Contents

1 引言

1.1 考核方式及成绩构成

本处说明在可预见的时间范围内仅适用于梁军老师班级的同学。

- 本课程没有期末大考;
- 本课程的成绩构成为: 平时成绩 + 期末成绩，其中期末成绩占比 60%;
- 平时成绩包括：
  - 课外练习，主要涉及运筹学的基本概念理论、尤其算法，有一些编程工作；
  - 课堂讨论;
- 期末成绩包括:
  - 课程结束时有一个 30 分钟左右随堂小考 (闭卷)，主要涉及运筹学的基本概念、方法;
  - 期末大作业含大作业的研究报告和结题答辩;

1.2 大作业

1.2.1 内容与形式

1. 大作业以小组为单位 (每个小组 4-6 人，1 位组长，人员自由组阁); 要求第二周就要分好组 (定下组员及组长)，第三周就要初步定下题目 (以后可以改)，并开始调研工作；
2. 为帮助大家定题和开展工作，第三周结束前由老师抽一点时间与大家交流一下; 另外，近几年的范例会发给大家；
3. 每个小组就自选的某个社会问题或工程问题，结合课程所学知识和方法进行分析、建模、优化、预测、评价、决策，最后给出解决问题的定性、定量化建议或解决方案，并撰写成科技报告或科技论文 (格式见后);

4. 将大作业论文整理成 ppt，进行课堂现场宣讲和答辩，由任课教师、助教和其他同学作为评委和质询者，教师、助教和同学们当堂评分 (同学们的分数以小组名义给出，每个小组给一个分数)，所以大作业答辩课小组成员尽量坐在一起；
5. 答辩过程中小组同学拍照留念 (集体照、演讲照、回答问题交流照)，代表性照片插入到研究报告中；
6. 答辩后各小组根据情况 (老师和同学们的建议、存在的问题未尽的内容等等)，进行修改、定稿；
7. 关于讨论课和大作业完成后所提交的材料:word+ppt+pdf 文件是必须的，如果在准备中用到或形成了一些电子材料 (如图片、视频、程序、软件、下载的资料、其他)，也一并上交 (显示了同学们在讨论课环节上的深入和广泛程度，展现了工作量)，加分更多；

1.2.2 格式

1. 题目、人员及分工、指导老师 (2 个老师都写)、开始时间、结束时间；
2. 中文摘要、关键词，英文摘要、关键词；
3. 正文；
   (a) 引言或问题的提出或需要解决的问题或研究目的等等-说清楚做什么；
   (b) 理论方法方面的描述、讨论、引用等等-说清楚用什么方法做和怎么做的；
   (c) 具体应用或解决方案或实验结果等等-做的结果如何；
   (d) 分析、讨论和结论-得到了什么；
4. 参考文献；
5. 附录、附件 (一些电子材料，如图片、视频、程序、软件、下载的资料、其他)；

2

线性规划

2.1 线性规划问题

2.1.1 线性规划问题的定义

线性规划问题可以归结为求目标函数在约束条件下的最大值问题。
线性规划模型由以下三个基本要素构成：

- **决策变量**：决策变量是问题中要确定的未知量，决策者通过调控决策变量来选取不同的方案、设计、措施以达到最优目的。
- **目标函数**：目标函数通常是决策变量的函数，表达了“何为最优”的准则和目标，规定了优化问题的实际意义。
- **约束条件**：约束条件指决策变量取值时受到的各种资源和条件的限制，表达了一种“有条件优化”的概念，通常为决策变量的等式或不等式方程。

Definition 2.1.1 ▸ 线性规划问题

线性规划问题 是一类决策变量的取值是连续的，且目标函数和约束条件都是决策变量的线性函数的问题

- **整数规划问题**：决策变量的取值为整数点。
- **混合整数规划问题**：部分决策变量取值连续而其余取值为整数。
- **非线性规划问题**：目标函数或约束条件中存在任何的非线性因子。

2.1.2 线性规划问题的图解法求解

目前，线性规划问题的求解方法主要有两种：

- **图解法**：适用于只有两个决策变量的线性规划问题。其可行域可以在平面上画出。
- **单纯形法**：适用于三个决策变量以上数决策变量的线性规划问题。

Definition 2.1.2 ▸ 解的可行域

解的可行域 是满足约束条件的决策变量向量在 n 维空间中构成的点的集合。

可行域中使得目标函数达到最优的解点成为最优解，相应的目标函数值称为最优值。
求解步骤如下：

1. **建系：**以两个决策变量为轴在平面上建立直角坐标系
2. **可行域：**由线性等式和不等式构成的约束条件，标出可行域
3. **最优解：**图示并移动目标函数，寻找最优解。

Example 2.1.3 ▶ 图解法解线性规划

用图解法解下列线性规划:

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 - 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

解:

1. 以 x_1, x_2 为坐标轴画出直角坐标系；
2. 分别画出 $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + x_2 = 2, x_1 = 0, x_2 = 0$ 四条直线, 则该问题的可行域为这四条直线包围的内部区域 s
3. 目标函数的等值线方程为 $-x_1 - 4x_2 = z$ 。因为要找的最优解在可行域内使目标函数具有最小值, 所以让等值线 $-x_1 - 4x_2 = z$ 沿 z 减小的方向在可行域内尽量平行移动, 直到图中 $x_1 = 1, x_2 = 3$ 的位置, 如果再移动就移出了可行域 **s** 。于是, 点 (1,3) 即为问题的最优解, 目标函数的最优值为 -13。

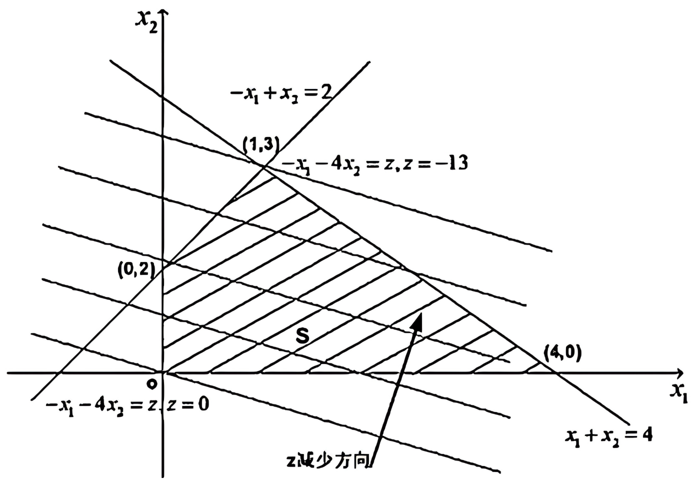
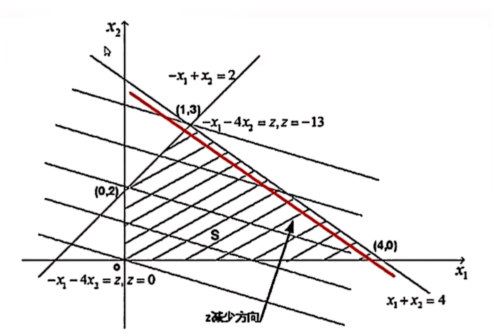


Figure 2.1: 例 1.1.3 图解

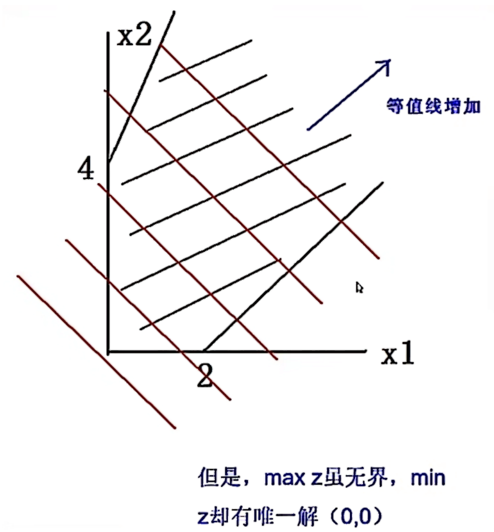
思考：

- **无穷多解**：上例中若取 $\min z = 3x_1 + 3x_2$，则目标函数线与 $x_2 + x_2 = 4$ 边界线重合，带来无穷多解。



- **无界解**：例如下述线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\max z &= x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 &\le 4 \\
x_1 - x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



- **无最优解**：若可行域为空，则无可行解，自然无最优解。

2.2 线性规划问题的数学模型

Theorem 2.2.1 ▸ 一般形式

特点: **目标函数**和**约束条件**都是决策变量的线性函数。

$$\max(\min)\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq (\geq,=)b_i & (i=1,2,\cdots,m), \\ x_j \geq 0 & (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

也可以表示为矩阵形式：

$$\max(\min)\ z=\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\mathbf{Ax} \leq (\geq,=)\mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq 0\end{cases}$$

其中称 $\mathbf{c}=(\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\cdots,\mathrm{c}_\mathrm{n})$ 为目标函数的**系数向量**;

称 $\mathbf{x}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n})^\mathrm{T}$ 为**决策向量**;

称 $\mathbf{b}=(\mathrm{b}_1,\ \mathrm{b}_2,\cdots,\mathrm{b}_\mathrm{m})$ 了为约束方程组的**常数向量**;

称 $\mathbf{A}=(\mathrm{a}_\mathrm{ij})_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ 为约束方程组的**系数矩阵**;

称 $p_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$ 为约束方程组的**系数向量**.

