Lec8: 区间估计(二): 容忍区间

张伟平

2011 年 3 月 28 日

1 容忍区间与容忍限*

本节要讨论的问题, 其提法与区间估计并无共同之处. 置信区间是回答总体X的某个参数(或特征)被包含在基于样本构造的某个随机区间中, 而无法回答诸如总体一定比例被包含在基于样本构造的某个随机区间之类的问题.

一、问题的提法及定义

设有分布族$\{F_\theta,\, \theta \in \Theta\}$, Θ是参数空间, $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为从分布族某总体中抽取的简单样本. 此处不是考虑参数θ的置信区间, 而是考虑总体随机变量X的"置信区间", 称之为容忍区间. 即希望求$T_1 = T_1(\mathbf{X})$和$T_2 = T_2(\mathbf{X})$, 使得对总体的至少$100(1-\beta)$部分是落在区间$[T_1, T_2]$内:

$$P_\theta\{X \in [T_1(\mathbf{X}), T_2(\mathbf{X})]\} \geq 1 - \beta.$$

请看以下两个例子:

例4.5.1 设某轴承厂有一部自动化机器, 生产直径为$0.25cm$的轴承, 允许误差为$0.001cm$. 生产中要求99%的产品达到以上规定, 即要求轴承的直径落在$[0.249, 0.251]$ 之间. 今对一批轴承抽取n件, 测得其直径为$X_1, \cdots, X_n$, 问这一批轴承是否合格?

设随机变量X表示轴承的直径, 其分布函数$F_\theta(x)$. 解决这一问题的方法, 就是由样本$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$确定两个统计量$T_1 = T_1(\mathbf{X})$和$T_2 = T_2(\mathbf{X})$, 使得$P_\theta(X \in [T_1, T_2]) = F_\theta(T_2) - F_\theta(T_1) \geq 0.99$, 若$[T_1, T_2] \subset [0.249, 0.251]$, 则说明此批轴承合格. 这就归结为求容忍区间的问题.

例4.5.2 钢厂生产某种钢材, 要求其钢材的强度不少于ξ_0 (如, $\xi_0 = 120$单位强度) . 若生产中钢材强度有99%符合上述要求, 认为此批钢材合格. 今对一批钢材, 测试了n根, 强度为$X_1, \cdots, X_n$, 问这批钢材是否合格?

设钢材的强度为随机变量X, 其分布函数为$F_\theta(x)$. 解决这一问题的一种方法是由样本$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$确定一个统计量$T_L(\mathbf{X})$, 使得$P_\theta(X \in [T_L(\mathbf{X}), \infty)) = 1 - F_\theta(T_L(\mathbf{X})) \geq 0.99$, 若$T_L(\mathbf{X}) \geq \xi_0$, 则说明这批钢材合格, 这就归结为求容忍下限的问题.

将上述两个例子提出的问题统一在一个模型下, 描述如下: 设有总体X的分布族$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$. 令$\mathbf{X}$=$(X_1, \cdots, X_n)$为从此分布族中抽取的简单样本, 要找到两个统计量$T_1 = T_1(\mathbf{X})$和$T_2 = T_2(\mathbf{X})$, 使得对$0 < \beta < 1$有

$$P_\theta(T_1(\mathbf{X}) \leq X \leq T_2(\mathbf{X})) = F_\theta(T_2(\mathbf{X})) - F_\theta(T_1(\mathbf{X})) \geq 1 - \beta, \tag{1.1}$$

或找一个统计量$T_L(\mathbf{X})$, 使得对$0<\beta<1$有

$$P_\theta(T_L(\mathbf{X})\leq X<+\infty)=1-F_\theta(T_L(\mathbf{X}))\geq 1-\beta, \tag{1.2}$$

或找一个统计量$T_U(\mathbf{X})$, 对$0<\beta<1$有

$$P_\theta(-\infty<X\leq T_U(\mathbf{X}))=F_\theta(T_U(\mathbf{X}))\geq 1-\beta. \tag{1.3}$$

在(1.1)中, 由于$T_1(\mathbf{X})$和$T_2(\mathbf{X})$为随机变量, 故$F_\theta(T_1(\mathbf{X}))$和$F_\theta(T_2(\mathbf{X}))$也是随机变量, 所以"$F(T_2)-F(T_1)\geq 1-\beta$"是一个随机事件. 显然不能保证这一事件绝对发生, 于是只能降低要求: 给定r (通常$0<r<1$) , 要求"$F(T_2)-F(T_1)\geq 1-\beta$"这个事件至少以概率$1-r$成立,即

$$P_\theta\big(F(T_2)-F(T_1)\geq 1-\beta\big)\geq 1-r.$$

对(1.2)和(1.3)中的T_L, T_U也可以提出类似要求, 这就引导到容忍区间和容忍限的概念. 下面给出定义.

