1. 问题描述 现有系统模型如下：

$$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}, \\ \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{1}$$

其中，列向量x表示系统内部状态变量，A表示系统状态转移矩阵，B表示控制输入矩阵，y表示测量值， w和v表示均为过程噪声和测量噪声列向量，满足正态分布且协方差矩阵分别为Q,R.

如果不考虑噪声w或者v，我们可以得到系统k时刻的估计值值为

$$\hat{x}_{\bar{k}} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad \text{or} \quad \hat{x}_{k_m} = C^{-1}y_k \tag{2}$$

目前来说，我们手上有的数据是一个受噪声影响的先验估计值$\hat{x}_{\bar{k}}$和一个受噪声影响的测量值 $\hat{x}_{k_m}$。问题来了，我们应该如何使用这两个不太准确的值来得出一个相对精确的后验估计$\hat{x}_k$？.

2. 数据融合 根据滤波思想中的线性加权组合数据，可以尝试以下方案

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{\bar{k}} + G(\hat{x}_{k_m} - \hat{x}_{\bar{k}}) \tag{3}$$

显然，上述思路中描述的是，给状态变量的先验估计和测量值分别给不同的权重，再取和。简单的用$K_k = GC^{-1}$做替换可以得到

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{\bar{k}} + K_k(y_k - C\hat{x}_{\bar{k}}) \tag{4}$$

到目前为止，我们使用系统的上一时刻$k-1$的估计状态$\hat{x}_{k-1}$和系统输入计算出了当前时刻k的状态的先验估计值$\hat{x}_{\bar{k}}$，手上还有的数据是当前时刻k的测量值y_k，结合两者设计了一个数据融合算法(4)，当前问题在于，如何选择合适的增益K_k(称之为卡尔曼增益),来使得系统当前时刻k的状态的后验估计值更接近真实值x_k。

3. 卡尔曼增益设计 我们设计卡尔曼增益的目的是使系统k时刻的估计值$\hat{x}_k$尽可能向真实值x_k靠拢，在这里，我们要用符号e_k来表示两者之间的误差：

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \tag{5}$$

可以简单推导出，$e_k = [e_1, e_2, ..., e_n]^T$也该是一个正态分布的列向量，且用符号$P$表示其协方差矩阵，可以知道，

$$P_k = E[e_k^T e_k] = E[(x_k - \hat{x}_k)^T(x_k - \hat{x}_k)] \tag{6}$$

考虑一下，怎样才能算是说系统k时刻的估计值$\hat{x}_k$向真实值x_k靠拢的很好呢，也就是说这个估计怎样才能算最优呢？ 通过计算估计误差的协方差矩阵的迹$tr(M)$，$tr(M)$越小，估计误差的协方差的迹越小，我们认为此时系统的估计最优。 这一块估计最优的来源需要重新理解，两个正态分布数据融合？贝叶斯滤波?

1. 贝叶斯滤波—-为什么是两个高斯分布相乘相乘
2. 高斯分布相乘仍旧是高斯分布，且均值为*
3. 最小化方差，极大似然估计的联系

把（4）代入（6）中，可以得到

$$\begin{aligned} P_k &= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \\ &= E[(x_k - \hat{x}_{\bar{k}} - K_k(y_k - C\hat{x}_{\bar{k}}))(x_k - \hat{x}_{\bar{k}} - K_k(y_k - C\hat{x}_{\bar{k}}))^T] \\ &= E[(x_k - \hat{x}_{\bar{k}} - K_k(Cx_k + v_k - C\hat{x}_{\bar{k}}))(x_k - \hat{x}_{\bar{k}} - K_k(Cx_k + v_k - C\hat{x}_{\bar{k}}))^T] \end{aligned} \tag{7}$$

定义先验估计误差$e_{\bar{k}} = x_k - \hat{x}_{\bar{k}}$且用$P_{\bar{k}}$来表示先验估计误差的协方差,则有

$$
\begin{aligned}
P_k &= E[(e_{\bar{k}} - K_k(v_k + Ce_{\bar{k}})(e_{\bar{k}} - K_k(v_k - Ce_{\bar{k}})^T] \\
&= E[((I - K_kC)e_{\bar{k}} - K_kv_k)((I - K_kC)e_{\bar{k}} - K_kv_k)^T] \\
&= E[(I - K_kC)e_{\bar{k}}e_{\bar{k}}^T(I - K_kC)^T + K_kv_kv_k^TK_k^T] + E[(I - K_kC)e_{\bar{k}}v_k^TK_k^T] + E[K_kv_ke_{\bar{k}}^T(I - K_kC)] \\
&= E[(I - K_kC)e_{\bar{k}}e_{\bar{k}}^T(I - K_kC)^T + K_kv_kv_k^TK_k^T] \\
&= (I - K_kC)P_{\bar{k}}(I - K_kC)^T + K_kRK_k^T
\end{aligned}
\tag{8}
$$