Theorem 2.2.2 ▸ 标准形

为了便于研究，规定线性规划模型的标准型。

$$\max\ z = \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\\ \mathbf{x} \geq 0\end{cases}$$

方法：一般形式化为标准形的方法

- **目标函数**：若目标函数为 $\min z$，则令 $z' = -z$ 转化为 $\max z'$。
- **约束条件**：若约束条件为不等式，可以再不等号左端加上/减去一个非负变量（称为**松弛变量**）化为等式约束（哪边小，加哪边）。
- **决策变量**：若决策变量非正 $(x_j \leq 0)$，则令 $x_j' = -x_j$，$x_j' \geq 0$，转化为非负变量。

Example 2.2.3 ▸ 一般形式化标准形

$$\begin{aligned}\min z = x_1 + 2x_2 - 3x_3\\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 7\\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5\\ x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

化为标准形式。

解：

1. 因 x_3 无约束, 令 $x_3 = x_4 - x_5$，$x_4, x_5 \geq 0$
2. $x_1 + x_2 + x_3 <= 7 \rightarrow x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7$
3. $x_1 + x_2 + x_3 >= 2 \rightarrow x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) = 2 + x_7$
4. $-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \rightarrow -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5$

   其中：$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 >= 0$

此时再考虑目标函数

$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max z' = -z = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 0x_6 + 0x_7$

2.3 线性规划解的基本概念与基本理论

2.3.1 解

Definition 2.3.1 ▶ 可行解

满足 Theorem 2.2.2 约束条件的解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为线性规划问题的**可行解**。

Definition 2.3.2 ▶ 可行域

可行解全体构成的集合称为**可行域**，记为 D。

Definition 2.3.3 ▶ 最优解

使 Theorem 2.2.2 中目标函数达到最大的可行解称为**最优解**。

2.3.2 基

Definition 2.3.4 ▶ 基

设系数矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 的秩为 m , 则称 A 的某个 $m \times m$ 非奇异子矩阵 B 为线性规划问题的一个**基**。

不妨设 $B = \left(a_y\right)_{m\times m} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m)$

- **基向量**：向量 $\mathbf{p}_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}\right)^{\mathrm{T}} (j = 1, 2, \cdots, m)$;
- **非基向量**：矩阵 A 的其他列向量；
- **基变量**：与基向量对应的决策变量 $\mathbf{x}_j\, (j = 1, 2, \cdots, m)$;
- **非基变量**：其他的变量称为非基变量。

2.3.3 基解

设问题的基为 $B = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m)$，将约束为：

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}_j x_j = \mathbf{b} - \sum_{j=m+1}^{n} \mathbf{p}_j x_j \tag{2.1}$$

Definition 2.3.5 ▸ 基解

在方程组 (2.1) 的解中，令 $x_j = 0(j = m+1, m+2, \cdots, n)$，则解向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots, 0, 0)$ 为问题的**基解**。

Definition 2.3.6 ▸ 基可行解、可行基

满足非负约束条件的基解称为**基可行解**，对应于基可行解的基解为**可行基**。

方法：理解上述定义 对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 这样一个矩阵方程，我们以下面为例

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

观察，不难发现以下几个性质：

- A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，其中 $m < n$，这样决策变量才有多解；如果 $m = n$ 即满秩，就只有唯一解了。
- 在矩阵 A 中选取一个 $m \times m$ 的子矩阵 B，并且这个子矩阵是非奇异的，那么就可以得到一个基，如标红所示。该子矩阵的 m 个行向量线性无关，m 个列向量也线性无关。因此相当于一个 m 维空间中的坐标系。
- 基 B 中的每一个列向量就是基向量，不属于 B 但在 A 中的列向量就是非基向量。
- A 右乘列向量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}$ 中标红的变量就是与基向量对应的决策变量，其他未标红的变量就是非基变量。
- 把基变量留下来，把非基变量移到等式右侧，令非基变量为 0，得到的解就是基解；也就是将基 B 中的列向量与 $\mathbf{x}$ 中的基变量相乘，得到的就是基解。换句话说，令 $\mathbf{x}$ 中的非基变量为 0，左乘 A 就可以得到基解；
- 如果基解本身均大于 0，就是基可行解。

Definition 2.3.7 ▶ 凸集

假设 K 为 n 维欧氏空间中的点集，如果对于任意两点，其连线上所有点均在 K 内，则称 K 为**凸集**。

例：实心圆、实心球是凸集，空心圆、空心球不是凸集。直观地说，凸集没有凹入部分。

Definition 2.3.8 ▶ 凸集的顶点

对于凸集 K 中的点 x，如果 x 不能用相异的两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in K$ 的凸组合表示为 $x = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in K \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$，**即点** x **不在** $x^{(1)}$ **和** $x^{(2)}$ **的连线上**。则称 x 为凸集 K 的一个顶点

对于凸集，顶点一般为边界点，但并非所有边界点都是顶点.

2.3.4 线性规划的几个重要定理

基于 **??**节中代数学中求解方程和集合论的铺垫之后，我们可以得到几个 z 重要定理：

Theorem 2.3.9 ▶ 定理

1. 如果线性规划问题存在可行域 D，则其可行域 $D = \left\{x \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j x_j = \mathbf{b}, x_j \geq 0\right\}$ 一定是凸集。
2. 线性规划问题 (2.5)，(2.6) 的任一个基可行解 $\mathbf{x}$ 必对应于可行域 D 的一个顶点。
3. 对于可行域
   - 如果可行域有界，则问题的最优解一定在可行域的顶点上达到。
   - 如果可行域无界，则问题可能无最优解; 若有最优解也一定在可行域的某个顶点上达到。

定理 1 的好处在于，凸集有很多良好的性质。

定理 2 对我们求解没有太大帮助。

定理 3 将求解最优化的可行域中无穷可解点的比较问题变成了三个定点的比较问题。

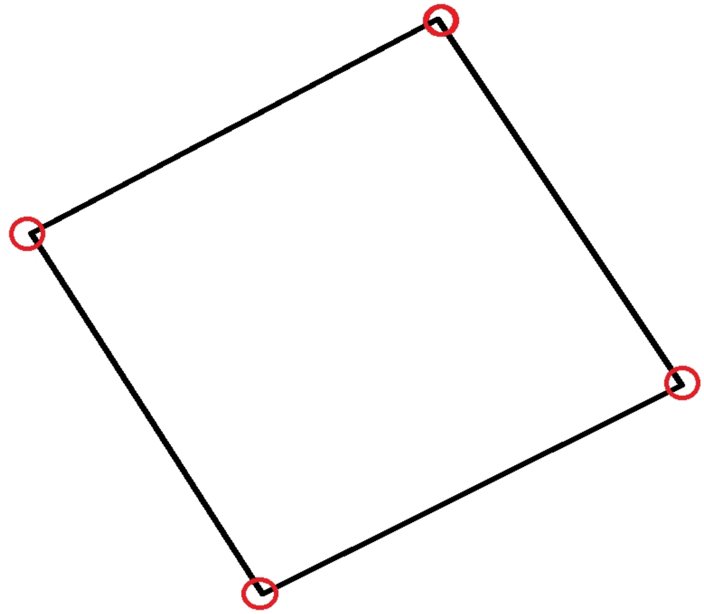


Figure 2.2: 例如我们的可行域是上图中的这个四边形，最优解一定在这个四边形的四个顶点上，其他的可行域的点全都不必算。这样我们把无穷维（有无穷个点）的优化问题转化为有限的、可穷举的优化问题。