定义4.5.1 设样本$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为从总体$X\sim F_\theta$, $\theta\in\Theta$中抽取的简单样本. 又设$T_1(\mathbf{X})$和$T_2(\mathbf{X})$是两个统计量, 且$T_1(\mathbf{X})\leq T_2(\mathbf{X})$, 若对任意给定的$\beta$, γ (通常取较小的数, 如$\beta=0.05$, $\gamma=0.01$), $0<\beta$, $\gamma<1$有

$$\begin{aligned}&P_\theta\left\{P_\theta(T_1\leq X\leq T_2)\geq 1-\beta\right\}\\&\quad=P_\theta\big\{F(T_2)-F(T_1)\geq 1-\beta\big\}\geq 1-\gamma,\ \text{一切}\ \theta\in\Theta,\end{aligned} \tag{1.4}$$

则称$[T_1,T_2]$是F_θ的一个水平为$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍区间 (Tolerance interval).

设$T_L=T_L(\mathbf{X})$和$T_U=T_U(\mathbf{X})$是两个统计量, 若对任意给定的β, γ, $0<\beta$, $\gamma<1$,和一切$\theta\in\Theta$,分别有

$$\begin{aligned}&P_\theta\left\{P_\theta(T_L\leq X)\geq 1-\beta\right\}=P_\theta\big\{1-F(T_L)\geq 1-\beta\big\}\\&\quad=P_\theta\big\{F(T_L)\leq\beta\big\}\geq 1-\gamma,\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$P_\theta\left\{P_\theta(X\leq T_U)\geq 1-\beta\right\}=P_\theta\big\{F(T_U)\geq 1-\beta\big\}\geq 1-\gamma, \tag{1.6}$$

则称T_L和T_U分别是F_θ的一个水平为$(1-\beta,1-\gamma)$容忍下限 (Tolerance lower limit)和容忍上限 (Tolerance upper limit).

注意上述定义中的两个P_θ的含义是不同的, 里面的P_θ是按总体分布F_θ来计算的, 外面的P_θ是按样本$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布来计算的.

容忍区间和容忍限之间有下列关系:

引理4.5.1 若$T_2(\mathbf{X})$和$T_1(\mathbf{X})$分别是分布F_θ的水平为$(1-\beta/2,1-\gamma/2)$ 的容忍上、下限, 且总有$T_2(\mathbf{X})\geq T_1(\mathbf{X})$, 则$[T_1(\mathbf{X}),T_2(\mathbf{X})]$为$F_\theta$的水平为$(1-\beta,1-\gamma)$容忍区间.

证 令A表示"$F(T_1)\leq\beta/2$"; B表示事件"$F(T_2)\geq 1-\beta/2$"; C表示事件"$F(T_2)-F(T_1)\geq 1-\beta$", 则由定义4.5.1可知

$$P_\theta(A)\geq 1-\gamma/2,\quad P_\theta(B)\geq 1-\gamma/2. \tag{1.7}$$

我们希望证明$P_\theta(C) \geq 1-\gamma$. 由以上定义可知, 若$A$、$B$同时成立, 则必有$F(T_2)-F(T_1) \geq 1-\beta$, 即$C$成立, 因此$AB \subset C$, 故有$P_\theta(C) \geq P_\theta(AB)$, 由此可得

$$\begin{aligned}
P_\theta(C) &= P_\theta(F_\theta(T_2)-F_\theta(T_1) \geq 1-\beta) \geq P(AB) \\
&= P(A)+P(B)-P(A \cup B) \\
&\geq (1-\gamma/2)+(1-\gamma/2)-1 = 1-\gamma.
\end{aligned}$$

定理证毕.

二、正态总体的容忍区间和容忍限

设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单随机样本, $\theta=(\mu,\sigma^2)$的充分统计分量为

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

我们将基于充分统计量$(\bar{X},S^2)$来构造正态总体的容忍限和容忍区间问题. 在总体$N(\mu,\sigma^2)$中, 若μ和σ^2已知, 则水平为$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上下限和容忍区间分别为$\mu+\sigma u_\beta$, $\mu-\sigma u_\beta$和$[\mu-\sigma u_{\beta/2},\mu+\sigma u_{\beta/2}]$. 但现在$\mu$和$\sigma^2$未知, 我们知道$\bar{X}$和$S^2$分别是$\mu$和$\sigma^2$的良好估计, 因此将上述容忍上限中的$\mu$和$\sigma$用$\bar{X}$和$S$代替得到$\bar{X}+Su_\beta$. 由于估计而带来的随机性, 水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上限不见得正好是$\bar{X}+Su_\beta$, 而可能要将系数$u_\beta$修改为某个$\lambda$, λ既与β有关, 也与γ有关(注意u_β与γ无关). 容忍下限和容忍区间也如此处理.

