante en que $I_\varepsilon \to 0$ define el *horizonte de predictibilidad* $T_p(\varepsilon, \Delta)$, para el que resulta

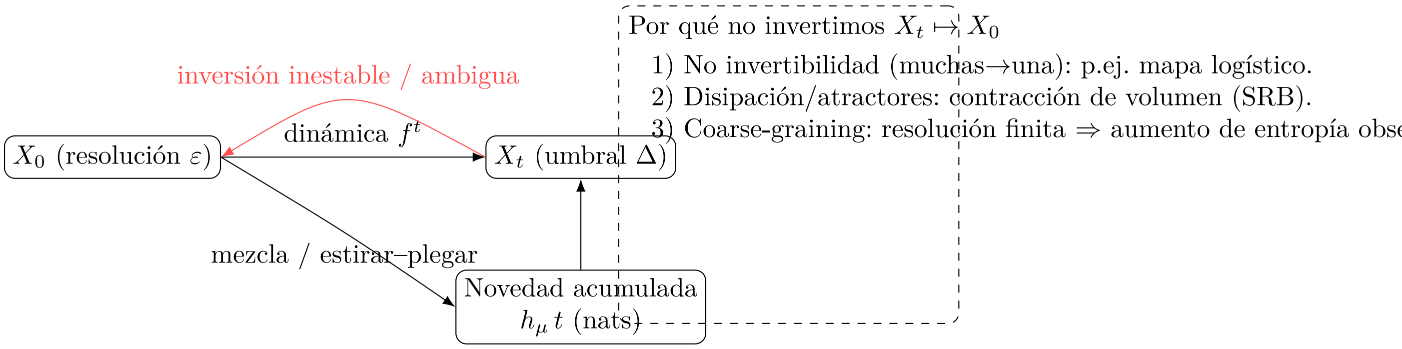
$$\boxed{h_\mu \, T_p(\varepsilon, \Delta) \; \approx \; \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}}$$

En sistemas con una única dirección inestable y medida SRB (hipótesis de Pesin), $h_\mu = \lambda_{\text{máx}}$, y

$$\boxed{T_p(\varepsilon, \Delta) = \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}}$$

Lectura: la novedad acumulada $h_\mu t$ "consume" la información útil que conecta el presente con el pasado; cuando se agota, la predicción deja de ser operativa.

Esquema: flujo de información y (no) invertibilidad



$$\begin{gathered} I_\varepsilon(X_0; X_t) + h_\mu t \approx H_\varepsilon(X_0) \\ \Rightarrow \quad T_p \approx \frac{1}{h_\mu} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon} \end{gathered}$$

Tabla de ejemplos con fórmulas explícitas

En los siguientes sistemas (hiperbólicos/expansivos con la medida natural), $h_\mu = \lambda$ y conocemos λ en forma cerrada:

Sistema	**Definición/parámetro**	**Fórmulas**
Duplicación (Bernoulli)	$x_{n+1} = 2x_n \bmod 1$	$\lambda = \ln 2, \quad T_p = \dfrac{1}{\ln 2} \ln \dfrac{\Delta}{\varepsilon}$
Tent (carpa)	pendiente $s \in (1, 2]$	$\lambda = \ln s, \quad T_p = \dfrac{1}{\ln s} \ln \dfrac{\Delta}{\varepsilon}$
Baker (panadero)	factor de estiramiento b	$\lambda = \ln b, \quad T_p = \dfrac{1}{\ln b} \ln \dfrac{\Delta}{\varepsilon}$
Gato de Arnold (toral)	$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\lambda = \ln \sigma_+, \ \sigma_+ = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad T_p = \dfrac{1}{\ln \sigma_+} \ln \dfrac{\Delta}{\varepsilon}$
Logístico (caso patrón)	$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$	$\lambda = \ln 2, \quad T_p = \dfrac{1}{\ln 2} \ln \dfrac{\Delta}{\varepsilon}$