总结来说，可以得到四个结论：

1. 线性规划所有可行解构成的集合为凸集，也可能是无界域;
2. 线性规划的可行域有有限个顶点;
3. 线性规划的每个基可行解对应可行域的一个顶点;
4. 若线性规划有最优解，必定在某个顶点上达到，但**并非只能在顶点上达到**。
   (比如一个函数在某处有最大值，不是说只有在这一处能达到最大值，可能 $f(x_1) = f(x_2) = f_{max}, x_1 \neq x_2$)

本质上可以理解为**一个可行域内的点，只有顶点是线性无关的，其他任何点都可以由顶点线性表示**。
这些结论构成了单纯形法的理论基础。

2.4 线性规划求解的单纯形法

求解线性规划问题的方法

1. 求一个基可行解 (即对应可行域的一个顶点);
2. 检查该基可行解是否为最优解;
    - 如果不是，则设法再求另一个没有检查过的基可行解 (可行域内另一个顶点)，如此进行下去，直到得到某一个基可行解为最优解为止;
    - 如果是，结束。

这个过程本质上就是先找到可行域内任意一个顶点，然后跳到其他顶点上，穷举的办法求谁最大。就好像我们在函数中，有许多极大值，但是要都求出来去求最大值。如果用函数来类比，**??**中所做的就是先找到任意一个极大值点 x_1，**??**中所做的就是利用 x_1 便捷地去找其他极大值点;
那么我们不禁要问:

- 如何求出第一个基可行解?（如何找到 x_1?）
- 如何由一个基可行解过渡到另一个基可行解?（怎么通过 x_1 快速找到其他极大值点?）
- 如何判断基可行解是否为最优解?（哪个极大值点是最大值点?）

解决这些问题的方法称为**单纯形法**。

2.4.1 初始基可行解的确定

初始基可行解的确定方法

1. **标准化**：第一步，将线性规划模型化为标准型;
2. **解方程**：第二步，解矩阵方程，得到基可行解。

这一步骤本质上是**找到可行域的任意一个顶点**，且只能硬着头皮算。考虑到读者可能和笔者一样忘记了线性代数的相关内容，因此在这里对矩阵方程解法加以补充：现在假设我们有:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\s_1\\s_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\5\\7\end{bmatrix}$$

- 从系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $(m < n, \text{秩为}m)$ 总可以得到一个 m 阶单位阵 E_m 。(例如，可以通过高斯消元法对系数矩阵 A 进行行初等变换，得到一个 m 阶单位阵 E_m)。$A\mathrm{x} = \mathrm{b} \to [E_m\ \text{其他元素}]\mathrm{x}' = \mathrm{b}'$.

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 取如上 m 阶单位阵 E_m 为初始可行基，即 $B = E_m$, 将相应的约束方程组变为: $x_i = b_i - a_{i,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{i,n}x_n \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{解得列向量:} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 令方程组后面的 $n - m$ 个变量为 0, $x_j = 0 \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n)$，则可得一个初始基可行解：$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0, \ldots, 0\right)^T = (b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^T$.

$$\text{令非基变量为 0:} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4.2 寻找另一个基可行解：基变换法

为了确定在其他顶点上的可行解，我们需要使用**基变换法**的方法。

> **基变换法**
> 当一个基可行解不是最优解或不能判断时，需要过渡到另一个基可行解，即从基可行解，
> $$\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}, 0, \dots, 0\right)^T$$
> 对应的可行基
> $$B = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$
> 中替换一个列向量，用来替换的列向量与原向量组未被替换的向量线性无关。
> 例如，用非基变量 $p_{m+t}\,(1 \le t \le n-m)$（称为换入变量）替换基变量 $p_1\,(1 \le 1 \le m)$（称为换出变量），就可得到一个新的可行基
> $$B_1 = (p_1, \dots, p_{1-1}, p_{m+t}, p_{1+1}, \dots, p_m)$$
> 从而可以求出一个新的基可行解
> $$\mathbf{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, 0, \dots, 0\right)^T$$

我们仍然用刚才的例子：

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这是初始变换后的矩阵 A'，前三列已经是单位矩阵。

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \color{pink}{0} & \color{blue}{-2} & -3 \\ 0 & 1 & \color{pink}{0} & \color{blue}{-3} & -4 \\ 0 & 0 & \color{pink}{1} & \color{blue}{0} & 0 \end{bmatrix}$$

在这个步骤中，我们交换了 A' 的第三列和第四列，粉色为换出变量，蓝色为换入变量。

$$A''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$$

通过适当的初等变换（例如对第三列和第四列进行适当的线性组合），我们将前三列转换为单位矩阵，最终得到了这个矩阵。这样我们得到了一个新的可行基，以此可以继续解方程得到另一个可行解。

当然，也有可能换入非基变量后，我们应该首先检查更换后的“基”是否可逆，比如发现新的三个列向量线性相关而不是线性无关，不能构成一个基，那么此时应该换一个非基变量换入。

Theorem 2.4.1 ▶ 线性规划模型的另一个基可行解

事实上，这个新的基可行解可以用以下公式直接计算出来：

$$\mathbf{x}_i^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{x}_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t}, & i \neq l \\ \theta, & i = l \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \cdots, m, \\ 1 \leq l \leq m, 1 \leq t \leq n - m \end{array} \right)$$

其中

$$\theta = \frac{\mathbf{x}_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\mathbf{x}_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}} \mid \beta_{i,m+t} > 0 \right\},$$

并且

$$\mathbf{p}_{m+t} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} \mathbf{p}_i.$$

如果 $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_m^{(1)}, 0, \ldots, 0\right)^T$ 仍不是最优解，则可以重复利用这种方法，直到得到最优解为止。

2.4.3 最优性检验方法

实际上，我们并不需要把所有的“顶点”都找到再去比较哪个最大。我们可以找到可行域中的**任意一点**，因为这个点是不独立的（可以由其他所有顶点线性表示），所以如果我们找到了一个顶点 x_1，得到目标函数值 $z_1 = cx_1$；而有任一点 $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$，得到目标函数值 $z = cx$。只需要比较 z_1 和 z，即可知道 z_1 是否是最大值，证明过程如下（感兴趣的同学可以了解）：

将基可行解 $\mathbf{x}^{(1)}$ 和这个任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 分别代入目标函数得：

$$z^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i', \psi$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j \right) + \sum_{j=m+1}^{n} jj^+ j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' \right) x_j'$$

$$= z^{(1)} + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$

其中 $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' \quad (j = m+1, \cdots, n)$。记 $\sigma_j = c_j - z_j \quad (j = m+1, \cdots, n)$，则

$$z = z^{(1)} + \sum_{j=m+1}^{n} O_j x_j$$

注意到：当 $\sigma_j > 0 \quad (j = m+1, \cdots, n)$ 时，就有

$$z > z^{(1)};$$

当 $\sigma_j \leq 0 \quad (j = m+1, \cdots, n)$ 时，就有

$$z \leq z^{(1)}.$$

为此，$\sigma_j = c_j - z_j$ 的符号是判别 $\mathbf{x}^{(1)}$ 是否为最优解的关键所在，故称之为检验数。于是可以得出下面的结论：

判断最优解的办法

1. 如果 $\sigma_j \leq 0 \quad (j = m+1, \cdots, n)$，则 $\mathbf{x}^{(1)}$ 是问题的最优解，最优值为 $z^{(1)}$；
2. 如果 $\sigma_j \leq 0 \quad (j = m+1, \cdots, n)$，且至少存在一个 $\sigma_{m+k} = 0 \quad (0 \leq k \leq n-m)$，则问题有无穷多个最优解，$\mathbf{x}^{(1)}$ 是其中之一，最优值为 $z^{(1)}$；
3. 如果 $\sigma_j < 0 \quad (j = m+1, \cdots, n)$，则 $\mathbf{x}^{(1)}$ 是问题的唯一最优解，最优值为 $z^{(1)}$；
4. 如果存在某个检验数 $\sigma_{m+k} > 0 \quad (0 \leq k \leq n-m)$，并且对应的系数向量 $\mathbf{p}_{m+k}$ 的各分量 $a_{i,m+k} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$，则问题具有无界解（即无最优解）。