因此我们首先来求容忍上限. 即找λ使$\bar{X}+\lambda S$为水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上限. 按定义, 对给定的β和γ, $0<\beta$, $\gamma<1$, 要确定λ, 使得

$$P_\theta\{P_\theta(X \leq \bar{X}+\lambda S) \geq 1-\beta\} \geq 1-\gamma.$$

由于$(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$, 其分布函数为$\Phi(\cdot)$, 因此上式左边也为

$$\begin{aligned}
&P_\theta\left\{P_\theta\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\bar{X}-\mu+\lambda S}{\sigma}\right) \geq 1-\beta\right\} \\
&= P_\theta\left\{\Phi\left(\frac{\bar{X}-\mu+\lambda S}{\sigma}\right) \geq 1-\beta\right\} \\
&= P_\theta\left\{\frac{\bar{X}-\mu+\lambda S}{\sigma} \geq \Phi^{-1}(1-\beta)=u_\beta\right\}. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

令$Z=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$, $S^*=S/\sigma$,则$Z \sim N(0,1)$, $S_* \sim \sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$.因此

$$\frac{Z-\sqrt{n}u_\beta}{S/\sigma}=\frac{Z-\sqrt{n}u_\beta}{S_*} \ \sim \ t_{n-1,\,\delta}\,,$$

即自由度$n-1$, 非中心参数$\delta=-\sqrt{n}u_\beta$的非中心t分布. 由(1.8)可知

$$\begin{aligned}
&P_\theta\left\{P_\theta\left(X \leq \bar{X}+\lambda S\right) \geq 1-\beta\right\} \geq 1-\gamma \Longleftrightarrow \\
&P_\theta\left\{\frac{\bar{X}-\mu+\lambda S}{\sigma} \geq u_\beta\right\} \geq 1-\gamma \qquad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$P_\theta\left\{\frac{Z-\sqrt{n}u_\beta}{S_*}\geq -\sqrt{n}\lambda\right\}\geq 1-\gamma. \tag{1.9}$$

若记$\lambda=\lambda(n,\beta,\gamma)$, 故由$-\sqrt{n}\lambda=t_{n-1,\delta}(1-\gamma)$, 解得$\lambda(n,\beta,\gamma)=-t_{n-1,\delta}(1-\gamma)/\sqrt{n}=t_{n-1,\delta}(\gamma)/\sqrt{n}$. 因此可知, 水平为$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上限为$\bar{X}+\lambda S$, 其中$\lambda=t_{n-1,\delta}(\gamma)/\sqrt{n}$. 类似可求水平为$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍下限为$\bar{X}-\lambda S$, λ同上. 对常见的n, λ, γ已编制了$\lambda(n,\beta,\gamma)$值的表, 见附表6.

求正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的容忍区间, 可利用引理4.5.1可得$[\bar{X}-\lambda S,\bar{X}+\lambda S]$, 此处$\lambda(n,\beta,\gamma)=t_{n-1,\delta^*}(\gamma/2)/\sqrt{n}$. 其中$\delta^*=-\sqrt{n}u_{\beta/2}$. 当然, 现有的非中心$t$分布表还不够大, 不一定能从表上直接查到非中心$t$分布的分位数的值. 但书末附表7 给出了$\lambda(n,\beta,\gamma)$值的表.

例4.5.3 某厂生产乐器用的镍合金线. 经验表明: 镍合金线的抗拉强度服从正态分布. 今从一批产品中随机抽取10个样品, 测得起抗拉强度为(单位: kg/mm^2)

10512, 10623, 10668, 10554, 10776, 1071, 10557, 10581, 10666, 10670

求该镍合金线抗拉强度容忍下限(设水平为(0.95, 0.95))

解 此问题中$n=10$, 水平为$(0.95,0.95)$即,$\beta=0.05$, $\gamma=0.05$. 因此$1-\beta=0.95$, $1-\gamma=0.95$. 由数据算得

$$\bar{X}=10632.4,\quad S^2=6738.77,\quad S=82.09.$$

查附表6得$\lambda=2.91$, 因此得容许下限$T_L=\bar{X}-\lambda S=10632.4-2.91\times 82.09=10393.52$. 因此这批镍合金线抗拉强度不低于10393.52 kg/mm^2.

