Relational Semantics

for

Quantum Protocols

Cole Comfort

New College

University of Oxford

A thesis submitted for the degree of

Doctor of Philosophy in Computer Science

October 6$^{\text{th}}$, 2023

	Syntax	Semantics	Syntax	Semantics	Syntax
Cartesian category	$\mathsf{cb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}, \oplus)$	$\mathsf{acb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2}, \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1, \oplus)$	oracles in f_2
isomorphisms	$\mathsf{iscb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$\mathsf{isacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{Iso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$	oracles in f_2
injections	$\mathsf{incb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$\mathsf{inacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{Mono}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$	inf_2
partial injections	$\mathsf{piscb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{ParIso}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$\mathsf{pisacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{ParIso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{ParIso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$	pis
partial maps	$\mathsf{prcb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Par}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$\mathsf{pracb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Par}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{Par}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$	pisf_2
spans	$\mathsf{spcb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$\mathsf{spacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$	$\mathsf{ZX}\mathscr{C} \cong \mathsf{spf}_2$
relations	$\mathsf{ih}_{\mathbb{F}_2}$	$\mathsf{LinRel}_{\mathbb{F}_2} \cong (\mathsf{Rel}(\mathsf{Mat}(\mathbb{F}_2)), \oplus)$	$\mathsf{aih}_{\mathbb{F}_2}$	$\mathsf{AffRel}_k \cong (\mathsf{Rel}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus) \hookrightarrow (\mathsf{Rel}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$	$\mathsf{ZX}\mathscr{C}/\sim$

Figure 1: Periodic table of Boolean circuits

	Syntax	Semantics
Cartesian category	$\mathsf{cb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}, \oplus)$
isomorphisms	$\mathsf{iscb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$
injections	$\mathsf{incb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$
partial injections	$\mathsf{piscb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{ParIso}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$
partial maps	$\mathsf{prcb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Par}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$
spans	$\mathsf{spcb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{Mat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$
relations	$\mathsf{ih}_{\mathbb{F}_2}$	$\mathsf{LinRel}_{\mathbb{F}_2} \cong (\mathsf{Rel}(\mathsf{Mat}(\mathbb{F}_2)), \oplus)$

$\downarrow$

	Syntax	Semantics	Full subcategory of
Cartesian category	$\mathsf{acb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2}, \oplus)$	$(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1, \oplus)$
Isomorphisms	$\mathsf{isacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$
Injections	$\mathsf{inacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2}), \oplus)$	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$
Partial injections	$\mathsf{pisacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{ParIso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus)$	$(\mathsf{ParIso}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$
Partial maps	$\mathsf{pracb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Par}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus)$	$(\mathsf{Par}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$
Spans	$\mathsf{spacb}_{\mathbb{F}_2}$	$(\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus)$	$(\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$
Relations	$\mathsf{aih}_{\mathbb{F}_2}$	$\mathsf{AffRel}_k \cong (\mathsf{Rel}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1)^*, \oplus)$	$(\mathsf{Rel}(\mathsf{AffMat}_{\mathbb{F}_2} + 1), \oplus)$

$\downarrow$

	Syntax	Semantics	Full subcategory of
Cartesian category	f_2	$(\mathsf{FinOrd}_2), \times)$	$(\mathsf{FinOrd}, \times) \cong (\mathsf{FSet}, \times)$
Isomorphisms	oracles in f_2	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{FinOrd}_2), \times)$	$(\mathsf{Iso}(\mathsf{FinOrd}), \times) \cong (\mathsf{Iso}(\mathsf{FSet}), \times)$
Injections	inf_2	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{FinOrd}_2), \times)$	$(\mathsf{Mono}(\mathsf{FinOrd}), \times) \cong (\mathsf{Mono}(\mathsf{FSet}), \times)$
Partial injections	pis	$(\mathsf{FPinj}_2, \times)$	$(\mathsf{ParIso}(\mathsf{FinOrd}), \times) \cong (\mathsf{FSet}, \times)$
Partial maps	pisf_2	$(\mathsf{FPar}_2, \times)$	$(\mathsf{Par}(\mathsf{FinOrd}), \times) \cong (\mathsf{Par}(\mathsf{FSet}, \times)$
Spans	$\mathsf{ZX}\mathscr{E} \cong \mathsf{spf}_2$	$(\mathsf{FSpan}_2, \times)$	$(\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{FinOrd}), \times) \cong (\mathsf{Span}^{\sim}(\mathsf{FSet}), \times)$
Relations	$\mathsf{ZX}\mathscr{E}/\sim$	$(\mathsf{FRel}_2, \times)$	$(\mathsf{RelFinOrd}), \times) \cong (\mathsf{RelFSet}), \times)$

Figure 2: Periodic table of Boolean circuits. Within each subtable, every row after "Cartesian category" embeds into the one beneath it. Each subtable embeds into the one beneath it.

Bibliography

I have included urls to publicly accessible versions of all cited works wherever possible. Therefore these linked urls may not the exact versions cited.