??节所有上述所有过程一般上不需要我们了解的过于深入，因为有现成的计算机函数可以用，但是可以领会其思想。

Example 2.4.2 ▶ 单纯形法求解完整过程

问题描述：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ 自由} \end{cases}$$

步骤 1：转换为标准形式

1. **处理自由变量：** 令 $x_2 = x_2^+ - x_2^-$，其中 $x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$。
2. **引入松弛变量：**
   - 约束 $x_1 + x_2 \geq 7$ -> $x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_1 = 7$（剩余变量 $s_1 \geq 0$）。
   - 约束 $x_1 - x_2 \leq 10$ -> $x_1 - x_2^+ + x_2^- + s_2 = 10$（松弛变量 $s_2 \geq 0$）。
3. **目标函数：**

$$z = 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- + 0s_1 + 0s_2$$

步骤 2：初始单纯形表

选择初始基变量 $\{x_1, s_2\}$，通过行变换使基变量对应的列变为单位矩阵：

	x_1	x_2^+	x_2^-	s_1	s_2	RHS
x_1	1	1	-1	-1	0	7
s_2	1	-1	1	0	1	10

行变换：Row 2 <- Row 2 - Row 1

更新后的单纯形表：

	x_1	x_2^+	x_2^-	s_1	s_2	RHS
x_1	1	1	−1	−1	0	7
s_2	0	−2	2	1	1	3

步骤 3：计算检验数

检验数公式：$\sigma_j = c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j$

当前基变量 $\{x_1, s_2\}$，$c_B = [2, 0]$。

$$\sigma_{x_1} = 2 - [2,0]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_{x_2^+} = 3 - [2,0]\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = 1$$

$$\sigma_{x_2^-} = -3 - [2,0]\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = -1 \quad \text{(最小，进基)}$$

$$\sigma_{s_1} = 0 - [2,0]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = 2$$

$$\sigma_{s_2} = 0 - [2,0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0$$

步骤 4：确定进基和出基变量

- **进基变量**：x_2^-（因 $\sigma_{x_2^-} = -1 < 0$）。
- **出基变量**：计算比率 $\theta = \frac{\text{RHS}}{\text{进基列，此处为}[-1,2]}$：
  - $\theta_{x_1} = \frac{7}{-1}$（舍去，因分母为负）。
  - $\theta_{s_2} = \frac{3}{2} = 1.5$（最小正值，出基）。

步骤 5：更新单纯形表

通过行变换使 x_2^- 对应的列变为 $[0,1]^T$：

1. Row 2 <- Row 2 / 2
2. Row 1 <- Row 1 + Row 2

更新后的单纯形表：

	x_1	x_2^+	x_2^-	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	0	−0.5	0.5	8.5
x_2^-	0	−1	1	0.5	0.5	1.5

步骤 6：重新计算检验数
当前基变量 $\{x_1, x_2^-\}$，$c_B = [2, -3]$。

$$\sigma_{x_1} = 2 - [2, -3]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_{x_2^+} = 3 - [2, -3]\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_{x_2^-} = -3 - [2, -3]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_{s_1} = 0 - [2, -3]\begin{bmatrix}-0.5\\0.5\end{bmatrix} = 2.5$$

$$\sigma_{s_2} = 0 - [2, -3]\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix} = 0.5$$

所有检验数 ≥ 0，当前解为最优解。

步骤 7：提取最优解
从最终单纯形表：

- $x_1 = 8.5, x_2^- = 1.5, x_2^+ = s_1 = s_2 = 0$。
- 原变量 $x_2 = x_2^+ - x_2^- = -1.5$。
- 目标值 $z = 2 \times 8.5 + 3 \times (-1.5) = 12.5$。

最终答案：

- **最优解：** $x_1 = 8.5, x_2 = -1.5$。
- **最优值：** $z = 12.5$。
- **验证：** 与图解法结果一致，求解正确。

2.5 线性规划问题的灵敏度分析

在线性规划模型

$$\max z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

约束条件为

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

其中，总假设 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 都是常数，但这些数值在许多情况下是由试验或测量得到的，特别是在迭代计算中，这些数值都是近似值。通常，$\mathbf{A}$ 表示工艺条件，$\mathbf{b}$ 表示资源条件，$\mathbf{c}$ 表示市场条件。在实际中，可能有多种原因引起它们的变化。

现在的问题是：这些系数在什么范围内变化时，线性规划问题的最优解不发生变化？这就是灵敏度分析要研究的问题。
这一问题比较复杂，本课程不做深入探究，但是大作业可以考虑

2.6 应用案例分析

2.6.1 下料问题

Example 2.6.1 ▶ 下料问题

某单位需要加工作 100 套工架，每套工架需用长为 2.9m，2.1m 和 1.5m 的圆钢各一根，已知原材料长 7.4m，现在的问题是如何下料使得所用的原材料最省?
解: 简单分析，在每一根原材料上各截取一根 2.9m,2.1m 和 1.5m 的圆钢做成一套工架，每根原材料剩下料头 0.9m。要完成 100 套工架，就需要用 100 根原材料，共剩余 90m 料头。
若采用套截方案，则可以节省原材料。下面给出了几种可能的套截方案，如表 2.1 所示。
实际上，为了保证完成这 100 套工架，使所用原材料最省，可以混合使用各种下料方案。
设按方案 A, B, C, D, E 下料的原材料数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5。根据表格 2-1，可以得到如下线性规划模型。目标函数：

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

所有 2.9 的料总数 100，所有 2.1 的料总数 100，所有 1.5 的料总数 100。

长度/m	方案				
	A	B	C	D	E
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
合计/m	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头/m	0	0.1	0.2	0.3	0.8

Table 2.1: 例 2.6.1 下料方案

Code Snippet 2.6.2 ▸ MATLAB 代码

运行该程序后，立即可以得到最优解为 $\mathbf{x} = (12.8243，27.1757，17.1757，32.8243，0)^{\mathrm{T}}$。四舍五入的方法取整得 $\mathbf{x} = (13, 27,17,33,0)^{\mathrm{T}}$。最优值为 $z = 16$, 即接方案 A 下料 13 根，方案 B 下料 27 根，方案 c 下料 17 根，方案 D 下料 33 根, 共需原材料 90 根就可以制作完成 100 套工架，剩余料头最少为 16m。

matlab 代码解析

1. **目标函数定义：**
   定义了最小化料头长度的目标函数系数向量，对应五种下料方案的料头长度。
2. **约束条件设置：**
   - 设置变量非负约束的右端项
   - 设置三种圆钢需求量的右端项
   - 矩阵通过负单位矩阵实现 $x_i \geq 0$ 的非负约束
   - 矩阵的每一列对应一个下料方案：
     - 第一行：2.9m 圆钢的生产数量约束
     - 第二行：2.1m 圆钢的生产数量约束
     - 第三行：1.5m 圆钢的生产数量约束
3. **线性规划求解：**
   调用 MATLAB 线性规划求解器，其中：
   - 输入参数：目标系数，不等式约束，等式约束
   - 输出参数： 为最优解向量， 为最优目标值
4. **结果修正：**
   原始解包含小数，通过四舍五入得到整数解，此时总用料 90 根，剩余料头 16m。

Code Snippet 2.6.3 ▸ LINGO 代码

运行该程序后，立即可以得到最优解为 $\mathrm{x} = (0,40,30,20,0)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $z = 16$, 即按方案 B 下料 40 根，方案 C 下料 30 根，方案 D 下料 20 根，共需原材料 90 根就可以制作完成 100 套工架，剩余料头最少为 16m。

2.6.2 连续投资问题

Example 2.6.4 ▸ 连续投资问题

某投资公司拟制定今后 5 年的投资计划，初步考虑下面的四个投资项目:
项目 A: 从第 1 年到第 4 年每年年初需要投资，于次年年末收回成本，并可获利润 15%;。
项目 B: 第 3 年年初需要投资. 到第 5 年年末可以收回成本, 并获得利润 25% 但为了保证足够的资金流动，规定该项目的投资金额上限为不超过总金额的 40
项目 C: 第 2 年年初需要投资, 到第 5 年来可以收回成本, 并获得利润 40%, 但规定该项目的最大投资金额不超过总金额的 30%;
项目 D:5 年内每年年初可以购买公债，于当年年末可以归还本金，并获利息 6%。
该公司现有投资金额 100 万元，请你帮助该公司制定这些项目每年的投资计划，使公司到第 5 年年末能够获得最大的利润。