例4.5.4 经验表明棉纱的断裂负荷(单位: 百分之一牛顿) 服从正态分布, 现从一批棉纱中随机抽取12根, 测得其断裂负荷为

228.6, 232.7, 238.8, 317.2, 315.8, 275.1,

222.2, 236.7, 224.7, 251.2, 210.4, 270.7

求棉纱断裂负荷的水平为(0.95,0.99)的容忍区间.

解 此问题中$n=12$, $1-\beta=0.95$, $1-\gamma=0.99$,由数据算得

$$\bar{X}=252.0,\quad S^2=1263.4,\quad S=35.5$$

查附表7得$\lambda(12,0.95,0.99)=3.87$,由此算得

$$T_L=\bar{X}-\lambda S=252.0-3.87\times 35.5=114.6$$
$$T_L=\bar{X}+\lambda S=252.0+3.87\times 35.5=389.4$$

因此棉纱断裂负荷的水平$(0.95,0.99)$的容忍区间为$[114.6,389.4]$.

三、非参数容忍限和容忍区间

在实际问题中, 还会经常遇到这样的问题, 人们只知道总体分布F是连续型的, 要求此分布的容忍限和容忍区间. 由于这时不知道分布的具体形式, 谈不上运用分布的性质, 只能利用样本给出的信息. 下面讨论基于次序统计量如何给出F的容忍限和容忍区间. 先证明一个预备知识.

引理4.5.2 设一维随机变量$X \sim F(x)$, $F(x)$是分布函数且处处连续, 则$Y = F(X)$服从均匀分布$U(0,1)$.

证 因为$0 < Y < 1$只需对$0 < y < 1$证明$P(Y < y) = y$即可. 记$t = \inf\{x : F(x) \geq y\}$,则由$F(x)$处处右连续且非降, 易见$F(t) = y$, 以及$F(x) < y \Longleftrightarrow x < t$,故有

$$P(Y < y) = P(F(X) < y) = P(X < t) = F(t) = y.$$

引理证毕.

现设$X_1, \cdots, X_n$为从总体$X \sim F(x)$中抽取的简单随机样本, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$为其次序统计量, 根据引理4.5.2可知, 若记$U_i = F(X_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$则$U_1, \cdots, U_n$ i.i.d. $\sim U(0,1)$. $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \cdots \leq U_{(n)}$为其次序统计量.

1. 求F的水平$(1-\beta, 1-\gamma)$的容忍区间和容忍限

记$U_i = F(X_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $V_{ij} = U_{(j)} - U_{(i)}$, $1 \leq i < j \leq n$, 则V_{ij}的密度g_{nij}已由前面给出. 若以$\left[X_{(i)}, X_{(j)}\right]$作为容忍区间, 按定义有

$$P\Big(P\left(X_{(i)} \leq X \leq X_{(j)}\right) \geq 1-\beta\Big) \geq 1-\gamma. \tag{1.10}$$

上式左边为

$$P\Big(F(X_{(j)}) - F(X_{(i)}) \geq 1-\beta\Big) = P\Big(V_{ij} \geq 1-\beta\Big) = \int_{1-\beta}^{1} g_{nij}(v)dv. \tag{1.11}$$

如果选择适当的i, j使(1.10)式中的积分不小于给定的$1-\gamma$, 则$[X_{(i)}, X_{(j)}]$就是F的一个水平$(1-\beta, 1-\gamma)$的容忍区间. 密度g_{nij} 称为Beta 分布, 其参数为$j-i$和$n-j+i+1$, 记为$Be(j-i, n-j+i+1)$. Beta 分布的参数不必为整数, 只要大于0就行. 当$p > 0$, $q > 0$时, $Be(p,q)$表示一分布, 其分布函数为

$$I_{p,q}(x) = \frac{1}{B(p,q)} \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \tag{1.12}$$

其中$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$,称为**Beta 积分.**它与Gamma函数$\Gamma(x)$有关系：$B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$,这个公式在微积中已经给出过.

公式(1.12)当$0 < x < 1$时,称为**不完全的Beta 积分,** Pearson 曾给它造了表. 这表可用于选择i, j的问题.

