标准Gumbel分布： pdf为 $f(x)=e^{-x-e^{-x}}$， cdf为 $F(x)=e^{-e^{-x}}$

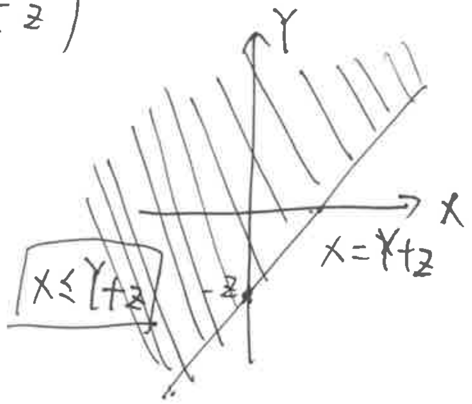
标准Logistic分布： pdf为 $f(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$， 即 $\sigma(x)(1-\sigma(x))$ cdf为 $F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ 即 $\sigma(x)$

假设，$X\sim$ Gumbel，$Y\sim$ Gumbel，两者独立，那么 $Z=X-Y$，有 $Z\sim$ Logistic

证： $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=P(X\le Y+z)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\int_{-\infty}^{y+z}f_X(x)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\,F_X(y+z)\,dy$$



代入Gumbel分布的pdf和cdf，则

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y-e^{-y}}\cdot e^{-e^{-(y+z)}}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-e^{-y}-e^{-(y+z)}}\cdot e^{-y}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-e^{-y}(1+e^{-z})}\cdot e^{-y}\,dy$$

令 $t=e^{-y}$， $y\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$， $y\to+\infty$ 时，$t\to 0$

同时，$y=-\log t$， $dy=-\frac{1}{t}dt$.

代入 $F_Z(z)$ 有：

$$F_Z(z)=\int_{+\infty}^{0}e^{-t(1+e^{-z})}\cdot t\cdot\left(-\frac{1}{t}dt\right)$$

$$=\int_{+\infty}^{0}-e^{-t(1+e^{-z})}\,dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-t(1+e^{-z})}\,dt$$

$$=-\frac{1}{1+e^{-z}}\int_{0}^{+\infty}d\,e^{-t(1+e^{-z})}$$

$$=\frac{-1}{1+e^{-z}}\cdot e^{-t(1+e^{-z})}\Big|_0^{+\infty}$$

$$F_Z(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$$

即，$Z\sim$ logistic.

根据逆变换定理，Logistic的样本可由如下方式得到。

$F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$， $F^{-1}(x)=\log\frac{x}{1-x}$

令 $U\sim$ Uniform$(0,1)$，

$Z=\log U-\log(1-U)\sim$ Logistic