解: 虽然这是一个连续投资问题，即属于动态优化问题，但是在这里可以用静态优化的方法来解决。用决策变量分别表示第 i 年年初为项目 A，B，C，D 的投资额，根据问题的要求各变量的对应关系如表 2-7 所示 (表格待补充)，表中空白处表示当年不能为该项目投资，也可认为投资额为 0。

首先注意到，项目 D 每年都可以投资，并且当年末就能收回本息，所以公司每年应把全部资金都投出去。因此，投资方案应满足下面的条件。第 1 年：将 100 万元资金全部用于项目 A 和项目 D 的投资，即：

$$x_{11} + x_{14} = 1000000$$

第 2 年：因为第 1 年用于项目 A 的投资到第 2 年年末才能收回，所以能用于第 2 年年初的投资金额只有项目 D 的第 1 年收回的本息总额 $x_{14}(1 + 0.06)$。于是第 2 年的投资分配为：

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14}$$

于是可以得到问题的线性规划模型为：

$$\max z = 1.15x_{41} + 1.25x_{32} + 1.40x_{23} + 1.06x_{54}$$

约束条件如下：

$$
\begin{gathered}
x_{11} + x_{14} = 1000000 \\
-1.06x_{14} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 0 \\
-1.15x_{11} - 1.06x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 0 \\
-1.15x_{21} - 1.06x_{34} + x_{41} + x_{44} = 0 \\
-1.15x_{31} - 1.06x_{44} + x_{54} = 0 \\
x_{32} \leq 400000 \\
x_{32} \leq 300000 \\
x_{33} \leq x_{33} + x_{44} \leq 0.3 \\
4 \leq t \leq 5
\end{gathered}
$$

考虑到这个问题的实际情况，这里使用 LINGO 求解该线性规划模型。

运行该程序后，得到最优解：

$x_{11} = 716981.1, x_{14} = 283018.9, x_{23} = 300000, x_{31} = 424528.3, x_{32} = 400000, x_{54} = 488207.5$

其他的变量均为零，最优值为：

$$z = 1437500$$

即连续投资方案为：

- 第 1 年用于投资项目 A 的金额为 716981.1 元，项目 D 的金额为 283018.9 元。
- 第 2 年用于项目 C 的投资金额为 300000 元。
- 第 3 年用于项目 A 的投资为 424528.3 元，项目 B 的金额为 400000 元。
- 第 5 年用于投资项目 D 的金额为 488207.5 元。

到第 5 年年末，该公司拥有总资金为 1437500 元，收益率为 43.75%。

2.7 第二章作业

2.7.1 配餐问题

Q：编程求解本章 ppt 中例 2.2 合理配餐问题，需要的基础数据自拟。

某幼儿园为了保证孩子们的健康成长，要求对每天的膳食进行合理科学的搭配，以保证孩子们对各种营养的需求. 从营养学的角度. 假设共有 5 种食品 $A_j(j=1,2....,6)$ 可供选择, 每种食品都含有加 6 种不同的营养成分 $B_i(i=1,2.,6)$. 而且每单位的食品 A_j 含有营养成分 B_i 的含量如下表所示 (数据为自拟)：

营养成分	食品					最低需求量
	A1	A2	A3	A4	A5	
B1	4.0	0.4	0.8	0.5	0.9	16.0
B2	0.5	4.0	0.5	0.7	0.7	26.0
B3	0.6	0.2	4.0	0.4	0.5	18.0
B4	0.7	0.1	0.3	4.0	0.3	12.0
B5	0.8	0.9	0.2	0.3	4.0	14.0
B6	1.2	1.3	1.4	1.4	1.3	20.0
食品单价	5	6	7	8	9	
摄入量最小值	2.0	3.0	3.0	1.0	3.0	

Table 2.2: 营养数据表

1. 每人每天对营养成分 B_i 的最低需求为 $b_i(i=1,2,\dots,6)$，而且食品 A_j 的单价为 $c_j(j=1,2,\dots,5)$. 问如何合理科学地制定配餐方案，既可以保证孩子们的营养需求，又使每人每天所需的费用最低?
2. 除了如上的要求之外，如果还要求各种食品的合理搭配，即要求每人每天对食品 A_j 的摄入量不少于 $d_j(j=1,2,\dots,5)$，问配餐方案又如何?

A：分析如下。

1. **基础配餐问题（仅考虑营养需求）**
    - **决策变量**：设每天采购食品 A_j 的数量为 x_j（单位：份），其中 $j=1,2,\dots,5$

- 目标函数：最小化总费用

$$\min z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$

- 约束条件：

  (a) 营养成分需求（满足最低摄入量）：

$$\begin{cases} 4.0x_1 + 0.4x_2 + 0.8x_3 + 0.5x_4 + 0.9x_5 \geq 16.0 & (\text{营养成分}B_1) \\ 0.5x_1 + 4.0x_2 + 0.5x_3 + 0.7x_4 + 0.7x_5 \geq 26.0 & (\text{营养成分}B_2) \\ 0.6x_1 + 0.2x_2 + 4.0x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 \geq 18.0 & (\text{营养成分}B_3) \\ 0.7x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 4.0x_4 + 0.3x_5 \geq 12.0 & (\text{营养成分}B_4) \\ 0.8x_1 + 0.9x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 4.0x_5 \geq 14.0 & (\text{营养成分}B_5) \\ 1.2x_1 + 1.3x_2 + 1.4x_3 + 1.4x_4 + 1.3x_5 \geq 20.0 & (\text{营养成分}B_6) \end{cases}$$

  (b) 非负约束：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

2. 扩展配餐问题（增加食品摄入量约束）

- 决策变量：同上，仍为 x_j
- 目标函数：同上，仍为最小化总费用

$$\min z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$

- 约束条件：

  (a) 原营养成分需求：同上

  (b) 食品摄入量下限（表格中“摄入量最值”）：

$$\begin{cases} x_1 \geq 2.0 \\ x_2 \geq 3.0 \\ x_3 \geq 3.0 \\ x_4 \geq 1.0 \\ x_5 \geq 3.0 \end{cases}$$

(c) **非负约束：**同上

Code Snippet 2.7.1 ▶ Matlab 代码

```
配餐优化：求解浮点数和整数解


营养含量矩阵（，行：，列：）








最低营养需求（）


食物单价（）


约束：



第一部分：仅满足营养需求

下界


求解浮点数解


输出浮点数结果
第一部分（浮点数解）
```

摄入量
成本

未找到解

求解整数解

输出整数结果
第一部分（整数解）

摄入量
成本

营养验证

满足不满足

未找到解

第二部分：增加最低摄入量约束

最低摄入量（）

下界

求解浮点数解

输出浮点数结果
第二部分（浮点数解）

摄入量
成本

未找到解

求解整数解

输出整数结果
第二部分（整数解）

摄入量
成本

营养验证

满足不满足

最低摄入量验证

满足不满足

未找到解

实验通过 MATLAB 代码求解配餐优化问题，得到第一部分（仅满足营养需求）和第二部分（满足营养需求及最低摄入量）的浮点数解与整数解。所有解均经过验证，满足营养需求 B_i（16.0, 26.0, 18.0, 12.0, 14.0, 20.0）及第二部分的最低摄入量 d_j（2.0, 3.0, 3.0, 1.0, 3.0）。结果如下：

Table 2.3: 配餐优化结果

部分	解类型	摄入量 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$	成本
第一部分	浮点数解	3.64, 5.06, 3.35, 1.89, 1.32	99.02
	整数解	3, 5, 4, 2, 2	107.00
第二部分	浮点数解	2.00, 4.94, 3.37, 2.05, 3.00	106.67
	整数解	2, 5, 4, 2, 3	111.00

程序采用 MATLAB 实现配餐优化，思路如下：

- **数据定义**：定义营养含量矩阵 A、最低需求 B、单价 c、最低摄入量 d，构建约束 $A \cdot x \geq B$。
- **浮点数解**：使用 求解线性规划问题，最小化成本 $c^T \cdot x$，满足营养需求和非负约束（第一部分）或最低摄入量约束（第二部分）。
- **整数解**：使用 求解整数线性规划，添加整数约束 $x_j \in \mathbb{Z}$，并在第二部分确保 $x_j \geq \lceil d_j \rceil$。额外约束 $x_4 \geq 2$ 保证 B4 满足。
- **验证**：计算 $A \cdot x$ 和 $x_j \geq d_j$，验证所有约束满足情况，确保解的可行性。