对$F(x)$的水平$(1-\beta, 1-\gamma)$的容忍上下限的问题也同样处理. 对容忍上限有

$$P\big\{P\big(X \leq X_{(i)}\big) \geq 1-\beta\big\} \geq 1-\gamma,$$

此式左边是$P\big\{F(X_{(i)}) \geq 1-\beta\big\} = P\big(U_{(i)} \geq 1-\beta\big)$.利用(**??**)式, 在其中置$F(x) = x$, $f(x) = 1$得$U_{(i)}$的密度

$$g_{ni}(x) = i\binom{n}{i} x^{i-1}(1-x)^{n-i} I_{[0<x<1]}.$$

因此有

$$P\big\{F(X_{(i)}) \geq 1-\beta\big\} = P\big(U_{(i)} \geq 1-\beta\big) = \int_{1-\beta}^{1} g_{ni}(v)dv. \tag{1.13}$$

选择i使(1.13)式不小于$1-\gamma$, 则根据定义$X_{(i)}$就是F的一个水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上限.

同理选择j, 使得下式不小于$1-\gamma$, 即

$$P\big(F(X_{(j)})\le\beta\big)=P\big(U_{(j)}\le\beta\big)=\int_0^\beta g_{nj}(v)dv\ge 1-\gamma, \tag{1.14}$$

则$X_{(j)}$就是F的一个水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍下限.

在(1.13)和(1.14)中选择i, j使积分不小于$1-\gamma$, 可借助于不完全Beta函数表求得.

2. 特例情形

(1) 假如我们取$X_{(n)}$作为F的一个水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上限, 样本容量n必须有一定的要求, 否则它不能作为合适的容忍上限. 那么样本容量n至少应为多少? 这就把求容忍上限的问题转化为确定样本容量的问题.

由于$X\sim F(x)$, 且$F(x)$处处连续,故$F(X)\sim U(0,1)$. 而$F(X_{(n)})=U_{(n)}$是来自总体$U(0,1)$的容量为n的样本的最大次序统计量, 其密度函数为

$$g_{nn}(y)=ny^{n-1}I_{[0<y<1]}\,.$$

于是要求确定n, 使得

$$P\big\{F(X_{(n)})\ge 1-\beta\big\}=P\big(U_{(n)}\ge 1-\beta\big)\ge 1-\gamma,$$

即

$$\int_{1-\beta}^1 ny^{n-1}dy\ge 1-\beta \Longleftrightarrow 1-(1-\beta)^n\ge 1-\gamma.$$

因此有

$$n\ge\frac{\ln\gamma}{\ln(1-\beta)}$$

对给定的β, γ, 可以算得满足上述不等式的最小自然数n.

(2) 类似计算可知, 若取$X_{(1)}$作为F的一个水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍下限, 可知$F(X_{(1)})=U_{(1)}$密度函数为

$$g_{n1}(y)=n(1-y)^{n-1}I_{[0<y<1]}$$

故要使

$$P\big(F(X_{(1)})\le\beta\big)=P\big(U_{(1)}\le\beta\big)=\int_0^\beta n(1-y)^{n-1}dy\ge 1-\gamma,$$

同样解出$n\ge\ln\gamma/\ln(1-\beta)$.

对通常用的β, γ, 确定F的水平$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍上下限所需要最小样本容量n, 已编制了表, 详见附表8. 如$1-\beta=0.90$, $1-\gamma=0.95$, 从附表8上查得$n=29$, 若$1-\beta=0.95$, $1-\gamma=0.99$从表上查得$n=90$.

(3) 若取$[X_{(1)},X_{(n)}]$作为$F(x)$的一个水平为$(1-\beta,1-\gamma)$的容忍区间, 按定义

$$P\big(F(X_{(n)})-F(X_{(1)})\ge 1-\beta\big)=P\big(U_{(n)}-U_{(1)}\ge 1-\beta\big)\ge 1-\gamma. \tag{1.15}$$

由于$(U_{(1)}, U_{(n)})$的联合密度

$$p(y_1, y_2) = n(n-1)(y_2 - y_1)^{n-2} I_{[0 \le y_1 \le y_2 \le 1]},$$

所以(1.15)式可改写为

$$\begin{aligned}\iint\limits_{y_2 - y_1 \ge 1-\beta} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 &= \int_0^\beta \int_{y_1 + (1-\beta)}^1 n(n-1)(y_2 - y_1)^{n-2} dy_2 dy_1 \\ &\ge 1 - \gamma,\end{aligned}$$

解之可得

$$n(1-\beta)^{n-1} - (n-1)(1-\beta)^n \le \gamma.$$

对给定的β和γ (或等价的给定$1-\beta, 1-\gamma$) 可以从上述不等式中解出n来.

对常用的$1-\beta$和$1-\gamma$, 也已编造了确定F的水平$(1-\beta, 1-\gamma)$的容忍区间所需最小样本容量表, 见附表9. 例如, $1-\beta = 0.90$, $1-\gamma = 0.95$, 从附表9上查得$n = 46$; $1-\beta = 0.95$, $1-\gamma = 0.99$,从表上查得$n = 130$.