MPC公式推导笔记

ColaForced

October 4, 2021

1. 最优控制 为了系统在有约束条件下，系统某项表现达到最优，一般用代价函数最小表示。比如说，火箭升空燃料代价最小，如何设计控制输入。值得一提的是，选定目标不同，计算出的控制输入也不同，比如说，追求快速升空，则控制输入势必是往油门最大化。

对于一个多目标相互约束问题，如汽车变道，一方面要求轨迹误差尽可能小，另一方面要求侧向控制输入尽可能小（为了舒适度）。在这种情况下，代价函数则是线性带权重的组合：

$$J = \int_0^t qe(s)^2 + ru(s)^2 ds \tag{1}$$

其中，u, e分别表示控制输入和追踪误差的。q, r权重用于调整系统表现。

对于一般线性系统，则可以表现为

$$J = \int_0^t E^T QE + U^T RU ds \tag{2}$$

对于这样的二次型最优化问题，应该是有相对成体系的计算方案。

2. MPC算法 对于一个离散线性系统:

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k \tag{3}$$

显然，若已知初始条件X_k,和控制输入U_k,则势必可以计算出X_{k+1}.

计算思路：

1. 观测/估计k时刻状态

2. 最小化代价函数来设计输入，代价函数是

$$J = \sum_{k}^{N-1} (E_K^T QE_K + U_K^T RU_K) + E_N^T FE_N \tag{4}$$

3. 仅用计算出的最优U_k作为输入，然后再次循环。

Tips: 称之为滚动时域优化。

3. MPC代价函数公式推导变形 目标，滚动时域优化，当前难点在于解决最小化代价函数怎么计算。既已知道LQR中二次型优化问题怎么计算， so, 当前思想就是想把MPC中的优化问题转化成二次型的形式。

先做一些声明：

$$\hat{X}_k = [X_{(k|k)}, X_{(k+1|k)}, ..., X_{(k+N|k)}]^T \tag{5}$$

$$\hat{U}_k = [U_{(k|k)}, U_{(k+1|k)}, ..., U_{(k+N-1|k)}]^T \tag{6}$$

其中$X_{(k|k)}=X_k$表示初始状态，$X_{(k+1|k)}$则是根据(??)和$U_{(k|k)},X_k$计算出来的，相应地，$X_{(k+1|k)},...,X_{(k+N|k)}$是进一步迭代计算得到的。

误差函数定义：

$$J=\sum_{k}^{N-1}(X_{(K+i|k)}^TQX_{(K+i|k)}+U_{(k+i|k)}^TRU_{(K+i|k)})+X_{(k+N)}^TFX_{(k+N)} \tag{7}$$

为了带着目的去看推导，先给出最后推导出的代价函数形式：

$$J=\hat{X}_k^TG\hat{X}_k+\hat{U}_k^TH\hat{U}_k+2\hat{X}_k^TE\hat{U}_k \tag{8}$$

可以看到，就是为了转换成二次型的形式，把累加项转换成$\hat{X}_k,\hat{U}_k$整体项。

so,既然结果看到了，加上能用的信息显然就是动态模型(??)了，那么，就代公式吧!

$$\begin{cases} X_{(k|k)}=X_k, \\ X_{(k+1|k)}=AX_k+BU_{k|K}, \\ X_{(k+2|k)}=A^2X_k+ABU_{k|k}+BU_{k+1|K}, \\ \dots, \\ X_{(k+N|k)}=A^NX_k+A^{N-1}BU_{k|K}+\cdots+BU_{k+N-1|K} \end{cases} \tag{9}$$

把上式转换成

$$\hat{X}_k=M\hat{X}_k+C\hat{U}_k \tag{10}$$

其中，

$$M=\begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & B \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & \dots \end{bmatrix}, \tag{12}$$

在回顾公式(??), 对其展开，再合并，可以得到

$$J=\hat{X}_k^T\bar{Q}\hat{X}_k+\hat{U}_k^T\bar{R}\hat{U}_k \tag{13}$$

其中，

$$\bar{Q}=\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \tag{15}$$

再把上式(??)带入(??)可以得到：

$$J = \hat{X}_k^T M^T \bar{Q} M \hat{X}_K + \hat{X}_k^T M^T \bar{Q} C \hat{U}_k + \hat{U}_k^T C^T \bar{Q} M^T \hat{X}_k + \hat{U}_k^T C^T \bar{Q} C \hat{U}_k + \hat{U}_k^T \bar{R} \hat{U}_k \tag{16}$$

再简化成(??)即可。

4. 学习来源 https://www.bilibili.com/video/BV1SQ4y1Y7FG

神仙UP主DR_CAN，我愿称之为YYDS!!!