2.7.2 战略轰炸问题

Q：某战略轰炸机群奉命摧毁敌人军事目标，已知该目标有四个要害部位，只要摧毁其中之一即可达到目的。为完成此项轰炸任务的汽油消耗量限制为 48000L，重型炸弹 48 枚，轻型炸弹 32 枚。飞机携带重型炸弹时每升汽油可飞行 2km，带轻型炸弹时每升汽油可飞行 3km，空载时每升汽油可飞行 4km。又知每架飞机每次只能装载一枚炸弹，每起飞轰炸一次除来回路途汽油消耗外，起飞和降落每次消耗 100L 汽油，其他相关数据如表所示。为了保证以最大的可能性摧毁敌方军事目标，应该如何确定飞机的轰炸方案。

敌要害部位	距离机场距离（km）	每枚重型炸弹摧毁概率	每枚轻型炸弹摧毁概率
1	450	0.10	0.08
2	480	0.20	0.16
3	540	0.15	0.12
4	600	0.25	0.20

Table 2.4: 轰炸目标数据表

A：分析如下。

问题分析

- **目标：** 最大化摧毁敌方军事目标（四个要害部位中至少一个）的可能性。
- **资源限制：**
  - 总燃油：48000L。
  - 重型炸弹：48 枚。
  - 轻型炸弹：32 枚。
  - 每架飞机每次任务仅携带一枚炸弹（重型或轻型）。
  - 每任务（包括起飞和降落）额外消耗 100L 燃油。
- **燃油效率：**
  - 重型炸弹：2 km/L。
  - 轻型炸弹：3 km/L。
  - 空载：4 km/L（本问题不涉及空载）。
- **数据：**
  - 四个要害部位，距离机场分别为 450km、480km、540km、600km。
  - 每部位被重型或轻型炸弹摧毁的概率如表所示。

数学模型

决策变量：

- $x_{i,h}$：对第 i 个部位使用重型炸弹的任务数（整数，$i = 1, 2, 3, 4$）。
- $x_{i,l}$：对第 i 个部位使用轻型炸弹的任务数（整数，$i = 1, 2, 3, 4$）。

目标函数：

- 最大化总期望成功数：

$$\max z = 0.10x_{1,h} + 0.08x_{1,l} + 0.20x_{2,h} + 0.16x_{2,l} + 0.15x_{3,h} + 0.12x_{3,l} + 0.25x_{4,h} + 0.20x_{4,l}$$

约束条件：

1. 燃油约束：
   - 重型炸弹任务到部位 i 的燃油消耗：来回距离 $2 \cdot d_i$ km，效率 2 km/L，燃油 d_i L，加 100L 起降，总计 $d_i + 100$ L。
   - 轻型炸弹任务：来回距离 $2 \cdot d_i$ km，效率 3 km/L，燃油 $\frac{2 \cdot d_i}{3}$ L，加 100L 起降，总计 $\frac{2 \cdot d_i}{3} + 100$ L。
   - 总燃油：

   $$550x_{1,h} + 400x_{1,l} + 580x_{2,h} + 420x_{2,l} + 640x_{3,h} + 460x_{3,l} + 700x_{4,h} + 500x_{4,l} \leq 48000$$

2. 重型炸弹约束：

$$x_{1,h} + x_{2,h} + x_{3,h} + x_{4,h} \leq 48$$

3. 轻型炸弹约束：

$$x_{1,l} + x_{2,l} + x_{3,l} + x_{4,l} \leq 32$$

4. 非负性和整数约束：

$$x_{i,h}, x_{i,l} \geq 0, \quad x_{i,h}, x_{i,l} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

矩阵形式：

- 定义变量向量：

$$\mathbf{x} = [x_{1,h}, x_{1,l}, x_{2,h}, x_{2,l}, x_{3,h}, x_{3,l}, x_{4,h}, x_{4,l}]^T$$

- 目标函数：

$$\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{c} = [0.10, 0.08, 0.20, 0.16, 0.15, 0.12, 0.25, 0.20]^T$$

- 燃油约束：

$$\mathbf{a}_{\text{fuel}}^T\mathbf{x} \leq 48000, \quad \mathbf{a}_{\text{fuel}} = [550, 400, 580, 420, 640, 460, 700, 500]^T$$

- 炸弹约束：

$$\mathbf{A}_{\text{bomb}}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{\text{bomb}}, \quad \mathbf{A}_{\text{bomb}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\text{bomb}} = [48, 32]^T$$

- 非负性和整数约束：

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^8$$

3

运输规划

如果有若干个产地，同时又有若干个销售地。那么，根据已有的交通网，应如何制定“将产品从产地运到销售地”的调运方案，使总的运输费用最少，或运输路线最短？运筹问题的数学模型就是运输规划模型。事实上，运输规划是一类特殊的线性规划。

3.1 运输问题

3.1.1 产销平衡

Example 3.1.1 ▶ 产销平衡的运输问题

例: 已知有 m 个工厂 $A_i\,(i=1,2,\ldots,m)$，其供应量（产量）分别为 $a_i\,(i=1,2,\ldots,m)$，有 n 个销售地 $B_j\,(j=1,2,\ldots,n)$，其需要量分别为 $b_j\,(j=1,2,\ldots,n)$。从 A_i 到 B_j 运输单位物资的运价（单价）为 $c_{ij}\,(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n)$。假设总产量等于总销量，且**产销是平衡的**，其数据如表 3.1 所示。

产品	销量				产量
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Table 3.1: 相关数据表

解: 如采用 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 的运量，则么在产销平衡的情况下，要求供给总量等于最小的调运方式。

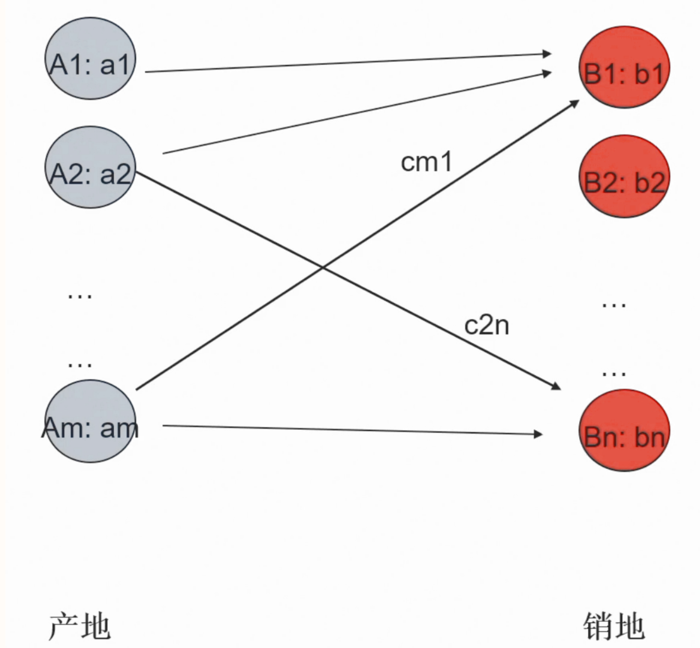


Figure 3.1: 例 1.1.3 图解

优化目标为最小化总运费，数学模型如下：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3.1}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{(m 个约束方程)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(n 个约束方程)}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(m × n 个变量)}$$

约束条件的系数矩阵共 $m+n$ 行，$m \times n$ 列的矩阵，即 x_{ij} 的系数向量。

$$\mathbf{p_{ij}} = (0, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}, \quad i \text{ 行}，\ m+j \text{ 行} \tag{3.2}$$

分量中除第 i 个和第 $m+j$ 个元素为 1，其余均为 0。

关于产销平衡的运输问题，还有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j\,, \tag{3.3}$$

所以模型中最多有 $m+n-1$ 个独立约束方程，即系数矩阵的秩不超过 $m+n-1$[a]。

[a]原本有 $m+n$ 个方程，但是根据题目中提到的“产销平衡”，可以列出方程 3.3，即自由度减 1，消去了一个约束，可行域增大

3.1.2 产销不平衡

事实上，我们知道，市场上几乎不可能出现“产销平衡”的情况，供大于求（产大于销）、供不应求（销大于产）的情况更为常见。产销不平衡问题一般都是转化为产销平衡问题解决的。

Example 3.1.2 ▸ 产销不平衡的运输问题

(1) **产大于销时：**

由于

$$\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i\,, \tag{3.4}$$

则问题的模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\,, \tag{3.5}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad i = 1, 2, \dots, m\,, \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n\,, \tag{3.7}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n\,. \tag{3.8}$$