附注：其中第三个等式到第四个等式用到了 $E[(I - K_kC)e_{\bar{k}}v_k^TK_k^T] = (I - K_kC)E[e_{\bar{k}}]E[v_k^T]K_k^T = 0$, 相似地，有$E[K_kv_ke_{\bar{k}}^T(I - K_kC)] = 0$

在（8）的基础上继续推导，可以得到

$$
\begin{aligned}
tr[P_k] &= tr[(I - K_kC)P_{\bar{k}}(I - K_kC)^T + K_kRK_k^T] \\
&= tr[(P_{\bar{k}} - K_kCP_{\bar{k}})(I - C^TK_k^T) + K_kRK_k^T] \\
&= tr[P_{\bar{k}} - K_kCP_{\bar{k}} - P_{\bar{k}}C^TK_k^T + K_kCP_{\bar{k}}C^TK_k^T + K_kRK_k^T] \\
&= tr[P_{\bar{k}} - 2K_kCP_{\bar{k}} + K_kCP_{\bar{k}}C^TK_k^T + K_kRK_k^T]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

化简到（9）,则下一步就是对卡尔曼增益K_k求导，求出极值点，则认为该点处的估计误差的协方差的迹$tr(P_k)$最小,求导并使之为0如下：

$$
\frac{d(tr(P_k))}{d(K_k)} = -2P_{\bar{k}}^TC + 2K_kCP_{\bar{k}}C^T + 2K_kR = 0 \tag{10}
$$

上述推导用到如下公式：

$$
\begin{aligned}
\frac{d(tr(AB)}{dA} &= B^T \\
\frac{d(tr(ABA^T))}{dA} &= A(B + B^T)
\end{aligned}
$$

由（10）可以得到，$-P_{\bar{k}}^TC + K_k(CP_{\bar{k}}C^T + R) = 0$,即，

$$
K_k = \frac{P_{\bar{k}}^TC}{CP_{\bar{k}}C^T + R} \tag{11}
$$

到目前为止，我们使用k时刻先验估计协方差矩阵$P_{\bar{k}}$计算出k时刻的卡尔曼增益K_k,使得数据融合算法（4）得到的系统状态估计值$\hat{x}_k$是最优估计, (最优这一说法还未考量)；而k时刻先验估计协方差矩阵$P_{\bar{k}}$的计算方法还为确定。

4. 先验估计协方差矩阵$P_{\bar{k}}$推导 根据先验估计协方差矩阵$P_{\bar{k}}$的定义,可以知道

$$
\begin{aligned}
P_{\bar{k}} &= E[e_{\bar{k}}e_{\bar{k}}^T] \\
&= E[(x_k - \hat{x}_{\bar{k}})(x_k - \hat{x}_{\bar{k}})^T]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

而根据系统模型（1），和先验估计的定义（2），可知

$$
\begin{aligned}
x_k - \hat{x}_{\bar{k}} &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} - (A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}) \\
&= A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \\
&= Ae_{k-1} + w_{k-1}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

上述公式的口语翻译是：k时刻的先验估计误差等于$k-1$时刻的估计误差与A的乘积再加上过程噪声。把

（13）代入（12）可得：

$$
\begin{aligned}
P_{\bar{k}} &= E[(x_k - \hat{x}_{\bar{k}})(x_k - \hat{x}_{\bar{k}})^T] \\
&= E[(Ae_{k-1} + w_{k-1}))(e_{k-1}^T A^T + w_{k-1}^T)] \\
&= E[Ae_{k-1}e_{k-1}^T A^T] + E[w_{k-1}w_{k-1}^T] \\
&= AP_{k-1}A^T + Q
\end{aligned}
\tag{14}
$$

上述推导结果，即为所需要求的先验估计协方差矩阵$P_{\bar{k}}$的计算方法。

卡尔曼滤波过程　基本的推导已经完成，下面给出卡尔曼滤波的全过程。初始条件，给定$k-1$时刻后验估计值$\hat{x}_{k-1}$，控制输入u_{k-1},估计误差协方差P_{k-1}.

步骤一：计算先验估计值$\hat{x}_{\bar{k}}$

$$\hat{x}_{\bar{k}} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \tag{15}$$

步骤二：计算先验误差协方差$P_{\bar{k}}$

$$P_{\bar{k}} = AP_{k-1}A^T + Q \tag{16}$$

步骤三：计算卡尔曼增益K_k

$$K_k = \frac{P_{\bar{k}}^T C^T}{CP_{\bar{k}}C^T + R} \tag{17}$$

步骤四：计算后验估计值$\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{\bar{k}} + K_k(y_k - C\hat{x}_{\bar{k}}) \tag{18}$$

步骤五：更新误差协方差

$$P_k = (I - K_kC)P_{\bar{k}} \tag{19}$$

补充步骤五的推导：把（11）代入（8）即可得到