其中，$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$ 表示 i 产品的总产量小于或等于其产量。

(2) **销大于产时：**

由于

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i \,, \tag{3.9}$$

则问题的数学模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \,, \tag{3.10}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \,, \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad j = 1, 2, \dots, n \,, \tag{3.12}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n \,. \tag{3.13}$$

其中，$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j$ 表示 i 产品的总产量小于或等于其销量。此时，要将各约束资源

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1} \,, \tag{3.14}$$

在生产地或销地储存起来，即使没有一个虚拟的销售地，其运费为零，即设 $x_{i,n+1}$ 表示产地 A_i 多年产（需要储存）的物资数量，运费为 $c_{i,n+1} = 0 \, (i = 1, 2, \dots, m)$，其目标函数不变。于是问题的模型变为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \,, \tag{3.15}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \,, \tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \,, \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1} \,, \tag{3.18}$$

$$x_{ij}, x_{i,n+1} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n) \,. \tag{3.19}$$

公式 (??) 表示转化为产销平衡问题。

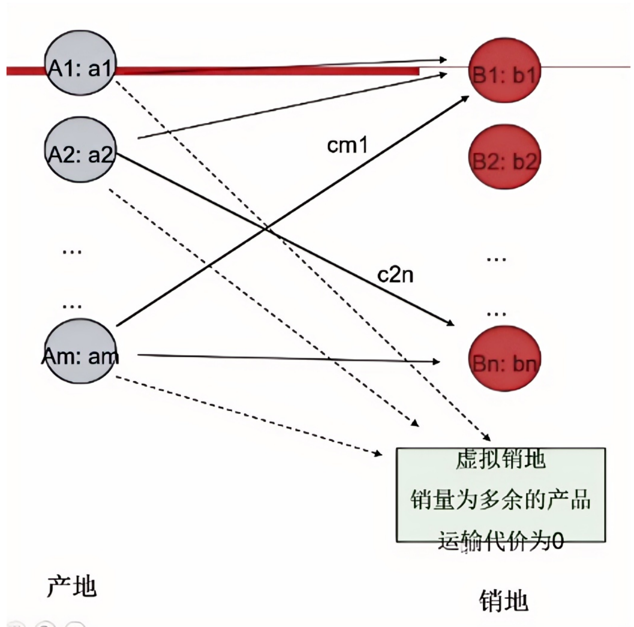


Figure 3.2: 产大于销的情况

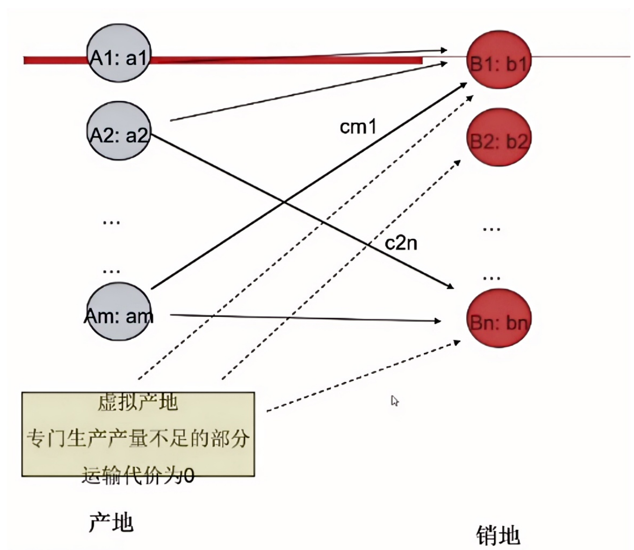


Figure 3.3: 销大于产的情况

4 整数规划

4.1 整数规划问题与数学模型

4.1.1 整数规划问题的定义

在前面的线性规划和运输规划问题中，最优解一般都是实数。但对于实际中的具体问题的解常常要求必须取整数，即称为整数解，例如，问题答案是几个人、几台设备、几辆车等，无法用实数表达。因此，对于要求最优整数解的问题，就涉及到整数规划。

Definition 4.1.1 ▸ 整数规划

如果一个数学规划的某些决策变量或全部决策变量要求必须取整数，则这样的问题称为**整数规划问题**; 相应的模型称为**整数规划模型**、

- **纯整数规划问题**：所有的决策变量都为非负整数的整数规划;
- **混合整数规划问题**：存在决策变量为负整数的整数规划;
- **0-1 规划**：所有的决策变量只能取0 或 1的整数规划;

4.1.2 整数规划问题的数学模型

Theorem 4.1.2 ▸ 一般形式的整数线性规划问题

$$\max(\min)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) b_i\,, & (i = 1, 2, \dots, m)\,, \\ x_j \ge 0\,, \quad x_j \text{ 为整数} & (j = 1, 2, \dots, n)\,. \end{cases}$$

Example 4.1.3 ▶ 产品生产（纯整数规划问题）

例：某厂生产 A_1 和 A_2 两种产品，需要经过 B_1、B_2、B_3 三道工序加工。单件工时和利润值以及各工序每月工时定额表 2-1。问工厂应如何安排生产才能使总利润最大？

	B_1	B_2	B_3	利润（元/件）
A_1	0.3	0.2	0.3	25
A_2	0.7	0.1	0.5	40
工时定额（小时/月）	250	100	150	

Table 4.1: 工厂加工条件与利润

解: 根据表 4-1 的最后一栏的利润数据，生产 A_1 件、A_2 件能获取的总利润为 $25x_1+40x_2$，因此，该问题的数学模型为：

$$\max \quad 25x_1 + 40x_2 \tag{4.1}$$

约束条件：

$$0.3x_1 + 0.7x_2 \le 250\,, \tag{4.2}$$
$$0.2x_1 + 0.1x_2 \le 100\,, \tag{4.3}$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 \le 150\,, \tag{4.4}$$
$$x_1 \ge 0\,, \quad x_2 \ge 0\,. \tag{4.5}$$

这是一个纯整数规划问题。

解：设工厂每月生产 A_1 产品 x_1 件，A_2 产品 x_2 件。则按表 2-1 提供的条件数据，A_1 产品 x_1 件、A_2 产品 x_2 件加工需要的总利润为 $25x_1 + 40x_2$，因此，该问题的数学模型为：

$$\max \quad 25x_1 + 40x_2 \tag{4.6}$$

约束条件：

$$0.3x_1 + 0.7x_2 \le 250\,, \qquad (B_1 \text{ 工序，工时限制})$$
$$0.2x_1 + 0.1x_2 \le 100\,, \qquad (B_2 \text{ 工序，工时限制})$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 \le 150\,, \qquad (B_3 \text{ 工序，工时限制})$$
$$x_1 \ge 0\,, \quad x_2 \ge 0\,. \qquad (\text{且只能整数})$$

另外，由于 x_1 为 A_1 的件数，因此 $x_1 \geq 0$ 且只能取整数；同理，$x_2 \geq 0$ 且只能取整数。

Example 4.1.4 ▶ 背包问题（0-1 规划）

例：一个背包的总容积为 V，现要在 n 种物品中选择。设物品 j 的重量为 w_j，体积为 v_j，$j=1,2,\ldots,n$。问如何选择，使得到的总价值最大，且总重量不超过 V，又使装的总重量最大。这一个题目有 n 个约束情况，如装某类装箱，装箱，装车等。
解: 设对于物品 j，变量

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{物品 } j \text{ 被装入背包} \\ 0 & \text{物品 } j \text{ 不被装入背包} \end{cases} \qquad j=1,2,\ldots,n$$

则所有被选择装物品的总体积为 $\sum_{j=1}^{n} v_j x_j$，总重量为 $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j$，该问题的数学模型为：

$$\max \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \tag{4.7}$$

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V\,, \tag{4.8}$$

$$x_j = 0, 1\,, \quad j=1,2,\ldots,n\,. \tag{4.9}$$

这是一个 0-1 规划问题。

4.2 一般整数规划的求解方法—分支定界法

为了解决整数规划问题，我们自然想到两种办法：

- 想到第二章提到的下料问题, 可以用线性规划求解，结果四舍五入；
- 反正是整数，不妨穷举求解；

显然第一个方法不够靠谱，第二个方法效率太低。

Example 4.2.1 ▶ 第一个方法不靠谱的原因

例如, 考虑如下整数规划问题:

$$\max\ 3x_1 + 13x_2 \tag{4.10}$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + 9x_2 \le 40 \tag{4.11}$$
$$11x_1 - 8x_2 \le 82 \tag{4.12}$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \quad \text{且取整数} \tag{4.13}$$

画出可行域如下所示[a]:

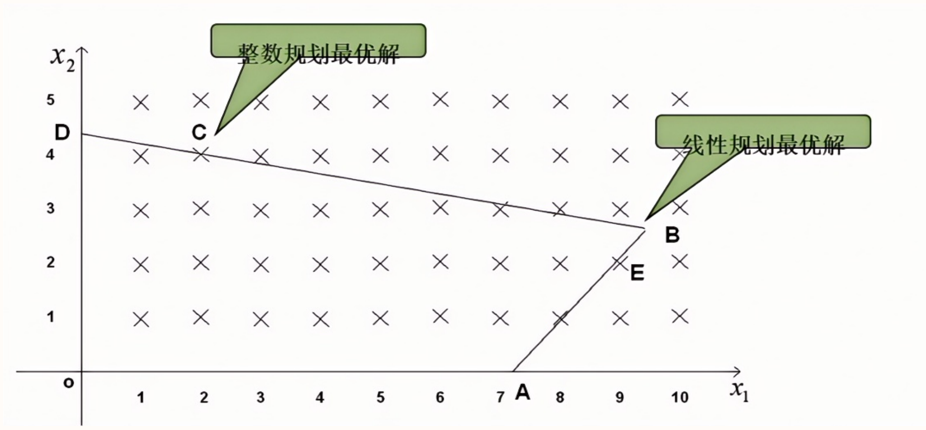


Figure 4.1: 整数规划的四舍五入求解

[a]图中可以看到，浮点数最优解 B 四周的四个整数点都不在可行域内，四舍五入的结果是错误的。反而整数最优解在 C 点。

目前，常用的求解整数规划的方法是分枝定界法和割平面法。作为一种最基本的方法，下面介绍分枝定界法。

分枝定界法

1. 设有最大化的整数规划问题 A，与它相应的线性规划问题 (即在整数规划中去掉了决策变量的整数取值要求) 为 B，设二者的最优值分别为 z_A^* 和 z_B^*；
2. 从解问题 B 开始，若 B 的最优解符合 A 中的整数条件，则 A 的最优解即为 B 的最优解，结束；
3. 若 B 的最优解不符合 A 的整数条件，则 B 的最优解对应的最优值 z_B^* 一定是A 的最优值 z_A^* 的上界，记为 $\overline{z}$，而 A 的某一任一可行解（即任意一个整数解）的目标函数值将是一个下界 $\underline{z}$。此时 $\underline{z} \leq z_A^* \leq \overline{z}$，称为**定界**；
4. 分枝定界法即不断将 B 的可行域分成子区域（称为**分枝**），并在每个子区域中确定 A 的上界 $\overline{z}$ 和下界 $\underline{z}$的方法，逐步夹逼，直到找到 A 的最优解为止；

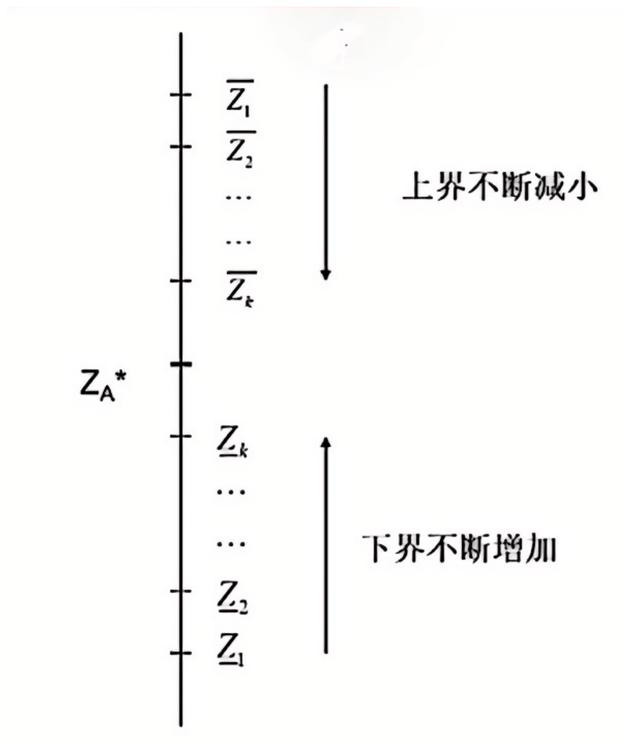


Figure 4.2: 分枝定界法过程

Example 4.2.2 ▸ 分枝定界法

例：考虑如下整数规划问题:

$$\max\ 40x_1 + 90x_2 \tag{4.14}$$

$$\text{s.t.}\quad 9x_1 + 7x_2 \le 56 \tag{4.15}$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70 \tag{4.16}$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \quad \text{且取整数} \tag{4.17}$$

解：记上述原问题为 A。先考虑 A 中去掉整数约束条件后的线性规划问题 B.

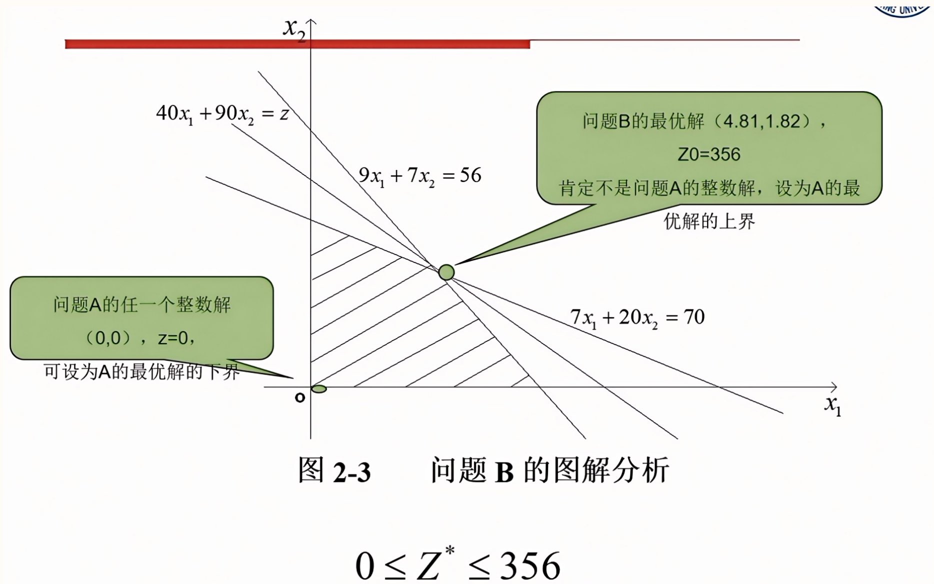


Figure 4.3: 问题 B 的图解分析

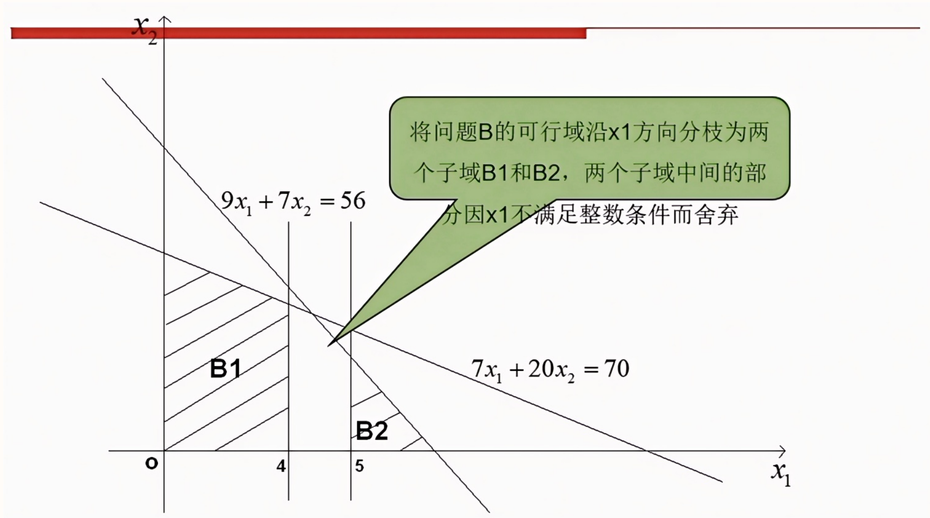


Figure 4.4: 问题 B 的分枝

4.3 0-1 规划及其求解方法

4.4 案例分析